

多次元圧密問題に対する非線形応力-ひずみ理論の適用

赤井 浩一・田村 武

AN APPLICATION OF NONLINEAR STRESS-STRAIN RELATIONS TO MULTI-DIMENSIONAL CONSOLIDATION PROBLEMS

By *Koichi AKAI* and *Takeshi TAMURA*

Synopsis

In this report, analysed are multi-dimensional consolidation problems of such clays as possess various elasto-plastic stress-strain relations derived from so-called Dilatancy Theory, mainly in order to clarify stress paths of some points under embankment.

The numerical procedure for consolidation using the finite element method, which originally Christian proposed as a fundamental principle, has been improved for nonlinear problems and also for stability of calculation.

Several results of analysis say that remarkable effects due to dilatancy or plasticity can never ignored in displacement fields and stress paths after beginning of consolidation compared with after undrained loading process.

1. 序

地盤に外荷重——たとえば、各種構造物・盛土・掘削など——が作用した場合、はたしてその地盤は安全なのか、あるいはどのような変形過程を経ていかなる最終的狀態に達するかということは土質力学の主たる問題の一つである。しかるに、従来提案された理論により計算した値と、現場で実測されたデータとが実用的な範囲で一致をみた例はむしろまれである。その原因と考えられることとして、もちろんデータの不正確さや不整備なこともあるが、複雑な条件のもとで不均質ともいえる地盤を単純なモデルに置き換えるとき、あるいはモデルを用いて解析するときの誤差などが多大であることは否めない。そのような状況のもとで最も注目されることは、土の構成式の確立を目指す研究と有限要素法による数値解析の発達である。前者には、土の変形と有効応力との間における何らかの統一的一義性を得ることを目的として、様々な実験データにもとづくいくつかの理論がある。いわゆる Cambridge theory とよばれる Roscoe らの研究はそれらの典型として位置づけられている。一方後者では、高速度計算機の発達に伴ない、それまで解析上あるいは数値計算上困難とされていた問題のいくつか、要素分割の考えにより巧みに解かれるようになった。

本研究は、以上の理論的發展を一つに結びつけることにより、粘土地盤の変形に対する、より現象に忠実な数値モデルを作成し、その解について考察検討を加えようとするものである。

2. 飽和土の圧密とモデル化

本文中で扱う粘土はすべて飽和土であり、その構造骨格をなす粒子の占める領域以外は完全流体で満たされているものとする。ここでいう完全流体とは非圧縮性であり、かつそれ自身は粘性をもたないことを指す。粘性土を固相、液体相そして気相の三相系からなる混合物としてより一般的な理論より説明を与えようとする立場もあるが、まだ理論の複雑な不飽和土はともかくとして、ここで考える飽和土に関しては混合体系論は顕著な意味をもたない。なぜなら、内部流体の存在は構造骨格の外力-変形関係に直接の影響を与えない

い。すなわち、有効応力で表現した粘土の構成式は間げき水圧の項を含まないので、内部流体からなる液体相は固相に対して質量的にはいうまでもなく、有効応力の原理を認める立場からは力学的にも作用を及ぼさないからである。もちろん、液体相の完全流体性は固相の存在に左右されない。したがってここで述べる飽和土とは次のように定義されたモデルである。

(1) 有効応力-ひずみ関係はある構成式により、あたかも単一相物質のような表現が可能である。

$$\sigma'_{ij} = f_{ij}(\epsilon_{ij}) \quad \text{あるいは} \quad d\sigma'_{ij} = g_{ij}(d\epsilon_{ij}) \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに σ'_{ij} は有効応力テンソル、 ϵ_{ij} はひずみテンソルで、 $d\sigma'_{ij}$ 、 $d\epsilon_{ij}$ はそれらの微小量を表す。また f_{ij} 、 g_{ij} は何らかの既知関数である。

(2) 内部流体は非圧縮性でかつ粘性がなく、土粒子の間げきを流れるときには十分小さな透水係数をもつような Darcy の法則によりその運動が記述できる。したがって十分短い時間の範囲で、みかけ上はその存在を構造骨格の体積変形の拘束条件と等価としてよい。

$$v_i = -\frac{k}{r_w} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここに v_i は間げき水の速度成分、 k は透水係数、 r_w は間げき水の単位体積重量、 p は過剰間げき水圧、 x_i は座標を示す。

さて、圧密現象に対する数学的モデル化は周知のとおり Terzaghi が提案した一次元圧密の方程式に始まり、数多くの研究者によって様々な拡張が発表されてきた。その詳細は他¹⁾にゆずるが、その流れには二つの基本的なものがある。一つは Terzaghi の流れを汲むもので、他は Biot²⁾ が提案した多次元圧密理論の考え方を土台にするものである。両者の相違の根拠は、前者がその成立過程からして土塊における連続条件を基本方程式にしているのに対し、後者はそれと同時につりあい条件式を連立させていることにある。力学的見地からいえば、Biot 理論は論理的一貫性と圧密現象の機構の明解さを保持しているが、Terzaghi の圧密方程式はつりあい条件の考慮を必要としない特殊な場合を除いて適合条件を乱すことがある。簡易的な便利さや、実用性では Terzaghi 理論も重要であるが、本論文では Biot 理論にもとづく定式化を行う。それは有限要素法のような数値計算法が複雑な Biot の方程式の解を可能にしたことにもよるが、近年大いに研究が進んできた土の構成式の発達にもよる。様々な土の挙動を一つの応力-ひずみ関係に表現した式を Terzaghi 理論に合体させたなら、その構成式の意味を失う結果になるであろう。

以上をまとめると、ここで考える圧密はすべて次の Biot の圧密方程式に立脚している。

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{k}{r_w} p^2 p \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここに f_i は物体力の成分、 θ は体積ひずみ (ϵ_{kk}) で、通常の総和規約にしたがうものとする。式(3)は土塊のつりあい条件、式(4)は連続条件であり、いずれも応力-ひずみ関係と無関係に、圧密が慣性力の影響を無視しうるほどゆるやかな準静的過程であれば、先に述べたモデルに対して成立する。

3. 従 来 の 研 究

Terzaghi の圧密理論における方程式は、過剰間げき水圧 p を唯一の未知関数とするもので、最も簡単な場合には熱伝導型になり比較的容易な境界条件のもとでは解析解を求めることも可能である。一方、Biot の圧密方程式は二階の連立方程式系であり、わずかの特別な問題³⁾⁴⁾を除いて厳密解は得られていない。したがって数値解法にたよらねばならないのが普通である。ここではそれらの中からいくつかの典型的な例をあげて簡単に説明するとともに、本研究で用いた手法の立場を明らかにしたい。以下、議論を容易にするため、有効応力による構造骨格の応力-ひずみ関係はしばらく等方線形弾性としておく。

(1) Christian らの方法⁵⁾⁶⁾

飽和土に非排水条件を課した場合の変形・応力解析には、ポアソン比 ν を 0.5 に近づけることにより、近似的な全応力解析が行われることが多かった。しかし、この手法では有効応力や過剰間げき水圧を求めるには、別に何らかの仮定がなければ一般に不可能であり、また全応力解析をする際の応力一ひずみ関係の与え方や、 ν をどの程度まで 0.5 に近づけるのかも問題であった。それに対して Christian は有効応力と過剰間げき水圧を同時に求める手法を提案した。

