

# 超軟弱粘土のレオロジー特性

村山 朔郎・関口 秀雄・吉田 映

## THE VISCOMETRY OF A CLAY-WATER SYSTEM USING A CONE-PLATE RHEOMETER

By *Sakuro MURAYAMA, Hideo SEKIGUCHI and Ei YOSHIDA*

### Synopsis

The rheological properties of a clay-water system have been studied experimentally and theoretically. The obtained principal results are as follows: The phenomenon of shear stress overshoot was observed at the initiation of a steady flow in a cone-plate rheometer. The intensity of the shear stress overshoot has a maximum at a certain water content between the liquidity limit and the limit of a Newtonian flow.

Moreover, based upon the rate-dependent relaxation spectra determined from the stress relaxation tests after the stoppage of a steady flow, the validity of a theory of the nonlinear viscoelasticity is examined.

### 1. 序

混合体のレオロジーは、最近、数理力学 (rational mechanics) の分野においても関心がよせられている<sup>1), 2)</sup>が、土質力学の分野においては、土の構成式を時間依存性をも包括したかたちで組立てようとする際に重要となろう。

著者らは、多相混合体としての土のレオロジーを、地盤構成物質である土の特殊性を考慮して、斜面崩壊や土石流などの自然災害との関連において組立てることを目標としているが、それには、まず混合体としての土のレオロジー測定法を確立すること、および先述の崩壊現象を支配するメカニズムをレオロジーの立場から分析することが必要であると考えに至った。

そこで、その第一段階として二相系である飽和した超軟弱粘土を対象とし、最も有望なレオロジー測定用試験機の1つである円錐円板レオメーター<sup>3)</sup>を用い、非線型粘弾性論の分野で注目されているストレス・オーバーシュート現象<sup>4)</sup>に着目して研究を行ない、いくつかの興味ある結果を得たので以下に報告する。

### 2. 円錐円板レオメーター

粘土-水系では、そのコンシステンシー状態に応じて力学性が変化するので、その状態に適合するような力学的試験法を考えることが必要とされる。

たとえば、塑性限界 ( $PL$ ) より高く、液性限界 ( $LL$ ) より低い含水状態の自立しうる粘土に対しては、いわゆる三軸試験機によって、有効摩擦角などの強度定数だけでなくクリープや応力緩和などのレオロジー特性に関して、これまで多くの情報が集積されている。

しかし、含水比が  $LL$  をこえるような粘土-水系、すなわち超軟弱粘土に対してはまだ情報は少ない。超軟弱粘土の現位置強度の測定にはペーン試験機がしばしば使用されるが、この試験機では試料内部の速度場が不明であり、泥流の運動機構の解明などに必要な応力-変形-時間関係は議論できない。

この欠点を補なうものとして速度場の明確なレオメーターを用いれば、広範な含水比状態にわたる粘土-

水系の力学性を明らかにすることができよう。

Krizek et al.<sup>5)</sup> は円錐円板レオメーターによって粘土の振動特性を研究しているが、本研究では定常ずり流動を中心に考察を加える予定である。

著者らが採用した試験機は、岩本製作所製レオメーター C-1 型に、垂直合力および間げき水圧測定装置をとりつけたものである。レオメーター本体は、(1)駆動部および変形機構部、(2)測定試料部、(3)検出部より成立っている。Fig. 1 にその機構図を示す。

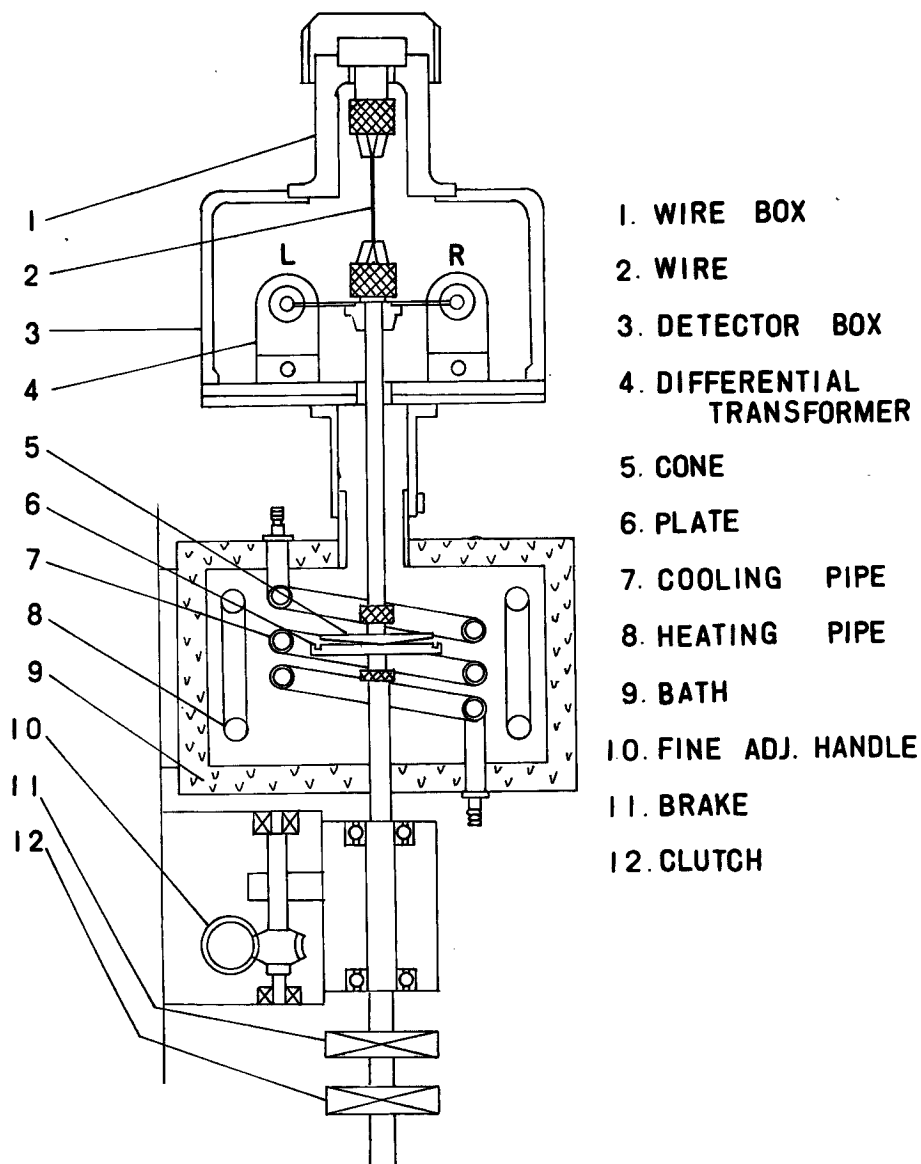


Fig. 1 Diagrammatic representation of the main parts of a cone-plate rheometer.

＜せん断応力の測定＞

円錐円板レオメーターの測定試料部は、Fig. 1 に示すように、駆動軸に直結した円板およびトーシヨンワイヤーによって吊り下げられている円錐から成り立っている。

測定にあたっては、この同心円錐円板間に試料を充填し、円板に一定方向の回転を与える。このとき、円錐は試料を介してトルクの作用を受け、円錐を吊り下げているトーシヨンワイヤーをねじる。すると、トーシヨンワイヤーと円錐間を接続しているストレートロッドに装着されたムーバー鉄心は、円錐が受けるトルクとトーシヨンワイヤーの抵抗トルクとの平衡点まで角変位する。この鉄心変位量を差動トランスによって電気信号に変換検出し、自動記録できるように設計されている。

さて、トーシヨンワイヤーのねじれ剛性率を  $K$ 、そのねじれ角を  $\theta'$  とするとトーシヨンワイヤーの抵抗トルク  $T$  は次式で与えられる。

$$T = K\theta' \quad \dots\dots\dots (1)$$

一方、試料を介してトーシヨンワイヤーに作用するトルク  $T'$  は次式で与えられる。

$$T' = \int_0^{2\pi} \int_0^R \tau r^2 dr d\varphi \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$= (2\pi/3)\tau R^3, \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\tau$  はせん断応力、 $r$  は動径、 $\varphi$  は円板中心軸まわりの回転角、 $R$  は円板の半径である。

