

砂質土の弾性定数に関する一考察

柴田 徹・佐藤 忠信

ON THE ELASTIC CONSTANT OF SANDY SOIL

By Toru SHIBATA and Tadanobu SATO

Synopsis

This paper deals with the polynomial approximations of a stress-strain relationship of sand and the method for estimations of nonlinear wave form in such material. The non-linear constitutive equation for a mixture of two continua composed from hyperelastic material and hyperelastic fluid are deduced. Expanding the strain energy of this mixture into generalized Taylor's series in the strain invariants of two phase, the polynomial expressions of constitutive equation are obtained. Using the drained and undrained triaxial compression test data for sand which is excited by σ_3 -constant or σ_m -constant state, the relationships between the coefficients of these expanding term, initial void ratio and the value of σ_3 or σ_m are obtained. Moreover the stress-strain approximation for σ_3 -constant test condition is applied to the problem of nonlinear wave propagation.

1. ま え が き

地盤中を伝播する波動の研究には従来から線形弾性論あるいは線形粘弾性論が用いられてきた。しかし地盤中のひずみが $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 以上になると土は非線形性を示し線形理論ではその挙動を十分表示できなくなると言われている¹⁾。そこで著者の一人は、土を流体で飽和された非線形多孔質弾性体と考え、このような物質から構成される地層の振動性状を考察した後、この物体中を伝播する実体波についての研究を行なった^{2,3)}。そして実体波は4組存在し、2組の圧縮波と2組のせん断波から構成されること、ならびに波動の伝播速度が発生しているひずみの関数になることなどを報告した。

本研究は、これらの結果を砂質土に適用するために、砂の応力-ひずみ関係が非線形弾性論によってどの程度表現できるかを実験的に考察し、土に特有なダイラタンシー現象がどのように表現されるかについて若干の考察を加えたのち、この応力-ひずみ関係を用いて砂質土中を伝わる非線形波動の伝播速度ならびにその形態について論じるものである。

本文の2.では流体で飽和された非線形多孔質弾性体の構成関係を簡単に述べ、3.ではこの構成関係に現われる物理定数の砂質土における値を実験的に決定し、4.では3.で得られた物質定数を用いて、砂質土中を伝播する実体波の伝播速度について考察する。

2. 流体で飽和された多孔質弾性体の構成関係

性質の異なる2つの物質からなる系があり、この系の中から、どんな微小な体積部分を取りだしても、その中にならず2つの物質が存在するような場合系は2相混合物と呼ばれる⁴⁾。いま弾性相と流体相からなる2相混合物を考え、弾性相は超弾性体* (hyperelastic material)⁵⁾ からなり、液体相は超弾性流体** (hypere-

* 物体が単位質量当りのひずみエネルギー関数 W をもち、これがひずみテンソルの解析関数であり、均質な応力のない自然状態において、 W の変化の割合が応力仕事の変化の割合に等しいような物体。

** 上記の条件を満たし、かつひずみエネルギー関数が体積ひずみの関数になっている物体。

lastic fluid)⁵⁾ からなっているものとし、2相系を構成する物質の巨視的な性状が等方性を示すもの示すものとするれば、2相混合体のひずみエネルギー W は、弾性相のひずみ不変量 (I, II, III) と流体相の体積ひずみ (I_{vf}) のみの関数と考えてよいかから*、次式をうる。

$$W = W(I, II, III, I_{vf}) \dots\dots\dots (1)$$

この場合、弾性相の Kirchhoff の応力テンソル K_{IJ} と流体相の Kirchhoff の応力テンソル P_{IJ} は次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} K_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial E_{IJ}} = \frac{\partial W}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial E_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial II} \frac{\partial II}{\partial E_{IJ}} + \frac{\partial W}{\partial III} \frac{\partial III}{\partial E_{IJ}} \\ P_{IJ} &= \frac{\partial W}{\partial I_{vf}} \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 E_{IJ} は弾性相のひずみテンソルであり、弾性相の変位 $U_I(x_J, t)$ との間には次式の関係がある。

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (U_{I,J} + U_{J,I} + U_{K,I} U_{K,J}) \dots\dots\dots (3)$$

なお、 $U_{I,J} = \partial U_I / \partial X_J$ であり、 X_J は基準配位での座標系を表わしている。

一方、弾性相のひずみ不変量とひずみテンソルの間には次式の関係がある⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} I &= \delta_{KL} E_{KL} & II &= \frac{1}{2!} e_{KMP} e_{LNP} E_{LK} E_{NM} \\ III &= \frac{1}{3!} e_{KMP} e_{LNQ} E_{LK} E_{NM} E_{QP} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに e_{KMP} などは交代記号である。式(3)、(4)より次式の関係をうる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial E_{IJ}} &= \delta_{IJ}, & \frac{\partial II}{\partial E_{IJ}} &= I \delta_{IJ} - E_{IJ} \\ \frac{\partial III}{\partial E_{IJ}} &= E_{IM} E_{MJ} - I E_{IJ} + II \delta_{IJ} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

また、流体相の変形 $V_I(x_J, t)$ と I_{vf} の間には次式の関係が成立する。

$$I_{vf} = (1 + 2\delta_{KL} A_{KL} + 2e_{KMP} e_{LNP} A_{LK} A_{NM} + \frac{3}{4} e_{KMP} e_{LNQ} A_{LK} A_{NM} A_{QP})^{1/2} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、

$$A_{KL} = \left(V_{K,L} + \frac{1}{2} V_{K,L^2} \right) \delta_{LK} \text{ (総和規約なし)} \dots\dots\dots (7)$$

である。

いま、ひずみエネルギー W をひずみが生じていない状態のまわりでテーラ展開できるとして、ひずみ不変量について4次のオーダーまで展開すれば次式をうる。

$$\begin{aligned} W &= p_E I + p_f I_{vf} + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) I^2 - 2\mu II + lI^3 + mIII + nIII \\ &\quad + a_1 I^4 + a_2 I^2 II + a_3 I I^2 + a_4 I III + R I I_{vf} + \frac{1}{2} Q I_{vf}^2 \\ &\quad + L I_{vf}^3 + A_1 I_{vf}^4 + f_1 I_{vf} II + f_2 I^2 I_{vf} + f_3 I I_{vf}^2 + f_4 I_{vf} III \\ &\quad + f_5 I_{vf}^2 II + f_6 I_{vf} III + f_7 I_{vf}^3 I + (\text{higher order term}) \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

* 一般に2相混合体のひずみエネルギー W は、各相のひずみテンソル $E_{(1)}$ 、 $E_{(2)}$ の関数になっていると考えられる。 W が $E_{(1)}$ と $E_{(2)}$ の等方関数であるためには、 W は $tr E_{(1)}$ 、 $tr E_{(1)}^2$ 、 $tr E_{(1)}^3$ 、 $tr E_{(2)}$ 、 $tr E_{(2)}^2$ 、 $tr E_{(2)}^3$ 、 $tr(E_{(1)}^2)$ 、 $tr(E_{(1)}^3 E_{(2)})$ なる8個の不変量の関数とならなければならない。超弾性流体の場合には $E_{(2)} = I_{vf} I$ (I は単位テンソル) となるから、上記の不変量は $tr E_{(1)}$ 、 $tr E_{(1)}^2$ 、 $tr E_{(1)}^3$ 、 $3I_{vf}$ 、 $3I_{vf}^2$ 、 $I_{vf}^2 tr E_{(1)}$ 、 $I_{vf} tr E_{(1)}^2$ となる。この中で独立なものは $tr E_{(1)}$ 、 $tr E_{(1)}^2$ 、 $tr E_{(1)}^3$ 、 I_{vf} のみであるから、 W は弾性相の3個のひずみ不変量と流体相の体積ひずみのみの関数となる。

