

閉塞浸透における不飽和域の解析

石原 安雄・下島 栄一

ANALYSIS ON UNSATURATED ZONE IN CONFINED INFILTRATION

By Yasuo ISHIHARA and Eiichi SHIMOJIMA

Synopsis

A large fraction of the water falling as rain on the land surface moves through unsaturated soil during the subsequent process of infiltration. Then if the air initially in the soil is not free to escape as it is displaced by water, the dynamics of process on infiltration of water becomes very complicated.

In order to clarify such a infiltration mechanism, the experiments of pounded infiltration have carried out by using sand column in the lucite cylinder with bottom plate.

After confirming by the results of experiment that the movement of water or air in the neighbourhood of wetting front obeys each generalized Darcy's law in the sense of Muskat, the analytical solutions on the flow equations, which are derived for unsaturated zone by combining generalized Darcy's law, mass conservation law for both immiscible fluids and equation of state for gas, were deduced by using modified Parlange method. And by comparing the solutions with the results of experiment, it was found that both are fit approximately. So, the movements of both fluids are nearly obeyed generalized Darcy's law for unsaturated zone, excluding nearly saturated zone, which appears in the neighbourhood of sand surface and in which the mechanism of water infiltration and air escape is not clear here.

1. ま え が き

雨水が地表面より下方に浸透していく過程において、間隙空気と雨水との交換機構が問題となることは連続の条件から明らかである。この交換が自由に行われる場合の研究は、特別な現象は別として、ほぼ完成したといってよく、複雑な初期及び境界条件の場合にも水に関する Darcy 則と連続式に基づいて数値解析によって解がえられる。

一方、空気と水との交換が自由に行われない場合には、間隙空気は浸透水によって一時的に閉塞状態となり、ある程度時間が経ったのち交換が可能となって閉塞された空気の一部が浸透面を通して外界に放出されるといった循環の過程を呈する。このような間歇的現象を伴う浸透現象の機構を解明するためには、まず第一に、現象自体の正確な把握が必要であるので、すでに種々の条件下で多くの実験的研究を行ってきた^{1), 2), 3)}。本文はこれらの研究でえられた実験結果について考察を加えるとともに、こうした場合の浸透流の近似解を求めて実験値との比較検討を行って、空気閉塞を伴う浸透現象の解明に貢献しようとしたものである。

2. 実験方法及び実験結果の概要

(1) 実験方法の概要

実験方法は既報で詳述したとおりであるが^{1), 2)}、その概要を再記するつぎのようである。Fig. 1 に示す 3 種類の砂を用い、これらを気乾状態にして、内径 18.5 cm、長さ 100~150 cm 程度の透明アクリル樹脂製

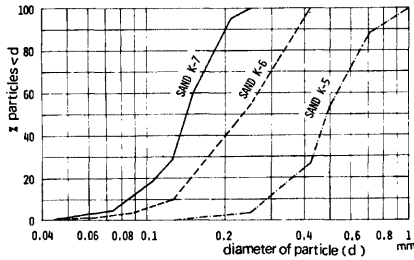


Fig. 1. Particle-size distribution in three types of sand.

の底部を閉じた円筒にできるだけ一様になるように充填し、単一及び二層砂層の浸透場を作った。給水は円筒上部から行い、始終一定の湛水深となるようにしていわゆる湛水浸透として実験を行った。

(2) 実験結果の概要

こうした実験によってえられた結果の一例を単層 (K-7) の場合について Fig. 2 に示したが、その概要はつぎのようである。

すなわち、単一砂層の場合は浸透が進行するに従って、また二層砂層の場合は

wetting front が層境界面を通過して下層内を進行するに従って、つぎの性状が見出された。

- ① wetting front はほぼ一定の水分分布形を保ちかつほぼ一定の速度 ω_* をもって伝播し、したがって wetting front の近傍の土壤水分の最大値もほぼ一定値 θ_* に保持される。
- ② こうした状態での浸透強度はほぼ一定となる。(後述の Fig. 9 を参照)
- ③ また、円筒下端での空気圧の時間的変化の割合もほぼ一定でかつ正符号である。(後述の Fig. 9 を参照)