(1)式と(3)式を等置すれば、次式が得られ、これよりせん断応力を求めることができる。

$$\tau = 3K\theta' / (2\pi R^3) \quad \dots\dots\dots (4)$$

＜垂直合力と間げき水圧の測定＞

トーシヨンワイヤーの上端には平板が取り付けられており、ピンによってこの平板の回転が抑えられている。また、トーシヨンワイヤーの持ち上がりを防ぐために、ねじが切られたふたによって上から押えられている。そこで、平板の上昇を押えていたふたのかわりにロードセルを内蔵するねじを切った容器を取り付け、試料を介して円錐に作用する垂直合力の測定を試みた。Fig. 2 を参照。

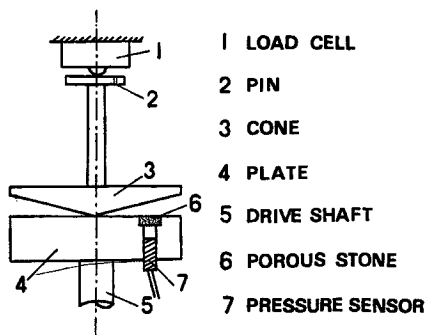


Fig. 2 Schematic illustration of the devices for measuring pore-water pressure and normal thrust.

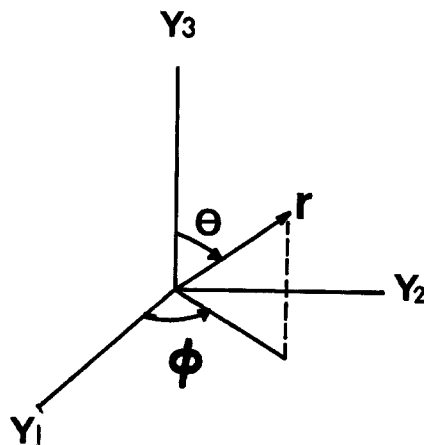


Fig. 3 Spherical co-ordinate systems.

また、間げき水圧を測定するために、円板の中心軸から 20 mm の点に直径 6 mm の穴をあけ、共和電業製の直径 2.8 mm、長さ 8 mm の超小型圧力センサ（4 個の薄膜半導体ひずみゲージをダイヤフラム内面に蒸着しブリッジを構成したもの）を装着した。

なお、穴の上部には上面が円板面と一致するようにポーラスストーンを置き、超小型圧力センサとポーラスストーンとの空隙はあらかじめ蒸留水で飽和させておいた。垂直合力および間げき水圧の指示計器としては共和電業製ストレインメーターを使用した。

#### <変形解析>

著者らが実験において採用した変形形式は定常単純ずり流動である。

解析の便利のために球座標系を採用し、中立方向を  $x^1(r)$  軸、せん断面に垂直な方向を  $x^2(\theta)$  軸、粒子の運動方向を表現する座標軸を  $x^3(\varphi)$  軸と名付けることにする。Fig. 3 を参照。

このとき、単純ずり流動を表現する速度場は、反変成分表示によって、次式のように与えられる<sup>6)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} v^1 = \dot{x}^1 = 0, \\ v^2 = \dot{x}^2 = 0, \\ v^3 = \dot{x}^3 = w(\theta), \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $(\dot{\phantom{x}})$  は物質時間微分、 $w(\theta)$  は  $\theta = \theta$  における角速度である。

ここで添字のつけ方を約束しておこう。

テンソルの共変成分を表示するには、 $d_{ij}$  と書き、その物理成分を表示するには、 $d_{\langle ij \rangle}$  と書くことにする。

また、ベクトルとテンソル自体を表現するときには、たとえば  $\underline{d}$  というように  $(\sim)$  印を下につけることにする。また、総和規約を採用することにする。

変形速度テンソル  $\underline{d}$  の共変成分は次式のように速度勾配と関係づけられる。

$$d_{ij} = -\frac{1}{2}(v_i|_j + v_j|i), \dots\dots\dots (6)$$

$$v_i|_j = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \Gamma_{ij}^\alpha v_\alpha, \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $v_i|_j$  は速度ベクトルの共変成分の共変微分であり、 $\Gamma_{ij}^\alpha$  は Euclid 空間の Christoffel 記号である<sup>7)</sup>。

(5)、(6)、(7)式から変形速度テンソルの物理成分はつぎのように求められる。

$$[d_{\langle ij \rangle}] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{r}/2 \\ 0 & \dot{r}/2 & 0 \end{vmatrix}, \dots\dots\dots (8)$$

$$\dot{r} = \sin \theta \frac{dw(\theta)}{d\theta}, \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\dot{r}$  はひずみ速度である。

さて、角速度  $\Omega$  で回転している円板と静止している剛な円錐のあいだに充填された試料中に生ずる流動を考えよう。円錐の軸を球座標系の極軸とみなすことにする。

円錐表面は、 $\theta = (\pi/2) - \alpha$  の円錐面に一致し、円板表面は  $\theta = \pi/2$  の面に一致すると考えられる。ここに、 $\alpha$  は円錐円板の対面角である。

試料が円錐と円板に付着していることを表現する境界条件はつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} w(\pi/2 - \alpha) = 0, \\ w(\pi/2) = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

また、 $\alpha$  が十分に小さくとられているので、 $\sin \theta \approx 1$  とおくことができる。

したがって、(9)、(10)式から次式が得られる。

$$\dot{r} = \Omega/\alpha. \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 $\dot{r}$  が動径  $r$  に依存せず、試料中で一定であることを注意しておこう。

また、定常ずり流動におけるひずみの測定として、次式で定義されるせん断ひずみ (amount of shear) を以下では使用するであろう。

$$\gamma = \dot{\gamma}t, \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $t$  は定常ずり流動開始後からの時間である。

<速度場のチェック>

定常単純ずり流動が実際に本試験機において実現されているかどうかをチェックしておくことは、得られた結果を正しく評価するうえに不可欠である。

著者らは試料内にピンを挿入し、円板の変位に起因するピンの動きを観測することによって変形の一様性を確かめてみた。

**Photo. 1** に (a)  $\gamma=0$ , (b)  $\gamma=1$ , (c)  $\gamma=3$  の状態におけるピンの位置を示す。写真より明らかなように試料内部の変形はほぼ均一である。

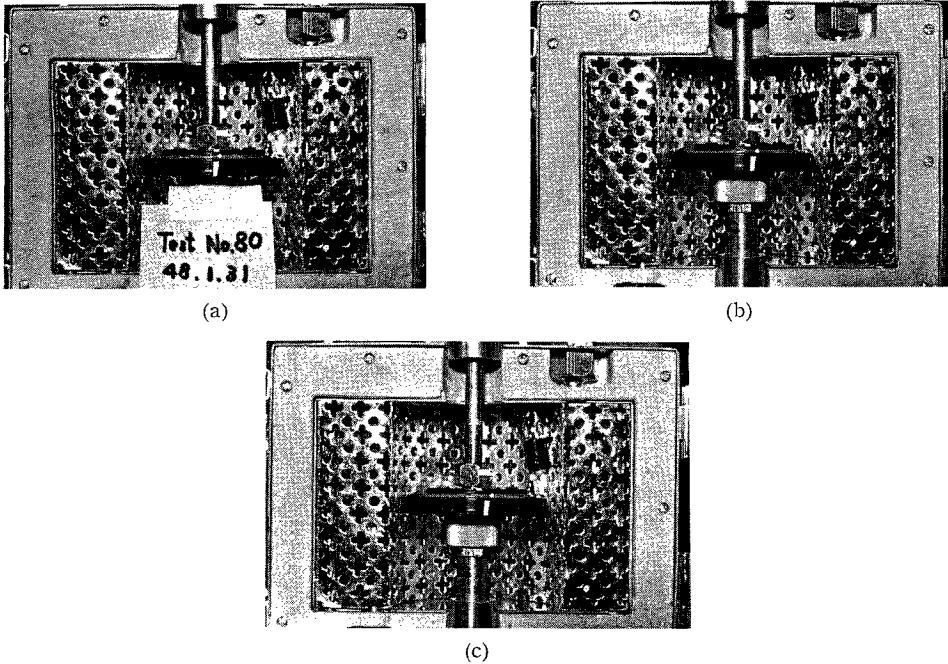


Photo 1 Strain fields in a cone-plate rheometer.  
(a)  $\gamma=0$ , (b)  $\gamma=1$ , (c)  $\gamma=3$

