

材端で変形拘束を受ける筋違材の弾塑性挙動に関する研究

若林 實・柴田 道生・増田 廣見

AN ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF A BRACE SUBJECTED TO END DISPLACEMENT

By *Minoru WAKABAYASHI, Michio SHIBATA and Hiromi MASUDA*

Synopsis

It is important in the study of elastic-plastic behaviour of braced frames to investigate the interaction effects between the frame and the bracing. This paper presents an elastic-plastic analysis on the behaviour of a bar subjected to compulsive end displacement, in order to evaluate the effect of end restraints caused by the frame deformation. The incremental load-deflection relation is obtained by introducing a simplified mathematical model, and it is confirmed that the effects of the end restraints are not so important. The numerical results show a good agreement with experimental ones.

1. 序

鉄骨構造物において筋違は重要な耐震、耐風要素であり、筋違付骨組の挙動を明らかにすることは非常に重要である。水平力を受ける筋違付骨組は、筋違と骨組との相関関係により複雑な挙動を示すので、筋違と骨組の各々の履歴特性を重ね合わせることにより、筋違付骨組の挙動を明らかにしようとする試みがなされてきた¹⁾。しかしながら、この重ね合わせの方法によれば、筋違と骨組の相関関係、すなわち筋違が骨組から受ける影響、および筋違が骨組に及ぼす影響が考慮されていないことになる。前者は、骨組の変形により筋違が材端で受ける変形拘束の影響であり、後者は筋違による柱の軸力変動の影響や、筋違の曲げ変形による材端での曲げの影響等がある。これらの相関関係の影響についての研究は数少ない。

本報告では、これらの相関関係のうち、特に筋違が骨組から受ける影響を解析的に明らかにしようとするものである。

2. 解 析

Fig. 1 に示すような、両端固定部材が元の材軸と θ の角をなす方向に強制変形を受ける問題について解析を行なう。この問題は、**Fig. 2** に示すような、筋違が両端固定の状態を組み込まれたピン接合骨組に、水平力が作用した状態に対応する。そこで **Fig. 1** の問題を解くことにより、筋違が骨組から受ける効果を考察することができる。

2-1 仮 定

- (a) **Fig. 1** の問題において、曲率が両端と中央部の一定長さに集中して生じると仮定すると、**Fig. 3** に示すような 2本の直線部材が弾塑性バネ²⁾でつながれたモデルに置換できる。この 2本の直線部材は軸方向には弾性、曲げに対しては剛である。
- (b) **Fig. 3** のモデルにおいて、各々の部材の軸力 (N)、せん断力 (Q)、部材端モーメント ($M_i, i=1, 2, 3$) は **Fig. 4** の矢印の向きを正とする。
- (c) 有限変形を考えるが、釣合式においてはたわみ角の 2乗が 1に比べ無視できる程度の小変形とする。
- (d) 降伏軸力に等しい圧縮力を受けたとき、材は必ず横たわみを生じる。