つぎに、細砂 (K-6 及び K-7) を用いた単一砂層の場合の水分分布形、及び上層が粗砂、下層が細砂の二層砂層の場合の下層域における水分分布形にはつぎの特性が見出された。

- ④ 単一砂層の場合は砂層表面付近において、また二層砂層の場合は層境界の直下付近において、土壤水

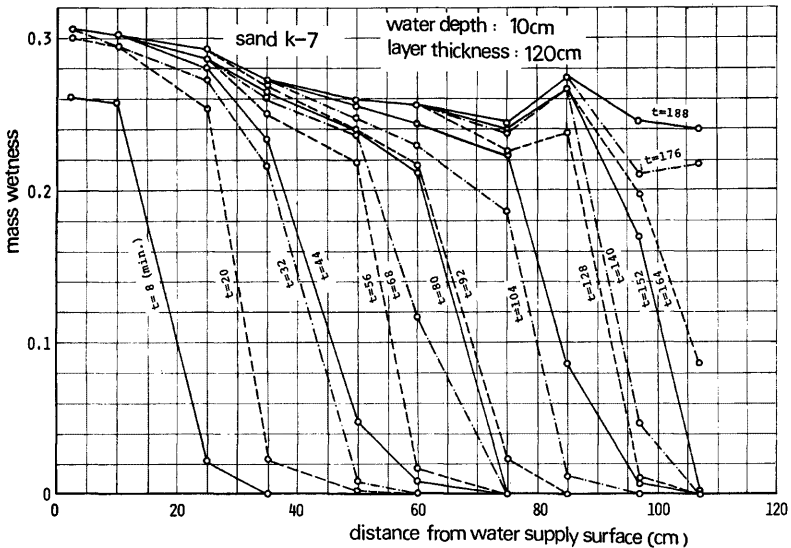


Fig. 2(a). Stage in the development of soil moisture in Sand K-7.

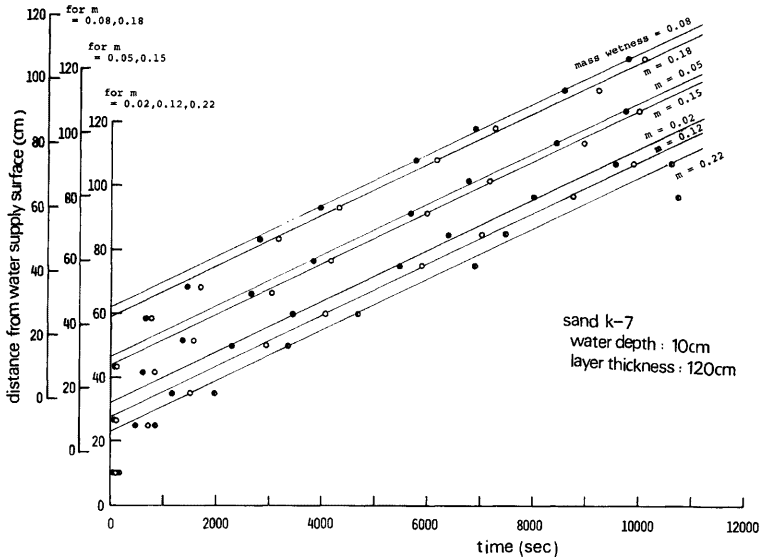


Fig. 2(b). Movement of wetting front in Sand K-7.

