

風による吊屋根の振動

國 枝 治 郎

WIND-INDUCED VIBRATION OF SUSPENSION ROOFS

By Haruo KUNIEDA

Synopsis

Since suspension roofs or curved membrane roofs are usually flexible, there exist two important problems with regard to dynamic instability in wind-induced vibration of these roofs, one is of flutter which wind with constant velocity can induce and another is of a resonance due to periodical character of wind velocity fluctuations in atmospheric turbulence, and both problems are examined here. If wind is assumed as inviscid potential flow and if vorticities are introduced to represent the difference of velocities of wind and roofs in order to take into consideration the wind-roof interaction effect, flutter critical wind velocity can be determined as the wind velocity at which positive aerodynamical damping effect vanishes and the latter problem can be analyzed as that of parametric resonance in anti-symmetric deflection modes. Analytic solution and numerical results for an example are presented concerning the several important factors which govern the prevention of flutter or parametric resonance.

1. 序

大空間を安価に覆うことができ、建設が容易であるため、空気膜構造や吊屋根が建築物としてしばしば用いられるが、これらは通常剛性がきわめて低いためその動的性状の解明が今日重要な研究課題となっている。このような構造にあっては動的外力は主として風であるが、定常風速のもとであっても風速がある臨界値に達すると屋根面のフラッター現象が生じるといわれており、Siev の実験¹⁾もこの現象の存在を示唆している。又、通常大気中では風速は常に変動しているが、その変動の周期および大きさがある条件下にあるとき屋根面は共振応答をすることが予想される。これら構造物の設計上このような現象に対する配慮が必要であり、例えば Zetlin はフラッターを生じさせない試みを提案しているが²⁾、この現象そのものの把握がなされていないのでこの提案の現実性は不明である。

ここではまずフラッター臨界風速の決定法とそれにおよぼす形状、初張力等の影響を明示する。しかしそこで考慮される風速は既述のように一定と仮定されるので、第二段階として自然風中の風速変動によって誘起される振動に対して考察を行なう。吊屋根等は閉じた構造物の一部を成すものであるから建物内部容積を変化せしめるような振動は起り難いと考えられる。すなわち対称型変形モード振動は起り難く、逆対称型変形モードは生じ易い。したがって風速変動による強制振動として主として逆対称変形モードを考察する。

剛性のきわめて低いこれら構造物では風から構造物への影響のみならず、構造物の挙動が風に与える影響も共に考慮することにより空力的外力は決定されねばならない。即ち風—構造物連成系としての解析が必要である。確定した外力に対する吊屋根の振動を解明した論文は多いが³⁾、このような連成系としての解析は筆者によるもののみ^{4), 5), 6)}である。航空関係では曲面板構造の連成系としての解析は多いが、対象とされている風速が建築物でのそれと比較してはるかに大きく、また、吊屋根のように外面にのみ風をうけるのではないので、航空関係で得られた結果は直接には吊屋根の場合には適用され得ない。新たな解法が必要とされる。ここでは筆者の提案している方法^{4), 6)}により解析を進めるがその基本的な考え方は次のようなものである。

空気の粘性により吊屋根面上に乱流境界層が生じる。その層厚が屋根振動波長の order であれば粘性の影響は大きいが⁷⁾、ここでは低風速、低次振動を取り扱うので、波長は長くこれに比して境界層厚は無視され得るであろう。したがって空気は完全流体と見做され得る。しかしながら吊屋根の振動により攪乱された空気の変動速度場の決定にあたって屋根面における接方向の屋根と風との速度差の取り扱いが重要であることが予想されている¹⁾。これを解決するために流体と屋根の間に渦層を仮定する。同時に後流にあっても渦層を挿入する。この仮定によりいずれの変形モードに対しても空力的減衰効果が風速の増加により正から負に変わり、フラッターの発生が裏付けられる。もし渦層を挿入しない完全流体のみとすると変形モードに応じてこの減衰効果は常に正か負になる。このような取り扱いは一見翼理論のそれと似ているが、翼理論では両面が風にさらされるため翼自体を渦層で置換するが、ここでは屋根と風との間に渦層を挿入するので取り扱いが異なる。

ここでは空力的減衰効果が正から負に変わる臨界風速をもってフラッター風速と見做す。変形モードは伝播波型とし、波形移動速度の影響も調べる。フラッター臨界風速は自然風速一定の風を対象として決定される。ついで、Davenport⁸⁾の示したスペクトル密度関数にもとづいて自然風の風速変動を決め、同じ手法でこの風速変動により誘起される振動を解析する。しかしながら支配方程式が非線形なので周波数領域では議論は進めない。

2. 支配方程式

吊屋根面は初張力により次の形状にあるとする。

$$\bar{z} = z(\bar{x}, \bar{y}), \quad (0 \leq \bar{x} \leq L, -y_0 \leq \bar{y} \leq y_0) \dots\dots\dots (1)$$

初張力 N_{x0}, N_{y0} は次の釣合式を満す。

$$N_{x0}\bar{\epsilon}_x + N_{y0}\bar{\epsilon}_y = 0 \quad (t < 0)$$

ここに $\bar{\epsilon}_x = \bar{z}_{x\bar{x}}, \bar{\epsilon}_y = \bar{z}_{y\bar{y}}$ 。尚、 $\bar{\epsilon}_{xy} = \bar{z}_{x\bar{y}} = 0$ とする。曲げ剛性を無視した Donnel-Mushtari-Vlasov 型の非線形釣合方程式に D'Alambert の原理を適用すると次の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \kappa_x \xi F_{yy} + \kappa_y F_{xx} + \xi \{ w_{xx} F_{yy} + w_{yy} F_{xx} - 2w_{xy} F_{xy} \} \\ & + \epsilon_{x0} w_{xx} + \xi \epsilon_{y0} w_{yy} + P_z - \frac{ML^2}{Ehg} \ddot{w} = 0 \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに $x = \bar{x}/L, y = \bar{y}/2y_0, z = \bar{z}/L, w = W/L$ である無次元量を導入している。また、接方向の慣性項は無視し得るので含まれていない。 F は応力関数で次の関係がある。

$$N_x = Eh\xi^2 F_{yy} + N_{x0}, \quad N_y = EhF_{xx} + N_{y0}, \quad N_{xy} = -Eh\xi F_{xy}$$

また $\xi = L/2y_0, \epsilon_{x0} = N_{x0}/Eh, \epsilon_{y0} = N_{y0}/Eh, h =$ 屋根厚である。

適合条件は次式で与えられる。

$$\nabla^2 \nabla^2 F = \xi^2 \{ w_{xy}^2 - w_{xx} w_{yy} - \kappa_x w_{yy} \} - \xi \kappa_y w_{xx} \dots\dots\dots (3)$$

2.1 P_z の決定 風は x 方向に作用するとする。屋根の振動により乱される変動風速（以後攪乱風速と名付ける）を L で normalize したものを $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ であらわすと屋根に及ぼす風圧の変化は Bernoulli の定理により次のようになる。

$$\text{外面: } \Delta P_+ = -\rho_0 L^2 \dot{\phi}_+ - \rho_0 \bar{u} L U, \quad \text{内面: } \Delta P_- = -\rho_0 L^2 \dot{\phi}_-$$

ただし、 ϕ_+, ϕ_- は各々外及び内部攪乱風速場の速度ポテンシャルであり、また、内外空気は同一密度 ρ_0 を有し、 $t < 0$ で内部空気は静止しているとする。故に式(2)の動外力 P_z は次のように与えられる。

$$P_z = \frac{L^3}{Eh} \rho_0 \left\{ \frac{U^2}{2L^2} - (\dot{\phi}_- - \dot{\phi}_+) / z_{z=0} + \bar{u}_+ \frac{U}{L} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

尚 \bar{u} 等の2次の項は無視されている。 P_z はしたがって $P_z = P_{zs} + P_{zt}(t)$ とわけられ、 P_{zs} は静的外力と見做