ここに、 p_E, p_f はひずみがゼロの時の弾性相の応力と流体圧、 $\lambda, \mu, l, m, n, a_1, a_2, a_3, a_4$ は弾性相の弾性定数、 Q, L, A_1 は流体相の体積弾性定数、 $R, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$ は液体相と弾性相の変形の間のカップリングを表わす定数である。これらの定数は物質の物理的な性質を表わすものであるから以下物理定数と呼ぶことにする。式(18)を(2)に代入し、式(5)の關係を用いれば K_{IJ}, P_{IJ} の表示式として次式をうる。

$$K_{IJ} = [p_E + (\lambda + 2\mu)I + RI_{v_f} + 3lI^2 + mII + 2f_2I_{v_f}I + f_3I_{v_f}^2 + 4a_1I^3 + 2a_2III + a_4III] \delta_{IJ} + [-2\mu + mI + f_1I_{v_f} + a_3I^2 + 2a_3[(I\delta_{IJ} - E_{IJ}) + [n + a_1I](E_{IM}E_{MJ} - IE_{IJ} + II\delta_{IJ}) + (\text{higher order term})] \dots (9)$$

$$P_{IJ} = [p_f + RI + QI_{v_f} + 3LI_{v_f}^2 + 4A_1I_{v_f}^3 + f_2I^2 + 2f_3I I_{v_f} + 3f_7I_{v_f}^2I + f_1I + f_4III + 2f_5I_{v_f}II + f_6III] \delta_{IJ} + (\text{higher order term}) \dots (10)$$

弾性相のひずみ不変量 II は弾性相の八面体せん断ひずみ γ_{oct} と次の關係がある。

$$II = \frac{1}{3}I^2 - \frac{3}{2}\gamma_{oct}^2 \dots (11)$$

式(10)に式(1)を代入し次式をうる。

$$P_{IJ} = \left[P(I, I_{v_f}) - \frac{3}{2}f_1\gamma_{oct}^2 - \frac{3}{2}(2f_5I_{v_f} + f_6)\gamma_{oct}^2 + f_4III \right] \delta_{IJ} \dots (12)$$

ここに

$$P(I, I_{v_f}) = p_f + RI + QI_{v_f} + 3LI_{v_f}^2 + 4A_1I_{v_f}^3 + \frac{1}{3}f_1I^2 + f_2I^2 + 2f_3II_{v_f} + \frac{2}{3}f_5I_{v_f}I^2 + \frac{1}{3}f_6I^3 + 3f_7I_{v_f}^2I \dots (13)$$

式(12)は間げき水圧が弾性相のせん断ひずみに關係するいわゆるダイラタンシー現象を表示した式ということが出来る。

いまひずみエネルギーの展開次数を3次までとすれば、

$$P_{IJ} = \left[P'(I, I_{v_f}) - \frac{3}{2}\gamma_{oct}^2 \right] \delta_{IJ} \dots (14)$$

$$P'(I, I_{v_f}) = p_f + RI + QI_{v_f} + 2_3I I_{v_f} + \frac{1}{3}f_1I^2 + f_2I^2 \dots (15)$$

となり、 P_{IJ} には γ_{oct}^2 単独の項が存在し、 γ_{oct}^2 と他のひずみ不変量との間の積はないから、この場合には間げき水圧におよぼすダイラタンシー現象をひずみで分離することが可能になる。しかし、式(12)からも明らかなように、ひずみエネルギーの展開次数を4次に上げるともはや γ_{oct}^2 の項のみを分離することができなくなる。言いかえれば、ひずみがあまり大きくない場合には間げき水圧をせん断によるものと圧縮によるものと分離できることを表わしている。またダイラタンシー現象が応力におよぼす影響は2次のオーダーのものであることが明らかになる。今回の実験結果の解析では破壊に至るような大きなひずみの部分は問題にしていないから、ダイラタンシー現象を適確にとらえられるようにひずみエネルギーの展開次数は3次あるいは4次までのものを用いる。

3. 三軸試験による物理定数の決定

3.1 主ひずみならびに主応力の基準座標系での表示

物体の変形を記述するとき基準となる座標系が必要となる。ここでは初期状態をこの基準とし、Fig. 1 に示すような座標 X_1, X_2, X_3 を基準座標として用いる。この座標系で測った供試体の初期寸法を L_1, L_2, L_3 とする。またこの座標系での供試体の変形量を $\Delta L_1, \Delta L_2, \Delta L_3$ とする。なお応力は引張を正と考え、ひずみは伸張側を正と考えている。

微小変形の仮定が成立するときの軸対称問題では、 $L_2 = L_3, \Delta L_2 = \Delta L_3$ であるから次式をうる。

$$E_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1}, \quad E_2 = E_3 = \frac{\Delta L_3}{L_3} \dots (16)$$

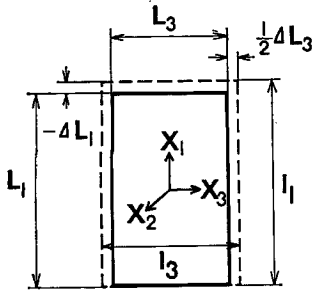


Fig. 1 Coordinate system.

ここに, E_1, E_2, E_3 は主ひずみを表わす。また体積ひずみ v は次式で与えられる。

$$v = \frac{\Delta V}{V_0} = E_1 + 2E_3 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに V_0 は供試体の初期体積, ΔV は体積変化を表わすものとする。

微小変形の時には式(16)₁, (17)を用いて, ΔV と ΔL_1 を測定すれば主ひずみの値は簡単に求められる。しかし有限変形の問題を取り扱う場合には以下に述べる方法で主ひずみを決定しなければならない。いま供試体の変形場が一様なものとし $E_2 = E_3$ となるようなひずみ場を考えれば, 式(3)の定義より主ひずみ E_1, E_3 が次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \frac{\partial U_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_1} \right)^2 = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta L_1}{L_1} \right)^2 \\ E_3 &= \frac{\partial U_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial X_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_3}{\partial X_3} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_1}{\partial X_3} \right)^2 = \frac{\Delta L_3}{L_3} + \left(\frac{\Delta L_3}{L_3} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

一方, 体積ひずみとひずみ不変量の間には次式の関係⁷⁾がある。

$$\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right)^2 = 1 + 2I + 4II + 8III \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここに, I, II, III は主ひずみを用いて次式で表わされる。

$$I = E_1 + 2E_3, \quad II = 2E_1E_3 + E_3^2, \quad III = E_1E_3^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