分が非常に大きな領域（以下本文では擬飽和領域と呼ぶ）と、それに続く遷移的領域の下方に水分量は比較的小さいがほぼ一様な領域とが連らなっている。

3. wetting front 近傍における水及び空気の運動機構

前述したように、浸透が進むにつれて、砂層の表面（浸透面）より比較的大きな気泡とそれに伴う小さな気泡が間歇的に放出されることが観測される。このように、いわば不連続的に変化しているのであって、これをそのまま解析することは非常に難しいと思われる。そこで、以下では、土壌水及び間隙空気の挙動を平均的にみて、この事象を連続現象として取扱うことができるかどうか、またこの際水及び空気の運動機構をどのように考えればよいかについて検討を行った。

(1) 基礎式

さて、浸透域における水及び空気の流れに対して Darcy 則が成立すると仮定し、間隙空気圧がポテンシャルとして作用した浸透場にヒステリシス効果がないものとする、水及び空気の運動及び連続式より次式がえられる。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[D(\theta) \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K(\theta) \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x} \right) \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \rho_a \cdot (\theta_s - \theta)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_a \cdot K_a(\theta) \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right] \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 θ ：体積含水比、 $D(\theta)$ ：水の拡散係数、 $K(\theta)$ ：不飽和透水係数、 ρ_a, ρ_w ：空気及び水の密度、 $K_a(\theta)$ ：不飽和透気係数、 p_a ：大気圧 P_0 からの増加空気圧、 θ_s ：飽和体積含水比、 t ：時間、 x ：重力方向を正とする砂表面からの距離。

さらに、空気は等温変化をし、理想気体とするとつぎの状態方程式が成立する。

$$\rho_a = C \cdot (P_0 + p_a) = CP_a \dots \dots \dots (3)$$

ここに, C : 定数, $P_a = P_0 + p_a$

なお, この場合の初期条件はつぎのように表わされる。

$$\theta = \theta_0 = \text{const.}, \text{ at } t = 0, \theta_0: \text{初期体積含水比} \dots\dots\dots (4)$$

(2) 実験事実③の説明

実験事実①の状態になったときに, 上記の基礎式によって実験事実③が説明できるかどうかを検討する。

この状態では, wetting front がほぼ一定の水分分布形を保ちながらほぼ一定の速度 ω_* で下方へ伝播しているので, この状態になり始める時刻を t_0 として,

$$\zeta = x - \omega_* \cdot (t - t_0), \tau = t - t_0 \dots\dots\dots (5)$$

なる変数変換を式 (1), (2) に施すと, θ は ζ のみの関数となるから次式のようになる。

$$\omega_* \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} + \frac{d}{d\zeta} \left(D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} \right) + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K(\theta) \cdot \frac{\partial p_a}{\partial \zeta} \right) - \frac{dK}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$P_a \cdot \omega_* \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} + (\theta_s - \theta) \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial \tau} - \omega_* \cdot \frac{\partial p_a}{\partial \zeta} \right) - P_a \cdot \left\{ \frac{dK_a}{d\theta} \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial \zeta} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} \right. \\ \left. + K_a \cdot \left(\frac{\partial^2 p_a}{\partial \zeta^2} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \cdot \frac{\partial p_a}{\partial \zeta} \right) \right\} - K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial \zeta} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \cdot \frac{\partial p_a}{\partial \zeta} = 0 \dots\dots\dots (7)$$

いまの場合には実験事実①によって, 近似的につぎのような境界条件を設定することができる。

wetting front の直上, $\zeta = \zeta_*$ において:

$$\theta(\zeta_*) = \theta_* = \text{const.}, \dots\dots\dots (8)$$

$$\left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)_{\zeta = \zeta_*} = 0, \dots\dots\dots (9)$$

$$\left(\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} \right)_{\zeta = \zeta_*} = 0. \dots\dots\dots (10)$$

また, 円筒下端, $\zeta = \zeta_L$ (ここでは $\theta = \theta_0$ である) において:

$$\left(\frac{d\theta}{d\zeta} \right)_{\zeta = \zeta_L} = 0, \text{ かつ } \left(\frac{\partial p_a}{\partial \zeta} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right)_{\zeta = \zeta_L} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