通常の弾性体では、一般の境界条件のもとで領域内に体積変化を生じるが、逆に予め既知の体積変化一たとえば、全体にわたって体積変化がまったくない一をもつような解を期待することはできない。もし、そのような条件を課するためには(有効) 応力 σ'_{ij} のほかに体積変化を拘束するもう一つの独立量が必要である。

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$\theta = h(x_i) \quad \dots\dots\dots(6)$$

すなわち、式(6)なる体積ひずみの拘束条件を与えた場合のつりあい条件は式(5)のようになる。ここで p は拘束に必要な応力であって、飽和土のときには過剰間げき水圧に相当する。とくに、式(6)で右辺を 0 にすると非排水問題の基礎方程式となる。式(5)、(6)の未知数は変位成分 u_i 、拘束応力 p となり、通常の場合と比べて方程式、未知数とも一つずつ多い系である。よって、未知変数の境界条件を適当に定めると、何らかの方法で解を求めることが可能となる。Biot の圧密方程式(3)、(4)は、式(5)、(6)とよく似た意味をもっているので、式(4)の左辺の時間微分を差分でおきかえ、右辺も既知の量で近似すれば、上述の方法により、step-by-step に圧密を解くことが可能になる。これが Christian の提案したもので、一方では圧密の時間的推移を一つの式だけに依存させていることなどに批判もあるが、圧密の解法原理としてはこれ以外のものはない。

(2) Sandhu らの方法⁷⁾⁸⁾⁹⁾

Christian の考え方を変分原理の上からより一般的に定式化したものが Sandhu, Wilson らによって発表された。先に Gurtin¹⁰⁾ が提案した convolution integral により初期条件をも同時に一つの変分原理の中に含めてしまう方法である。すなわち、Biot の圧密方程式(3)、(4)は式(7)なる汎関数 $\mathcal{Q}(t)$ の停留条件と等価になる。

$$\mathcal{Q}(t) = \int_V [\sigma_{ij} * \varepsilon_{ij} + 2p * \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - g' * v_i * u_i - 2f_i * u_i - g' * \frac{\partial p}{\partial x_i} * f_i] dV \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで * は convolution integral を意味し、

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad \dots\dots\dots(8)$$

と定義される。また $g' = 1$ である。

横尾ら¹¹⁾¹²⁾ もこの手法を Pian らによって提案された hybrid method などを含めたものにまで拡張した。

しかし、実際にこの方法を使用するときには、やはり convolution integral を差分的な数値積分におきかえるので、原理的には(1)で述べた Christian の方法と異なるものでない。

(3) Herrmann の方法¹³⁾¹⁴⁾¹⁵⁾

一般にポアソン比 ν が 0.5 になると弾性論での応力一ひずみ関係に一意性がなくなり、変位でつりあい条件を表現した Navier の式は不定項をもつ。また ν が十分 0.5 に近いとき数値解などに大きな誤差が入ることも指摘されている。これに対して Herrmann は任意のポアソン比 $\nu(0 \leq \nu < 0.5)$ に対して成り立つ Navier の式を与えた。

$$\nu^2 u_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + 2\nu \frac{\partial H}{\partial x_i} + \frac{f_i}{G} = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$(1-2\nu)H - \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad \dots\dots\dots(10)$$

これらの式は変分法の立場から統一的に説明することができる¹⁶⁾。すなわち、せん断弾性定数 G 、等方応力成分に比例する量 H より Lagrange 未定乗数 $2\nu GH$ を導入し、等方ひずみエネルギーに含まれる体積ひずみ θ を H で接触変換すると式 (9)、(10) が導かれる。これらの式は 0.5 も含めて任意の ν について成立するが、全応力と有効応力に対するせん断弾性定数が同一であるという仮定のもとでは、非線形等方弾性体の範囲まで圧密解析に應用できる。たとえば、 $\nu=0.5$ として非排水時を、また ν を構造骨格のポアソン比にすれば最終状態が求まるであろう。また、構造骨格のポアソン比がきわめて 0.5 に近いような特殊な圧密解析にも必要な考え方である。

4. 圧密の数値解析法

本研究で用いた解法もまた原理的には Christian の考え方と同じであるが、後で有限要素法への応用をはかるため、変分原理による定式化や時間微分項の扱いなどについて新たに言及する。ここでも簡単のため、しばらく等方線形弾性を仮定しておく。

一般に偏微分方程式を解く場合、調和解や変数分離法などを用いて行うのが最も直接的であり、解析解を求めるにはどうしてもそれらによらなければならないものであるが、うまく解の求まる境界値問題は非常にまれである。それに対して、解の存在や一意性など方程式のもつ厳密解の定性的な考察や近似解法の意義づけの問題については、むしろ方程式そのものよりも、それを停留条件にもつような汎関数の性質から調べる方が統一的事であることがある。たとえば、弾性論のようにつりあい条件式が楕円型である場合は、とりわけ変分法的な見かたが都合のよいケースである¹⁷⁾。実際、変位法の立場からは、つりあい方程式が式 (11) で示す汎関数 $\pi[u_i]$ の停留条件に等価であることが知られている。

$$\pi[u_i] = \int_V [\frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i] dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i ds \quad \dots\dots\dots(11)$$

ここに S_σ は応力境界、 T_i は S_σ 上の境界応力、 λ 、 $\tilde{\mu}$ は Lamé の定数である。すなわち、変位境界条件を満足する一価連続変位場 u_i の中で汎関数 $\pi[u_i]$ を極値にするような u_i が正解であることは、その第 1 変分をとって発散定理を適用すると式 (12) が得られ、

$$\delta \pi[u_i] = - \int_V [(\lambda + \tilde{\mu}) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \tilde{\mu} p^2 u_i + f_i] \delta u_i dV \quad \dots\dots\dots(12)$$

変位 u_i が独立であることにより知ることができる。次に、体積ひずみ θ を既知関数 $h(x_i)$ で予め定めしまった場合を考えよう。これが Christian の手法の原理に相当し、そのような系を支配する方程式は式 (5)、(6) である。それでは式 (5)、(6) に対応するような汎関数はどうして定めるのかという問題がある。解析学において、独立変数間に何らかの制約条件を与えた場合の極値問題には、よく Lagrange の未定乗数法を用いるが、ここでも同様に導入することができる。

$$\pi^*[u_i, p] = \int_V [\frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - f_i u_i + p(\theta - h(x_i))] dV - \int_{S_\sigma} T_i u_i ds \quad \dots\dots\dots(13)$$