される。これによる変位 ${}_0w$ と応力関数 ${}_0F$ は(2)式で $\dot{w}=0$ として得られる。

$$w = {}_0w + \bar{w}, \quad F = {}_0F + \bar{F}$$

と置換して式(2)に代入すると式(2)は次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} & \xi(\kappa_x + {}_0w_{xx})\bar{F}_{yy} + (\kappa_y + \xi_0 w_{yy})\bar{F}_{xx} - 2\xi_0 w_{xy}\bar{F}_{xy} \\ & + (\epsilon_{x0} + \xi_0 \bar{F}_{yy})\bar{w}_{xx} + \xi(\epsilon_{y0} + {}_0F_{xx})\bar{w}_{yy} - 2\xi_0 \bar{F}_{xy} w_{xy} \\ & + \xi(\bar{w}_{xx}\bar{F}_{yy} + \bar{w}_{yy}\bar{F}_{xx} - 2\bar{w}_{xy}\bar{F}_{xy}) + p_{zt} - \frac{ML^2}{Ehg} \ddot{\bar{w}} = 0 \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

以後混乱の生じない限り w, F 上の $-$ は取り除く。

2.2 攪乱風速場の決定 内・外部にわけて考える。

(a) 外面において 攪乱風速と屋根変位とは次の連成関係にある。

$$\bar{w}_+ \equiv \bar{w}|_{z=0} = \dot{w} + (U/L + \bar{u}|_{z=0})w_x + \xi \bar{u}|_{z=0} w_y \simeq \dot{w} + \frac{U}{L} w_x \dots \dots \dots (6)$$

屋根面との境界に厚さの無視し得る渦層の存在を仮定する。ここでは屋根の動的挙動を解析するのであるからこの渦層は攪乱風速によるもののみを対象とする。屋根面単位面積当りの渦度分布を γ_c 、後流のそれを γ_w とあらわすと次のように考えられる。

$$\gamma_c = \gamma_c(x, y, t), \quad \gamma_w = \gamma_w(x, y, t)$$

ただし変位 w は他の諸量に比して充分小さいと考えている (h を除く)。渦を含む流体にあっては複素ポテンシャルが定義され得る。 y 方向の変化を無視すると3次元の系は2次元の系 ($x-z$ 平面) での取り扱いとなる。複素ポテンシャルの導関数より

$$\bar{u} - i\bar{w} = \frac{1}{2\pi i} \int_{z_0}^{z_1} \frac{\gamma_c}{S-Z} dZ + \frac{1}{2\pi i} \int_{z_1}^{\infty} \frac{\gamma_w}{S-Z} dZ \dots \dots \dots (7)$$

ここに $S = x + iz, i = \sqrt{-1}$

$z=0$ とすると

$$\bar{w}_+ = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_c}{x-S} dS + \frac{1}{2\pi} \int_1^{\infty} \frac{\gamma_w}{x-S} dS \dots \dots \dots (7)'$$

(7)' を γ_c について解くと

$$\gamma_c = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1-x}{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 2 \int_0^1 \left(\frac{S}{1-S} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\bar{w}_+}{S-x} dS + \int_1^{\infty} \left(\frac{S}{S-1} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma_w}{S-x} dS \right\} + \frac{C}{\sqrt{x(1-x)}} \dots \dots \dots (8)$$

$x=1$ で γ_c は有界でなければならないから、 $C=0$ とおく。他方定義より \bar{u}_m を屋根の風方向の速度として

$$\gamma_c = \bar{u}_m - \bar{u} \simeq \bar{u}_m - \bar{u}_+ \dots \dots \dots (9)$$

が成立する。ただし $\bar{u}_+ \equiv \bar{u}|_{z=0}$ である。

ポテンシャル ϕ_+ は次のように決められる。

$$\phi_+ |_{z=0} = \int_{-\infty}^0 \bar{u}_+ dx + \int_0^{\infty} \bar{u}_+ dx \dots \dots \dots (10)$$

(b) 内面において 内部空気は $t < 0$ で静止状態にあると考えている。攪乱風速場のポテンシャル ϕ_- は次式を満す。

$$\nabla^2 \phi_- = 0 \dots \dots \dots (11)$$

ϕ_- の境界条件は建物の周囲の壁の状態に応じて定められる。例えば

$$\frac{\partial \phi_-}{\partial z} \Big|_{z=0} = \dot{w}, \quad \frac{\partial \phi_-}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\partial \phi_-}{\partial y} \Big|_{y=\frac{1}{2}} = \frac{\partial \phi_-}{\partial z} \Big|_{z=-H/L} = 0 \dots \dots \dots (12)$$

3. 解

以上に与えられた式にさらに一式が加えられれば用いられた未知数を全て求めることが出来る。
完全流体の仮定より次式が成立しなければならない。

$$\frac{D}{Dt}\gamma_w = \dot{\gamma}_w + \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial x} \gamma_w = 0$$

他方 γ_c と γ_w の循環は零であるから

$$\int_0^1 \gamma_c dx + \int_1^\infty \gamma_w dx = 0$$

両式より

$$\gamma_w(L, y, t) = \gamma_w\left(x, y, t + \frac{(x-1)L}{U}\right) \dots\dots\dots (13)$$

ただし $\gamma_w(\infty, y, t) = 0$ と仮定する。

以上に示された連立微積分方程式を解けばよいが、解析的に解を求めるのは極めて困難であることは明らかであるので、ここでは Galerkin 法を適用して近似解を求める。

3. 1 フラッター問題 既述のようにフラッター問題としては臨界風速を求めることが目的の一つである。これは空力的減衰効果が正から負に変わる時の風速として求められるので自由振動問題であり、線形振動として取り扱って何等支障はない。故に非線形項を無視する。また自然風速は一定であるとし U_0 と記す。

屋根の変形モードを次の形に置く。

$$w = i\{EX(i\alpha_1) - EX(j\alpha_2)\}e^{i\omega t} \cos \beta y \dots\dots\dots (14)$$

ここに $EX(\alpha) = e^{-\alpha x}$, $\alpha_1 = \frac{\lambda}{k} + m\pi$, $\alpha_2 = |\bar{\alpha}_2|$, $\bar{\alpha}_2 = \frac{\lambda}{k} - m\pi$

$$\beta = \frac{n\pi}{2y_0}, \quad m, n: \text{整数} \quad j = \begin{cases} i \dots \bar{\alpha}_2 \geq 0 \\ -i \dots \bar{\alpha}_2 < 0 \end{cases} \quad \lambda = \frac{\omega L}{2U_0}$$

k : 無次元波形伝播速度パラメータ。伝播速度 u_0 は $u_0 = 2kU_0$ で与えられる。

(14) を式 (3) に代入して次を得る。

$$F = i\{A_1 EX(i\alpha_1) - A_2 EX(j\alpha_2)\}e^{i\omega t} \cos \beta y \dots\dots\dots (15)$$

ここに

$$A_1 = \frac{(\kappa y \alpha_1^2 + \kappa x \xi \beta^2) \xi}{(\alpha_1^2 + \xi^2 \beta^2)^2}, \quad A_2 = \frac{(\kappa y \alpha_2^2 + \kappa x \xi \beta^2) \xi}{(\alpha_2^2 + \xi^2 \beta^2)^2}$$

境界条件(12)のもとでは ϕ_- は次の形となる。

$$\phi_- = -\frac{H}{L} \omega \{EX(i\alpha_1)Z_1(z) - EX(j\alpha_2)Z_2(z)\}e^{i\omega t} \cos \beta y \dots\dots\dots (16)$$

ここに $Z_l(z)$ は次のものである。

$$Z_l(z) = C_l \cosh \eta_l \left(\frac{L}{H} z + 1 \right) \\ \eta_l = \frac{H}{L} \sqrt{\alpha_l^2 + \xi^2 \beta^2}, \quad C_l = \frac{1}{\eta_l \sinh \eta_l}, \quad l = 1, 2$$

(14), (8), 循環=0 の関係より次式が導びかれる。

$$2 \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{w}_s dx + \int_1^\infty \left(\frac{s}{s-1} \right)^{\frac{1}{2}} \dot{\gamma}_w ds = 0 \dots\dots\dots (17)$$

式(13)及びこの式より γ_w は次の形に置けることがわかる。

$$\gamma_w = \bar{A} \frac{U_0}{L} e^{-i2\lambda(x-1)} e^{i\omega t} \cos \beta y \dots\dots\dots (18)$$