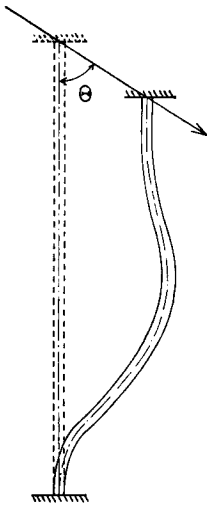


Fig. 1 A brace subjected to end displacement

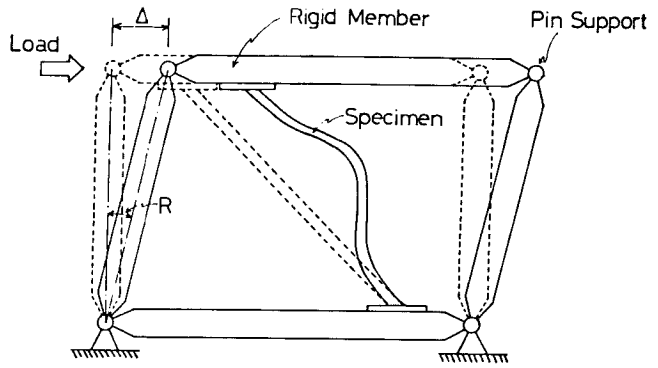


Fig. 2 Hinged frame with bracing

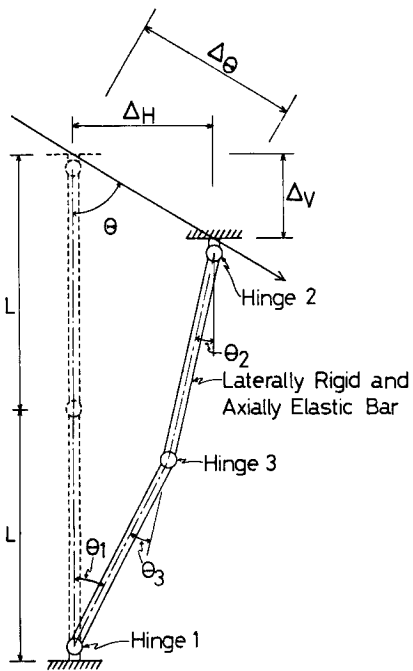


Fig. 3 Mathematical model

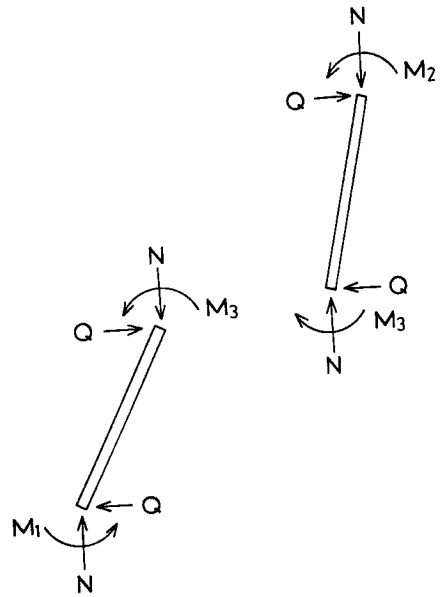


Fig. 4 Equilibrium of half bars

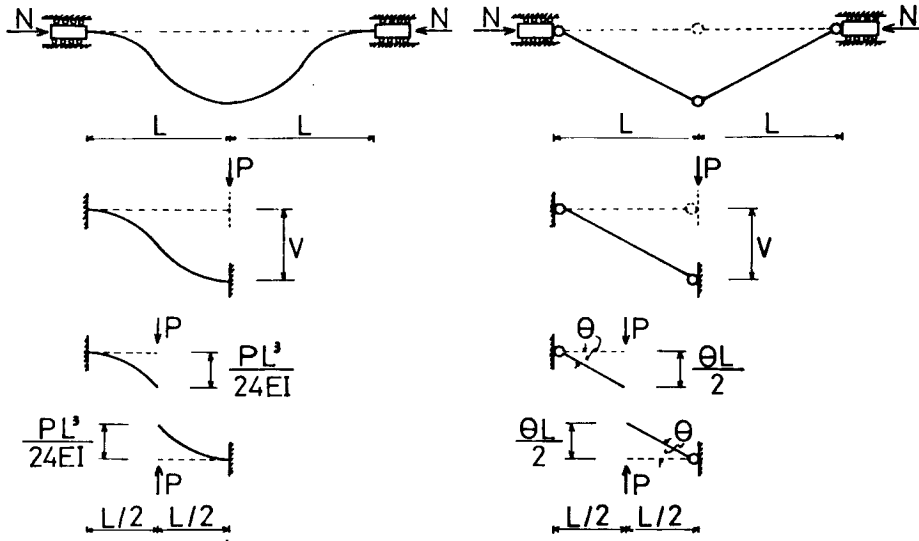


Fig. 5 Determination of spring constant

(e) i 番目の弾塑性バネの回転角 θ_i ($i=1, 2, 3$) はその位置での曲げモーメントに対応する曲率に比例し、各バネの曲率 κ_i と回転角 θ_i との関係は、バネの回転性能を表す定数 ζ を使って表現すると次式となる²⁾。

$$\theta_i = \zeta L \kappa_i \quad (i=1, 2), \quad \theta_3 = 2\zeta L \kappa_3 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$\zeta=1/6$ とすると、両端固定ばりの中央たわみとモデルの中央たわみが等しくなる (Fig. 5)。

2-2 基礎式の誘導

文献3) のアイデアに基づき増分型の解析を行う。

i 番目の弾塑性バネ位置における重心軸上の歪増分 de_i および曲率増分 dk_i と軸力増分 dN および曲げモーメント増分 dM_i の関係は次式となる。

$$dN = \bar{A} \cdot de_i + \alpha \bar{S}_i \cdot dk_i \quad \dots \dots \dots (2-a)$$

$$dM_i = \bar{S}_i \cdot de_i + I_i \cdot dk_i \quad (i=1, 2, 3) \quad \dots \dots \dots (2-b)$$

ここに $n=N/N_0$, $m_i=M_i/M_0$, $e_i=\epsilon_i/\epsilon_0$, $k_i=EI\kappa_i/M_0$, $\bar{A}_i = \int \lambda_{ij} \cdot dA/A$, $\bar{S}_i = \int \lambda_{ij} \cdot y_{ij} \cdot dA/Z_p$, $I_i = \int \lambda_{ij} \cdot y_{ij}^2 \cdot dA/I$, $\alpha = Z_p^2/(AI)$, $\lambda_{ij} = (E_t)_{ij}/E$, N_0 =降伏軸力, M_0 =全塑性モーメント, ϵ_0 =降伏歪, A =断面積, Z_p =塑性断面係数, I =断面2次モーメント, $y_{ij}=i$ 番目のバネの重心軸から j 要素までの距離, E =弾性係数, $(E_t)_{ij}=i$ 番目のバネの j 要素の接線弾性係数である。

各々の弾塑性バネ間の幾何学的な関係 $\theta_3 = \theta_1 - \theta_2$ および(1)式より増分で表現した次式が成立する。

$$dk_3 = (dk_1 - dk_2)/2 \quad \dots \dots \dots (3)$$

一方 Fig. 4 において各々の部材の釣合式をたてると、次式が得られる。

$$m_1 + m_3 = q + 2nk_1/n_c \quad \dots \dots \dots (4-a)$$

$$m_2 - m_3 = q + 2nk_2/n_c \quad \dots \dots \dots (4-b)$$

ここに $q = QL/M_0$, $n_c = 2n_D/(\pi^2 \zeta) = 2EI/(N_0 \zeta L^2)$, $n_D = \pi^2 EI/(L^2 N_0)$, L =(材長)/2 である。 n_c はモデルの弾性座屈荷重に相当する。(注1)

(4-a), (4-b) 式を増分で表現すると,

$$dm_1 + dm_3 = dq + 2 \cdot \{(n + dn) \cdot dk_1 + k_1 \cdot dn\} / n_c \dots\dots\dots (5-a)$$

$$dm_2 - dm_3 = dq + 2 \cdot \{(n + dn) \cdot dk_2 + k_2 \cdot dn\} / n_c \dots\dots\dots (5-b)$$

となり, この式は高次の微小項を省略せずに表現してあるので, 大きな増分に対しても適用できる。

さらに材端での変形拘束の条件は, 材端の材軸方向変位を Δ_V , 材軸に垂直方向の変位を Δ_H とし, 増分で表現すると,

$$d\delta_V \cdot \tan \theta = d\delta_H \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに $\delta_V = \Delta_V / \Delta_0$, $\delta_H = \Delta_H / \Delta_0$, $\Delta_0 = 2L\epsilon_0$ である。