すなわち、式 (13) で表される汎関数 $\pi^*[u_i, p]$ は、制約条件項に Lagrange の未定乗数 p をかけてさきの $\pi[u_i]$ に付加したものである。ここで注意すべきは、 $\pi[u_i]$ が変位 u_i のみを独立関数としていたのに対し、 $\pi^*[u_i, p]$ では p をも独立な変関数としていることである。また §(3) で述べた Herrmann の方法が、内部的な微分方程式の恒等関係式

$$\theta - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

を制約条件としていたのに対し、Christian の方法では外部的な制約条件、式 (6) を課しているという本質的に異なる点がある。そのために前者が任意のポアソン比 ν に対して成立する方程式を誘導するのにに対し、後者は単に $\nu=0.5$ に相当する場合のみに適用できるだけであるが、体積ひずみを任意に与えて解くこともできる。両者が一致するのは非圧縮性、すなわち体積ひずみを 0 に指定するときのみである。

さて、汎関数 $\pi^*[u_i, p]$ の第1変分をとってみると

$$\delta\pi^*[u_i, p] = - \int_V \left[(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \frac{\partial \theta}{\partial x_i} + \mu^2 v^2 u_i + f_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right] \delta u_i dV + \int_V \delta p (\theta - h) dV \tag{15}$$

となり、その停留条件が所要の式(5)、(6)であることがわかり、Biotの圧密方程式の数値解法に適用することができる。

式(4)で示される分布関数 $h(x_i)$ を定める必要が残されているが、このさいの解釈によりいくつかの圧密計算法の差異がでてくることに注意しなければならない。Christianは簡単に前進差分により、

$$\frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} = - \frac{k}{\gamma_w} v^2 p_t \tag{16}$$

として時刻 t における既知の体積ひずみ θ_t と過剰間げき水圧 p_t より時刻 $t + \Delta t$ における体積ひずみ $\theta_{t+\Delta t}$ を近似計算し、それとつりあい式を連立させて未知の $u_{t+\Delta t}$, $p_{t+\Delta t}$ を求めた。その利点は物理的解釈や数値解折への応用が容易であり、非排水、排水の両ケースにもそのまま適用ができる。しかし、計算上の不安定性とともに Biot の方程式を一つずつ単独に用いることが圧密現象を忠実にシミュレートしていないという批判もある。Sandhuらの方法は convolution integral を用いているが、結果的には式(4)の中間差分

$$\frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} = - \frac{k}{\gamma_w} \frac{v^2 p_{t+\Delta t} + v^2 p_t}{2} \tag{17}$$

で近似したことにほかならない。この方法は、計算上の安定性や Biot の式を同時に連立させていることから、より洗練されたものと考えられる。しかしここでは、式(4)を後退差分

$$\frac{\theta_{t+\Delta t} - \theta_t}{\Delta t} = - \frac{k}{\gamma_w} v^2 p_{t+\Delta t} \tag{18}$$

にとる方法を用いた。これによると、圧密の初期条件となる非排水問題も含めて、圧密現象の計算が最も単純かつ安定に行われ、本研究の主題である非線形問題への適用も比較的容易である。以上をまとめると、圧密現象の数値解法は Biot の圧密方程式のうち、つりあい式(3)を連続条件式(4)を後退差分近似したときともなう制約条件付きの変分問題に変換することになる。

5. 構 成 式

応力-変形解析の対象となる材料の応力-ひずみ関係を明らかにしておかねばならないが、ここでは dilatancy theory とよばれる太田¹⁸⁾らの弾塑性構成式をもっぱら用いることにする。

飽和土の応力-ひずみ関係を決定することは土質力学の根幹をなす主題として近年著しい発展を遂げたが、とりわけ Roscoe¹⁹⁾らを中心とする Cambridge theory は時間効果のない場合の最初の統一的な構成式とされている。その考えの基礎となるものは、加工硬化材料の概念とその硬化法則を定めるための dissipative energy の算定法であるが、最終的に state boundary surface (状態曲面) という一つの固有曲面を決定することに帰着される。一方、太田らは全く別の観点から Roscoe のものと等価な状態曲面を $(e, \sigma'_m, \tau_{oct})$ -空間で導いた。ただし、 e は土の間げき比、 σ'_m は平均有効主応力 (σ'_{ii}) 、 τ_{oct} は正八面体せん断応力 $\{(\sigma'_{ij} - \sigma'_m \delta_{ij})(\sigma'_{ii} - \sigma'_m \delta_{ij})\}$ である。

飽和土の体積変化は圧縮とダイレイタンスーによる成分にそれぞれが独立に分けられるとの仮定のもとに、両者の微小成分の代数和をとることから、状態曲面の微分方程式を導いた。まず、間げき比 e と圧密圧力 σ'_m の対数との間に、弾塑性状態である正規圧密中、弾性状態である膨潤中とともに、それぞれこう配 λ および κ をもつ直線関係が認められることより、

$$de = -\lambda \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \tag{弾塑性状態} \tag{19}$$

$$de = -\kappa \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \tag{弾性状態} \tag{20}$$

なる関係が応力比 τ_{oct}/σ'_m 一定のもとに成立する。また、 σ'_m 一定のせん断試験より、ダイレイタンスーによる体積変化 dv は次式で近似されることがわかる。

$$dv = -\frac{de}{1+e_0} = -\mu d\left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} - k_1\right) \quad \dots\dots\dots(21)$$

ここで μ はダイレイタンスーの大きさを示す係数、 k_1 は限界応力比、記号 d は全微分を意味する。ただし、定数 k_1 は準静的過程の場合は $k_1 \neq 0$ となる。このダイレイタンスーによる体積変化はすべて塑性的であって、応力比 τ_{oct}/σ'_m をもとに戻しても変形は残ったままである。さらに式 (21) からわかるように、 σ'_m 一定のもとでも体積変化が起こることよりダイレイタンスーは異方的である。このことは圧密による塑性変形との大きな違いである。よって、

$$de = \mu(1+e_0)\left(-\frac{d\tau_{oct}}{\sigma'_m} + \frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m}\right) \quad (\text{弾塑性状態}) \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$de = 0 \quad (\text{弾性状態}) \quad \dots\dots\dots(23)$$

と表現することができる。以上まとめると、応力不変量 σ'_m 、 τ_{oct} の微小な変化による間げき比 e の変化について、その応力変化が弾塑性状態をひき起こそうとしているのか、あるいは弾性状態に留まろうとしているのかによって、

$$de = -\lambda \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} + \mu(1+e_0)\left(-\frac{d\tau_{oct}}{\sigma'_m} + \frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m}\right) \quad (\text{弾塑性状態}) \quad \dots\dots\dots(24)$$

$$de = -\kappa \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \quad (\text{弾性状態}) \quad \dots\dots\dots(25)$$

なる微分方程式を得る。もし、先述したように圧縮とダイレイタンスーによる体積変化との間に相互作用があれば、このように単純な代数和をとることはできない。さて、これらの式を境界条件、

$$e = e_0, \quad \sigma'_m = \sigma'_{m0}, \quad \tau_{oct} = 0 \quad \dots\dots\dots(26)$$

を用いて積分すると、容易に次の曲面が定まる。

$$e - e_0 + \lambda \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{m0}} + (1+e_0)\mu \frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} = 0 \quad (\text{弾塑性状態}) \quad \dots\dots\dots(27)$$

$$e - e_0 + \kappa \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{m0}} = 0 \quad (\text{弾性状態}) \quad \dots\dots\dots(28)$$