普通三軸試験データより得られるものは, ΔL_1 と $\Delta V/V_0$ であるから, 式(18), (20)を式(19)に代入すれば ΔL_3 についての4次方程式となる。これを解いて得られた ΔL_3 を式(18)₂ に代入すれば E_3 が求まることになる。

以上のようにして主ひずみの基準座標系での値が求まるので以下主応力の計算式を簡単に示す。いま測定された X_1 軸方向の合力を p , 供試体の初期断面積を A_0 とすれば, Piola-Kirchhoff の主応力 P_1 は次式で与えられる。

$$P_1 = \frac{p}{A_0} \quad \dots\dots\dots (21)$$

一方, Kirchhoff の主応力成分 K_1 と Piola-Kirchhoff の主応力成分 P_1 との間には次式の関係がある。

$$K_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} P_1 \quad \dots\dots\dots (22)$$

x_i と X_i ならびに変位 U_i との間には,

$$x_i = X_i + U_i$$

なる関係があるから, 供試体が一様にひずむものとするれば, $\Delta U_1 = \Delta L_1$, $\Delta x_i = L_i + \Delta L_i$ と考えることができるから

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = 1 - \frac{\Delta L_1}{L_1 + \Delta L_1} = \frac{L_1}{L_1 + \Delta L_1} \quad \dots\dots\dots (23)$$

となる。したがって X_1 方向の Kirchhoff の主応力は次式で与えられる。

$$K_1 = \left(\frac{L_1}{L_1 + \Delta L_1} \right) \frac{p}{A_0} \quad \dots\dots\dots (24)$$

なお, Cauchy の主応力 σ_1 が必要になるときは, 式(27)の関係を考慮した次式を用いればよい。

$$\sigma_1 = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} P_1 = \left(\frac{V}{V_0 + \Delta V} \right) \left(1 + \frac{\Delta L_1}{L_1} \right) \frac{p}{A_0} \quad \dots\dots\dots (25)$$

一方, 三軸試験において X_3 軸方向の Kirchhoff の主応力 K_3 で求めるためには Cauchy の主応力 σ_3 との

間の変換式が必要になる。これは次式で与えられる。

$$K_3 = \frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{\partial X_3}{\partial x_3} \right)^2 \sigma_3 \dots\dots\dots (26)$$

ρ_0 は初期状態での密度であり、 ρ と次式の関係がある。

$$\rho = \frac{V_0}{V_0 + \Delta V} \rho_0 \dots\dots\dots (27)$$

式(27)と $\partial X_3/\partial x_3 = L_3/(L_3 + \Delta L_3)$ なることを考慮すれば、式(26)は次式のように表わされる。

$$K_3 = \left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \left(\frac{L_3}{L_3 + \Delta L_3} \right)^2 \sigma_3 \dots\dots\dots (28)$$

(24), (25), (28) の関係を用いれば Kirchhoff の主応力 K_1, K_3 と Cauchy の平均主応力 σ_m の関係が次式で与えられる。

$$\sigma_m = \frac{1}{3} \left\{ \frac{K_1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \left(\frac{L_1}{L_1 + \Delta L_1} \right)^2} + \frac{2K_3}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_0} \right) \left(\frac{L_3}{L_3 + \Delta L_3} \right)^2} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

3.2 三軸排水試験による物理定数の決定

実験に用いた試料は豊浦の標準砂であり、比重は2.64均等係数は1.28である。ノールウエー型の三軸試験機を用い排水状態で σ_3 一定、 σ_m 一定のせん断試験を行なった。供試体は高さ 5 cm、直径 5 cm のもので Rowe の方法により端面マサツを去除している。体積変化は 1/100 cc ビュレットで測定した。測定されるデータから計算されるのは主ひずみ E_1, E_3 、ひずみ不変量 I, II, III と Kirchhoff の主応力 K_1, K_3 であるから、1回の測定で n 個のデータが与えられれば $K_1 - E_1, K_3 - E_3$ の間の観測式が $2n$ 個得られるので、この観測式に最小 2 乗法を用いて物理定数を決定する。

排水試験の場合には間隙中の流体は構成関係に影響を与えないから、弾性相の構成式は式(9)のかわりに次式を用いなければならない。

$$\begin{aligned} K_I = & [p_E + \lambda I + 3lI^2 + m(I^2 + II) + nII + 4a_1 I^3 \\ & + a_2(2III + I^3) + a_4(I II + III)] \\ & + [2\mu - mI - nI - a_2 I^2 - 2a_3 II - a_4 I^2] E_I \\ & + [n + a_4 I] E_I^2 + (\text{higher order term}) \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

式(30)より Kirchhoff の平均主応力 K_M を求め式(11)の関係を用いて整理すると次式をうる。

$$\begin{aligned} K_M = & p_E + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) I + \frac{1}{3}(9l + 3m + n)I^2 - \frac{1}{2}(3m + n)\gamma_{oct}^2 \\ & + \left(4a_1 + \frac{4}{3}a_2 + \frac{4}{9}a_3 + \frac{1}{9}a_4 \right) I^3 - \left(3a_2 + 2a_3 + \frac{1}{2}a_4 \right) \gamma_{oct}^2 I \\ & + a_4 III + (\text{higher order term}) \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

式(31)はひずみエネルギーの展開次数を 4 次までとした場合の表示式であるが、展開次数を 3 次までとすれば

$$K_M = p_E + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) I + \frac{1}{3}(9l + 3m + n)I^2 - \frac{1}{2}(3m + n)\gamma_{oct}^2 \dots\dots\dots (32)$$

となるから、式(14), (15)の所ですでに述べたと同じように、この場合はダイラタンシー現象をひずみで分離することが可能になる。

(1) 側圧 (σ_3) 一定試験による物理定数

この場合、Kirchhoff の最大主応力 K_1 は式(24)より求め、最小主応力 K_3 は式(28)より求める。主ひずみ E_1, E_3 は式(18)より与えられるから、これらを式(30)に代入すれば n 個のデータに対し $2n$ 個の観測式が得られる。

Fig. 2 は $\sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ 、初期間げき比 0.726 の場合に、式(30)の展開次数を何次まで取れば実測データを十分追跡できるかを吟味したものである。次数を上げれば近似度は高くなるが、工学的に満足できる程

度でなるべく次数は低いほうがよい。Fig. 2 の結果からひずみエネルギーの展開次数を4次とすれば、十分な精度をもってピーク強度まで追跡できることがわかる。Fig. 3 はひずみエネルギーの2次の展開項の係数と間げき比の関係を側圧をパラメーターとして表示したものである。線形弾性論におけるラーメの定数 λ , μ に相当する量を表わしたものであるが、いずれも初期間げき比の増加とともに減少するという良く知られた結果を得た。なお λ におよぼす間げき比の影響のほうが μ におよぼすそれよりも大きいことがわかる。Fig. 4 はひずみエネルギーの3次の展開項の係数と間げき比の関係を側圧をパラメーターとして表

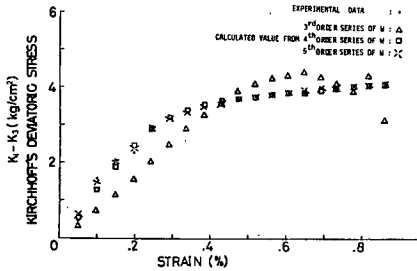


Fig. 2 Polynomial approximation of stress-strain relationship.