この試験において、用いた試料の含水比は108%であるが、含水比91%の試料についても同様の方法で変形の一様性を確かめることができた。

しかし、高含水比領域の試料はきわめて支持力が小さいために、ここに述べた方法では速度場のチェックは行なえなかったことを付記する。

<ひずみ速度の測定>

円板の回転速度は、本装置では検出部の表示計に表示されるが、ひずみ速度あるいはひずみの値を精度高く求めるには直接的手段によって、せん断過程における円板角変位の時間的変化を測定する必要がある。

著者らは、西独ツインマー社製の電子光学隔測振動測定器100型、以下ではコンタクトレス変位計と略称、を使用して、円板角変位  $\phi$  を測定した。

また、微小ではあるが、円錐もトーションワイヤーのねじれにともない角変位する。この円錐回転角  $\theta'$  は、先述したようにムーバー鉄心角変位として検出部に指示されるので読み取ることができる。

Fig. 4 に、定常ずり流動過程における  $\phi \sim t$ , および  $(\phi - \theta') \sim t$  関係を示す。

図において、角変位に時間的遅れがあるが、これは駆動軸の回転初期にあそびがあるためと思われる。

$(\phi - \theta') \sim t$  関係の直線性から求めたひずみ速度の値は  $0.091 \text{ sec}^{-1}$  であった。(対面角  $\alpha$  は  $3^\circ$  である。)

一方、このときの回転速度指示計の表示値は  $3.5/80 \sim 4/80 \text{ rpm}$  であり、対応するひずみ速度は  $0.088 \sim 0.1 \text{ sec}^{-1}$  であった。

以上、コンタクトレス変位計によって、本装置の定速変形機構が信頼できるものであること、および回転速度読み取りの精度も良好であることを示した。

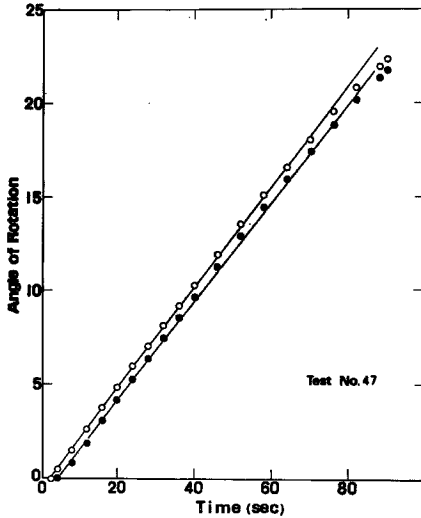


Fig. 4 Plots of the angles of rotation against time,  $\circ$ :  $\phi(t)$ ,  $\bullet$ :  $(\phi - \theta')(t)$ .

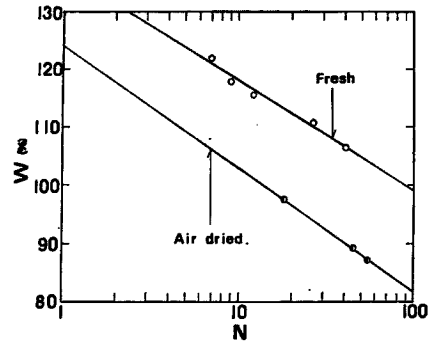


Fig. 5 Flow curves of Osaka-Nanko alluvial clay.

### 3. 超軟弱粘土のレオロジー特性

#### 3.1 試料および試験方法

使用した試料は大阪南港理立て地付近の沖積粘土で、含水比1000%ほどのきわめて湿潤な状態で採取したものである。混入している貝殻や粒径の大きな土粒子を除くために  $74 \mu$  フルイを通してものを所定の含水比に調整して試料とした。

この  $74 \mu$  フルイ通過試料の物理特性を Table 1 に示す。

なお、表に示す  $LL$  の値は、気乾させることなく湿潤状態から含水比を調整した試料についてのものである。

Table 1 Physical properties of Osaka-Nanko alluvial clay

LL (%)	PL (%)	Clay Content (%)	Specific Gravity
110.5	41.0	16.0	2.69

Fig. 5 に気乾処理試料と湿潤試料の流動曲線を示す。湿潤試料の  $LL$  の方が、気乾処理試料のそれよりもかなり大きいことがわかる。

湿潤試料の  $LL$  の値を採用した理由は、以下に述べる全ての試験において試料には気乾処理をほどこしていないためである。

試料の濃縮には自重圧密および真空圧密を採用した。

また、稀釈には蒸留水を用い、ガラス棒でよくかくはんして均一になるようにした。

試験は室温  $19\sim 22^\circ\text{C}$ 、相対湿度  $55\sim 65\%$  の恒温室内で行なった。

行なった試験はつぎの3種である。

(1) 定常ずり流動：試料を円板と円錐のすきまに充填してから15分後に所定のひずみ速度で単純ずり流動を行なう。せん断時間は90秒である。

(2) 定常ずり流動停止後の応力緩和：ずり流動を瞬間的に停止してからの応力の緩和状態を測定する。このとき、応力緩和時間（静止時間  $t_R$ ）がパラメーターとなる。

(3) 応力緩和後の再ずり流動：静置時間効果を調べるために、(1)、(2)のプロセスに引続いて、(1)と同じひずみ速度で単純ずり流動を行なうものである。

### 3.2 定常ずり流動特性

定常ずり流動における応力-ひずみ-時間挙動の含水比依存性を明らかにするために、Fig. 6, 7, 8, 9 に得られた結果を示す。

ここに興味があるのは、含水比の増加とともに応力-ひずみ曲線のパターンが明瞭に変化することである。

すなわち、ある含水比までは含水比の増加とともに定常ずり流動開始直後に応力が急激に発達し、ピーク値をこえてから定常値まで減衰する傾向がみられる。ところが、含水比がさらに高くなると応力-ひずみ曲線はなだらかになり、応力は定常ずり流動過程中に一定となる。このことより、 $w=377\%$  というような高含水比状態では粘土-水系が粘性流体として挙動するとの示唆が得られる。これに関しては3-4で再び議論するであろう。

なお、Test No. 78 (Fig. 9 参照) では  $\dot{\gamma}=0.3 \text{ sec}^{-1}$  を採用しているが、これは  $\dot{\gamma}=0.1 \text{ sec}^{-1}$  では発生する応力の値が小さく検出に困難を覚えたからである。また、この試験では、応力検出部の紙送り機構が故障していたため、Fig. 9 の横軸の値は任意的である。しかし、ピーク値と定常値の差がきわめて小さいことは明らかである。つぎに、定常せん断応力  $\tau_s$  のひずみ速度依存性を検討する。

試料を設置してから15分後に、 $\dot{\gamma}=0.1 \text{ sec}^{-1}$  の定常ずり流動を行ない、せん断応力が定常値に達すればひずみ速度を  $0.2 \text{ sec}^{-1}$  にあげるといように、段階的にひずみ速度を増加させた場合の結果を Fig. 10 に示す。

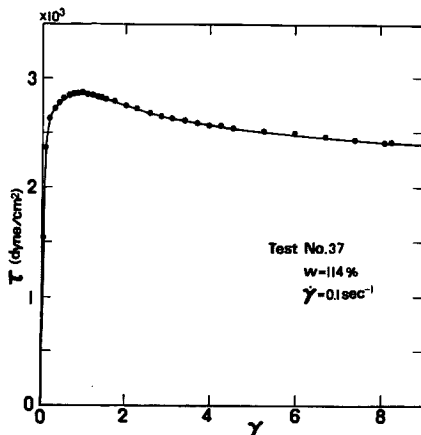


Fig. 6 Results of a steady flow test.