(17) に代入して \bar{A} は次のように決められる。

$$\begin{aligned} \bar{A} = \frac{4}{f(\lambda)} & \left[(\alpha_1 - 2\lambda) \left\{ J_0 \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) - i J_1 \left(\frac{\alpha_1}{2} \right) \right\} e^{-i(\lambda + \frac{\alpha_1}{2})} \right. \\ & \left. + (i \cdot j \alpha_2 + 2\lambda) \left\{ J_0 \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) - j J_1 \left(\frac{\alpha_2}{2} \right) \right\} e^{-i(\lambda + j \frac{\alpha_2}{2})} \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

ここに $f(\lambda) = Y_0(\lambda) + J_1(\lambda) - i\{Y_1(\lambda) - J_0(\lambda)\}$ 。

\dot{u}_m は \ddot{u}_+ に比して無視出来ると考えられるので、また、 $\ddot{u}_+ = 0$ ($x < 0$) と考えられるので

$$\phi_+ |_{z=0} = \frac{d}{dt} \int_0^x \ddot{u}_+ dx = - \int_0^x \dot{\gamma}_c dx$$

したがって

$$P_{zt} = - \frac{L^3}{Eh} \rho_0 \{ \phi_+ |_{z=0} + \frac{U_0}{L} \gamma_c + \int_0^x \dot{\gamma}_c dx \}$$

${}_{0}\omega, {}_{0}F$ を無視し Galerkin 法を適用すると ω に関する次式が得られる。

$$- Q_0 \lambda^2 + \frac{1}{4V^2} Q_1 + \eta (- Q_2 \lambda^2 + Q_3 \lambda + Q_4) = 0 \dots\dots\dots (20)$$

ただし

$$\begin{aligned} V &= U_0 \sqrt{\frac{M}{Ehg}} = U_0 \sqrt{\frac{\rho_m}{E}}, \quad \eta = \frac{\rho_0 Lg}{M} = \frac{\rho_0 L}{\rho_m h} \\ \lambda &= \frac{\omega L}{2U_0} = \frac{\bar{\omega}}{V}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega L}{2} \sqrt{\frac{M}{Ehg}} = \frac{\omega L}{2} \sqrt{\frac{\rho_m}{E}} \\ \rho_m &= \frac{M}{hg} : \text{屋根の等価密度} \end{aligned}$$

$Q_i = Q_i(\alpha_1, \alpha_2, \lambda)$ については Appendix を参照されたい。(20) 式が正の実根 λ をもつときの U_0 がフラッタ臨界風速となる。正実根 λ は次式を満す。

$$I_m \{ (-Q_2 \lambda^2 + Q_3 \lambda + Q_4) \bar{Q}_1 \} = 0 \dots\dots\dots (21)$$

\bar{Q}_i は Q_i の共役なものである。したがって臨界風速は次式で与えられる。

$$4V_{cr}^2 = \frac{Q_1 \cdot \bar{Q}_1}{Re \{ Q_0 \cdot \bar{Q}_1 \lambda^2 + \eta (Q_2 \lambda^2 - Q_3 \lambda - Q_4) \bar{Q}_1 \}} \dots\dots\dots (22)$$

3. 2 共振問題 自然風の速度は $U(t) = U_0 + U_1(t)$ であらわし得る。 U_0 は定常平均風速であり、 U_1 は平均値零、スペクトラル密度関数 $S_U(\omega)$ の定常ランダム成分とする。書きかえると

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \theta_i)$$

の形であらわし得る。他方我々は $\omega_i \approx \frac{\gamma}{s} \omega$ (ω : 固有振動数, γ, s ; 互いに素な自然数) のとき共振現象の存在することをよく知っている。したがってここではそのような成分のみを考慮する。すなわち

$$U = U_0 (1 - q \cos \omega_e t), \quad |q| < 1 \dots\dots\dots (23)$$

として考える。

Davenport は $S_U(\omega)$ として次の値を提唱している⁵⁾。

$$S_U(\omega) = \frac{8}{\omega} \left(\frac{\sigma_u}{2.45} \right)^2 \frac{X^2}{(1+X^2)^{4/3}}, \quad X = 600 \frac{\omega}{U_0 \pi}$$

σ_u は地表面の状態により定まる常数でありここでは 0.25 を用いる。これより式(23)の q は次のように定まる。

$$q = 2[Sv(\omega_e)]^{\frac{1}{2}} \dots\dots\dots (24)$$

q は十分に小さいので以後次の近似を用いる。

$$U^2 = U_0^2(1 - 2q \cos \omega_e t)$$

定常に達した共振状態の解を求める。変形モードを次の形におく。

$$w = T(t) \sin m\pi x \cos n\pi y \dots\dots\dots (25)$$

式(3)より

$$F = A_1 T \sin \alpha x \cos \beta y + A_2 T^2 \cos 2\alpha x + A_3 T^2 \cos 2\beta y$$

ここに

$$A_1 = \frac{\xi(\kappa_x \beta^2 \xi + \kappa_y \alpha^2)}{(\alpha^2 + \xi^2 \beta^2)^2}, \quad A_2 = \frac{\xi^2 \beta^2}{32\alpha^2}, \quad A_3 = -\frac{\alpha^2}{32\xi^2 \beta^2}, \quad \alpha = m\pi, \beta = n\pi$$

3.1 と同様に

$$\phi = \frac{H}{L} \hat{T}(t) \sin \alpha x \cos \beta y Z(z)$$

$$Z(z) = \frac{1}{\zeta \sinh \zeta} \cosh \left(\frac{L}{H} z + 1 \right), \quad \zeta = \frac{H}{L} \sqrt{\alpha^2 + \xi^2 \beta^2}$$

γ_w についても 3.1 と同様に次のように置く。

$$\gamma_w = \frac{U}{L} f(x, y) T(t) + g(x, y) \hat{T}(t)$$

$T(t)$ の第一近似解は調和関数であることは分かるので、 f, g を決定するときのみ $\ddot{T} = -\omega^2 T$ の関係を用いることにする。また式(17)は風速変動の一周期で平均的に満たされると仮定すると、 f, g は次の形となる。

$$f(x, y) = (A \cos 2\lambda x + B \sin 2\lambda x) \cos \beta y$$

$$g(x, y) = \frac{1}{2\lambda} (-A \sin 2\lambda x + B \cos 2\lambda x) \cos \beta y$$

ここに

$$A = \frac{4}{P^2 + Q^2} (2\lambda \cdot S \cdot Q + R \cdot P), \quad B = \frac{4}{P^2 + Q^2} (2\lambda \cdot S \cdot P - R \cdot Q)$$

$$P = \{J_0(\lambda) - Y_1(\lambda)\} \sin \lambda + \{Y_0(\lambda) + J_1(\lambda)\} \cos \lambda$$

$$Q = \{J_0(\lambda) - Y_1(\lambda)\} \cos \lambda - \{Y_0(\lambda) + J_1(\lambda)\} \sin \lambda$$

$$R = \alpha \left\{ J_0 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} - J_1 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \right\}$$

$$S = J_0 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} + J_1 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \lambda = \frac{\omega L}{2U_0}$$

Galerkin 法を適用すると次式が得られる。

$$T'' + (\Phi_1 - \Psi_1 \cos 2\nu\tau) T' + (\Phi_2 - \Phi_2 \cos 2\nu\tau) T + \Phi_3 T^2 + \Phi_4 T^3 = \bar{P} \cos 2\nu\tau \dots\dots\dots (26)$$

ここに $\nu = \frac{d}{d\tau}$, $\tau = \omega_0 t$ (ω_0 は任意に選ばれた仮定の固有円振動数とする)

$$\bar{P}: \quad \neq 0 \dots m: \text{ odd}, \quad \nu = \frac{\omega_e}{2\omega_0}$$

$$\quad \quad \quad = 0 \dots m: \text{ even}, \quad \Phi_i, \Psi_i; \nu \text{ の関数}$$

吊屋根において起り易いと考えられる逆対称変形モード ($m: \text{even}$) では Φ_i, Ψ_i に ${}_0\omega, {}_0F$ の項は含まれず、又 \bar{P} は消えパラメトリック共振の状態となる。ここではこの状態の解を求める。