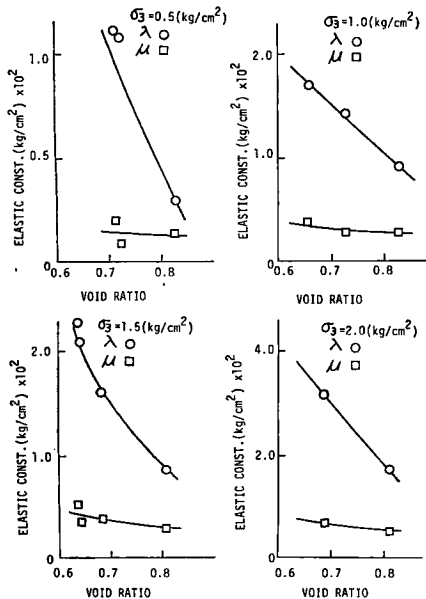


Fig. 3 Elastic coefficients (λ , μ) versus void ratio obtained from σ_3 constant test.

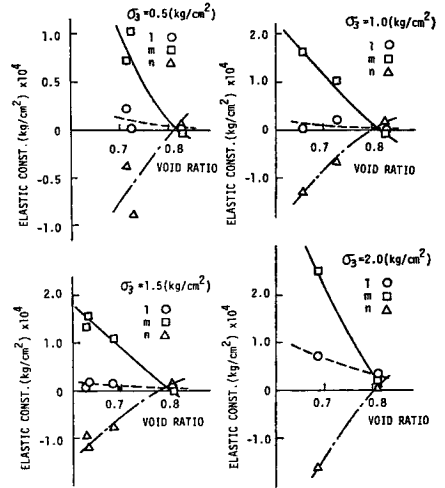


Fig. 4 Elastic coefficients (l , m , n) versus void ratio obtained from σ_3 constant test.

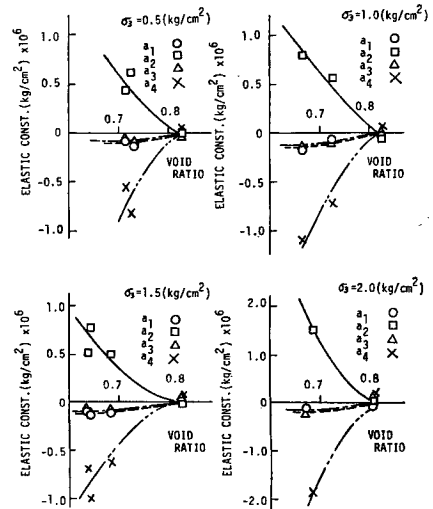


Fig. 5 Elastic coefficients (a_1 , a_2 , a_3 , a_4) versus void ratio obtained from σ_3 constant test.

示したものである。 l, m, n ともその絶対値は初期間げき比が増大するにつれて減少する。Fig. 5 はひずみエネルギーの4次の展開項の係数と間げき比の関係を側圧をパラメーターとして表示したものである。 a_1 と a_2 は間げき比にあまり影響を受けないが、 a_3 と a_4 は間げき比の増大とともにその絶対値を減少させることなどが明らかになった。Fig. 6 は式(31)に現われる係数 $\frac{1}{3}(9l+3m+n)$ と $-\frac{1}{2}(3m+n)$ の間げき比に対する変動の様子を表示したものである。いずれの値も間げき比の増大とともにその絶対値を減少させている。ダイラタンシー現象を表す係数 $-\frac{1}{2}(3m+n)$ は間げき比の小さい所では負の値を取り、間げき比が大きくなると正の値を取るようになる。これは、体積変化を拘束してせん断変形を作用させた場合、ダイラタンシー現象のため初期間げき比の小さい供試体では平均主応力(K_M)が減少し、初期間げき比が大きい供試体では平均主応力(K_M)が増加することを表わしている*。Fig. 7 は平均主応力(K_M)におよぼす応力ひずみ関係の非線形性の影響を明らかにするために、 $\sigma_3=1.0 \text{ kg/cm}^2$, $e_0=0.726$ の砂供試体より得られた λ, μ, l, m, n の値を用い、ひずみ不変量 I , r_{oct} が0.05~0.5%の間で変化するときの式(32)の各項を計算した結果を図示したものである。いま I ならびに r_{oct} が同じような大きさで変化する系を考えれば、ひずみが 5×10^{-4} の時1次の項 $(\lambda + \frac{2}{3}\mu)I$ に対する2次の項 $\frac{1}{3}(9l+3m+n)I^2, -\frac{1}{2}(3m+n)r_{oct}^2$ の比は各々5%と7.5%であったものが、 4×10^{-3} のひずみにおいては各々36%と60%となる。異なる拘束圧ならびに初期間げき比のもとで得られた物理定数を用いてもこのような傾向はあまり変らない。すなわち、系のひずみが 10^{-4} 程度の大きさのときには応力-ひずみ関係の線形性からのずれは応力にしておよそ10%前後であるが、ひずみが 10^{-3} の領域に入るとそのずれは50%以上にもなり、非線形性が非常に大きくなることを表わしている。

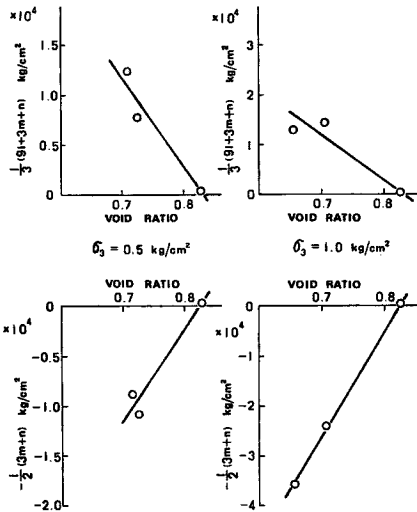


Fig. 6-1 Relationship between $\frac{1}{3}(9l+3m+n)$ or $-\frac{1}{2}(3m+n)$ and void ratio.

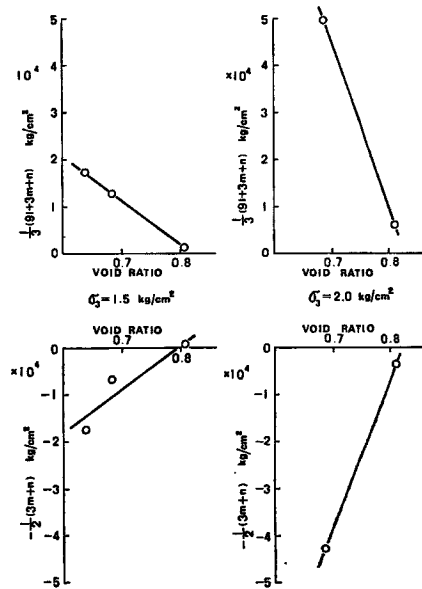


Fig. 6-2 Relationship between $\frac{1}{3}(9l+3m+n)$ or $-\frac{1}{2}(3m+n)$ and void ratio.