前者は弾塑性状態の飽和土が (e , σ'_m , τ_{oct}) 空間で必ず満たさねばならない条件であり、いわゆる状態曲面である。この式は、弾塑性的に変形を続ける飽和土の間げき比 e が応力の径路に独立であることを意味する。一方、後者はある値まで加工硬化された飽和土の弾性状態を示す elastic wall と呼ばれる τ_{oct} 軸に平行な曲面である。したがって両者の交線を (σ'_m , τ_{oct})-面に正射影したものが降伏関数であり、そのような意味でこれらの曲面が求まれば硬化法則も同時に与えられたことになる。それより、塑性論での計算により微小応力増分と微小ひずみ増分の関係が導かれる。

以上は等方圧密された飽和土に対する議論であるが、実際に解析で用いるのは異方圧密された飽和土であることが多く、これらの式を少し変形しなければならない。多くの自重圧密のように応力比 $\tau_{oct}/\sigma'_m = K_0$ の状態で異方圧密された試料では、ダイレイタンスーによる体積変化は、載荷後の応力比が K_0 よりも大きくなる (主働状態) か小さくなる (受働状態) かで符号が逆になり、前述の式 (22) は

$$de = \mp \mu(1+e_0)\left(\frac{d\tau_{oct}}{\sigma'_m} - \frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} - : \text{主働状態} \\ + : \text{受働状態} \end{array} \right. \quad \dots\dots\dots(29)$$

と修正される。これを用いると、全く同様に次のような状態曲面を求めることができる。

$$e - e_0 + \lambda \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{m0}} \pm (1+e_0)\mu \left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} - K_0\right) = 0 \quad \dots\dots\dots(30)$$

これが異方圧密粘土に対する状態曲面で、複号は以下すべて式 (29) と同じである。Fig. 1 に状態曲面、elastic wall などの一例を示す。

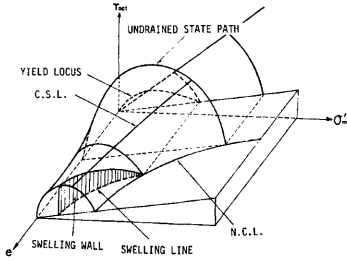


Fig. 1. State boundary surface.

さて、降伏関数

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma'_m} = \frac{\lambda}{(1+e_0)\mu} \ln \frac{\sigma'_m}{\sigma'_{m0}} + K_0 \quad \dots\dots\dots(31)$$

とその後続降伏関数の形が定義されているとき、増分形の応力-ひずみ関係が導かれるが、せん断ひずみに関する弾性項を考慮するためポアソン比 ν を与えることにする。すると、先述した膨潤曲線のご配 ϵ とともに等方的な非線形弾性係数が確定する。

硬化パラメーター P を塑性ひずみ ϵ_{ij}^p の関数とする降伏関数

$$f(\sigma'_{ij}, P) = 0 \quad \dots\dots\dots(32)$$

の全微分をとると

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} d\sigma'_{ij} + \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \epsilon_{ij}^p} d\epsilon_{ij}^p = 0 \quad \dots\dots\dots(33)$$

となるが、この式は $d\sigma'_{ij}$ なる応力増分によって塑性ひずみ $d\epsilon_{ij}^p$ をともなう加工硬化を生じたときの新しい応力点が、やはりまた後続の降伏曲面上にあらねばならないことを意味する。この式に非線形弾性マトリックス $D_{ij,kl}^p$ を用いた応力と弾性ひずみの式

$$d\sigma'_{ij} = D_{ij,kl}^p d\epsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots(34)$$

と、associated flow rule と normality rule より塑性ひずみベクトルの方向を決める式

$$d\epsilon_{ij}^p = A \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} \quad \dots\dots\dots(35)$$

を代入して、その比例定数 A を

$$A = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ij,kl}^p d\epsilon_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}} D_{ij,kl}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}} \quad \dots\dots\dots(36)$$

と定めることができ、最終的に

$$d\sigma'_{ij} = D_{ij,kl}^{p*} d\epsilon_{kl} \quad \dots\dots\dots(37)$$

なる関係を満たす弾塑性マトリックスが次のように導かれる。

$$D_{ij,kl}^{p*} = D_{ij,kl}^p - \frac{D_{ij,mn}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{pq}} D_{pq,kl}^p}{\frac{\partial f}{\partial \sigma'_{rs}} D_{rs,ef}^p \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ef}} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}} \quad \dots\dots\dots(38)$$

実際に飽和土に対する弾塑性マトリックスを計算するには、式 (31) で定義される降伏関数と、膨潤曲線とポアソン比 ν から定まる応力-弾性ひずみ関係式

$$d\sigma'_{ij} = \lambda d\theta \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} d\epsilon_{ij}^p \quad \dots\dots\dots(39)$$

を式 (38) に代入すればよい。ここで、 λ 、 $\tilde{\mu}$ は非線形な Lamé の定数で、

$$\tilde{\mu} = \frac{3(1-\nu)}{2(1+\nu)} \cdot \frac{1+e}{\kappa} \sigma'_m \quad \dots\dots\dots(40)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{1+e}{\kappa} \sigma'_m - \frac{2}{3} \tilde{\mu} \quad \dots\dots\dots(41)$$

より定まる。二次元平面ひずみ条件での結果を書き下す。

$$\begin{pmatrix} d\sigma'_{xx} \\ d\sigma'_{yy} \\ d\sigma'_{zz} \\ d\sigma'_{xy} \\ d\sigma'_{yz} \\ d\sigma'_{xz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & \tilde{\lambda} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} + 2\tilde{\mu} & 0 \\ \tilde{\lambda} & \tilde{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A^2 & AB & 2\tilde{\mu}f_{12}A \\ AB & B^2 & 2\tilde{\mu}f_{12}B \\ AC & BC & 2\tilde{\mu}f_{12}C \\ 2\tilde{\mu}f_{12}A & 2\tilde{\mu}f_{12}B & 4\tilde{\mu}^2f_{12}^2 \\ 2\tilde{\mu}f_{13}A & 2\tilde{\mu}f_{13}B & 4\tilde{\mu}^2f_{12}f_{13} \\ 2\tilde{\mu}f_{23}A & 2\tilde{\mu}f_{23}B & 4\tilde{\mu}^2f_{12}f_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_{xx} \\ d\epsilon_{yy} \\ d\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(42)$$

ここで用いた記号は以下のとおりであり、 z 軸は拘束方向である。

$$\begin{aligned} f_{ij} &= \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \\ D &= \lambda f_{kk} + 2\bar{\mu} f_{kl} f_{kl} - \frac{\partial f}{\partial P} \frac{\partial P}{\partial \varepsilon_{kl}} f_{kl} \\ A &= \lambda f_{kk} + 2\bar{\mu} f_{11} \\ B &= \lambda f_{kk} + 2\bar{\mu} f_{22} \\ C &= \lambda f_{kk} + 2\bar{\mu} f_{33} \end{aligned}$$