2 次近似解として次を得る。

$$T = a \cos \phi + \frac{1}{\nu^2} \left\{ -\frac{a^2}{2} \Phi_3 + \frac{a^2}{6} \Phi_3 \cos \phi + \frac{a^3}{32} \Phi_4 \cos 3\phi + \frac{a}{16} q_3 \nu \sin(3\phi - 2\delta) - \frac{a}{16} q_2 \cos(3\phi - 2\delta) \right\} \dots (27)$$

ここに、 $\nu\tau = \phi - \delta$

$$\tan 2\delta = \frac{\nu\{2\Phi_1 q_2 \mp q_1 \sqrt{q_2^2 + \nu^2(q_1^2 - 4\Phi_1^2)}\}}{2\nu^2 \Phi_1 q_1 \pm q_2 \sqrt{q_2^2 + \nu^2(q_1^2 - 4\Phi_1^2)}}$$

であり、また次式が得られる。

$$\nu^2 = \kappa + \frac{3}{4} a^2 \Phi_4 + \frac{1}{8} K \pm \sqrt{q_2^2 + \left(\kappa + \frac{3}{4} a^2 \Phi_4\right) K + \frac{1}{16} K^2} \dots (28)$$

ただし

$$q_2^2 + \left(\kappa + \frac{3}{4} a^2 \Phi_4\right) K + \frac{1}{16} K^2 \geq 0 \dots (29)$$

である。ここに $\kappa = \Phi_2 / \omega^2$, $K = K(\nu) = q_1^2 - 4\Phi_1^2$ であり q_i は q の関数である。Appendix を参照されたい。

式(28)より定まる ν_1, ν_2 により定まる $\Delta = 2(\nu_1 - \nu_2)|_{a=0}$ 内にもし風速変動の周期が入ればパラメトリック共振がおこる。換言すれば Δ が大きい程共振は起り易いと云える。

式(29)の等号時の根を q_0 とすると式(29)は

$$q \geq q_0 \dots (29)'$$

と書き換えられる。したがって変動風速成分 q が上式を満すときパラメトリック共振が存在し得る。

ω_0 は任意に選ばれているが、風速 U_0 下の屋根の固有円振動数を用いるのが適当と考えられる。それは次式から計算される。

$$V_0^2 \left\{ 16\lambda^2 + \frac{(K_4 + K_5)^2}{4K_1^2} \right\} = 4\lambda^2 \frac{K_2 + V_0^2 K_3}{K_1} \dots (30)$$

ここに、 $V_0^2 = U_0^2 \frac{M}{Ehg}$, $K_1 \sim K_5$: Appendix 参照。

4. 数 値 例

最も一般的な形状として次式であらわされるようなものを考える。

$$z = \frac{4c}{L}(x^2 - x) - \frac{4b}{L}y^2 \dots (31)$$

したがって $\bar{\kappa}_x = c/L$, $\bar{\kappa}_y = b/2y_0$ を形状パラメータとして用いる。形状・座標系を Fig. 1 に示す。

先ずフラッター-臨界風速を求める。この場合 ω が低いとき程重要になるが、それは $m=2$ 即ち基本逆対称変形モードの場合であることがわかったので、ここではこの場合について考察を進める。尚 $\bar{\kappa}_x = \bar{\kappa}_y = 0.05$, $\xi=2$ の形状の場合を基準として論じることとする。他の形状の場合は上述の形状の場合の結果に対する比の形式で与えられるがこれに関しては後述する。Fig. 2 に $\omega \sim V_{cr}$ 関係を η 及び k をパラメータとして記す。この図はフラッターに関する種々の重要な情報を提供してくれる。例えば、 k が小さくなると ω は小さくなり且つ V_{cr} が漸増すること、しかし $k \rightarrow 0$ で V_{cr} は一定値となること、また、 k がある値以下ではほぼ V_{cr} は一定になることがわかる。 $k \rightarrow \infty$ では変形モードは移動のない定常状態である。また η が大きくなれば V_{cr} は当然小さくなる。実験によると⁹⁾ フラッターは変形モードが traveling wave 型で発生するらしい。この図

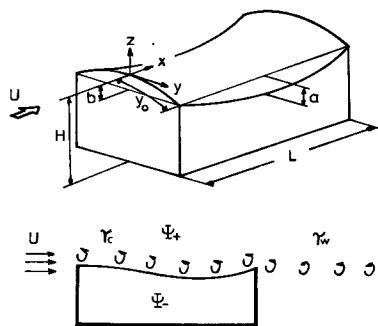


Fig. 1 Sketch of structures and coordinate system.

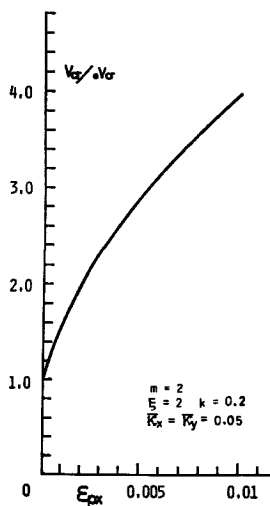


Fig. 3 Influence of prestress on flutter critical wind velocity, where ${}_0V_{cr}$ is that with no prestress.

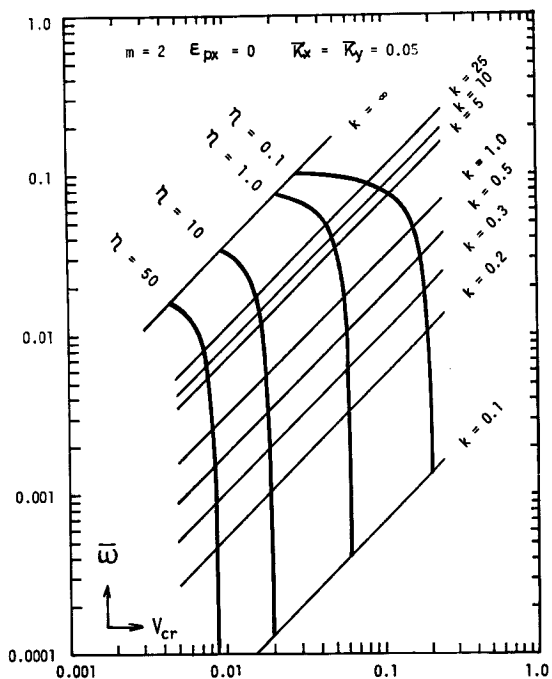


Fig. 2 Dependence of flutter critical wind velocity and frequency on traveling wave propagation speed.