* 土質力学でよく用いられるように、応力とひずみの符号を圧縮側で正とすれば、間げき比の小さい供試体ではせん断が進むと平均主応力が増加し、間げき比の大きい場合には平均主応力が減少する。

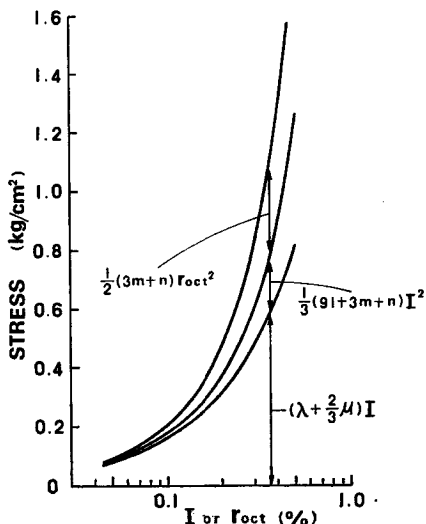


Fig. 7 The nonlinear effect influenced for Kirchhoff's mean principal stress.

(2) 平均主応力 (σ_m) 一定試験による物理定数

この場合、実験では σ_m を一定とするから、式(29)より Kirchhoff の最大主応力 K_1 と最小主応力 K_3 の関係が与えられる。 K_1 は式(24)より求めるから、 K_3 を決定することができる。主ひずみ E_1, E_3 は式(18)より与えられるから、これらを式(30)に代入すれば n 個のデータに対し $2n$ 個の観測式が得られる。

Fig. 8 はこの観測式に最小 2 乗法を適用して得られたひずみエネルギーの 2 次の展開項の係数と間げき比の関係をも σ_m をパラメーターとして表示したものである。 λ, μ とも間げき比が増大するにつれてその絶対値が減少するが、 σ_m 一定試験のときとは異なり λ の値が負になっている。このような現象が起るのは、 σ_m 一定試験での体積変化はダイラタンシー現象のみに起因するものであり、かつ 2. の最後の所でも述べた

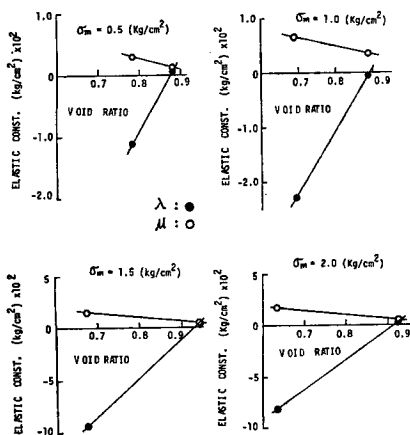


Fig. 8 Elastic coefficients (λ, μ) versus void ratio obtained from σ_m constant test.

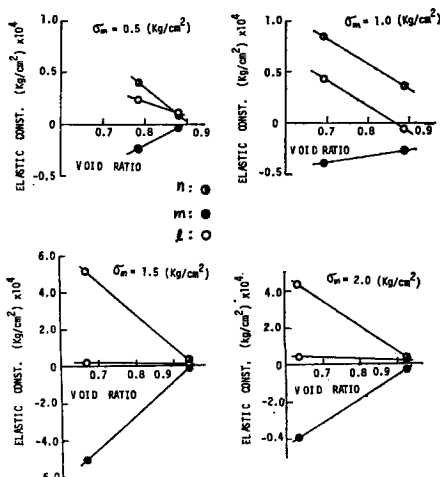


Fig. 9 Elastic coefficients (l, m, n) versus void ratio obtained from σ_m constant test.

ように、ダイラタンシー現象は2次のオーダーのものであると考えられるから、この場合の λ は2次の項の係数と考えなければならないためである。Fig. 9 はひずみエネルギーの3次の展開項の係数と間げき比の関係性を σ_m をパラメーターにとって表示したものである。係数 l の傾向は σ_3 一定試験のものと同じであるが、係数 m, n は符号が逆になっている。

3.3 三軸非排水試験による物理定数の決定

非排水試験のデータを用いて、式(9)、(10)より固体相と流体相の物理定数を求めるためには、流体相の体積ひずみ I_{vf} と固体相の体積ひずみを測定しなければならないが、非排水試験のため、これらの値はせん断ひずみに比較し非常に小さいものとなり測定は困難である。したがって式(8)のすべての物理定数を決定することはできないが、式(14)、(15)を用いることにより流体相に発生する圧力に影響をおよぼす固体相のせん断ひずみの効果を表わす係数 f_1 の大きさについて以下のような考察が行なえる。

いま、等方圧縮試験時($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$)における間げき水圧を P_M とすれば、これは固体相ならびに流体相の体積ひずみに関する項のみから構成されるはずであるから次式をうる。

$$P_M = P'(I, I_{vf}) \dots\dots\dots (33)$$

式(14)と(33)より次式をうる。

$$f_1 = -\frac{2}{3} \frac{P_f - P_M}{\gamma_{oct}^2} = -3 \frac{P_f - P_M}{(E_1 - E_3)^2} \dots\dots\dots (34)$$

ここに、 $\gamma_{oct}^2 = 2(E_1 - E_3)^2/9$ なる関係式を用いている。固体相の主ひずみ E_3 の計算は供試体の体積変化がないと考え近似的に求める。まず供試体を作成した後非排水等方圧縮試験を行ない発生する間げき水圧 P_M を測定し等方圧 σ_0 との関係を求める。つぎにこの供試体を用い非排水の側圧一定のせん断試験を行ないこのときの間げき水圧を P_f とする。 P_f を測定した各段階での平均主応力 σ_m を求め $\sigma_0 = \sigma_m$ なる点の P_M を求め、この P_M と P_f を式(34)に代入し f_1 の値を求める。

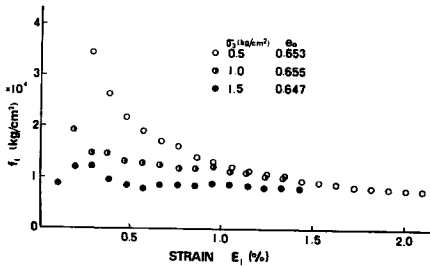


Fig. 10 Relationship between f_1 and E_1 for σ_3 constant compression test.

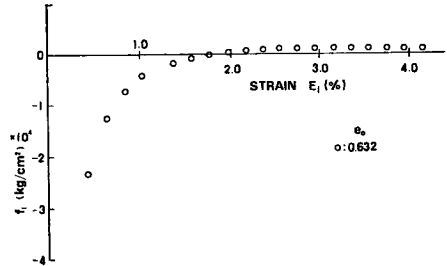


Fig. 11 Relationship between f_1 and E_1 for σ_3 constant extension test.

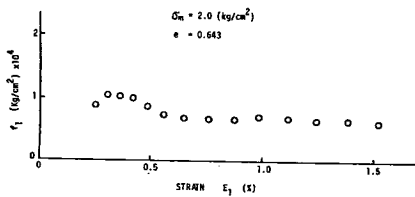


Fig. 12 Relationship between f_1 and E_1 for σ_m constant compression test.