6. 有限要素法への適用

4, 5 で述べた手法により、飽和土の圧密に対する有限要素法の適用を考察する。式 (13) で示した汎関数 $\pi^*[u_i, p]$ を物体力のない二次元平面ひずみ問題へ変換する。

$$\pi^*[u, p] = \int_S \left[\frac{1}{2} \mathbf{e}^T D \mathbf{e} + p(\theta - h) \right] dS - \int_{\sigma} \bar{T} u d\sigma \quad \dots\dots\dots(43)$$

ここで、 \mathbf{e} はひずみベクトル $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^T$, D は (3×3) の応力マトリックスで等方性はなくともよい。 \bar{T} は境界応力ベクトル $(T_w, T_y)^T$, \mathbf{u} は変位ベクトル $(u_x, u_y)^T$ である。つりあい式と等価な停留条件をもつ汎関数 $\pi^*[u, p]$ を分割した一つの要素に適用すると、その要素のつりあい条件を意味する剛性マトリックスが導かれる。そのために要素内の変化を節点変位の一次関数で表す。

$$\mathbf{u} = A \bar{\mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots(44)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{u}}$ は要素節点の変位ベクトル、 A は内挿変換マトリックスである。式 (44) を座標で微分することにより、節点変位と要素内ひずみの関係が B マトリックスを用いて

$$\mathbf{e} = B \bar{\mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots(45)$$

として得られる。とくに体積ひずみは、 B マトリックスの第1行と第2行の和をとって

$$\theta = C^T \bar{\mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots(46)$$

と表現できる。これらを $\pi^*[u, p]$ に代入して、

$$\bar{\pi}^*[\bar{\mathbf{u}}, \bar{p}] = \int_S \left[\frac{1}{2} \mathbf{e}^T D \mathbf{e} + \bar{p}(\theta - h) \right] dS - \mathbf{F} \bar{\mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots(47)$$

と近似されることになる。ここで \bar{p} は要素内で一様とした過剰間げき水圧、 \mathbf{F} は節点力ベクトルである。これは節点変位 $\bar{\mathbf{u}}$ について二次形式であって、 $\bar{\mathbf{u}}$ に関する停留条件を満たすことにより、

$$\mathbf{F} = K \bar{\mathbf{u}} + L \bar{p} \quad \dots\dots\dots(48)$$

なる剛性マトリックス K と過剰間げき水圧 \bar{p} の節点力への影響係数ベクトル L が次のように定まる。

$$K = \int_S B^T D B dS \quad \dots\dots\dots(49)$$

$$L = \int_S C dS \quad \dots\dots\dots(50)$$

平面ひずみ問題では、 K は要素節点数 n に対して、 $2n$ の大きさをもつ正方対称行列で、 L は同じ大きさの列ベクトルである。式 (46) で表現される体積拘束条件を要素全体に積分して、

$$\bar{V} = \int_S \theta dS = \int_S C^T \bar{\mathbf{u}} dS = L^T \bar{\mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots(51)$$

を式 (47) と併記すると、 $(2n+1)$ の大きさをもつ正方行列からなる拡大された要素剛性マトリックスが得られる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \bar{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{p} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(52)$$

これが線形モデルに対する非排水問題（時刻 $t=0$ ）に用いられるものである。

次に、圧密過程に対応する剛性マトリックスを考える。それには式(4)に示す連続条件を近似して式(53)を使えばよい。もともと、式(4)は任意微小領域に流入する単位時間の流量がその体積ひずみの変化率であることを示すものである。ここで考えている場合には周囲の要素との過剰間げき水圧が異なるとき、Darcyの法則にしたがって流入する量が、その要素の体積増加になることをいえばよい。たとえば、Fig. 2に示す要素間では、各要素の中央において代表される過剰間げき水圧 \bar{p} 、 \bar{p}_i と各中央点間の距離 s_i 、要素の大きさ b_i により、次式のように連続条件が表現される。

$$\bar{V}_{i+\Delta t} = \bar{V}_i - \{ \alpha \bar{p} - \sum \alpha_i \bar{p}_i \} \quad \dots\dots\dots(53)$$

ここで

$$\alpha_i = \frac{k \Delta t}{r_w} \sum \frac{b_i}{s_i}, \quad \alpha_i = \frac{k \Delta t}{r_w} \frac{b_i}{s_i} \quad \dots\dots\dots(54)$$

とする。式(52)と式(53)を考え合せると

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \bar{V}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \bar{p} \end{pmatrix}_{i+\Delta t} \quad \dots\dots\dots(55)$$

なる線形モデルの圧密状態 ($t > 0$) に対する拡大された要素剛性マトリックスを得る。ここで、とくに $\bar{V}_i = 0$ 、 $\alpha = 0$ とおくと、ただちに非排水状態 ($t = 0$) に対する前述の式(52)に還元される。実際に式(55)を用いて全体剛性マトリックスを合成するには、各要素の剛性マトリックスを配置するとともに、式(53)に現れる係数 α_i も適当な場所に置かねばならないのは当然である。

最後に、非線形モデルの圧密状態に対する剛性マトリックスを考えるが、増分法の立場より、いままでの線形モデルの議論でのすべての変数を微小増分量 $\Delta \bar{u}$ 、 $\Delta \bar{p}$ とし、構成関係を表す D マトリックスを非線形のものにおきかえればよい。ただし、連続条件式(53)はそれ自体 Δt 時間内の増分についての関係であり、修正を要しない。よって未知数を ($\Delta \bar{u}$ 、 \bar{p}) として

$$\begin{pmatrix} \Delta \mathbf{F} \\ +L\bar{p}_i \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & L \\ L^T & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \bar{u} \\ \bar{p}_{i+\Delta t} \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(56)$$

なるマトリックスを用いることになる。ここで $\Delta \mathbf{F}$ は Δt 時間内に漸増する節点力である。これより初期条件とともに漸次求めた $\Delta \bar{u}$ を加え、 \bar{p} と合わせれば任意時刻における圧密過程中的変形機構が判明する。

7. 計算結果と考察

解析の対象とした地盤は、Fig. 3のように半幅 34 m、深さ 24 m の飽和土が K_0 -圧密を終了して、その状態を変形の基準とする。境界条件としては、左右端、下端とも滑らかで剛とし、上端には最高 1.6 t/m² の瞬時盛土荷重を想定した。間げき水の排出は地表面のみで起こり、他の3辺は非排水境界である。これを図に示すように長方形要素に分割し、節点自由度65、過剰間げき水圧の自由度30、計95の未知数をもつ系として有限要素による解析を行った。なお、各長方形要素の剛性マトリックスは、単純に2個の三角形要素のその和として求めた。また、最上層

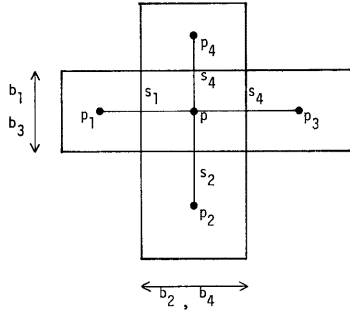


Fig. 2. Key sketch for continuity equation.