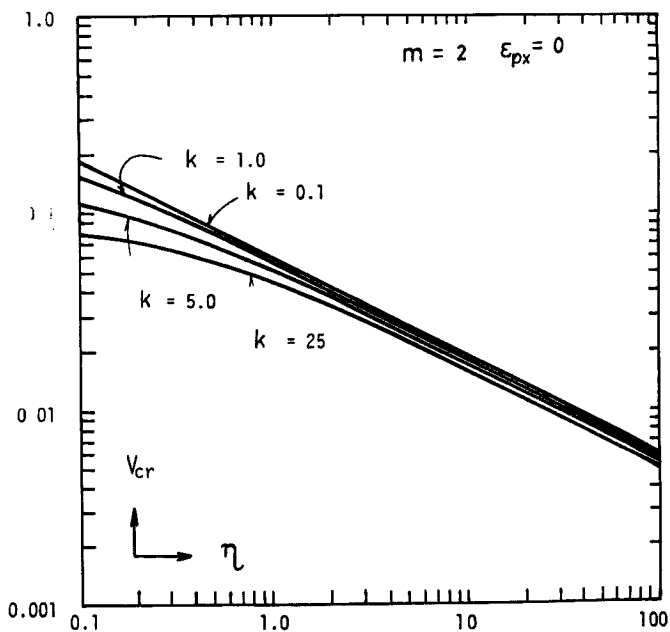
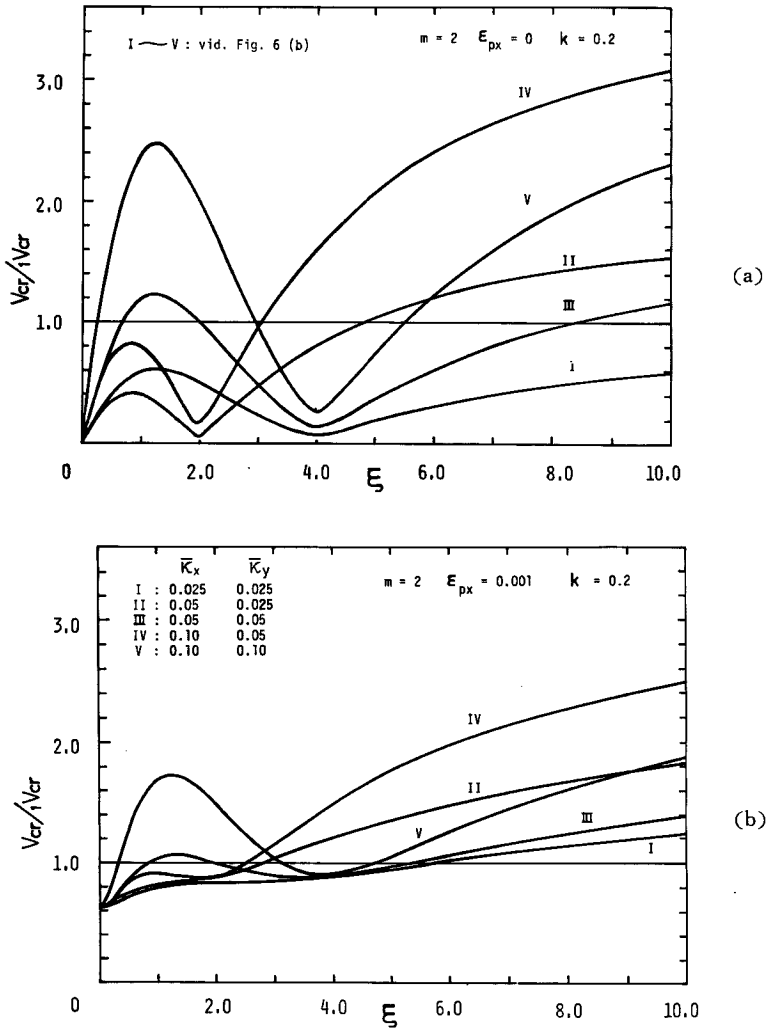


Fig. 4 Variation of flutter critical wind velocity due to weight and length of the roof.

図からそれが説明出来る。静止状態にある吊屋根が臨界風速 V_{cr} 下で何等かの（例えば風速の微小な周期的変動等）攪乱を受けると急速に振幅が増し、いわゆるフラッター現象となるが、それはまず **traveling wave** 型ではじまる。吊屋根がエネルギーの供給をうけ続けると波形伝播速度が次第に増し、振動数も増加する。もし V_{cr} が一定に保たれているならば負の空力減衰効果の存在する領域に移行するので、振幅は急増することになる。したがって真の V_{cr} は $k \rightarrow 0$ のとき与えられると考えてよい。だが $k \rightarrow 0$ の場合は解の特異点となり、 V_{cr} は容易には計算出来ないが、**Fig. 2** より $k=0.2$ のときの V_{cr} で代用しても誤差は無視し得る程度であることがわかる。

吊屋根に初張力が導入されているときは当然 V_{cr} は大きくなるがその様相は **Fig. 3** に示される。初張力



Figs. 5 Influence of curvature and length-width ratio on flutter critical velocity, V_{cr} in (a) and (b): flutter critical wind velocity of the case ($\bar{\kappa}_x = \bar{\kappa}_y = 0.05$, $\xi = 2$) with no prestress and with $\epsilon_{px} = 0.01$, respectively.

は歪として表現されている。この図は必要初張力を決定する上で極めて有用である。また η にもとづく V_{cr} の変化の様相を Fig. 4 に示す。吊屋根材料、構成形式を決める場合に必要図である。

アスペクト比、曲率が上述の場合と異なる場合を Figs. 5 に示す。この図は $\bar{k}_x = \bar{k}_y = 0.05$, $\xi = 2$ の場合の V_{cr} を基準としてそれに対する比で与えている。尚 $k = 0.2$ の場合である。Fig. 2 ~ Figs. 5 を用いることにより図に示された範囲でいかなる初張力、屋根材料、形状であってもフラッター臨界風速が決められる。

次にパラメトリック共振の場合を考える。同様に $\bar{k}_x = \bar{k}_y = 0.05$, $\xi = 2$ の場合を基準に考える。 m, η を変化せしめたときの無次元化平均風速 V_0 と屋根の無次元化最小円振動数 ω の関係を Figs. 6 に示す。形状の異なる場合には次式により V_0 を等価平均風速 eV_0 に変換して Figs. 6 を適用すればよい。尚次式には初張力

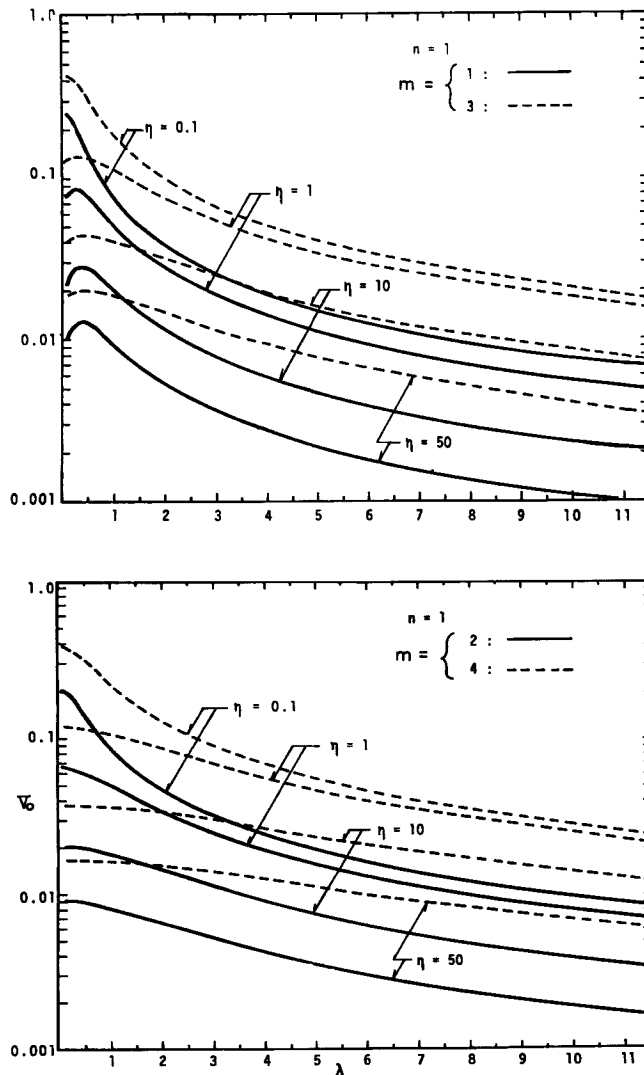


Fig. 6 Relations between reduced mean wind velocity and frequency parameter λ of roof associated with η . (for case: $\xi = 2$, $\bar{k}_x = \bar{k}_y = 0.05$)

の影響を考慮する場合も含まれる。

$$eV_0 = \sqrt{K_2} \cdot \frac{\alpha^2 + 4\beta^2}{0.4\alpha^2 + 0.8\beta^2} V_0 \dots\dots\dots (32)$$

Figs. 6 より次のことがわかる。 U_0 がある程度大きな値をもつまでは $\bar{\omega}$ は風にあまり影響されず、さらに U_0 が増すと急速に減少することがわかる。尚 **Figs. 6** は横軸に λ がとってあるのでこのことは直接的には見られない。また η, λ を一定とすると m が小さい程 $\bar{\omega}$ は小さくなることがわかる。

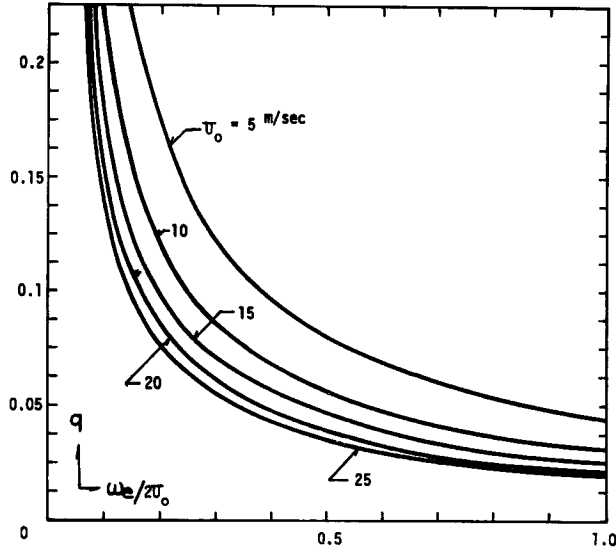


Fig. 7 Relations between nondimensional Fourier coefficient q of wind velocity fluctuation in atmospheric turbulence and its circular frequency.