材端での材軸方向変位 Δ_V は, 材全体の弾性伸縮 Δ_B , 幾何学的な変化による材軸方向成分 Δ_G , および弾塑性バネでの塑性伸縮 Δ_P の和である²⁾。各々の材軸方向成分ならびに材軸に垂直方向の変位を n , k_i , e_i を使って増分で表現すると次式となる。

$$d\delta_H = \alpha\beta\zeta (dk_1 + dk_2) / 2 \dots\dots\dots (7-a)$$

$$d\delta_V = d\delta_B + d\delta_G + d\delta_P \dots\dots\dots (7-b)$$

$$d\delta_B = dn \dots\dots\dots (7-c)$$

$$d\delta_P = (de_1 + de_2 + 2 \cdot de_3 - 4 \cdot dn) \cdot \xi / 2 \dots\dots\dots (7-d)$$

$$d\delta_G = \alpha\zeta \{k_1 \cdot dk_1 + k_2 \cdot dk_2 + (dk_1)^2 / 2 + (dk_2)^2 / 2\} / n_c = \alpha\zeta (k_1 \cdot dk_1 + k_2 \cdot dk_2) / n_c \dots\dots\dots (7-e)$$

ここに $\beta = AL / ZP$, $\delta_B = \Delta_B / \Delta_0$, $\delta_G = \Delta_G / \Delta_0$, $\delta_P = \Delta_P / \Delta_0$, $\xi =$ 塑性域の拡がりを示す定数, である。

(6) 式に (7-a)~(7-e) 式を代入し, 一方 (5-a), (5-b) 式より dq を消去し, (2-a), (2-b) 式を考慮し, 各々整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \frac{2 \cdot dn}{n_c} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dk_1 \\ dk_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \cdot dn \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2n/n_c - (\bar{I}_1 - \alpha\bar{S}_1^2/\bar{A}_1) - (\bar{I}_3 - \alpha\bar{S}_3^2/A_3) \\ a_{12} &= -2n/n_c + (\bar{I}_2 - \alpha\bar{S}_2^2/\bar{A}_2) + (\bar{I}_3 - \alpha\bar{S}_3^2/\bar{A}_3) \\ a_{21} &= \beta\zeta / (2 \cdot \tan \theta) - \zeta k_1 / n_c + (\bar{S}_1/\bar{A}_1 + \bar{S}_3/\bar{A}_3) \cdot \xi / 2 \\ a_{22} &= \beta\zeta / (2 \cdot \tan \theta) - \zeta k_2 / n_c + (\bar{S}_2/\bar{A}_2 - \bar{S}_3/\bar{A}_3) \cdot \xi / 2 \\ c_1 &= \bar{S}_1/\bar{A}_1 - \bar{S}_2/\bar{A}_2 + 2 \cdot \bar{S}_3/\bar{A}_3 - 2(k_1 - k_2) / n_c \\ c_2 &= \{1 + (1/\bar{A}_1 + 1/\bar{A}_2 + 2/\bar{A}_3 - 4) \cdot \xi / 2\} / \alpha \end{aligned}$$

である。(8) 式を dk_1 , dk_2 について解き, さらに(3)式を使って dk_3 を求めると, 次式となる。

$$dk_1 = \frac{n_c a_{22} c_1 + (-n_c a_{12} + 2 \cdot dn) \cdot c_2}{n_c (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + 2(a_{21} + a_{22}) \cdot dn} \cdot dn \dots\dots\dots (9-a)$$

$$dk_2 = \frac{-n_c a_{21} c_1 + (n_c a_{11} + 2 \cdot dn) \cdot c_2}{n_c (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + 2(a_{21} + a_{22}) \cdot dn} \cdot dn \dots\dots\dots (9-b)$$

$$dk_3 = \frac{n_c \cdot \{(a_{22} + a_{21})c_1 - (a_{12} + a_{11})c_2\}}{2\{n_c (a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) + 2(a_{21} + a_{22}) \cdot dn\}} \cdot dn \dots\dots\dots (9-c)$$

以上で dn を与えることにより, すべての未知数が求まる。

これらの式は, 弾塑性バネ断面の剛性変化がなく剛性分布によって決まる定数 \bar{A}_i , \bar{S}_i , \bar{I}_i , が変化しない時に成立するから, 断面の剛性分布が変化するまでのステップを選ぶ必要がある。

i 番目の弾塑性バネの j 要素の歪増分 de_{ij} を (2-a) 式を考慮して表現すると, 次式となる。

$$de_{ij} = de_i + \gamma \eta_{ij} \cdot dk_i = dn / \bar{A}_i + (\gamma \eta_{ij} - \alpha \bar{S}_i / \bar{A}_i) \cdot dk_i \dots\dots\dots (10)$$

ここに $\gamma = Z_P \cdot H / I$, $\eta_{ij} = y_{ij} / H$, $H =$ 断面せい, である。ある要素が剛性変化するまでの歪増分 de_{ij} は, 材料

の応力-歪関係より与えられ、(9-a)~(9-c)式と(10)式より dn が求まる。全ての要素に対して求めた dn の中で変形に適し、 $|dn|$ が最小のものを選べばその区間では剛性変化がない。このようにして求めた dn を(9-a)~(9-c)式に代入すると dk_i が求まり、 de_i が(2-a)式より、 dm_i が(2-b)式より、 dq が(5-a)式より、さらに $d\delta_H$ 、 $d\delta_V$ が(7-a)~(7-e)式よりそれぞれ求まる。

以上の解析を先に述べたように Fig. 2 に示す筋違付骨組の水平力 P と水平変位 U の関係に適用すると次式となる。

$$p = n + q/\beta \cdot \tan \theta \dots\dots\dots(11-a)$$

$$u = \delta_V = \delta_H/\tan \theta \dots\dots\dots(11-b)$$

ここに $p = P/(N_0 \cdot \cos \theta)$ 、 $u = U/(A_0/\cos \theta)$ である。

又 du が既知の場合には、(7-a)、(10-b)式に(9-a)~(9-e)式を代入し dn について整理すると、2次方程式の根として dn が求まる。

3. 解析結果および考察

単調荷を受ける理想 I 形断面材および繰返し荷を受ける H 形断面材を3種類の細長比に対し変形拘束の方向 θ をパラメーターとした解析を行なった。Fig. 6 に示すように、 $\theta = 0^\circ$ の解は両端固定部材が軸方向力を受け軸方向に変位する問題に相当し、 θ が大きくなるに従い筋違が骨組梁材に対し垂直に近く配置されることに相当する。