さて, 式 (6) を ζ について $\zeta = \zeta$ から ζ_L まで積分し, 条件式 (4), (11) を考慮すると次式がえられる。

$$\omega_* \cdot (\theta - \theta_0) + D(\theta) \cdot \frac{d\theta}{d\zeta} + K(\theta) \cdot \frac{\partial p_a}{\partial \zeta} - K(\theta_0) + K(\theta_0) = 0 \dots\dots\dots (12)$$

つぎに, 上式 $\partial p_a / \partial \zeta$ について整理して式 (7) に用いたのち, $\zeta \rightarrow \zeta_*$ の極限をとり, 条件式 (8), (9) 及び (10) を考慮すると, 結局つぎの関数式がえられる。

$$(\theta_s - \theta_*) \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial \tau} \right)_* + \left\{ -\omega_* \cdot \frac{\theta_* - \theta_0}{K(\theta_*)} + \left(1 - \frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)} \right) \right\} \left\{ -\omega_* \cdot (\theta_s - \theta_*) + 2K_a(\theta_*) \cdot \frac{\rho_{a*}}{\rho_w} \right\} \\ - K_a(\theta_*) \cdot \left\{ -\omega_* \cdot \frac{\theta_* - \theta_0}{K(\theta_*)} + \left(1 - \frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)} \right) \right\}^2 = 0 \dots\dots\dots (13)$$

これを wetting front の伝播速度 ω_* について解くと次式となる。

$$\omega_* = - \frac{M_2}{2M_1} \left\{ 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4M_1 M_3}{M_2^2}} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここに,

$$M_1 = \frac{(\theta_* - \theta_0)(\theta_s - \theta_*)}{K(\theta_*)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\lambda_1} \right), \quad \lambda_1 = \frac{K(\theta_*)}{K_a(\theta_*)} \cdot \frac{\theta_s - \theta_*}{\theta_* - \theta_0}$$

$$M_2 = -(\theta_s - \theta_0) \cdot \frac{K(\theta_*) - K(\theta_0)}{K(\theta_*)} \cdot \left\{ 1 - \frac{2(1 - \lambda_2)}{\lambda_1} \right\}, \quad \lambda_2 = \frac{K(\theta_*)}{K(\theta_*) - K(\theta_0)} \cdot \frac{\rho_{a*}}{\rho_w}$$

$$M_3 = -K_a(\theta_*) \cdot \left(\frac{K(\theta_*) - K(\theta_0)}{K(\theta_*)} \right)^2 \cdot (1 - 2\lambda_2) \cdot (1 + \alpha),$$

$$\alpha = - \frac{(\theta_s - \theta_*) \cdot (\partial p_a / \partial \tau)_*}{K_a(\theta_*) \cdot \left(1 - \frac{K(\theta_0)}{K(\theta_*)} \right)^2 \cdot \left(1 - \frac{\rho_{a*}}{\rho_w} \cdot \frac{2K(\theta_*)}{K(\theta_*) - K(\theta_0)} \right)}$$

以上の諸関係式のうち、まず式 (12) をみると、 $\partial p_a / \partial \zeta$ は ζ のみの関数であるから、 p_a は $p_a(\zeta, \tau) = F(\zeta) + G(\tau)$ なる変数分離の形となり、結局つぎの関係が成立することとなる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial \tau} \doteq \frac{dp_{a,L}}{dt} \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 $p_{a,L}$ は円筒下端での計測された空気圧である。つぎに式 (14) をみると、 $\omega_* = \text{const.}$ であるので、

$$\left(\frac{\partial p_a}{\partial \tau} \right)_* = \text{const.}, \quad \text{すなわち、} \quad \frac{\partial p_a}{\partial \tau} = \text{const.} \dots\dots\dots (16)$$