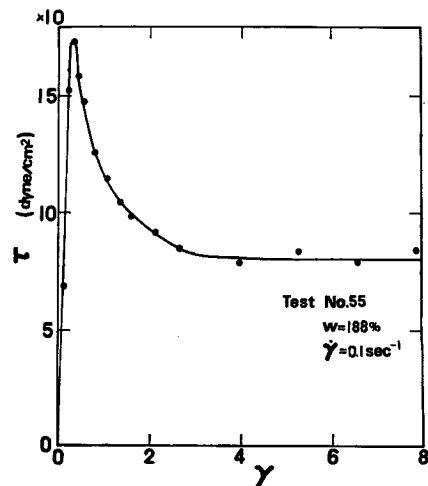


Fig. 7 Results of a steady flow test.

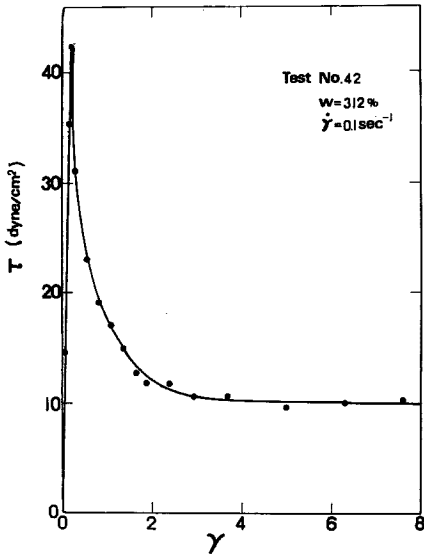


Fig. 8 Results of a steady flow test.

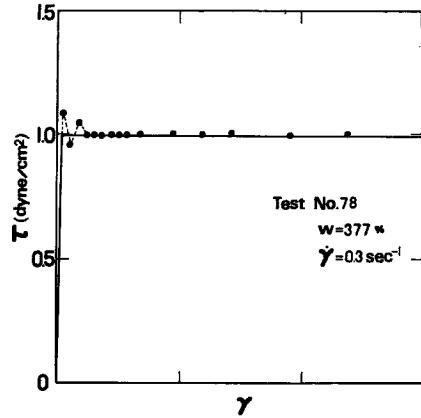


Fig. 9 Results of a steady flow test.

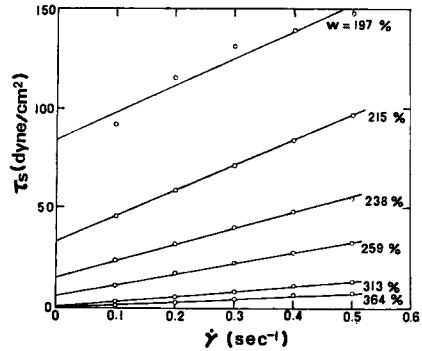


Fig. 10 Relationship between shear stress at the steady-state and rate of shear.

図より、 $w=197\sim 364\%$  の範囲において次式で表現される Bingham 流動がみられることが明らかである。

$$\tau_s = (\tau_s)_y + \eta \dot{\gamma}, \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $(\tau_s)_y$  は Bingham の降伏値、 $\eta$  は粘度である。

ここで記憶すべきことは、定常状態では Bingham 流動がみられるような含水比状態において、たとえば Fig. 8 に明らかなように定常ずり流動開始時に過剰なせん断応力の発達、すなわちストレス・オーバーシュート現象が生ずることである。

この現象は、のちほど詳述するが、粘土-水系の粘弾性的性質の反映と考えられるものであり、(13)式によって粘土-水系の力学性が完全に特性づけられるものではないことに注意を喚起しておこう。

3.3 定常ずり流動停止後の応力緩和特性

代表的な定常ずり流動停止後の応力緩和曲線を Fig. 11 に示す。

縦軸には、ずり流動を停止してから時間  $t$  経過後の応力を定常せん断応力で除したものをとっている。

$w=98\sim 165\%$  では、応力は時間の対数に比例して減少する傾向がある。一方、 $w=182\sim 276\%$  では応力はずり流動停止直後に急激に低下し、その後はほとんど一定になる傾向がみられる。

ここで、先述した Bingham の降伏値と応力緩和において系が究極的に到達する平衡応力  $\tau_0$  との関係を考えてみる。

Fig. 11 にずり流動を停止してから 6 秒後のせん断応力、 $\tau_{t=6}$  と定常せん断応力との比、 $\tau_{t=6}/\tau_s$  および



$(\tau_s)_y/\tau_s$  を含水比に対してプロットしてある。ここに、 $\tau_s$  は  $\dot{\gamma}=0.1 \text{ sec}^{-1}$  における値である。

図より、 $\tau_{t=6}/\tau_s$  の値が  $w \approx 180\%$  をこえると急減し、 $w > 200\%$  ではほぼ一定の値、 $0 \sim 0.1$  をとることがわかる。

また、Fig. 11 に示すとおり、 $w \geq 182\%$  では  $t=6$  秒において、ほぼ  $(-d\tau/dt)$  はゼロである。

したがって、 $w > 200\%$  であるような含水比状態では近似的に  $\tau_{t=6}/\tau_s$  は  $\tau_0/\tau_s$  に等しいとみなすことが許され、その値はただだか0.1であるといえることができる。

また、Fig. 12 の (・) 印は  $(\tau_s)_y/\tau_s$  の値を示している。

ここに興味あることは、 $(\tau_s)_y/\tau_s$  の値が  $\tau_0/\tau_s$  の値よりもかなり大きいことである。

もし、 $(\tau_s)_y$  が真の意味での降伏値であれば、応力緩和過程では  $\dot{\gamma}=0$  であることから、(13)式より  $(\tau_s)_y = \tau_0$  となるべきであろう。

しかしながら、実際には  $\tau_0 \ll (\tau_s)_y$  であり、低ひずみ速度域では Bingham 流動から逸脱することが予想される。

また、図中の直線は最小二乗法によって決定したものでつぎのように表現される。

$$(\tau_s)_y/\tau_s = -0.0041(w - 405) \quad (14)$$

上式より、 $(\tau_s)_y/\tau_s = 0$ 、すなわち Newton 流動がみられはじめる点の含水比の値は405%と推定される。これに関しては、3-4で再びふれるであろう。

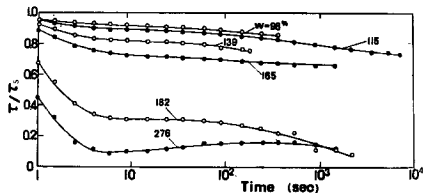


Fig. 11 Stress relaxation after the stoppage of steady flow.

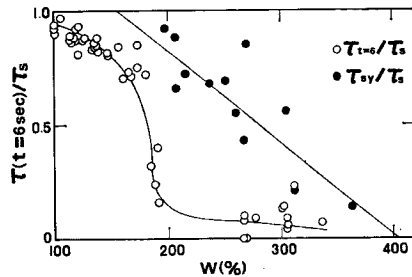


Fig. 12 Plots of shear stress ratios against water content.

### 3.4 ストレス・オーバーシュート現象

Fig. 13, 14 に含水比がそれぞれ136%, 305%の試料のずり流動-静置-再びり流動試験結果を示す。

図より明らかなように、定常ずり流動停止後の静置効果によって定常ずり流動開始時に定常応力値より過剰な応力が発達し、ピーク値をこえると定常応力値まで減衰する現象、ストレス・オーバーシュート現象がみられる。

この現象は、非線型粘弾性流体とみなされる物質について、積分型構成式を組立てるために最近とくに注目されているものである<sup>8), 9)</sup>。

3-2において粘土-水系の応力-ひずみ挙動が含水比の増加に応じて著しく変化することを示したが、この節では、ストレス・オーバーシュートの含水比依存性を明らかにしてみよう。

ストレス・オーバーシュートの程度を表わす量として、相対せん断応力、 $(\tau_r)_p/(\tau_r)_s$  に着目する。ここに、 $(\tau_r)_p$  は再びり流動時のせん断応力のピーク値、 $(\tau_r)_s$  は再びり流動時のせん断応力の定常値である。

$(\tau_r)_p/(\tau_r)_s$  を採用した理由は、(1)初期せん断では静置時間を制御しにくいこと、(2)含水比を試験終了後に測定しているが、それは再せん断時の含水比状態を反映していることにある。

Fig. 15 に、相対せん断応力~含水比~静置時間関係を示す。

図中に矢印でコンシステンシーの特性値である  $PL, LL$  および  $NL$  (後出) の値を示している。

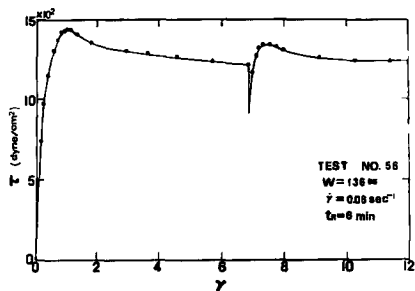


Fig. 13 Results of an interrupted steady flow test.