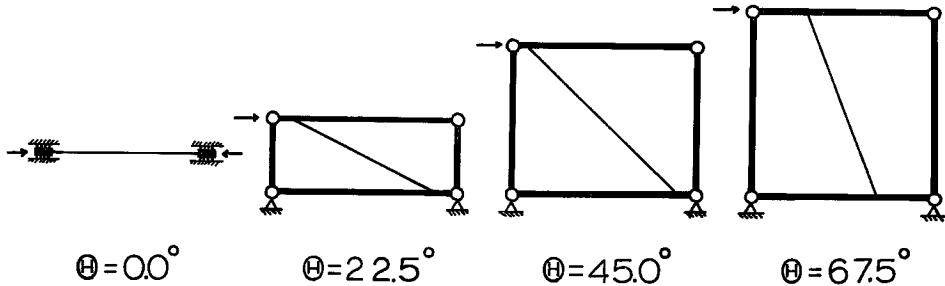


Fig. 6 Arrangement of brace

3-1 変形拘束が履歴曲線におよぼす影響について

理想 I 形断面材に対しては、2. で行なった増分型の解析によらず、各バネ各要素の応力状態に対し全歪解析が可能である。2-1の仮定に加え、材料の応力-歪関係を完全弾塑性型とし、歪のもどりは生じないと仮定し、材長 1/1000 程度の元たわみを考慮した場合の計算結果を Fig. 7, Fig. 8 に示す⁴⁾。

Fig. 7 のたて軸は筋違付骨組の水平力、横軸は水平変位量に相当する。この図より、同じ細長比の材に対しては、 θ の増加と共に座屈荷重は少し減少するが、座屈後の挙動はほとんど変わらず、 θ が 90° に極端に近くないかぎり、変形拘束の方向に無関係にその挙動は非常によく一致している。

Fig. 8 のたて軸は筋違の軸方向力 ($n = N/N_0$)、横軸はせん断力 ($\bar{q} = Q/N_0$) に相当する。この図より、ある軸力以上になると材端での変形拘束の条件を満たすためにせん断力の作用方向が逆転することがわかる。 θ が大きくなるに従って、また n_c が大きくなるに従ってせん断力の大きさは大きくなるが、その大きさは、ただか作用軸力の 1% であり、筋違の挙動に大きな影響は与えないと考えられる。

繰返し荷を受ける H 形断面材に対しては、第 2 サイクル以降の圧縮側で Bauschinger 効果の影響が大きいとの報告^{5),6)}にもとづき、材料の応力-歪関係を Fig. 9 に示すような Bauschinger 域を考慮した trilinear 型とし、各領域に番号をつける。その他の仮定は(2-1)と同様とする。材長の 1/10000 程度の元た

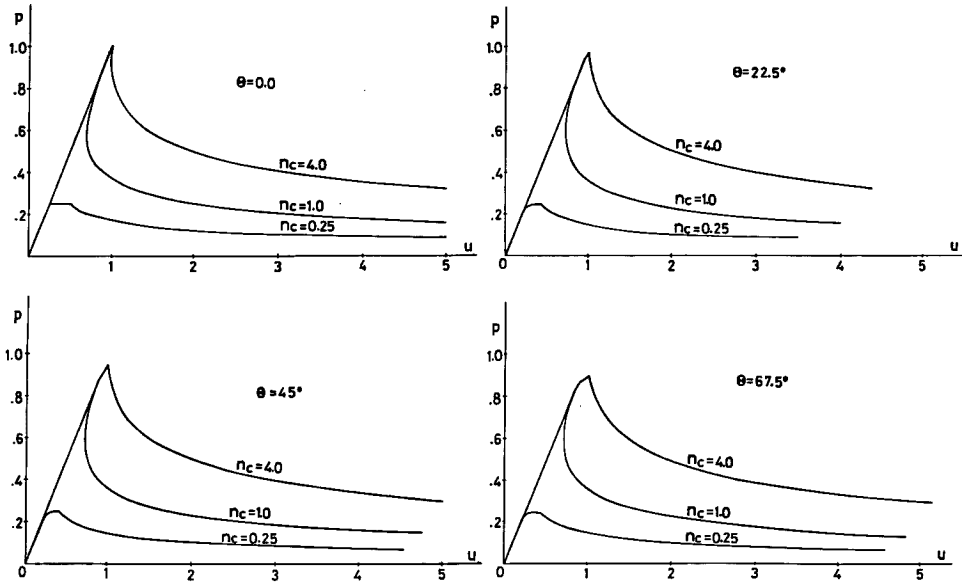


Fig. 7 p vs. u relations for ideal I section

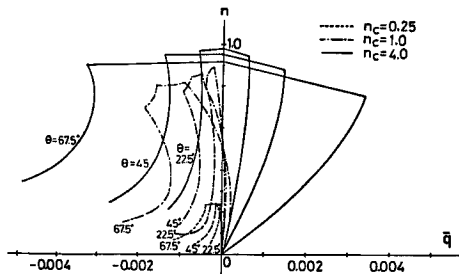


Fig. 8 n vs. \bar{q} relations for ideal I section

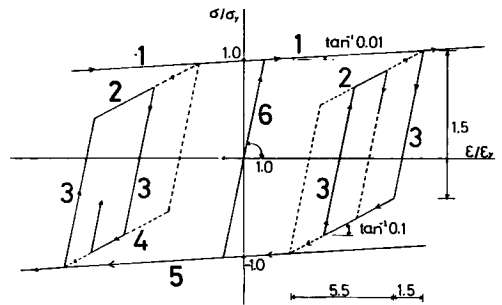


Fig. 9 Stress-strain relation

わみを考慮した場合の計算結果を Fig. 10~Fig. 12 に示す。

Fig. 10 (a), Fig. 11 (a), Fig. 12(a) の縦軸は筋違付骨組の水平力、横軸は水平変位量に相当し、各々の筋違に引張力が作用する方向を正とする。この図より、細長比にかかわらず $\theta=0^\circ$ の解と比較すると、 θ が大きくなると引張側除荷点での耐力が若干高くなる程度で、 θ が 90° に極端に近くないかぎり、履歴曲線に大きな差はないことがわかる。