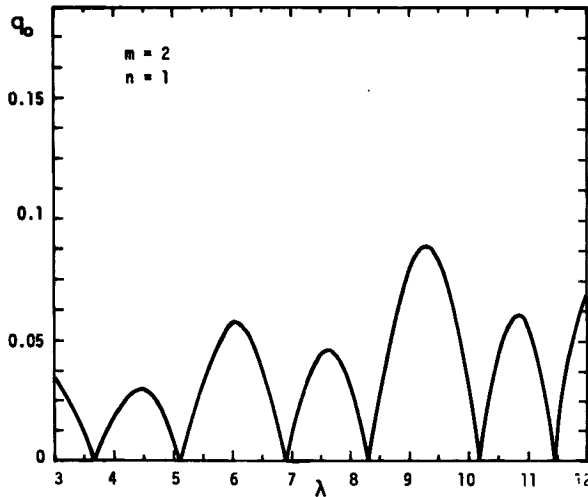
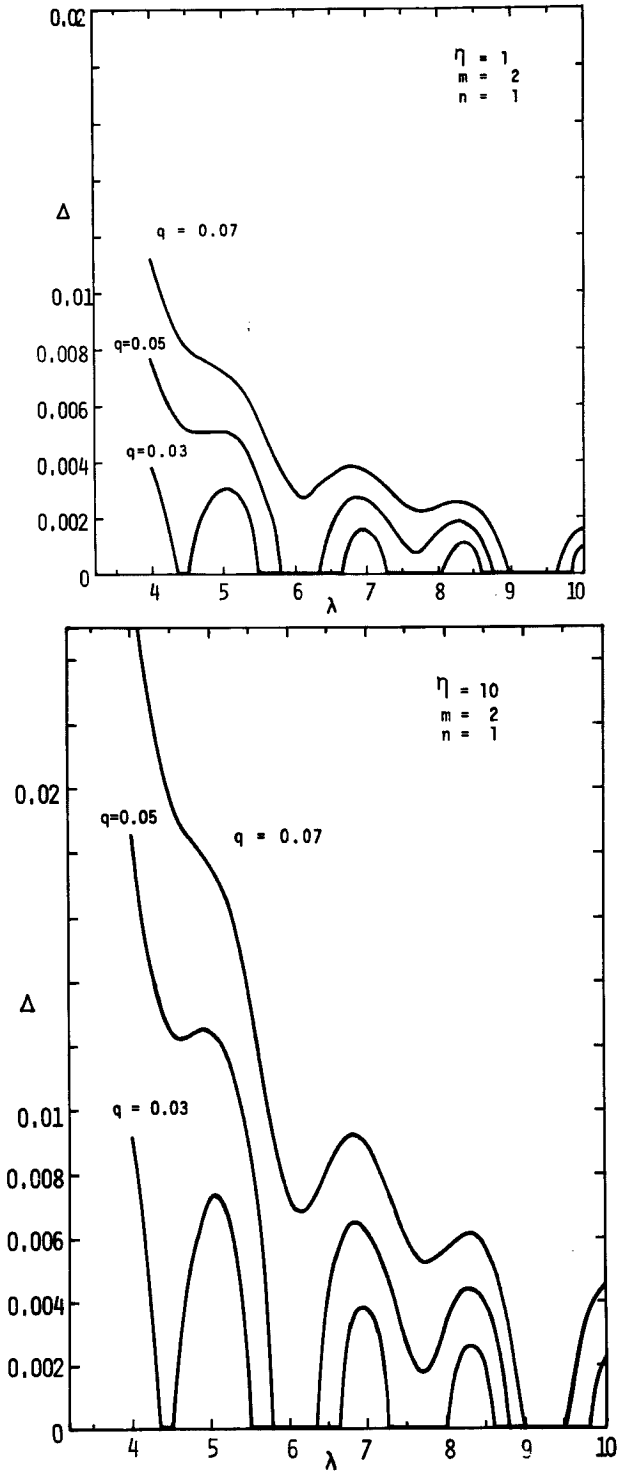


Fig. 8 Theoretically determined lower limit of q versus λ curve. Parametric resonance be induced by q not less than q_0 .



Figs. 9 Δ , range of ν where parametric resonance exists, versus λ curves associated with q .

式(24)で計算される自然風中の風速変動成分の Fourier 係数 q を Fig. 7 に与える。さらに式(29)'における q_0 を $m=2$ の場合について Fig. 8 に与える。Fig. 7 と Fig. 8 より $q \geq q_0$ を満す領域 λ を求めるとそれがパラメトリック共振の存在し得る領域となる。尚 Fig. 7 は横軸単位は $\omega_e/2U_0$ であるので $\lambda = \omega L/2U_0$, $\nu = \omega_e/2\omega_0$ を考慮してこの領域を決めねばならない。また, Fig. 7 及び Fig. 8 は式(31)の如何に拘わらず成立することを注記したい。尚, 次の結果も得ている。

$m=odd$ を対して $q_0 > 0.5$

$m=4$ で $\lambda > 3.0$ に対して

$q_0 < 0.01$

したがってパラメトリック共振として $m=2$ の場を主として考察の対象とすればよいことがわかる。

Figs. 6 より見られるように V_0 が大きくなると λ は小さくなり, Fig. 8 から λ が小さくなれば傾向として q_0 が小さくなり且つ Fig. 7 より q は増加することがわかる。即ちパラメトリック共振は生じ易くなる。その様子を Figs. 9 に $\Delta \sim \lambda$ 関係として示した。 λ が減少すれば Δ は大きくなる傾向がある。 q が大きい程その傾向は著るしい。 q が小さいときには λ の値によってはパラメトリック共振が発生しない範囲がある(図中 $\Delta=0$ の範囲)このことは吊屋根が自然風中で常に共振状態にあるということが無い事と対応している。 Δ は U_0 がフラッター臨界風速($\lambda=3.6726$)に近づくと急増し極めて大きくなっているが, 当然の事である。しかし λ が十分に大きく, 即ち U_0 がフラッター臨界風速より十分に小さい場合でも Δ が大きくなる領域がいくつか現われることに注意を要する。即ち平均風速がかなり小さい場合でもパラメトリック共振は誘起され

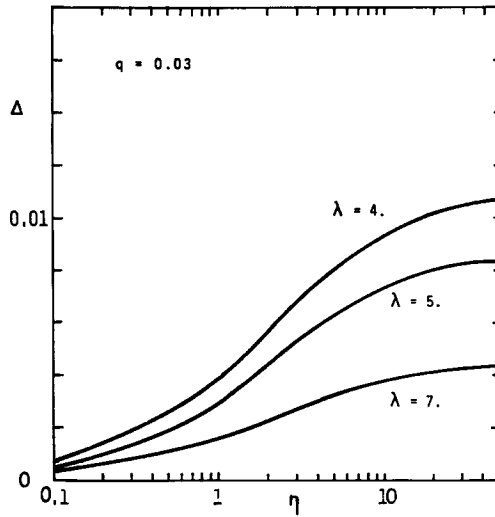


Fig. 10 An example of variation of Δ due to η . (for case $q=0.03$)