の関係がえられる。すなわち、式 (15)、(16) の関係は実験事実③の前半を意味する。

つぎに、実験事実③の後半の事実を調べるために、式 (14) 中の ω_* について検討する。不飽和透気係数 K_a を表わす式を、水、空気の粘性係数を μ_w, μ_a としてつぎのように表わす^{4), 5)}。

$$K_a(\theta) = K(\theta_s) \cdot \frac{\mu_w}{\mu_a} \cdot f(\theta), \quad \text{ただし} \quad f(\theta) = \frac{\theta_s - 1.1 \cdot \theta}{\theta_s} \dots\dots\dots (17)_1$$

$$\text{あるいは} \quad f(\theta) = \left(\frac{\theta_s - \theta}{\theta_s} \right)^2 \dots\dots\dots (17)_2$$

式 (17)₁ あるいは式 (17)₂ のいずれがよいかは透気係数の直接測定が困難なためますます判断することが難しいのでここでは両者を考えておく。実験の範囲内で式 (14) の各項のオーダー比較を行うとつぎのとおりである。例えば、単一または二層砂層のいずれの場合についても K-7 砂に対しては、 $\theta_s \doteq 0.46$, $\theta_* \doteq 0.35$, $\theta_0 \doteq 0$ であるので、

$$\lambda_1 \sim \begin{cases} 10^{-2}, & \text{式 (17)}_1 \text{ に対して} \\ 4 \times 10^{-2}, & \text{式 (17)}_2 \text{ に対して} \end{cases} \quad \lambda_2 \sim 10^{-3}$$

となる。これらの関係を式 (14) に用い、さらにオーダー的検討を加えると、結局つぎの関係がえられる。

$$\omega_* = \frac{K(\theta_*)}{\theta_*} \cdot \left(1 \mp \sqrt{-\alpha + O(\lambda_1 \lambda_2, \alpha \lambda_i)} + \frac{\lambda_1}{2} - \lambda_2 \right) \quad i, j = 1 \text{ or } 2 \dots\dots\dots (18)$$

また、

$$\alpha \sim - \frac{\theta_s - \theta_*}{K_a(\theta_*)} \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial \tau} \right)_* \doteq - \frac{\theta_s - \theta_*}{K_a(\theta_*)} \cdot \frac{dp_{a,L}}{dt} \dots\dots\dots (19)$$

さらに、式 (18) のカッコ内のオーダー比較を行うために、K-7 砂の例について式 (19) によって α の大きさを検討すると、

- i) 湛水深 18 cm, 層厚 152 cm の単一砂層の場合：
 $dp_{a,L}/dt = 5.1 \times 10^{-3}$ cmAq/sec, $\theta_* = 0.36$ の実測値より、 $-\alpha \sim 1.0 \times 10^{-2}$
- ii) 湛水深 10 cm, 層厚 120 cm の単一砂層の場合：
 $dp_{a,L}/dt = 1.8 \times 10^{-3}$ cmAq/sec, $\theta_* = 0.35$ の実測値より、 $-\alpha \sim 3.6 \times 10^{-3}$

このように、 $-\alpha$ は λ_1, λ_2 と同程度のオーダーであるので、式 (18) においては λ_1, λ_2 が ω_* へ及ぼす影響は $\sqrt{-\alpha}$ と比較して無視することができよう。すなわち、式 (18) はつぎのように近似できる。

$$\omega_* \doteq \frac{K(\theta_*)}{\theta_*} (1 - \sqrt{-\alpha}) \dots\dots\dots (20)$$

結局、wetting front の伝播速度は式 (20) で近似的に表わされることとなるが、この場合、 $-\alpha > 0$ でなければ物理的に無意味である。このことは式 (19) より、 $dp_{a,L}/dt > 0$ となることと同等であって、実験事実③の後半が成立することとなるわけである。なお、式 (18) 中の干については、 ω_* が $K(\theta_*)/\theta_*$ より大とはなりえないという実験的事実から、負符号のみが有用であるので、式 (20) では負符号のみが充ちられている。