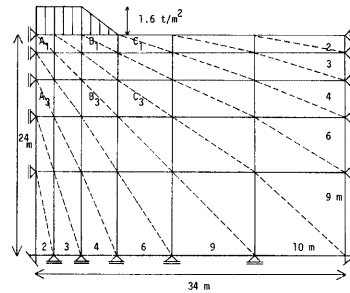


Fig. 3. Key sketch of clay foundation under embankment.

の要素の剛性を少し大きくする必要上、さらに 1 m の上積みがあり、それ自体の変形は考慮しなくてよいものとしておく。用いた材料定数は以下のとおりである。

単位体積重量 $\gamma=1.632 \text{ t/m}^3$, 透水係数 $k=10^{-5} \text{ cm/sec}$,
 圧密曲線のこう配 $\lambda=0.1030$, 膨潤曲線のこう配 $\kappa=0.0191$,
 ポアソン比 $\nu=1/3$, 静止土圧係数 $\sigma_{x0}/\sigma_{y0}=0.5$,
 積分定数 $e_0=0.8963$, $\sigma'_{m0}=10.0 \text{ t/m}^2$

以上のもとにダイレイタンス係数 μ などについて次の場合の計算を行った。

- Case 1 $\mu=0.0588$
- Case 2 $\mu=0.0294$
- Case 3 $\mu=0.0$
- Case 4 $\mu=0.0588$; 過圧密状態

Case 1, 2 はダイレイタンスのある弾塑性, Case 3 はそれのない弾塑性, Case 4 は非線形弾性である。

Fig. 4 は載荷直後の過剰間げき水圧の分布曲線を示している。Case 1 から Case 3 へと μ が小さくなるにつれて Case 4 の弾性状態へと接近しているが、どの場合とも定性的、定量的に大きな差はみられず、荷重と境界条件が支配的要因となっている。荷重付近の過剰間げき水圧に対するダイレイタンスの影響は、正規圧密粘土であることから、その値を大きくすることは当然であるが、分布曲線の形も変化させる。荷重直下の過剰間げき水圧は、ダイレイタンス係数 μ が大きい場合、加える荷重の強さを超過することがあり、その最大値の発生位置は中央よりもややのり面へ寄った地点である。実際応力比 τ_{oct}/σ'_m の変化も、その部分が最も大きい。等方線形弾性モデルの場合、初期過剰間げき水圧は Laplace の方程式 $p^2 p=0$ を満足することより領域内部で極値をとることはないが、いずれの場合もやはり内部で最大値を示さない。

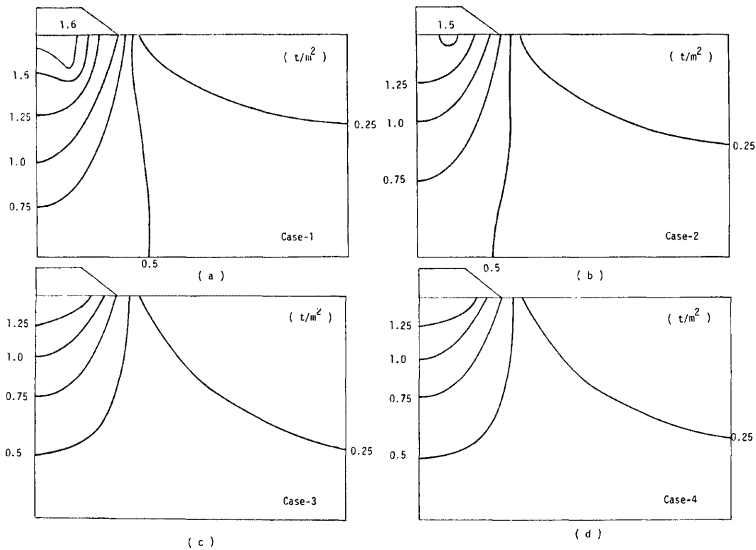


Fig. 4. Distribution of excess pore water pressure just after undrained loading.
 (a) Case-1 (b) Case-2 (c) case-3 (d) Case-4

Fig. 5 と **Fig. 6** はそれぞれ第1層と第3層 (**Fig. 3** 参照) における代表的な3要素の応力経路を示す。ここに実線は有効応力を、破線は全応力を意味している。ここで、とくに非排水状態での理論曲線も描かれているが、これらと計算曲線との重なりは、構成関係に対する数値計算の精度を意味している。ダイレイタンスのない場合はもちろん、それらのある場合でも、ほとんどの要素で両者の一致がみられる。**Fig. 5** で Case 1, 2 の要素 A_2 のみについては、荷重が増加するにしたがって途中から理論曲線よりも下側を進む傾向が現れている。非線形問題を増分法で近似するための誤差ならば、むしろ理論曲線の上側を進むのが普通であり、また、増分法の回数を適当に減らした場合の方がより精度が良好であった。この現象は常に主働一受働領域の境界に位置する要素のみに起こり、その原因としては、要素分割の粗さのため主働一受働領域の判定が困難であるにもかかわらず、あえて区別をして計算を進めるときに何らかの誤差が発生するものと考えられる。また、非排水条件での荷重の間、全応力の経路はどの場合もほとんど直線である。圧密中の経路については第1層および第3層とも μ の大きいものほど τ_{oct} 成分が小さくなるとうとする。このことは状態面の方程式が μ を大きくするにつれて τ_{oct} 軸に低くなることと関係しているが、定性的には次のように説明することができる。Case 4 の過圧密状態を基準にして比較すると、Case 3 のダイレイタンスがなく、等方圧縮に対する弾塑性がある場合には、当然より大きな体積変化を起こす。すると平面ひずみを保持するためにより大きなせん断変形を生じるので、かなり大きな τ_{oct} をもつことになる。全応力 σ_m に関しては、初期に発生する過剰間げき水圧がほとんど同じであっても、Case 4 のポアソン比 ν が $\frac{1}{2}$ に対して、Case 3 ではみかけの ν がそれより小さくなり、拘束方向の応力の減少に大きく依存する全応力 σ_m の変化が Case 3 の方で多いといえる。次に、Case 3 より Case 1 と Case 2 をみた場合、拘束方向のせん断変形によって蓄えられる弾性的なエネルギーをダイレイタンスによる塑性変形により緩和しようとして