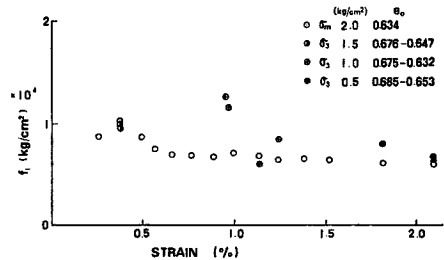


Fig. 13 Comparison of f_1 obtained from σ_3 constant and σ_m constant tests.

式(34)の関係が得られるのは、ひずみエネルギーを3次のオーダーで展開したときだけであるから、この関係がどの程度実用的なものであるかを調べておかねばならない。Fig. 10 は σ_3 一定の圧縮試験より得られたデータを基にして f_1 と最大主ひずみ E_1 の関係を示したものである。側圧 σ_3 が 0.5, 1.0, 1.5 (kg/cm²) のいずれの場合も E_1 の小さい所では f_1 が大きな変動を示しているが、 E_1 がある程度の大きさ以上になるとほぼ一定値をとるようになる。Fig. 11 は σ_3 一定の伸張試験より得られた f_1 と E_1 の関係である。この場合も E_1 の小さい所では f_1 の変動は大きい、 E_1 が大きくなるとある一定値を取るような傾向を示している。また、この一定になる f_1 の値は圧縮試験と伸張試験とではかなりの差がある。これは圧縮側と伸張側とではダイラタンシーの現われ方が異なるためである。Fig. 12 は、平均主応力 σ_m を 2.0 (kg/cm²) に保って行なったせん断試験結果から f_1 を求め E_1 との関係を示したものである。この場合も E_1 がある程度以上になると一定値となる。Fig. 13 は σ_m 一定試験から得た f_1 と σ_3 一定試験から得た f_1 を比較するため、 σ_3 一定試験で σ_m が 2.0 (kg/cm²) になるときの f_1 の値を Fig. 12 の結果に書き加えたものである。初期間げき比のばらつきがあるが、 σ_3 一定試験と σ_m 一定試験から得られる f_1 はほぼ同じような値を与えていることがわかる。

4. 砂質土中を伝播する実体波の伝播速度

4.1 ひずみの大きさと伝播速度の関係

この節では、3節(1)で求めた砂の物理定数を用いて、砂質土中を伝播する非線形波動の伝播速度ならびに発生するひずみの時間ならびに空間的な変化の推定法について述べる。

まず、Fig. 14 (a),(b) に示すように半無限に拡がる砂質地盤の表面に無限に拡がる一様な圧縮荷重ならびにせん断力が作用し、これが単調に増加するような系を考える。この場合地盤内の変形は X_1 のみの関数と考えられるから、変位 U_1, U_2, U_3 は X_1 と時間 t のみの関数となる。このような変形場は X_1 方向へ伝播する平面波の変形場を考えることによって得られる。式(3) と以上の変形場を考えると、ひずみテンソル E_{IJ} は次式のようなになる。

$$E_{IJ} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 & \frac{1}{2}\varepsilon_2 & \frac{1}{2}\varepsilon_3 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}\varepsilon_3 & 0 & 0 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{pmatrix} \quad (35)$$

ここに

$$\varepsilon_1 = \partial U_1 / \partial X_1, \varepsilon_2 = \partial U_2 / \partial X_1, \varepsilon_3 = \partial U_3 / \partial X_1 \quad \dots\dots\dots (36)$$

式(9)で $I_{\nu f} = 0$ としたものと式(35)から、Kirchhoff の応力テンソルと $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ の間には次式のような関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= p_E + \lambda \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \right) + 3l\varepsilon_1^2 + 3m\varepsilon_1^2 - \frac{1}{4}n(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \\ &\quad + 2\mu \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \right) + \dots \\ K_{22} &= K_{33} = p_E + \lambda \left(\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_2^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_3^2 \right) \\ &\quad + 3l\varepsilon_1^2 + 4m\varepsilon_1^2 - \frac{1}{4}n(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \dots \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (37)$$

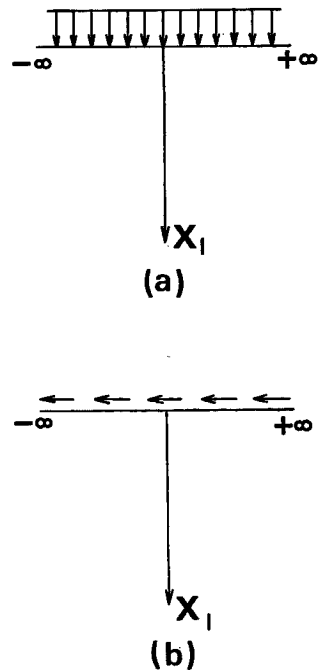


Fig. 14 Boundary conditions.

$$\begin{aligned} K_{12} &= K_{21} = \mu \varepsilon_2 - \frac{1}{2} m \varepsilon_1 \varepsilon_2 - \frac{1}{2} n \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \dots \\ K_{13} &= K_{31} = \mu \varepsilon_3 - \frac{1}{2} m \varepsilon_1 \varepsilon_3 - \frac{1}{2} n \varepsilon_1 \varepsilon_3 + \dots \\ \text{他の } K_{IJ} &= 0 \end{aligned}$$

ここに、 p_E は初期の等方応力を表わす。

流体で飽和された多孔質弾性体中を伝播する非線形波動に関する著者の内の 1 人の研究結果³⁾ より流体相の影響を取り除いたもの、あるいは Bland の研究³⁾などを参照すれば、弾性体中を伝播する非線形波動の伝播速度は以下のようにひずみの関数として与えられる。

(I) せん断波の伝播速度：

非線形弾性体中には 2 つのせん断形の実体波が存在し、これは式(36)で定義された変数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ とひずみエネルギーの展開項の係数を用いてつぎのように表わせる。

(i) 第 1 種せん断波

$$\begin{aligned} v_{s1}^2 &= c_s^2 + \frac{1}{2\rho} \left(\lambda + 2\mu - \frac{1}{2} m \right) \varepsilon_1 + \frac{1}{2\rho} \left(\frac{1}{2\lambda} + \mu + 3l - \frac{1}{4} m - \frac{1}{2} a_2 \right) \varepsilon_1^2 \\ &+ \frac{1}{4\rho} \left(\lambda + 2\mu - m + \frac{1}{2} a_3 \right) (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \dots \dots \dots (38) \end{aligned}$$

ここに、 ρ は密度、 v_{s1} は第 1 種せん断波の伝播速度、 $c_s^2 = \mu/\rho$ である。なお、この波動の場合 $\varepsilon_1, \varepsilon_2^2, \varepsilon_3^2$ の値は X_1-t 空間内で変動することはゆるされず、境界条件のみによって決まる。すなわち X_1-t の全空間において次式が成立する。

$$\varepsilon_1 = c_{10}, \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = c_{20} \dots \dots \dots (39)$$