Fig. 10 (b), Fig. 11 (b), Fig. 12 (b) の縦軸は筋違の軸方向力に相当し ($n=N/N_0$)、引張力を正とし、横軸はせん断力に相当し ($\bar{q}=Q/N_0$) Fig. 4 の矢印の方向を正とする。この図より、繰返し载荷に伴い $n-\bar{q}$ 関係は非常に複雑となり、 θ が大きくなるに従い、また n_{max} が大きくなるに従いせん断力の絶対値は大きくなるのがわかる。特に引張時に大きなせん断力が生じるが、たかだか作用軸力の 2%程度であり、筋違の挙動に

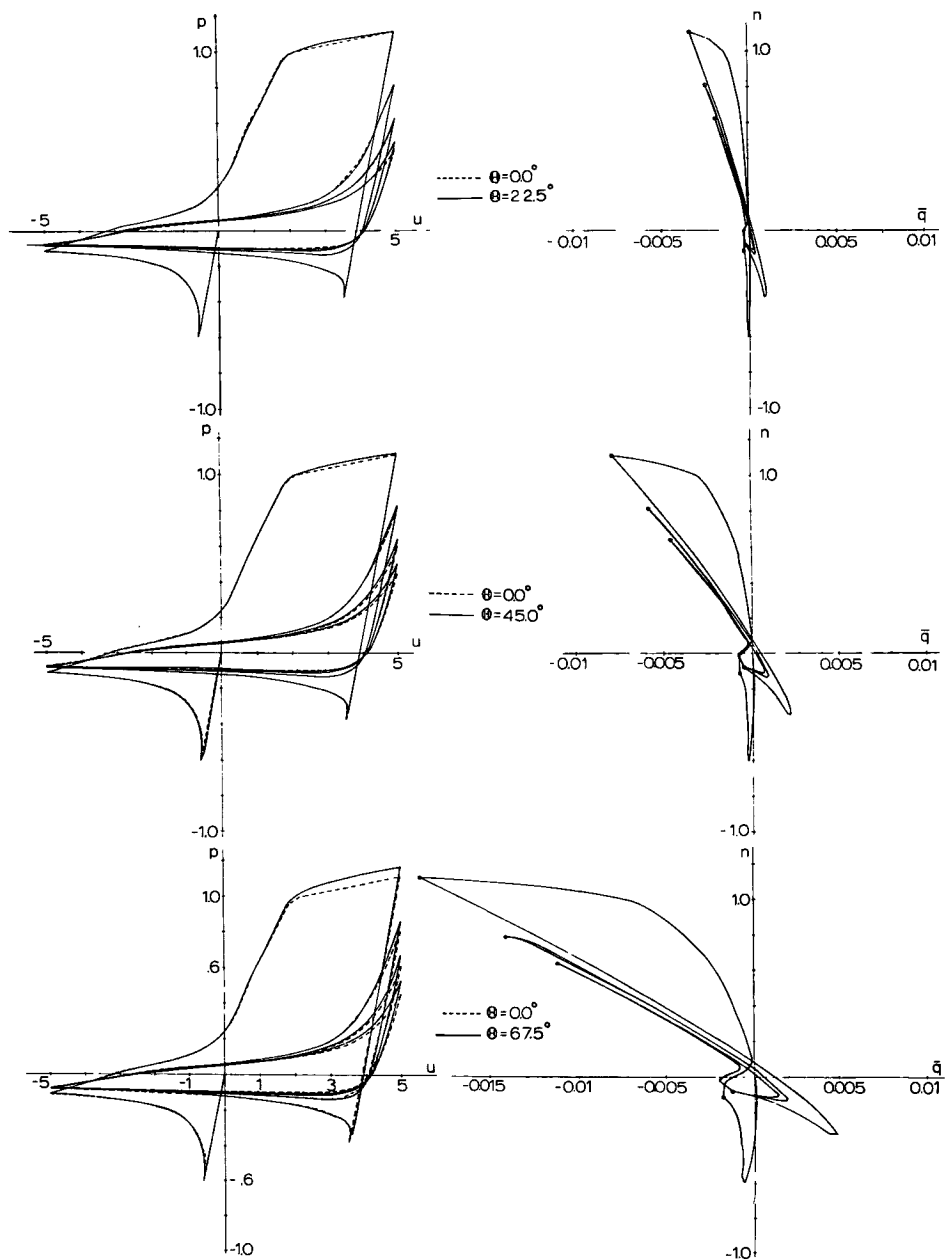
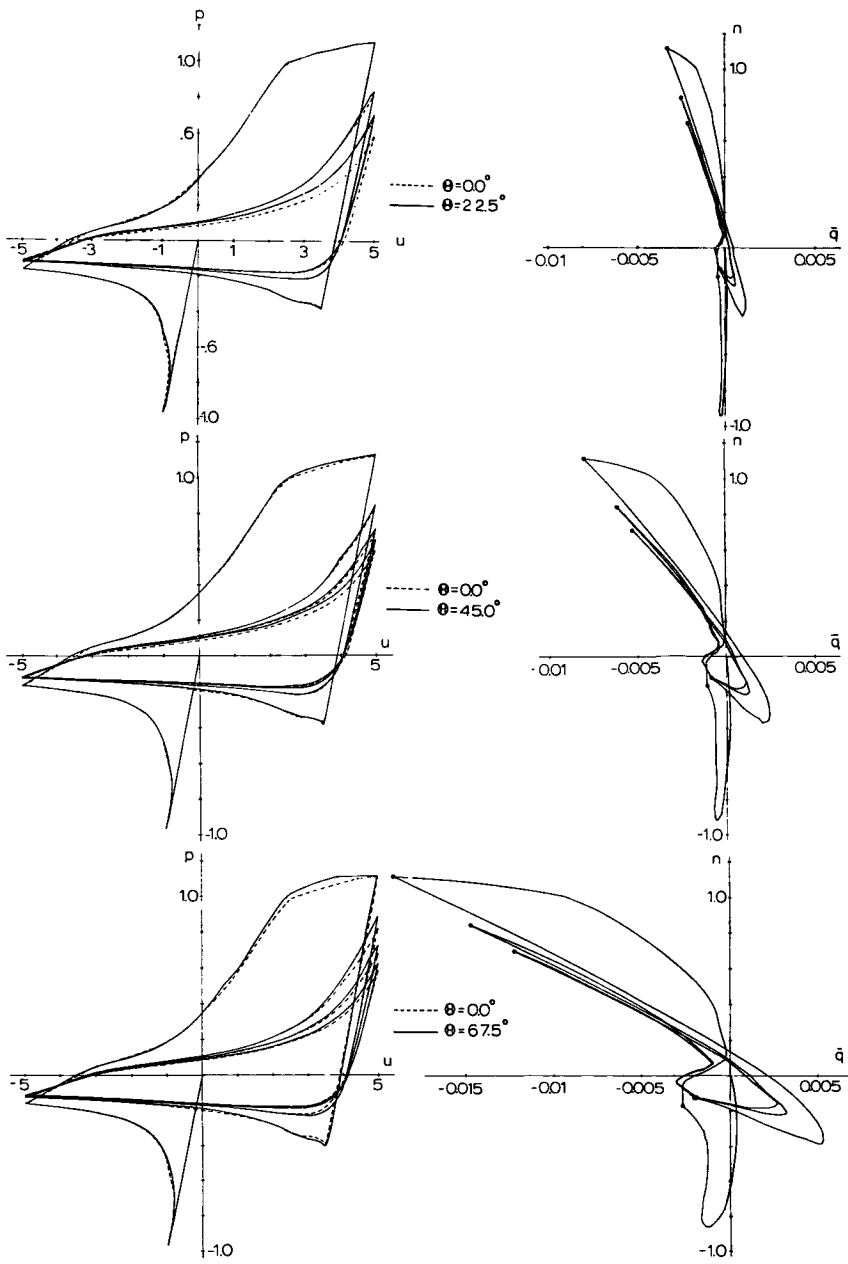
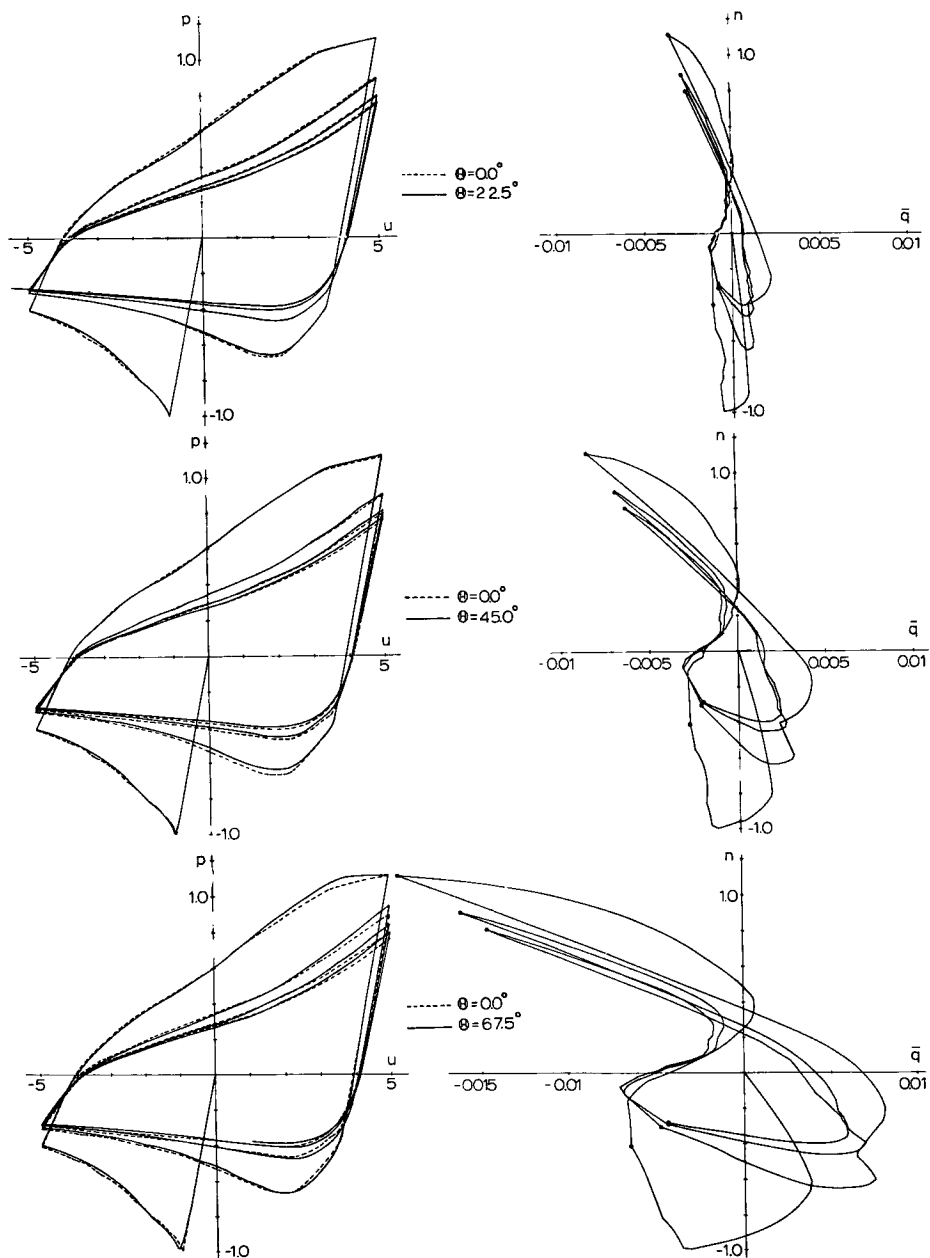


Fig. 10 Behaviour diagrams under repeated load ($n_E=0.5$)



(a) p vs. u relations (b) n vs. \bar{q} relations
 Fig. 11 Behaviour diagrams under repeated load ($n_R=1.0$).