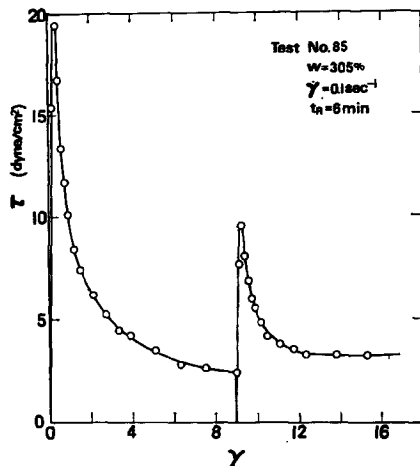


Fig. 14 Results of an interrupted steady flow test.

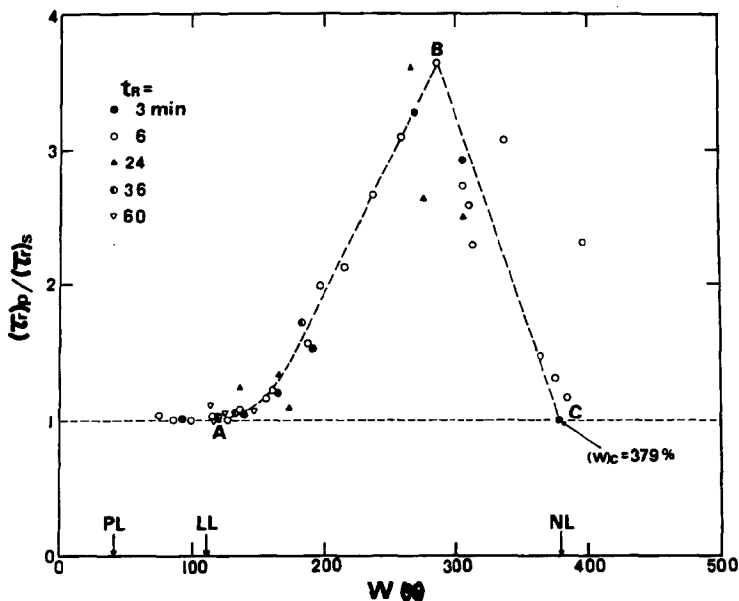


Fig. 15 Relationship among relative shear stress, water content and rest time.

この図より、最も興味あることは  $(\tau_r)_p / (\tau_r)_s \sim w$  関係に極大点が存在する現象—静置時間効果が最も顕著となる含水比状態の存在—が新たに見出されたことであろう。

極大点 (B点) の含水比は約286%であるが、この値以上に含水比が高くなると一転して静置時間効果は急減し、ある含水比以上ではストレス・オーバーシュートは発生しないものと判断される。

このことは、含水比が十分に高くなれば粘土-水系は Newton 流体として挙動するというを示唆していると考えられる。そこで、Newton 流動限界含水比 (NL: Limit of a Newtonian Flow) を求めることを考えた。

粘土-水懸濁液の比粘度を  $\eta_{sp}$ , 土粒子の容積濃度を  $1/f$  とすれば, 森・乙竹の式はつぎのように与えられる<sup>10)</sup>。

$$1/\eta_{sp} = (d/2) \cdot S_r \cdot (f - f_c), \dots\dots\dots (15)$$

$$f = 1 + e, \dots\dots\dots (16)$$

ここに  $d$  は土粒子の平均直径,  $S_r$  は比表面積,  $f$  は体積比<sup>11)</sup>,  $f_c$  は Newton 流動がみられる限界体積比,  $e$  は間げき比である。

著者らは, Ostwald 粘度計をもちいて粘土-水懸濁液の比粘度を測定した。使用した基礎式<sup>12)</sup> はつぎのようである。

$$\eta_{sp} = \rho t / (\rho_0 t_0) - 1, \dots\dots\dots (17)$$

ここに,  $\rho$  は容液の密度,  $\rho_0$  は容媒の密度,  $t$  は細管を一定量の容液が流下するに要する時間,  $t_0$  は細管を容媒が流下するに要する時間である。

Fig. 16 に  $1/\eta_{sp}$  と  $f$  との関係を示すが, 明らかに両者のあいだには直線的関係があり, 最小二乗法によって次式のように表現される。

$$1/\eta_{sp} = 0.08(f - 11.2). \dots\dots\dots (18)$$

このようにして得られた  $f_c$  の値, 11.2, を  $G_s = 2.69$  を考慮して含水比に換算すると,  $(w)_c = NL = 379\%$  となり,  $(\tau_r)_p / (\tau_r)_s$  の値が減少してきて 1 となる点の含水比として妥当であろう。

また, 3-3で  $(\tau_s)_y / \tau_s$  の値が  $w = 405\%$  においてゼロになるとの結果を得ており, ここに推定された  $NL = 379\%$  という値は円錐円板レオメーターの結果からも妥当といえる。

ところで, 懸濁液の濃度が一定値以上になると, それまで個々に孤立していた粒子が集合し系全体にわたって二次的な構造を形成するようになるが, この限界濃度は土壤懸濁液の場合には沈降体積濃度であり, 同時に Newton 流動の限界濃度でもあるといわれている<sup>10)</sup>。すなわち,  $NL$  は土粒子が最も疎な二次の構造を形成する際の含水比と解釈できる。

著者らが得た,  $NL$  以下の含水比からストレス・オーバーシュートが顕著になるという結果は, 沈降体積以上の濃度からシキソトロピー現象が顕著になるという玉虫らの研究<sup>13)</sup>とも対応するものであろう。

いままでは, ストレス・オーバーシュートが極大に達してから含水比の増加とともに減少する領域を考えた。つぎに, ストレス・オーバーシュートが含水比の増加とともに顕著になる領域を考える。

Fig. 15 に明らかなように, ストレス・オーバーシュートはA点, この点の含水比はほぼ  $LL$  に相当するから徐々に増加しはじめ,  $w \approx 160\%$  をこえてから急増する傾向がある。

Fig. 17 に再び流動開始後, セン断応力がピークに達するまでの時間  $t_p$  あるいはひずみ  $\gamma = \dot{\gamma} t_p$ , と含

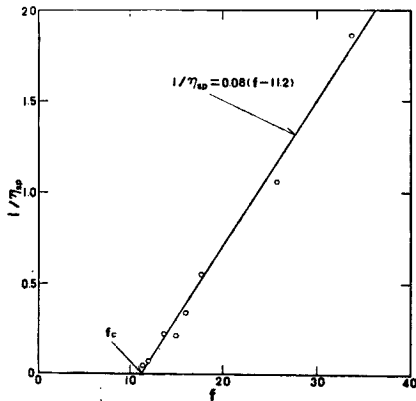


Fig. 16 A plot of the reciprocal of specific viscosity against volume ratio.

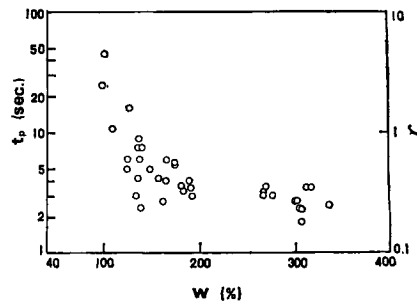


Fig. 17 Relationship between the logarithm of time up to the peak stress-state and water content.