ここに c_{10}, c_{20} は $X_1=0$ における $\varepsilon_1, \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2$ の値であり時間に無関係な定数である。境界上に c_{10} なる圧縮ひずみと $\sqrt{c_{20}}$ なるせん断ひずみが与えられたとき、せん断ひずみ $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ が式(39)の条件を満たすように変化する系を伝播する波動の伝播速度を式(38)は与えることになる。このことから第 1 種せん断波は純粋なせん断波と考えてもよい。

(ii) 第 2 種せん断波

$$v_{s2}^2 = c_s^2 + \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{3}{2} \lambda + 3\mu - \frac{3}{2} m + \frac{3}{4} a_3 - \frac{3}{2} \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\lambda + 2\mu - \frac{m}{2} \right)^2 \right\} (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \dots \dots (40)$$

ここに、 v_{s2} は第 2 種せん断波の伝播速度であり、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ は次式のような関係をもっている。

$$\left. \begin{aligned} -(\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + c_2 &= \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda + \mu - \frac{1}{2} m} (\varepsilon_1 - c_1) \\ &- \frac{2(\lambda + \mu)}{\left(\lambda + \mu - \frac{1}{2} m \right)^2} \left(\frac{1}{2} \lambda + \mu + 3l - \frac{1}{4} m - \frac{1}{2} a_2 \right) (\varepsilon_1^2 - c_1^2) \\ \varepsilon_2 / \varepsilon_3 &= c_{30} \end{aligned} \right\} \dots \dots (41)$$

ここに、 c_{30} は境界条件より決まる定数、 c_1, c_2 は境界条件の性質により決まる定数で次式の関係を満たしている。

$$\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = c_2 \quad \text{のとき} \quad \varepsilon_1 = c_1 \dots \dots \dots (42)$$

(II) 圧縮波の伝播速度：

せん断波の伝播速度はひずみの 2 次オーダーまで入れないと伝播速度に非線形効果は現われなかったが、圧縮波の場合には 1 次のオーダーでも非線形性が現われる。非線形性の影響を調べるのがここでの目的であるから、1 次のオーダーまでとした。

$$v_p^2 = c_p^2 + \frac{3}{\rho} (\lambda + 2\mu + 6l) \varepsilon_1 \dots \dots \dots (43)$$

ただし、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ との間には次式の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{c_2} \left[\frac{(2\lambda + 4\mu + 6l + \frac{1}{2}m)\varepsilon_1 + \lambda + \mu}{(2\lambda + 4\mu + 6l + \frac{1}{2}m)c_1 + \lambda + \mu} \right]^{(\lambda + 2\mu - \frac{1}{2}m) / (2\lambda + 4\mu + 6l + \frac{1}{2}m)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

$$\varepsilon_2 / \varepsilon_3 = c_{30}$$

ここに c_{30} は境界条件より決まる定数, c_1, c_2 は境界条件の性質により決まる定数で次式の関係を満す。

$$\varepsilon_1 = c_1 \quad \text{のとき} \quad \sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = \sqrt{c_2} \dots\dots\dots(45)$$

4.2 数値計算例

ここでは, σ_3 一定試験での物理定数を用いて, 時間と空間内での応力ならびにひずみ挙動を推定するための具体的な計算方法を示すとともに, 波動の伝播速度におよぼすひずみの影響などについて考察する。

変形場は X_1 と t のみの関数であったから, X_1-t 平面内でのひずみの値を求めることができれば, 問題は解けることになる。Fig. 15 を用いて X_1-t 面内のひずみ場の決定法を示す。簡単のために, $X_1=0$ の面に境界値として与えられるひずみと時間の関係は (a) に示すように, t_0 まで直線的に増加しその後一定値を保つようなものとする。第 1 種のせん断波の時変化できるひずみは $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ のみで, かつ式(39)₂ の条件があるから, ε_2 と ε_3 のいずれか 1 つに対する時間的変動が境界条件として与えられればよい。第 2 種のせん断波では式(41), 圧縮波では式(44)が成立するから, 境界条件として与えるひずみと時間の関係は $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_3$ の内のいずれか 1 つに対するものがあればよい。 X_1-t 平面内の特性曲線は (b) に示すようにこう配の変化する直線群として与えられる。この直線群のこう配は伝播する波動がせん断形か圧縮形かにより, 式(38), (40)あるいは式(43)で与えられる伝播速度と同じ値を取る。これらの式から求まる伝播速度はひずみの関数であったから, 境界値として与えられるひずみの大きさにより特性曲線のこう配が異ってくることになる。またこの特性曲線上では境界値として与えられたひずみの大きさをそのまま保持するから, (b) に示したような直線の特性曲線群が求まることになる。一旦この特性曲線群が求まれば任意の X_1 点での時間ひ

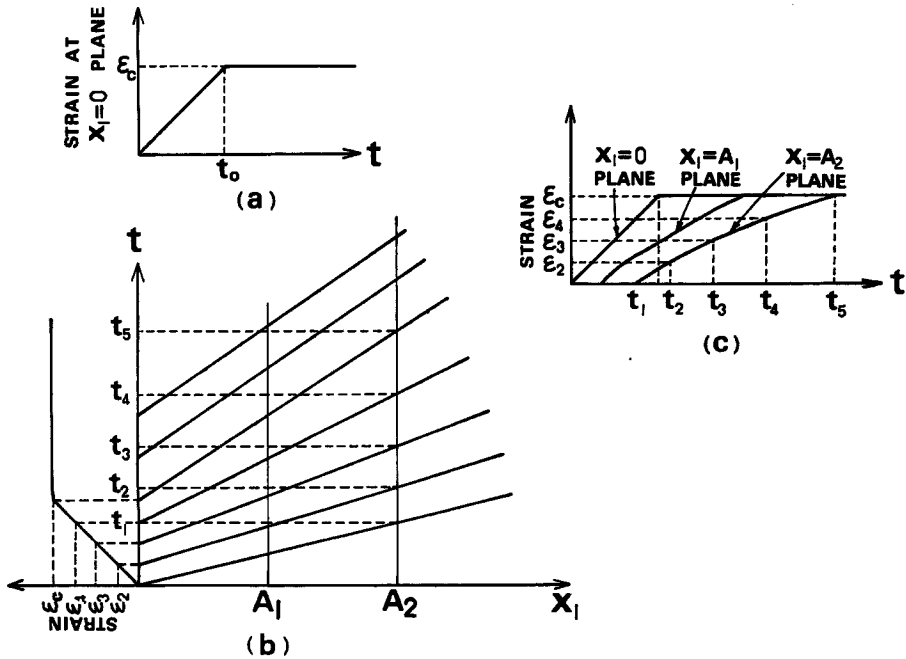


Fig. 15 Boundary condition and characteristic line in $t-X_1$ plane and estimation of strain field in $t-X_1$ plane.