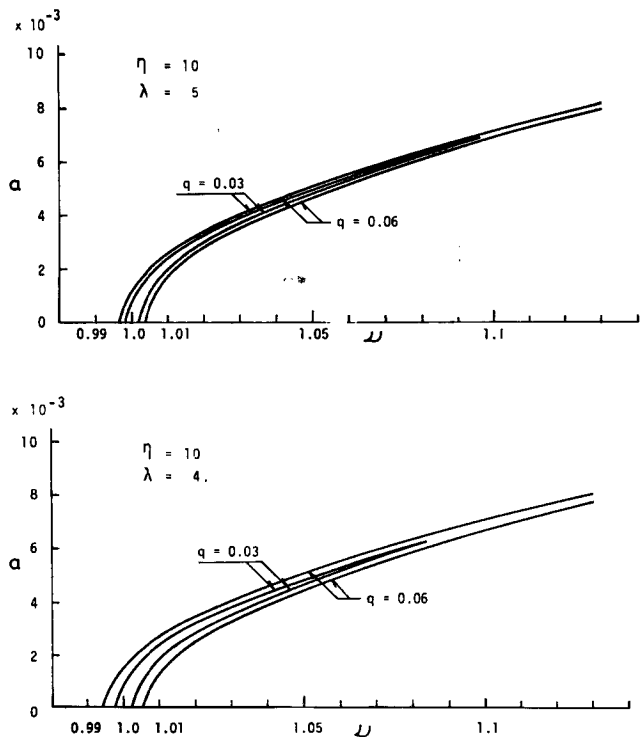


Fig. 11 Resonant curves of the roof in steady state.

る可能性があり、この事を指摘した研究は未だなかったのである。吊屋根の設計に当ってこのパラメトリック共振に対する配慮がなされねばならない。

η が小さい程即ち吊屋根の厚さが大になるか、等価質量が増す程 λ が急速に小さくなりパラメトリック共振発生の可能性が急速に減少する事が **Fig. 10** に示される。この図より危険なパラメトリック共振の発生を阻止するように適切に屋根材料・構成形式を選び得る事がわかる。ただし非線形性のためこのパラメトリック共振は発散するわけではない。このことは定常状態における応答曲線 **Fig. 11** に示される。硬化型の非線形性がかかなり大きい。故に共振振幅が増せば ω が、したがって λ が増加するので、 q , λ が小さくなりパラメトリック共振の危険は減じられる方向にあり、屋根の崩壊には至らないと考えられるが機能上に支障が生じると考えられる。

参 考 文 献

- 1) A. Siev: Experimental study of flutter in suspension roofs, Bull. I. A. S. S., No. 23, 1965
- 2) L. Zetlin: Elimination of flutter in suspension roofs, Proc. I. A. S. S. Colloquium, Paris
- 3) 例えば Proc. I. A. S. S. Pacific Symp. Part II, 1973
- 4) 國枝治郎: 円筒型空気膜屋根の空力的非線形振動解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和47年10月
- 5) 國枝治郎: 円筒型空気膜屋根の振動性状について, 日本建築学会大会学術講演梗概集, 昭和48年10月
- 6) H. Kunieda: Flutter of hanging roofs and curved membrane roofs, Int. J. of Solids and Structures, Vol. 11, No. 4, 1975
- 7) E. H. Dowell: Panel flutter: A review of the aeroelastic stability of panels and shells, AIAA J., 8, 1970
- 8) A. G. Davenport: The spectrum of horizontal gustiness near the ground in high wind, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 87, 1961
- 9) 川村純夫: 吊屋根面の風による動的性状, 日本建築学会大会講演梗概集, 昭和46年11月

Appendix

$$Q_0 = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{p+q} R(p, q)$$

$$Q_1 = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{p+q} (A_p + \epsilon_{px} \alpha_p^2 + \epsilon_{py} \xi^2 \beta^2) R(p, q), \quad \epsilon_{px} = N_{x0}/Eh, \quad \epsilon_{py} = N_{y0}/Eh$$

$$Q_2 = \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{p+q} \left(\frac{H}{L} Z_p(0) R(p, q) + \frac{2}{\pi} S(p, q) \right)$$

$$Q_3 = \frac{1}{\pi} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{p+q} \left\{ i W(p, q) + \left(\frac{j}{i} \right)^{p-1} \alpha_p S(p, q) \right\} + \frac{1}{2\pi} A e^{i2\lambda} (X(1) - X(2))$$

$$Q_4 = -\frac{i}{2\pi} \sum_{p=1}^2 \sum_{q=1}^2 (-1)^{p+q} \left(\frac{j}{i} \right)^{p-1} \alpha_p W(p, q) - \frac{i}{4\pi} A e^{i2\lambda} (Y(1) - Y(2))$$

$$R(p, q) = \frac{1}{\alpha_p i^p + \alpha_q i^q} (1 - e^{-i(2\lambda/k)})$$

$$\text{もし } \lambda/k \rightarrow 0; \quad R(p, q) = 1 \quad (p \neq q) \\ = 0 \quad (p = q)$$

$$S(p, q) = \frac{\pi^2}{2\alpha_q} e^{-i(\alpha_p \alpha_q + i \alpha_q^2)^{1/2}} \left[J_0 \left(\frac{\alpha_p}{2} \right) \left\{ J_1 \left(\frac{\alpha_q}{2} \right) - i J_0 \left(\frac{\alpha_q}{2} \right) \right\} \right. \\ \left. + i q e^{-i \alpha_q} \alpha_q^{-2} \left\{ J_0 \left(\frac{\alpha_p}{2} \right) - i p J_1 \left(\frac{\alpha_p}{2} \right) \right\} + \frac{4}{\alpha_q} \sum_{r=1}^{\infty} (i p i_q)^{-r} r \cdot J_r \left(\frac{\alpha_p}{2} \right) \cdot J_r \left(\frac{\alpha_q}{2} \right) \right]$$

$$\text{もし } \alpha_q = 0;$$

$$S(p, q) = \pi^2 e^{-i_p(\alpha_p/2)} \left\{ 3J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) - i_p \cdot 2J_1\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) + J_2\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) \right\} / 8$$

$$W(p, q) = \pi^2 e^{-i_p \alpha_p + i_q \alpha_q} \left[\frac{1}{2} J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) \left\{ J_0\left(\frac{\alpha_q}{2}\right) + i_q \cdot J_1\left(\frac{\alpha_q}{2}\right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{2}{\alpha_q} \sum_{r=1}^{\infty} i_p^{-r} i_q^{1-r} J_r\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) J_r\left(\frac{\alpha_q}{2}\right) \right]$$

もし $\alpha_q = 0$;

$$W(p, q) = \frac{\pi^2}{2} e^{-i_p \alpha_p} \left\{ J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) - i_p J_1\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) \right\}$$

$$X(p) = -\pi^2 e^{-i(\lambda + i_p \alpha_p/2)} \left[\frac{1}{4} \left\{ J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) + i_p J_1\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) \right\} \left\{ Y_0(\lambda) + i J_0(\lambda) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{2\pi(i\lambda + i_p \alpha_p/2)} \left\{ J_0\left(\left| \lambda + \frac{i_p}{i} \frac{\alpha_p}{2} \right| \right) - e^{-i(\lambda + i_p \alpha_p/2)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\alpha_p} \sum_{r=1}^{\infty} (i \cdot i_p)^{r-1} J_r\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) \cdot f_r(\lambda) \right]$$