水比との関係を示すが、明らかに  $w \approx 160\%$  を境としてその特性は変化している。ここに興味あることは、この限界の含水比の値が先述したストレス・オーバーシュート急増点の含水比の値とよく対応することであり、超軟弱粘土の流動機構を解明するための手がかりとなるように思われる。

4. 非線型粘弾性理論の適用性

前節において、ストレス・オーバーシュートのコンシステンシー依存性が明らかにした。その際、定常状態では Bingham 流動がみられるような含水比状態においてストレス・オーバーシュートが顕著であること、そして定常せん断応力がひずみ速度に強く依存することを示した。

そこで、超軟弱粘土の構造骨格の力学的性質を特性づける構成関係として次式を考える。

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + \int_{-\infty}^t \mu(t-\tau'; \sqrt{\Pi_{\underline{d}}(\tau')}, w) \left[ \frac{\underline{C}_{r'}^{-1}(t) - 1}{2} \right] d\tau', \dots\dots\dots (19)$$

ここに、 $\varepsilon(t)$  は時刻  $t$  における Cauchy の応力テンソル、 $\varepsilon_0$  は平衡応力テンソル、 $\mu(t-\tau'; \sqrt{\Pi_{\underline{d}}(\tau')}, w)$  は変形速度依存応答関数で、物質パラメーターの含水比に依存する、 $\Pi_{\underline{d}}(\tau')$  は変形速度テンソルの第 2 不変量で  $\text{tr}[\underline{d}d^T]$  と表現される、 $\underline{C}_{r'}^{-1}(t)$  は次式で定義される相対 Finger テンソルである<sup>15)</sup>。

$$\underline{C}_{r'}^{-1}(t) = \underline{F}_{r'}(t) \underline{F}_{r'}(t)^T, \dots\dots\dots (20)$$

$$[\underline{F}_{r'}(t)] = \left\| \frac{\partial \xi^i(t)}{\partial \xi^j(\tau')} \right\|, \dots\dots\dots (21)$$

ここに、 $\underline{F}_{r'}(t)$  は変形勾配テンソル、 $\xi^i(\tau')$  は時刻  $\tau'$  に対象粒子が占有する  $x^i$  座標である、 $T$  は転置行列をとることを意味する。

なお、引張り応力および引張りひずみを正とすることに約束する。

円錐円板レオメーターにおいて、静置時間  $t_R$  なる静置過程に引続いて定常単純ずり流動が行なわれるものとする。Fig. 3 参照。

このとき、対応する速度場はつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau' \leq t \quad & \text{のとき, } \dot{x}^1 = 0, \dot{x}^2 = 0, \dot{x}^3 = w(\theta) \\ -t_R \leq \tau' < 0 \quad & \text{のとき, } \dot{x}^1 = \dot{x}^2 = \dot{x}^3 = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

(22)式より変形速度テンソルの物理成分はつぎのように求められる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau' \leq t \quad & \text{のとき, } d_{\langle 23 \rangle} = d_{\langle 32 \rangle} = \dot{\gamma}/2, \text{ その他の } d_{\langle ij \rangle} = 0 \\ -t_R \leq \tau' < 0 \quad & \text{のとき, } d_{\langle ij \rangle} = 0 \text{ である。} \end{aligned} \right.$$

したがって、次式が求められる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau' \leq t \quad & \text{のとき, } \sqrt{\Pi_{\underline{d}}(\tau')} = \dot{\gamma}/\sqrt{2}, \\ -t_R \leq \tau' < 0 \quad & \text{のとき, } \sqrt{\Pi_{\underline{d}}(\tau')} = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

つぎに、流跡線を考える。

対象粒子が時刻  $\tau'$  に占有する  $x^i$  座標を  $\xi^i(\tau')$  とすれば、(22)式よりつぎの微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau' \leq t \quad & \text{において, } d\xi_{\langle 1 \rangle}(\tau')/d\tau' = 0, \\ & d\xi_{\langle 2 \rangle}(\tau')/d\tau' = 0, \\ & d\xi_{\langle 3 \rangle}(\tau')/d\tau' = \dot{\gamma} \xi_{\langle 2 \rangle}(\tau'), \\ -t_R \leq \tau' < 0 \quad & \text{において, } d\xi_{\langle 1 \rangle}(\tau')/d\tau' = d\xi_{\langle 2 \rangle}(\tau')/d\tau' = d\xi_{\langle 3 \rangle}(\tau')/d\tau' = 0. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

(24)式を積分し、(20)、(21)式の定義式を用いれば相対 Finger テンソルの物理成分として次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \tau' \leq t \quad & \text{のとき, } [\underline{C}_{r'}^{-1}(t)] = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dot{\gamma}(t-\tau') \\ 0 & \dot{\gamma}(t-\tau') & 1 + (\dot{\gamma})^2(t-\tau')^2 \end{array} \right\|, \\ -t_R \leq \tau' \leq 0 \quad & \text{のとき, } [\underline{C}_{r'}^{-1}(t)] = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dot{\gamma}t \\ 0 & \dot{\gamma}t & 1 + (\dot{\gamma}t)^2 \end{array} \right\|. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

(23)式と(25)式の間係を(19)式に代入すれば次式を得る。

$$\tau_{\langle 23 \rangle}(t) = \tau_{0\langle 23 \rangle} + (\dot{\gamma}/2) \int_0^t \mu(s; \dot{\gamma}/\sqrt{2}, w) s ds + (\dot{\gamma}t/2) \int_0^{tR} \mu(t+s; 0, w) ds, \dots\dots\dots(26)$$

$$\tau_{\langle 33 \rangle}(t) = \tau_{0\langle 33 \rangle} + \frac{(\dot{\gamma})^2}{2} \int_0^t \mu(s; \dot{\gamma}/\sqrt{2}, w) s^2 ds + \frac{(\dot{\gamma}t)^2}{2} \int_0^{tR} \mu(s; 0, w) ds, \dots\dots\dots(27)$$

$$\text{上記以外の } \tau_{\langle ij \rangle}(t) = \tau_{0\langle ij \rangle}. \dots\dots\dots(28)$$

つぎに、変形速度依存緩和スペクトル  $H(\lambda; \dot{\gamma}, w)$  を次式<sup>14)</sup>によって定義する。

$$\mu(s; \dot{\gamma}/\sqrt{2}, w) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H(\lambda; \dot{\gamma}, w)}{\lambda} \exp\left[-\frac{s}{\lambda}\right] d \ln \lambda, \dots\dots\dots(29)$$

ここに、 $\lambda$  は緩和時間である。

以下では、 $\tau_{\langle 23 \rangle}$  についてのみ考察するので、添字の $\langle 23 \rangle$ を省略することにする。

(29)式を(26)式に代入し、 $tR \gg \lambda$  である場合を考えると次式が得られる。

$$\tau(t) = \tau_0 + \frac{\dot{\gamma}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda; \dot{\gamma}, w) \left\{ \lambda - \lambda \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) - t \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right\} d \ln \lambda + \frac{\dot{\gamma}t}{2} \int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda; 0, w) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) d \ln \lambda. \dots\dots\dots(30)$$

上式を  $t$  に関して微分すれば次式を得る。

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{\partial \tau_0}{\partial A_\alpha} \frac{dA_\alpha}{dt} + \frac{\dot{\gamma}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ H(\lambda; 0, w) - \left\{ H(\lambda; 0, w) - H(\lambda; \dot{\gamma}, w) \right\} \frac{t}{\lambda} \right] \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) d \ln \lambda, \dots\dots\dots(31)$$

ここに、 $A_\alpha$  は平衡応力を規定する変数の総称である。

(31)式の右辺第1項の寄与が小さいものとすれば、一般に次式の間係：

$$H(\lambda; 0, w) > H(\lambda; \dot{\gamma}, w) \dots\dots\dots(32)$$

が成立するので、 $t$  がある値以上に達したときには、非線形効果によって、山本<sup>14)</sup>が指摘しているように、(31)式の被積分関数は正から負に転じ、 $d\tau(t)/dt$  の値も正から負に転じるから、これによってストレス・オーバーシュートの傾向が定性的に説明できるのである。

しかし、定量的に議論できるためには、 $H(\lambda; \dot{\gamma}, w)$  を決定する必要がある。

そこで、定常ずり流動停止後の応力緩和試験から  $H(\lambda; \dot{\gamma}, w)$  を決定してみよう。

ずり流動が  $\tau' = 0$  において停止されるものとする。このとき、時刻  $\tau'$  に相対的な時刻  $\tau' = t \geq 0$  における相対 Finger テンソルの物理成分は次式で与えられる<sup>14)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \tau' < 0 \text{ のとき, } [\underline{C}_{\tau'}^{-1}(t)] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\dot{\gamma}\tau' \\ 0 & -\dot{\gamma}\tau' & 1+(\dot{\gamma}\tau')^2 \end{vmatrix}, \\ \tau' \geq 0 \text{ のとき, } [\underline{C}_{\tau'}^{-1}(t)] &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