ずみ関係を求めることができる。(c)に $X_1=A_1$ と $X_1=A_2$ 面における時間ひずみ関係を示した。非線形性が入るとひずみの立ち上り時間がふくれて行くことが明らかである。

以上の方法によりひずみ場を決めることができるから、式(37)を用いれば応力が計算できることになる。このような計算は特性曲線のこう配すなわち波動の伝播速度の性状がわかればよいわけであるから、 $\sigma_3=1.0(\text{kg/cm}^2)$ $e_0=0.726$ の場合に求められた物理定数を用いて伝播速度とひずみの関係について考察を加える。用いた物理定数の値を Table 1 に示した。

Table 1 Elastic constants for $\sigma_3=1.0 \text{ gk/cm}^2$ and $e_0=0.726$.

$\lambda=$	$1.419 \cdot 10^3$	(kg/cm^2)
$\mu=$	$0.281 \cdot 10^3$	"
$l=$	$0.271 \cdot 10^4$	"
$m=$	$1.024 \cdot 10^4$	"
$n=$	$-0.675 \cdot 10^4$	"
$a_1=$	$-0.067 \cdot 10^6$	"
$a_2=$	$0.567 \cdot 10^6$	"
$a_3=$	$-0.116 \cdot 10^6$	"
$a_4=$	$-0.732 \cdot 10^6$	"
$\rho=$	$1.65 (\text{g/cm}^3)$	

(I) 第1種せん断波

式(38)に Table 1 の物理定数を入れたものは次式となる。

$$\frac{v_{s1}^2}{c_s^2} = 1 - 8.785c_{10} - 0.9928 \times 10^4 c_{10}^2 - 0.06073 \times 10^4 c_{20}^2 \dots \dots \dots (46)$$

この波動では c_{10} , c_{20} が与えられると伝播速度は一定値となるから、特性曲線群は平行直線群となる。いま境界で圧縮ひずみがゼロの場合を考えると次式をうる。

$$\frac{v_{s1}^2}{c_s^2} = 1 - 0.06073 \times 10^4 c_{20}^2 \dots \dots \dots (47)$$

(II) 第2種せん断波

式(40)に Table 1 の物理定数を代入し次式をうる。

$$\frac{v_{s2}^2}{c_s^2} = 1 - 1.966 \times 10^4 (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \dots \dots (48)$$

また $\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 0$ のとき $\varepsilon_1 = 0$ となるならば ε_1 のオーダーとしてはつぎのようになる。

$$\varepsilon_1 = -0.1456 \times 10^3 (\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)$$

(III) 圧縮波

式(43)に Table 1 の物理定数を代入し次式をうる。

$$\frac{v_p^2}{c_p^2} = 1 + 2.4927 \times 10^3 \varepsilon_1 \dots \dots \dots (49)$$

式(44)で $\varepsilon_1 = c_1$ のとき $c_2 = 0$, すなわち境界上でせん断ひずみが作用しない場合を考えると、 X_1-t 平面の全領域で $\sqrt{\varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2} = 0$ となるから、 $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$ をうることができる。以下ではこの場合のみを考える。

Fig. 16 はひずみの大きさにより v_{s1}^2/c_s^2 , v_{s2}^2/c_s^2 , v_p^2/c_p^2 がどのような変化をするかを示したものである。

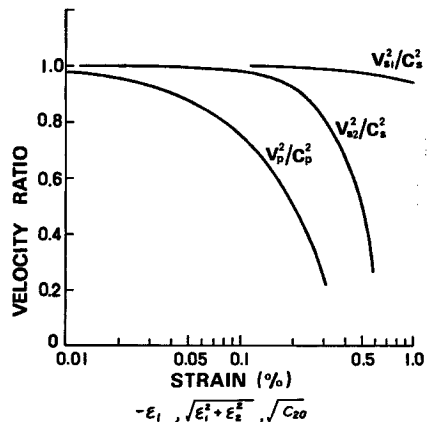


Fig. 16 Relationship between wave velocity and strain.

伝播速度におよぼすひずみの影響は圧縮波のほうがせん断波に比べて大きいことがわかる。また第 1 種せん断波は境界に作用するせん断ひずみが 1.0% になっても伝播速度をほぼ一定値を保つことがわかる。第 2 種せん断波と圧縮波の伝播速度はひずみの大きさが 10^{-3} の領域に入るとその値を急激に減少させることがわかる。

5. む す び

砂質土中を伝播する非線形波動の性状を調べるために砂の応力-ひずみ関係を流体で飽和された多孔質弾性体の構成式でどの程度近似できるかを調べ、その結果を用いて非線形波動の伝播速度におよぼすひずみの影響について考察を加えた。本研究により得られた結果を要約すると以下のようである。

- (i) 流体で飽和された多孔質弾性体の構成関係を弾性理論に基づいて誘導し、その級数表示を行なった。
 - (ii) この場合、ひずみエネルギーの展開次数が 3 次以上であれば、流体相に発生する圧力に、固体相の八面体せん断ひずみの 2 乗の項が関係し、いわゆるダイラタンシー現象を説明できる構成式をうることができる。特にひずみエネルギーの展開次数が 3 次であれば、八面体せん断ひずみ単独の項が存在し、ダイラタンシー現象をひずみで分離することができる。
 - (iii) 砂の σ_3 一定ならびに σ_m 一定試験結果を用い、上記の構成関係に現われる物理定数を最小 2 乗法を用いて決定し、初期間げき比との間の定性的な関係を示した。
 - (iv) 系に発生するひずみが 10^{-4} 程度の時は応力-ひずみ関係の線形性からのずれは 10% 前後であるが、ひずみが 10^{-3} の領域に入ると 50% 程度以上になる。
 - (v) 流体相の圧力におよぼす固体相の八面体せん断ひずみの影響を示す係数 f_1 はひずみがある程度の大きさになるとかなり安定し一定値になる。
 - (vi) 非線形波動の伝播速度におよぼすひずみの影響はひずみが 10^{-3} の領域に入ると非常に大きくなる。この性状はせん断波より圧縮波のほうが顕著である。
- 最後に本研究での数値計算はすべて京都大学大型計算機 FACOM-230-60 によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 土岐憲三：地震記録による地盤内震動分布の推定，土木学会論文報告集，第 207 号，1972.11，pp. 25-36.
- 2) 後藤尚男・土岐憲三・佐藤忠信：非線形多孔質弾性層の振動性状に関する研究，京都大学防災研究所年報，第 14 号 A，昭 46.4，pp. 233-252.
- 3) 後藤尚男・佐藤忠信：飽和した多孔質弾性体中を伝播する非線形波動について，土木学会論文報告集，第 209 号，1973.1，pp. 37-50.
- 4) Truesdell, C.: Rational Thermodynamics, McGraw-Hill, 1969, Lecture 5 and 6.
- 5) Truesdell, C.: The Nonlinear Field Theory in Mechanics, Topics in Nonlinear Physics, Proc. Physics Session International School of Nonlinear Mathematics and Physics, Munich 1966, Springer-Verlag, 1968, pp. 138-139, pp. 160-169.
- 6) Truesdell, C. and W. Noll: The Non-Linear Field Theories of Mechanics, Handbuch der Physik, Bd III/3, Springer-Verlag, 1965, Sect. 11.
- 7) Eringen, A. C.: Nonlinear Theory of Continuous Media, McGraw-Hill, 1962.
- 8) Bland, D. R.: Nonlinear Dynamic Elasticity, Blaisdell Pub. Co., 1969.