(a) p vs. u relations

(b) n vs. \bar{q} relations

Fig. 12 Behaviour diagrams under repeated load ($n_E=4.0$)

大きな影響は与えないと考えられる。

3-2 実験値との比較

解析モデルとよく似た条件で行われた実験値⁷⁾との比較を Fig. 13 に示す。図中たて軸は筋違付骨組の水平力、横軸は水平変位量に相当し、各々筋違材に引張力が作用する方向を正とする。

この図より、履歴曲線の部分的な差はあるが、全体的にはこの解析で実験値をかなり追跡できる事がわかる。さらに 3-1 で述べたように、変形拘束の影響がほとんどないことを考慮すると、両端固定部材が軸力を受け

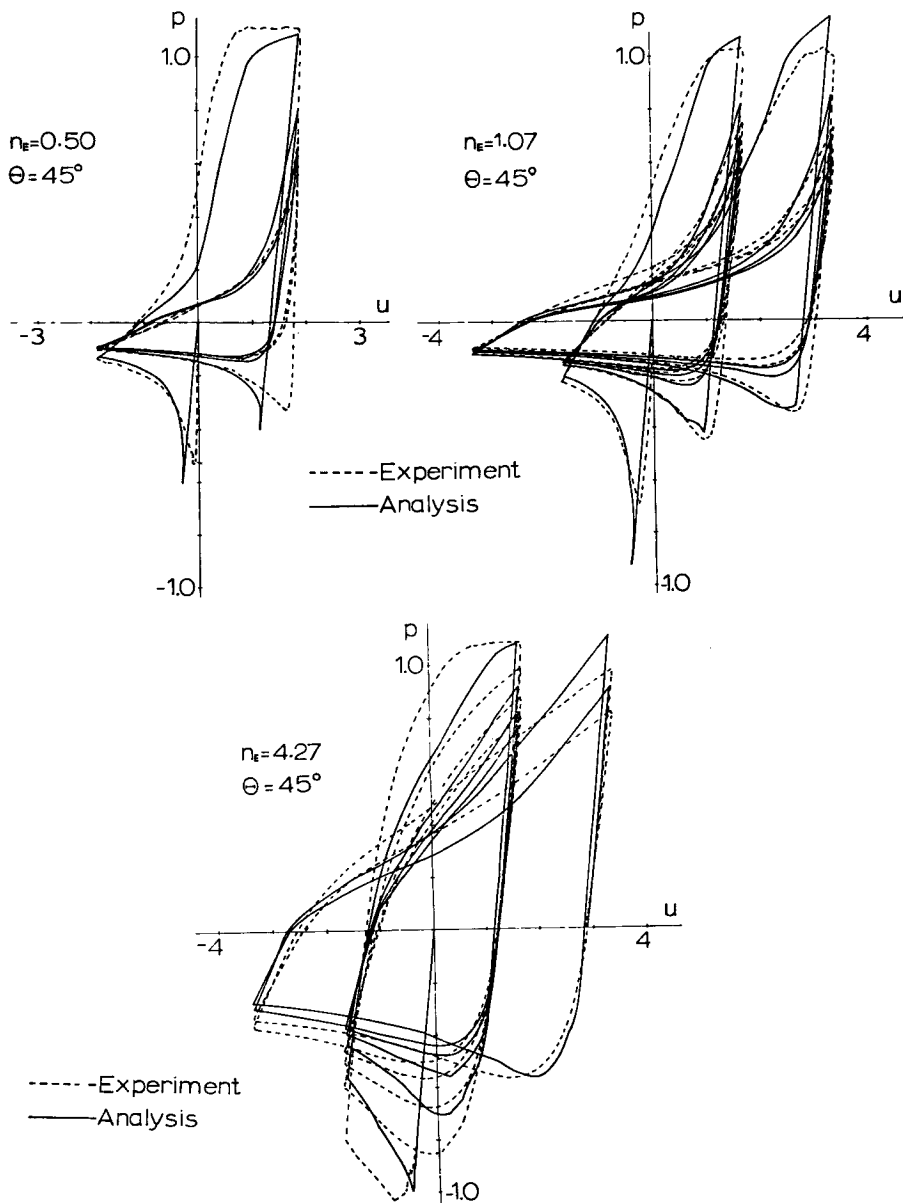
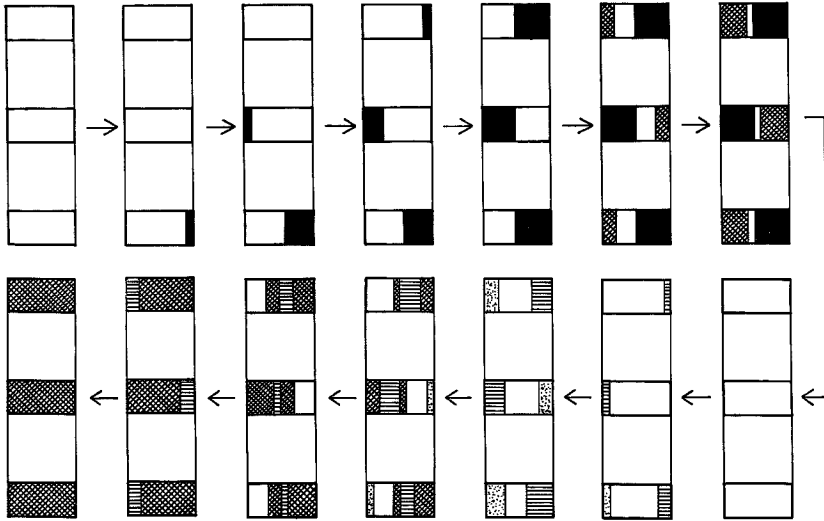
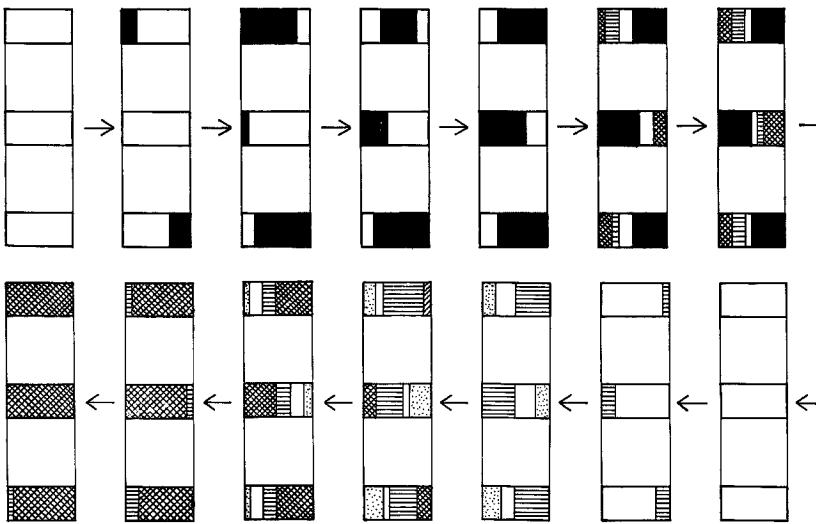