また、 $\sqrt{\Pi_g(\tau')}$  は次式によって与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau' < 0 \text{ のとき, } \sqrt{\Pi_g(\tau')} &= \dot{\gamma}/\sqrt{2}, \\ \tau' \geq 0 \text{ のとき, } \sqrt{\Pi_g(\tau')} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

(33)、(34)式を(19)式に代入し、(29)式の間係を利用して変形すれば、次式の表現が得られる。(添字の $\langle 23 \rangle$ を省略している。)

$$\tau(t) = \tau_0 + (\dot{\gamma}/2) \int_0^{\infty} H(\lambda; \dot{\gamma}, w) \exp(-t/\lambda) d\lambda. \quad (35)$$

(35)式より、第1近似として次式によって変形速度依存緩和スペクトルを求めることができる<sup>16)</sup>。

$$\frac{H(\lambda; \dot{\gamma}, w)}{2} = - \left. \frac{d[\{\tau(t) - \tau_0\}/\dot{\gamma}]}{d\lambda} \right|_{t=\lambda}. \quad (36)$$

Fig. 18 に、 $w=269\%$  における変形速度依存緩和スペクトルを示す。

ひずみ速度の増加によってほぼ一様にスペクトルが減少していること、および  $\lambda$  の増加とともに指数関数的にスペクトルの高さが減少することが図より明らかである。

それゆえに、つぎの仮定が可能となる。

$$\left. \begin{aligned} H(\lambda; 0, w) &= (1 + \alpha\dot{\gamma})^\beta H(\lambda; \dot{\gamma}, w), \\ H(\lambda; \dot{\gamma}, w) &= 2a \exp(-b\lambda), \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

ここに、 $\alpha, \beta, a, b$  は正の定数である。

(31)式の右辺第1項を無視した式に(37)式を代入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\tau(t)}{dt} &= \dot{\gamma} \int_0^{\lambda_u} \left[ a \cdot \exp(-b\lambda) \cdot \left(m - \frac{t}{\lambda}\right) \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \right] d\lambda, \\ m &= (1 + \alpha\dot{\gamma})^\beta, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

ここに、積分の上限  $\lambda_u$  は最大緩和時間である。

$t = t_p$  において、 $d\tau(t)/dt = 0$  になるとする。このとき、(38)式から次式が近似的に得られる。

$$m \{-E_i(-bt_p) + E_i(-b\lambda_u)\} - \{\exp(-t_p/\lambda_u) \exp(-b\lambda_u) + \exp(-bt_p) - \exp(-b\lambda_u)\} = 0, \quad (39)$$

ここに、 $-E_i(-x)$  は指数積分を表わす。

上式より、原理的には  $t_p$  の値を予測することができる。

つぎにオーバーシュートの大きさについて考える。

(30)式に(37)式の関係代入すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau(t) - \tau_s}{\dot{\gamma}} &= a(m-1) \int_0^{\lambda_u} \exp(-b\lambda) \cdot \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda \\ &\quad - a \int_0^{\lambda_u} \exp(-b\lambda) \exp\left(-\frac{t}{\lambda}\right) d\lambda, \\ \tau_s &= \tau_0 + a\dot{\gamma} \int_0^{\lambda_u} \exp(-b\lambda) d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

(40)式を実際に計算すれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau(t) - \tau_s}{\dot{\gamma}} &= \frac{a}{b} e^{-bt} \{(m-1)bt - 1\} + a(m-1)\lambda_u e^{-b\lambda_u} e^{-t/\lambda_u} \\ &\quad + \left\{ -a(m-1)\lambda_u + \frac{a}{b} \right\} e^{-b\lambda_u}, \\ \tau_s &= \tau_0 + \dot{\gamma} a/b. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

(41)<sub>1</sub>式において  $t = t_p$  とおいた式と (41)<sub>2</sub>式から次式を得る。

$$\frac{\tau_p/\tau_s - 1}{1 - \tau_0/\tau_s} = e^{-bt_p} \{(m-1)bt_p - 1\} + (m-1)b\lambda_u e^{-b\lambda_u} e^{-t_p/\lambda_u} - \{(m-1)b\lambda_u - 1\} e^{-b\lambda_u}. \quad (42)$$

上式において、 $\lambda_u \gg t_p > 1$  を仮定し、高含水比域では  $\tau_0/\tau_s$  は1に比べて小さいという実験事実(3-3参照)を利用すれば、次式が得られる。

$$\tau_p/\tau_s = 1 + \{(m-1)bt_p - 1\} \exp(-bt_p). \quad (43)$$

また、(39)式から次式が得られる。

$$m = \frac{\exp(-bt_p)}{-E_i(-bt_p)}. \quad (44)$$

Fig. 19 に、 $\tau_p/\tau_s \sim m \sim bt_p$  関係の理論曲線を示す。

$bt_p$  の実測値は Fig. 20 に示すとおりであるが、200% $<w<300\%$  の範囲では  $2.7\pm 0.3$  程度の値である。

このとき、対応する  $\tau_p/\tau_s$  の理論値はほぼ一定の1.39であるが、この値は図-15に示す実測値  $(\tau_r)_p/(\tau_r)_s$  に比べてかなり小さい。

それゆえ、定性的にストレス・オーバーシュートがみられることを予測するだけでなく定量的にもこの現象を解析し、粘土-水系の応力-ひずみ-時間挙動を解明するにはさらにモデルを改良する余地があるといえる。

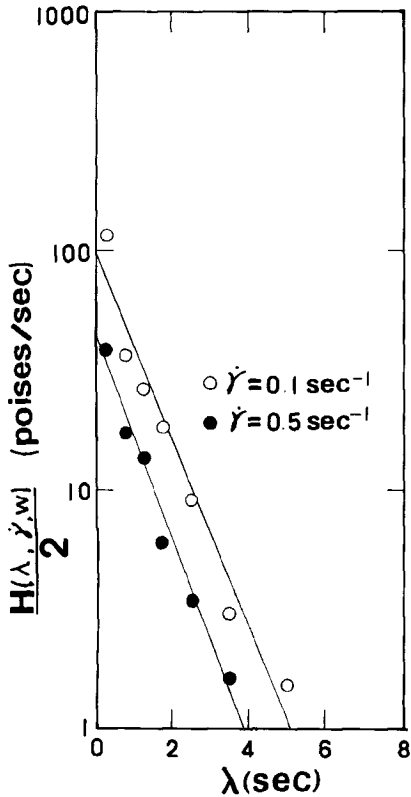


Fig. 18 Rate dependent relaxation spectra.

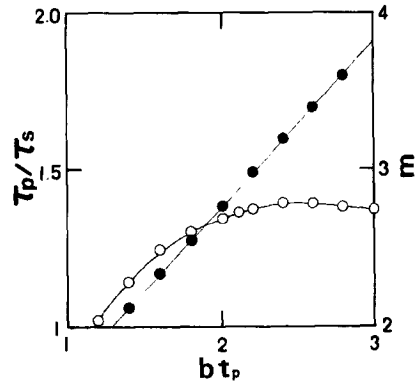


Fig. 19 Theoretical curves for; ○:  $\tau_p/\tau_s$ , ●:  $m$ .

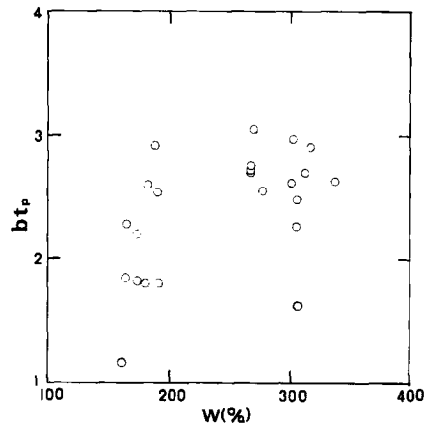


Fig. 20 Relationship between  $bt_p$  and water content determined experimentally.