もし $i\lambda + i_p \alpha_p/2 = 0$; [] の第 2 項を $-\frac{1}{2\pi}$ で置きかえる。

もし $\alpha_p = 0$;

$$X(p) = -\pi^2 e^{-i\lambda} \left[\left\{ Y_0(\lambda) + i J_0(\lambda) \right\} / 4 + \frac{1}{2\pi\lambda} \left\{ J_0(\lambda) - e^{-i\lambda} \right\} + \frac{1}{4} f_1(\lambda) \right]$$

$$Y(p) = \frac{\pi}{4} e^{-i(\lambda + i_p \alpha_p/2)} \left[-\frac{\pi}{\alpha_p} \left\{ J_1\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) - i_p J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) + i_p e^{-i_p \alpha_p/2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{\lambda(i\lambda + i_p \alpha_p/2)} \left\{ J_0\left(\left| \lambda + \frac{i_p}{i} \frac{\alpha_p}{2} \right| \right) - e^{-i(\lambda + i_p \alpha_p/2)} \right\} \right. \\ \left. + i_p \frac{2}{\alpha_p} \left\{ \frac{i}{\lambda} J_0(\lambda) + \frac{\pi}{2} f_1(\lambda) \right\} \left\{ J_0\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) - e^{-i_p \alpha_p/2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{4}{\lambda \alpha_p} \sum_{r=1}^{\infty} (i i_p)^{r-1} J_r\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) J_r(\lambda) + i_p \frac{4\pi}{\alpha_p^2} \sum_{r=1}^{\infty} (i i_p)^{r-1} J_r\left(\frac{\alpha_p}{2}\right) f_r(\lambda) \right]$$

もし $i\lambda + i_p \alpha_p/2 = 0$; [] 内の第 2 項を $\frac{1}{2\pi\lambda}$ で置き換える。

もし $\alpha_p = 0$;

$$Y(p) = \frac{\pi}{4} e^{-i\lambda} \left[\frac{3}{4} \pi \left\{ Y_0(\lambda) + i J_0(\lambda) \right\} + \frac{1}{\lambda^2} \left\{ J_0(\lambda) - e^{-i\lambda} \right\} \right. \\ \left. - \frac{i}{\lambda} J_0(\lambda) + \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda) - \frac{\pi}{2} f_1(\lambda) - i \frac{\pi}{4} f_2(\lambda) \right]$$

こゝに $i_1 = i, i_2 = j$ である。

$$K_1 = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \eta \left(\frac{H}{L} Z(0) + \frac{4}{\pi} S_1 + \frac{1}{\lambda\pi} \langle -A R_1 + B R_2 \rangle \right) \right\}$$

$$K_2 = \frac{1}{4} \left\{ \xi^2 (\kappa_y \alpha^2 + \xi \kappa_x \beta^2)^2 / (\alpha^2 + \xi^2 \beta^2)^2 + \epsilon_p \alpha^2 + \epsilon_p y \xi^2 \beta^2 \right\}$$

$$K_3 = \frac{\eta}{2\pi} \{ 2\alpha S_2 + A \cdot R_3 + B \cdot R_4 \}$$

$$K_4 = \lambda \frac{\eta}{\pi} \{ 2\alpha S_3 + A \cdot R_2 + B \cdot R_1 \}$$

$$K_5 = \lambda \frac{\eta}{\pi} \left\{ 2 \cdot S_4 + \frac{1}{2\lambda} (-A \cdot R_4 + B \cdot R_3) \right\}$$

$$K_6 = \frac{2}{3\alpha\beta} \left\{ 2\xi^2 \alpha^2 \beta^2 A_1 + \frac{1}{8} (\kappa_x \alpha^2 + \kappa_y \xi^2 \beta^2) \right\} \left\{ (-1)^m - 1 \right\} (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$K_7 = (\alpha^4 + \xi^4 \beta^4) / 64$$

こゝに

$$S_1 = \pi s J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) S_5 + \frac{2\pi^2}{\alpha^2} s^2 \sum_{r=1}^{\infty} 2r \cdot J_{2r}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\pi^2}{8} c^2 \left\{ J_0^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\} - \frac{\pi^2}{2\alpha} J_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) c \cdot \cos \alpha$$

$$S_2 = -\frac{\pi^2}{2} c^2 J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) J_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\pi}{\alpha} c^2 \sum_{r=1}^{\infty} 2r \cdot J_{2r}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\pi^2 \alpha}{16} s^2 \left\{ J_0^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + J_1^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

$$S_3 = \pi c J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) S_5 + \frac{\pi^2}{2\alpha} J_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) s \cdot \cos \alpha$$

$$S_4 = \frac{1}{2} \left\{ \pi s J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}^2$$

$$S_5 = \frac{\pi}{8} s \left\{ J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) + J_2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\} + \frac{\pi}{2\alpha} \left\{ c J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos \alpha \right\}$$

$$R_1 = \frac{\pi^2}{4\alpha} T_1 \cdot T_3 + \frac{\pi}{4\lambda} T_5 + \frac{\pi^2}{\alpha^2} (s T_7 - c T_{10}) - \frac{\pi}{2\alpha} \left(\frac{\cos \lambda}{\lambda} J_0(\lambda) - \frac{\pi}{2} T_6 \right) \left(\cos \alpha - c J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right) \\ + \frac{\pi}{\lambda \alpha} \left[c \cdot \cos \lambda \sum_{r=1}^{\infty} J_{2r}(\lambda) J_{2r}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + s \cdot \sin \lambda \sum_{r=0}^{\infty} J_{2r+1}(\lambda) J_{2r+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right]$$

$$R_2: R_1 \text{ の } \begin{pmatrix} \sin l\lambda \\ \cos l\lambda \\ \cos l\left(\lambda \pm \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} \cos l\lambda \\ -\sin l\lambda \\ -\sin l\left(\lambda \pm \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \text{ で各々置きかえる。}(l=1, 2)$$

$$R_3 = -\frac{\pi^2}{4} T_2 \cdot T_4 - \frac{\pi}{2} T_5 + \frac{\pi^2}{\alpha} \{ c \cdot T_8 - s \cdot T_9 \}$$

$$R_4: R_3 \text{ の } \begin{pmatrix} \cos l\lambda \\ \sin l\lambda \\ \cos l\left(\lambda \pm \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \text{ を } \begin{pmatrix} \sin l\lambda \\ -\cos l\lambda \\ \sin l\left(\lambda \pm \frac{\alpha}{2}\right) \end{pmatrix} \text{ で各々置きかえる。}(l=1, 2)$$

ただし

$$T_1 + iT_2 = e^{i\lambda} H_0^{(1)}(\lambda), \quad T_3 + iT_4 = e^{i\frac{\alpha}{2}} \left\{ J_0\left(\frac{\alpha}{2}\right) - iJ_1\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right\}$$

$$T_5 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\gamma} (J_0(|\gamma|) \cos \gamma - \cos 2\gamma) - \frac{1}{\delta} (J_0(\delta) \cos \delta - \cos 2\delta) \right\}, \quad \gamma = \lambda - \frac{\alpha}{2}, \quad \delta = \lambda + \frac{\alpha}{2}$$

$$T_6 = I_m \{ e^{i\lambda} f_1 \}$$

$$T_7 + iT_8 = \sum_{r=1}^{\infty} 2r e^{i\lambda} f_{2r} J_{2r}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$T_9 + iT_{10} = \sum_{r=0}^{\infty} (2r+1) e^{i\lambda} f_{2r+1} J_{2r+1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

であり、また次の記号を用いている。

$$i = \sqrt{-1}, \quad s = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad c = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$J_n(x)$; Bessel 関数, $H_0^{(1)}$; Hankel 関数

$$f_r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+r)!} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{r+2n} \left\{ 1 + \frac{2}{i\pi} \log \frac{\lambda}{2} - \frac{2}{i\pi} \phi(r+n+1) \right\}$$

$\phi(m)$: Gauss の ϕ -関数

したがって

$$\Phi_1 = \frac{V_0^2(K_4 + K_5)}{\bar{\omega}_0 \bar{\omega} K_1}, \quad \Phi_2 = \frac{K_2 + V_0^2 K_3}{\bar{\omega}_0^2 K_1}, \quad \Phi_3 = \frac{K_6}{\bar{\omega}_0^2 K_1}, \quad \Phi_4 = \frac{K_7}{\bar{\omega}_0^2 K_1}$$

$$\Psi_1 = \Phi_1 \cdot q, \quad \Psi_2 = 2 \frac{V_0^2 K_3}{\bar{\omega}_0^2 K_1} q, \quad \Psi_3 = 2\nu \cdot \frac{V_0^2 K_4}{\bar{\omega}_0 \bar{\omega} K_1} q$$

$$q_1 = \Psi_1 - \Psi_3/\nu, \quad q_2 = \Psi_2, \quad q_3 = \Psi_1 + \Psi_3/\nu$$