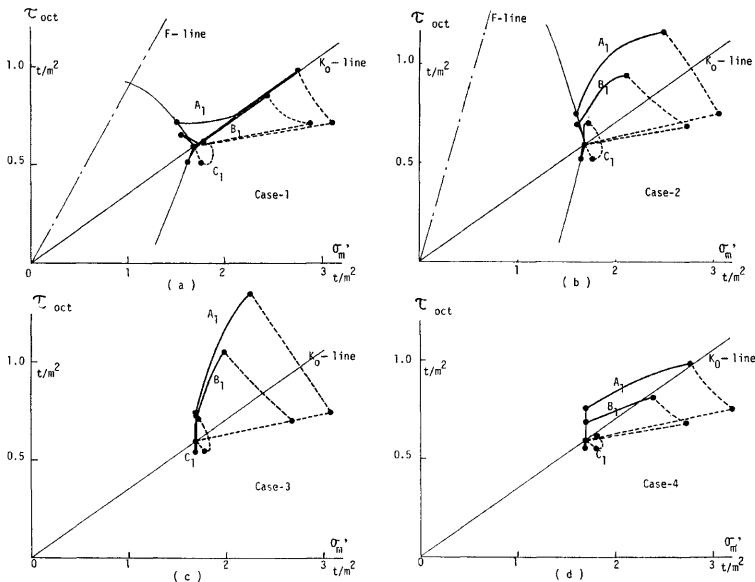


Fig. 5. Stress paths of typical elements of the first layer.
(a) Case-1 (b) Case-2 (c) Case-3 (d) Case-4

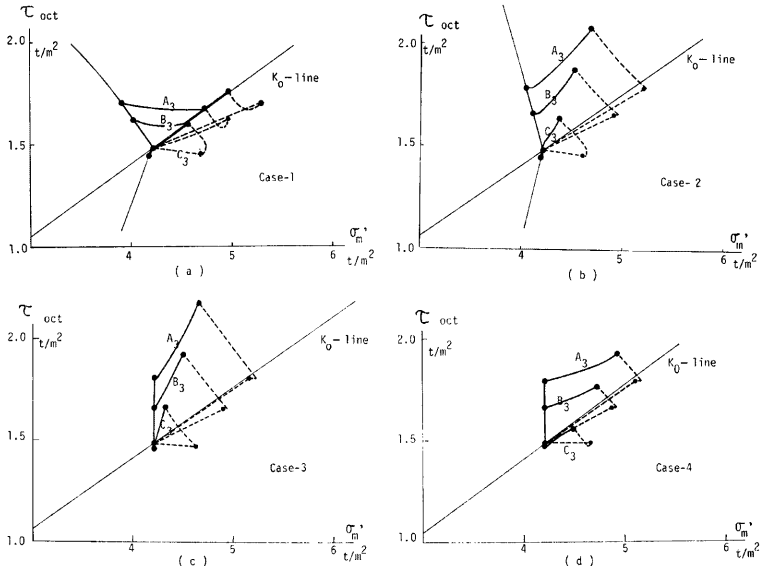


Fig. 6. Stress paths of typical elements of the third layer.
 (a) Case-1 (b) Case-2 (c) Case-3 (d) Case-4

τ_{oct} の値を小さくしようとする。とくに Case 1 ではダイレイタンスによる体積変化は符号を逆にして
 いる。Fig. 5 と Fig. 6 における Case 1 のように十分な係数 μ をもつ場合には、 K_0 -線に到達した
 後、それに沿った径路を進む。これは K_0 -線まで上述のような効果をもつダイレイタンスが、受働状態
 になると符号を逆転するために、もはやそれ以上の効果を持ち得なくなり、 K_0 -線に沿って状態曲面上を
 進むものと考えられる。

破壊線 (F -線) に対する接近で各要素領域の安全性を論じるとき、次のようなことがわかる。 F -線は

$$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m^*} = \pm \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0)\mu} \dots\dots\dots(57)$$

なる方程式で表され、ダイレイタンスの係数 μ が小さいほどこう配は大きくなる。もちろん Case 3
 のように $\mu=0$ のときは F -線は定義されないし、Case 4 のように過圧密状態でも一意に定まらない。最
 も安全と考えられるのは Case 4 であって、径路は K_0 -線よりもちょう配の小さい直線状であり、荷重直後
 が F -線に最も近くなる。一方、最も大きな応力比 τ_{oct}/σ_m^* をもつのは Case 3 であり、圧密とともに応力
 比は増大するが、破壊線が定まっていらないので一概に危険ともいえない。ダイレイタンスの大きい Case 1
 では、圧密中の径路が最も速く K_0 -線に近づくことより、この場合の安定性は荷重時に重きをおくべきで
 ある。過大でないダイレイタンスを示す Case 2 は、非排水径路、圧密終了点とともに、さらに圧密途中の
 径路にも注目しなければならない。すなわち、その形状は上に凸な曲線となり、場合によっては圧密期間中
 に破壊が起こることも考えられるからである。なお、Fig. 6 に示す第 3 層の各要素では、わずかながら圧
 密開始直後に全応力 σ_m の増加がみられるが、発生する時期、位置からして Mandel-Cryer 効果と思われ
 る。

Fig. 7 と Fig. 8 には地表面における沈下曲線との先における側方変位曲線がそれぞれ荷重直後 ($t=0$)

を破線で、圧密完了時 ($t=\infty$) を実線で記してある。載荷直後の沈下曲線については、その非圧縮性より沈下と上昇の面積は等しい。一般に過圧密よりも正規圧密状態、ダイレイタンスの小さいものより大きいものの方が大きく変形することは当然であり、最終変位曲線もそのようになっている。一方、初期変位については、各場合でそれほど差異がないことに注意すべきである。それは非排水という幾何学的な制約条件が存在することとダイレイタンスの効果が、純粋なせん断変形に関しては、それほど大きな影響をもたないからと考えられる。したがって、あまり長期間の漸増載荷でなければ、初期の変形は予測しやすいといえる。Fig. 7 について、せん断変形による沈下と圧密後のそれを比べてみると、全体に占める割合が各場合で著しく異なる。過圧密の Case 4 ではその比が 2 : 3 程度であるのが正規圧密の Case 1 では約 1 : 5 になる。Fig. 9 には中央対称軸での沈下が時間とともにどのように推移するかを示してある。Case 1~3 の弾塑性モデルがいずれもよく似た形状であるのに対し、Case 4 の弾性モデルでは、はじめから下に凸な曲線となり、かなり速く最終値に近づく。Fig. 8 により、圧密による側方変位の戻り量も、それぞれの場合で異なる。これらの物性は圧密による沈下とよく似ているが、沈下量と違ってダイレイタンスの大きい場合ほど小さくなる。しかし、これらの変形は塑性的な挙動に基づくものと考えられる。

荷重直下の変形の大きい部分を拡大して、その変位径路を示したものが Fig. 10 である。各場合について非排水時の径路はほぼ直線的であるが、圧密過程では地盤の状態や考えている場所によって異なる。とくに注目すべきは、ダイレイタンスの作用の大きい Case 1 であって、その側方変位の一部は圧密開始後さらにいったん増加して戻り始める。これは Fig. 5 (a), Fig. 6 (a) よりわかるように、圧密が始まった後、応力比 τ_{oct}/σ'_m が一時減少して体積圧縮の遅延効果を生じ、相対的に側方へ広がると考えられる。Case 1 では K_0 -線に到達するところから他の場合のように戻りが始まっている。

8. む す び

本研究では、飽和土の応力一ひずみ関係として弾塑性構成式を用いた二次元圧密解析の手法と計算結果について言及した。

数値計算法としては、さきに Christian が明確にした原理を用い、それを修正することによって、非線形問題へ

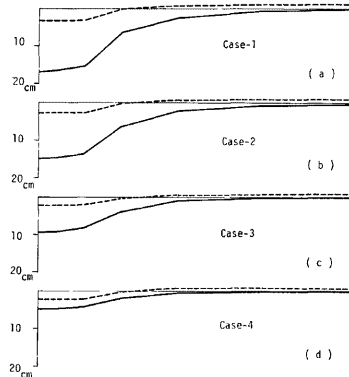


Fig. 7. Curves of surface settlement; just after loading (broken line) and after consolidation (full line).
(a) Case-1 (b) Case-2 (c) Case-3 (d) Case-4

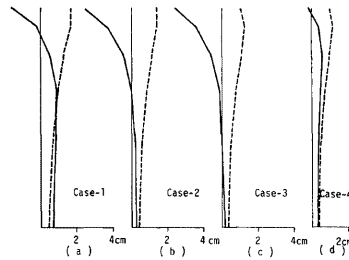


Fig. 8. Curves of lateral flow; just after loading (broken line) and after consolidation (full line).