### 5. 討 論

#### <法線応力効果>

4.において、せん断応力のオーバーシュートに対し、非線型粘弾性理論の適用を試みたが、実は(27)式に示されるごとく、ずり流動によって流れの方向に、ひずみ速度の2乗に比例する付加的な引張応力が発生することが予測されていた。

しかし、このような非線型効果による付加的な法線応力が実際に粘土-水系に発生するかどうかはまだ判明していないようである。

著者らは、超軟弱粘土の流動機構の解明には有効応力にもとづく解析が必要であると考えているが、直接有効応力を測定することはできないので、2. で述べたようにずり流動過程における間げき水圧の変動をいくつかの試験において測定した。その代表的な結果を Fig. 21 に示す。(この場合には、圧縮を正にとっている。)

図中の実験で示す 4 曲線にはそれぞれ 3 つのピークがみられる。これらは、左から順に試料と円錐を密着する際に発生する過剰間げき水圧、初期ずり流動開始時に発生する過剰間げき水圧、および再びずり流動開始時における過剰間げき水圧の発生を表わしている。

図中の破線は大気圧下の蒸留水の圧力を超小型圧力センサで測定したものであり、測定期間中のゼロ点の流れを示すものである。

先述のピークを除いては 4 実線とも点線と傾向を示しており、上述のことからこれはみかけ上の圧力低下であると判断される。

このように、超軟弱粘土においてずり流動開始時に正の過剰間げき水圧が発生することは、負のダイレイタンシー現象がみられることを示唆するもので興味深い。

したがって、ひずみ速度の増加とともに間げき水圧と全応力がずり流動過程にどのように変化するかを明らかにできれば、Weissenberg 効果に象徴される非線型効果と土独自の負のダイレイタンシー効果の相対的なウェイトが判明し、超軟弱粘土の流動機構の解明に資することができると思われる。

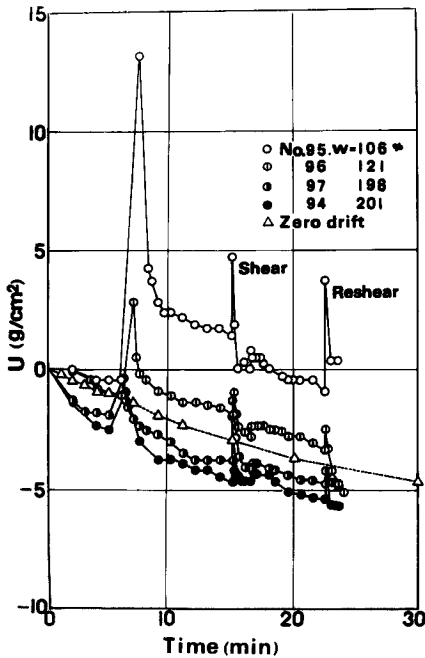


Fig. 21 The variation of pore-water pressure during the interrupted steady flow.

〈ベーン試験機における端面効果〉

現位置において、軟弱な粘土の非排水せん断強度を求めるためにしばしばベーン試験機がもちいられる。

この際、すべり面の形が円筒状になることがほぼ定説化している<sup>17)</sup>。

したがって、得られた結果を解析し、非排水せん断強度を求めるには円筒端面におけるせん断応力の分布形を適当に仮定する必要が生ずるのである。

ここで、著者らが使用した円錐円板レオメーター

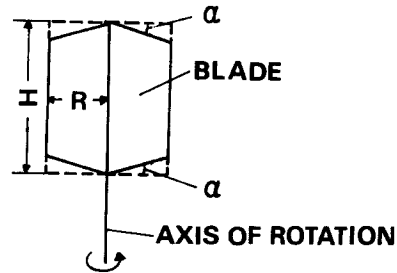


Fig. 22 Modified blades of a vane testing machine.

の特長を思い起してみよう。すなわち、ひずみ場が試料内部で一様であり、せん断応力が動径  $r$  には依存しないということであった。



この特性は、平行な2枚の円板間ではなく、回転軸を共有する円錐と円板間に試料が充填されているという事実由来する。

それゆえ、Fig. 22 に示すような形状のブレードをベーン試験機に採用すれば、端面におけるせん断応力の分布が一様になり不確定要素が1つなくなることが期待される。

なお、角度  $\alpha$  は  $\tan\alpha \approx \alpha$  なる近似ができる程度に小さくするものとする。

## 6. ま と め

前節までに得られた結果を要約すればつぎのようである。

- (1) 超軟弱粘土のレオロジー測定用試験機として円錐円板レオメーターは有用である。
- (2) 超軟弱粘土にせん断応力のオーバーシュート現象がみられる。
- (3) せん断応力のオーバーシュートは液性限界より高く Newton 流動限界含水比より低い含水比状態において顕著である。そして、オーバーシュートの程度を表わす相対せん断応力は両者の中間状態の含水比のもとで極大値をとる。
- (4) せん断応力のオーバーシュートは Newton 流動限界含水比以上の含水比状態ではみられない。
- (5) 非線型粘弾性理論によって、定性的にせん断応力のオーバーシュートを説明できる。しかし、定量的にオーバーシュートの大きさおよび含水比依存性を説明しうるためには、さらに採用したモデルの改良が必要である。

## 謝 辞

コンタクトレス変位計の使用を快く許して頂いた京都大学防災研究所教授柴田徹博士に対し、心より感謝の意を表します。

また、本研究に対し、昭和47年度科学研究費補助金（試験研究）の交付を受けたことを付記し、深く感謝する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) Müller, I.: A Thermodynamic Theory of Mixtures of Fluids, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 28, 1968, pp. 1-39.
- 2) Bowen, R. M.: Toward a Thermodynamics and Mechanics of Mixtures, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Vol. 24, 1967, pp. 370-403.
- 3) Markovitz, H., L. J. Elyash, F. J. Padden, Jr., and T. W. Dewitt: A Cone-and-Plate Viscometer, J. Colloid Science, Vol. 10, No. 2, 1955, pp. 165-173.
- 4) Huppler, J. D., I. F. Macdonald, E. Ashare, T. W. Spriggs, R. B. Bird and L. A. Holmes: Rheological Properties of Three Solutions. Part II. Relaxation and Growth of Shear and Normal Stresses, Trans. Soc. Rheology, Vol. 11, No. 2, 1967, pp. 181-204.
- 5) Krizek, R. J. and A. G. Franklin: Torsional Shear Testing Technique for Dynamic Properties of Clay, ASTM, STP450, 1969, pp. 115-137.
- 6) Markovitz, H.: Nonlinear Steady-Flow Behavior, Rheology/Theory and Applications Edited by F. R. Eirich, Vol. 4, Academic Press, 1967, pp. 347-410.
- 7) ファン・Y. C. Y.: 固体の力学/理論, 培風館, 昭45, pp. 31-56.
- 8) 山本三三三: 非線型粘弾性の構成方程式, 材料, 第21巻, 第224号, 昭47.5, pp. 355-359.
- 9) 倉田道夫: 非線型粘弾性に関する最近の実験的研究, 材料, 第21巻, 第224号, 昭47.5, pp. 360-369.
- 10) 山崎不二夫: 土壌物理, 養賢堂, 昭46, pp. 167-171.
- 11) 三笠正人: 軟弱粘土の圧密, 鹿島研究所出版会, 昭38, pp. 1-126.
- 12) 後藤廉平・平井西夫・花井哲也: レオロジーとその応用, 共立出版, 昭37, pp. 32-35.

- 13) Tamamushi, B. and Y. Sekiguchi: The Thixotropic and Plastic Behaviour of Suspensions of Sulphate with Clay, Bull. Chem. Soc. Japan, Vol. 13, No. 8, 1938, pp. 556-565.
- 14) Yamamoto, M.: Rate-Dependent Relaxation Spectra and Their Determination, Trans. Soc. Rheology, Vol. 15, No. 2, 1971, pp. 331-344.
- 15) Truesdell, C.: The Nonlinear Field Theories in Mechanics, Topics in Nonlinear Physics Edited by N. J. Zabusky, Springer-Verlag, 1968, pp. 19-215.
- 16) 山本三三三: レオロジー, 横書店, 昭39.4, pp. 37-40.
- 17) 柴田 徹: 粘土のペーンせん断強度に関する研究, 土木学会論文報告集, 第138号, 昭42.2, pp. 39-48.