Fig. 13 Comparison with experiments

$n_e = 1.0 \quad \theta = 45^\circ$



$n_e = 4.0 \quad \theta = 45^\circ$



- 3,6 elastic
- 1 plastic(tens.)
- 5 plastic(comp.)
- 2 Bauschinger range(tens.)
- 4 Bauschinger range(comp.)

Fig. 14 Transition of stress distribution

て軸方向に変位する問題の解析値が、骨組に組み込まれた筋違の挙動の良好な近似値となると考えられる。

4. 結 語

以上の事より次のことが明らかになった。

- (a) 細長比に関係なく、筋違が骨組梁材に対して極端に 90° に近くないかぎり、筋違が骨組から受ける材端での変形拘束の影響は少なく、履歴曲線にはほとんど影響をおよぼさない。
- (b) $\theta=0^\circ$ の解が、両端固定部材が軸力を受け、軸方向に変位する問題に相当することを考慮すると、変形拘束を受ける筋違材に対しても有効長さを持つ両端ピン材の解が良好な近似を与える。
- (c) 材端の変形拘束の条件を満たすためのせん断力は、作用軸力に比べ微小でありその影響は少ない。
- (d) 変形モードは、 $\theta=0^\circ$ の場合最初から対称型の変形をするのに対し、 $\theta=22.5^\circ, 45^\circ, 67.5^\circ$ の場合は最初逆対称型の変形をし、除々に対称型の変形モードに移行してゆく。 $n_B=0.5, 1.0$ の材では、軸力の小さい弾性域で対称型の変形モードに移行するが、 $n_B=4.0$ の材では軸力の大きいところで塑性化した要素が歪のもどりを生じて対称型の変形モードに移行してゆく。参考までに $\theta=45^\circ$ の方向へ変形拘束を受ける $n_B=1.0$ と $n_B=4.0$ 材の各弾塑性バネ断面での剛性分布の移行を Fig. 14 に示す。
- (e) θ が極端に 90° に近い場合にはこの解析は適用できない。すなわち軸方向力に比べ、曲げが卓越するような場合、曲げの評価を考慮した解析が必要である。

本報告では、骨組部材が剛な場合に筋違が受ける変形拘束の影響を考察したが、骨組部材の変形により、筋違が受ける材端での強制的な回転による考察が今後の課題である。

(注1)

細長比が大きな、中心圧縮を受ける両端固定部材は、 n が1に達する以前に弾性座屈を生じて横にはらみだすが、はらみだした直後は、各弾塑性バネ共弾性であるから(1)式より、 $dm_i = dk_i$ が得られる。この関係を(4)式左辺に代入し、初期値 $n=0, k_1=k_2=0$ を考慮し、 dq を消去すると、

$$\begin{aligned} dk_1 - dk_2 + 2dk_3 &= 2(n + dn)(dk_1 - dk_2)/n_c \\ 2(dk_1 - dk_2) &= 2dn(dk_1 - dk_2)/n_c \end{aligned}$$

となり、 $dn = n_c$ が得られる。これは n_c がモデルの弾性座屈荷重に相当することを意味している。

参 考 文 献

- 1) たとえば、山田 稔・辻 文三・中西貞夫：軸圧を受ける筋違付鉄骨単位ラーメンの弾塑性変形性状に関する研究(Ⅲ：繰返し載荷)、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭48、pp.1051~1052。
山田 稔・辻 文三・窪田孝一：軸圧を受ける筋違付鉄骨単位ラーメンの弾塑性変形性状に関する研究(Ⅳ：繰返し載荷—Z, X型筋違)、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭49、pp.979~980。
- 2) 若林 実・野中泰二郎・柴田道生：筋違部材の座屈後の挙動に関する研究、その1、日本建築学会近畿支部研究報告集、昭47、pp.197~200。
- 3) 若林 実・野中泰二郎・柴田道生：筋違部材の座屈後の挙動に関する研究、その2、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭47、pp.1317~1318。
- 4) 若林 実・柴田道生・増田廣見：骨組に組み込まれた筋違材の挙動に関する研究、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭49、pp.965~966。
- 5) 山田 稔・辻 文三：Bauschinger Model、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭48、pp.969~970。
- 6) 若林 実・野中泰二郎・柴田道生・増田廣見・岡田幸三：筋違材の座屈後の挙動に関する研究、その3、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭48、pp.1013~1014。
- 7) 若林 実・中村 武・森野捷輔・吉田 望・増田廣見：繰返し水平力を受ける鋼構造筋かいの弾塑性性状に関する実験的研究、その1、H形断面筋かい、日本建築学会大会学術講演梗概集、昭49、pp.969~970。