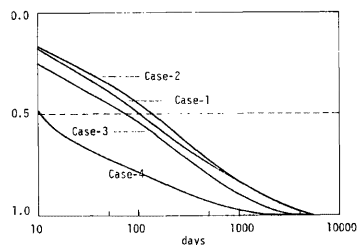


Fig. 9. Normalized settlements to time in logarithmic scale.

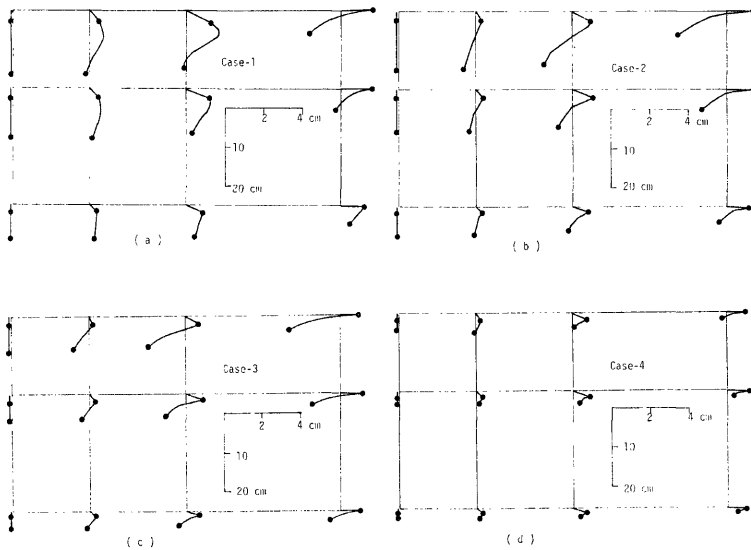


Fig. 10. Displacement paths of nodes under load.
 (a) Case-1 (b) Case-2 (c) Case-3 (d) Case-4

も適用できる安定なものとした。研究が緒についたばかりで厳密な精度を得るほど十分な要素分割等ができなかったが、非線形多次元圧密の定性的な挙動についていくつかの結果を得た。とりわけ、土質材料の特性であるダイレイタンスーのもつ影響は顕著なものであった。

今後の課題として、定量的に十分な精度を上げることはいうまでもないが、すべり線の形状など支持力破壊に関する情報をこれから汲みとる手法を考えねばならない。また、足立²⁰⁾らによって提案されている粘塑性構成式にまで立ち入らねば、実際の粘土地盤の挙動の把えることはできないであろう。

なお、研究を進めるにあたって少なからず助力を得た本学工学部学生 大内正敏・大西博文両君に謝意を表す。また数値計算には本学大型計算機センター FACOM 230-75 および 230-35 を使用したことを付記する。

参 考 文 献

- 1) たとえば、吉国 洋：多次元圧密理論と、その軸対称問題へ適用（東京工科大学位論文），1973。
- 2) Biot, M.A. : General Theory of Three-dimensional Consolidation, Journ. Appl. Phys., Vol. 12, 1941, pp 155-164.
- 3) Schiffmann, R.L. and A. T-F. Chen : An Analysis of Consolidation Theories, Proc. A.S.C.E., SM 1, Jan. 1969, pp 285-312.
- 4) 赤井浩一：堤体 2 次元圧密の研究，土木学会論文集，第16号，1953。
- 5) Christian, J.T. : Undrained Stress Distribution by Numerical Method, Proc. A.S.C.E., SM 6, Nov. 1968, pp 1333-1345.
- 6) Christian, J.T. and J.W. Boehmer : Plane Strain Consolidation by Finite Elements, Proc. A.S.C.E., SM 4, July 1970, pp 1435-1457.

- 7) Sandhu, R.S. and E.L. Wilson : Finite-element Analysis of Seepage in Elastic Media, Proc. A.S.C.E., EM 3, 1969, pp 641-652.
- 8) Sandhu, R.S. and K.S. Pister : Variational Principles for Boundary Value and Initial-boundary Value Problems in Continuum Mechanics, Int. Journ. Solid-Structure, Vol. 7, 1971, pp 639-654.
- 9) Sandhu, R.S. : Finite Element Analysis of Consolidation and Creep, Proc. of Appl. of FEM in Geo. Engrg., Vol 2, 1972, pp 697-738.
- 10) Gurtin, M.E. : Variational Principles for Linear Elastsodynamics, Archive Ratl. Mech. Anal., Vol. 16, No. 1, 1964, pp 34-50.
- 11) Yokoo, Y., Yamagata, K. and H. Nagaoka : Finite Element Method Applied to Biot's Consolidation Theory, Soils and Foundations, Vol. 11, No. 1, 1971, pp 29-46.
- 12) Yokoo, Y., Yamagata, K. and H. Nagaoka : Variational Principles for Consolidation, Soils and Foundations, Vol. 11, No. 4, 1971, pp 25-35.
- 13) Herrmann, L.R. : Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by a Variational Theorem, A.I.A.A. Journ., Vol. 3, 1965, pp 1896-1900.
- 14) 赤井浩一, 足立紀尚, 田村 武 : 非圧縮性材料の変形, 応力解析, 土木学会関西支部年次学術講演会講演概要集, I-22, 1974.
- 15) 赤井浩一, 足立紀尚, 田村 武 : 非圧縮性およびそれに近い弾性体の変分原理とその応用について, 土木学会年次学術講演会講演概要集, 第3部, 1974, pp. 140-141.
- 16) Washizu, K. : Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press. 1968.
- 17) Mikhlin, S.G. : The Problem of the Minimum of a Quadratic Functional, Holden-Day, 1965.
- 18) Ohta, H. : Analysis of Deformations of Soils Based on the Theory of Plasticity and its Application to Settlement of Embankments, Dr. Thesis for Kyoto Univ., 1971.
- 19) Roscoe, K.H. and J.B. Burland : On the Generalized Stress-Strain Behavior of 'Wet' Clay, Engrg. Plasticity, Cambridge Univ. Press, 1968.
- 20) Adachi, T. and M. Okano : A Constitutive Equation for Normally Consolidated Clay, Soils and Foundations, Vol. 14, No. 4, 1974.