(3) wetting front 近傍での水分分布

式 (12) について、 $\zeta = \zeta_*$ の近くを対象とし、条件式 (8), (9) を考慮すると、次式がえられる。

$$\omega_* = \frac{K(\theta_*) - K(\theta_0)}{\theta_* - \theta_0} - \frac{K(\theta_*) (\partial p_a / \partial \zeta)_*}{\theta_* - \theta_0} \dots\dots\dots (21)$$

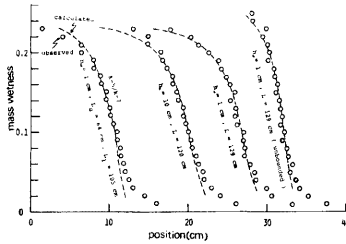


Fig. 3. Comparison between observed value and calculated one for ultimate soil moisture profile in Sand K-7.

4. 不飽和領域の解析

wetting front 近傍における上述の検討結果から、式 (1)、(2) 及び (3) の基礎式がほぼ成立することが明らかになった。そこでこれらの式が不飽和領域の全域にわたって成立するものとしてその解析解を求め、実験結果との比較を行って不飽和領域における浸透機構を調べることにする。

解析を行うに当たって、とくに注意した点は実験事実④に述べた擬飽和領域の存在である。すなわち、この領域ではほぼ飽和状態になっており、間歇的な空気放出に対応して、この領域の中を間歇的に空気が上昇するといった状況が観測された。このことは、砂層の水平断面についてみると、時には飽和であり、時には不飽和であるという変化をしており、したがって、その下方に連なる何時も不飽和状態にある不飽和領域とはかなり異った機構であると思われる。そこで、この擬飽和領域については別途に考察することとし、ここではそれらに連なる不飽和領域を対象として解析を進める。

さて、擬飽和領域の下端、すなわち不飽和領域の上端の座標を x_1 、これは時間 t の関数であるが、その断面を通過する浸透水量を $-M(t)$ とすると、初期条件及び境界条件はつぎのように表わすことができる。

初期条件：

$$t=0 \text{ で、 } \theta(x)=\theta_0=0 \dots\dots\dots (22)$$

境界条件：

$$x = x_1(t) \text{ で、 } \theta_1 = \theta(x_1) = \text{const.} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left[D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x} \right) \right]_{x \rightarrow x_1+} = M(t) \dots\dots\dots (24)$$

$$x = L \text{ で、 } \left[D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x} \right) \right]_{x=L} = 0 \dots\dots\dots (25)$$

$$\left[K_a \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right]_{x=L} = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ここで、初期条件として $\theta_0=0$ とおいたのは、実験で、気乾状態の砂を使用したことと解析の簡単化のためである。

ところで、式 (2) に式 (3) を用いると、

$$-P_a \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[P_a \cdot K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right] - (\theta_s - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \dots\dots\dots (27)$$

となり、さらに式 (1) の $\partial \theta / \partial t$ を代入すると次式がえられる。

$$P_a \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[P_a \cdot K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right] = (\theta_s - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \dots\dots\dots (28)$$

上式と式 (20) と比較すると、 $\sqrt{-\alpha}$ と $(\partial p_a / \partial x)_*$ がほぼ対応しており、その値は前項で記した 2 例について求めてみると 0.1, 0.06 となっていた。wetting front 近傍での $\partial p_a / \partial x$ の最大値が $(\partial p_a / \partial x)_*$ であると考えてよいから、この領域での $\partial p_a / \partial x$ の値はたかだか 10^{-1} 程度といえる。このことから、wetting front の近傍においては、 $1 \gg \partial p_a / \partial x$ となるので、水分分布形は式 (12) 及び (21) から計算することができる。

こうして行った計算値と実験値の比較は既報¹⁾にも記したが、これを再録したものが Fig. 3 であって、両者はかなりよい一致をみせている。

上式において、 P_a は x と t の関数であるが、これが次式のように分離できると仮定しよう。

$$P_a(x, t) = \bar{P}_a(t) + \Delta p_a(x, t), \quad \text{ここに } \bar{P}_a \gg |\Delta p_a(x, t)| \dots\dots\dots (29)$$

この関係を式 (28) の左辺第 1 項に用いると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\bar{P}_a(t) \cdot \left\{ D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x} \right) \right\} + P_a \cdot K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) \right] = (\theta_s - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \dots\dots\dots (30)$$

がえられ、さらに t を固定して x について x から L まで積分し、条件式 (25), (26) を用いて整理すると次式となる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = \frac{-\bar{P}_a \cdot \left(D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} - K \right) + \frac{\rho_a}{\rho_w} \cdot P_a \cdot K_a \cdot \int_x^L (\theta_s - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \cdot dx}{K \bar{P}_a + K_a P} \dots\dots\dots (31)$$

さらに、右辺分子の積分項を除いて式 (29) の仮定を用いると次式となる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = -D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \cdot \frac{A}{K} + A \cdot (1 - \varepsilon) + (1 - A) \cdot \frac{\rho_a}{\rho_w} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、 $A(\theta) = K / (K + K_a) \dots\dots\dots (33)$

$$\varepsilon = \frac{1}{K \bar{P}_a} \cdot \int_x^L (\theta_s - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \cdot dx \dots\dots\dots (34)$$

以下では、式 (1), (2), (3) の代りに、近似的に式 (1), (32) を用いて解析解を求めようとするわけであるが、解析の便利のために、これらの式を独立変数 (θ, t) に変換した次式を用いる。

$$-\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[D \frac{\partial x}{\partial \theta} - K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{D \cdot A}{K} \frac{\partial x}{\partial \theta} + A \cdot (1 - \varepsilon) + (1 - A) \cdot \frac{\rho_a}{\rho_w} \dots\dots\dots (36)$$

なお、ここで用いた解法は、間隙空気の閉塞を伴わない場合、すなわち水と空気の交換が自由な浸透(以下では開放浸透といい、本文のような場合を閉塞浸透とよぶ)を対象として開発された J.Y. Parlange⁶⁾の方法を拡張したものである。

(a) 第 1 次近似解

式 (35) を t を固定して θ について θ から θ_1 まで積分すると、

$$-\int_{\theta_1}^{\theta_0} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta = \left(D \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 - K_1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 \right\} - \left[D \frac{\partial x}{\partial \theta} - K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (37)$$

また、 $\theta = 0$ から θ_1 まで積分し、条件式 (25) を考慮すると次式がえられる。

$$-\int_0^{\theta_1} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta = \left(D \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 - K_1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 \right\} \dots\dots\dots (38)$$

ここに、下付 1 は $\theta = \theta_1$ におけるそれぞれの値を示す。

ところで、上の 2 式の左辺はそれぞれの積分範囲に含まれる総水分量の時間的変化を示すものであるから、 $(\theta_1 - \theta) / \theta_s \ll 1 \dots\dots\dots (39)$

上式を満足するような水分量の大きな θ に着目すると、

$$\int_0^{\theta_1} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta \ll \int_0^{\theta_1} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta \dots\dots\dots (40)$$

という関係が成立する。したがって、式 (37), (38) よりつぎの近似的関係がえられる。

$$D \frac{\partial x}{\partial \theta} - K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\} \doteq D_1 \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 - K_1 \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_1 \right\} \dots\dots\dots (41)$$

上式の右辺の値は条件式 (24) より $M(t)$ に等しいから、結局つぎの関係式がえられる。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D}{M+K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\}} \quad \dots\dots\dots (42)$$

すなわち、水分量の大きいところに着目して、式(36)と式(42)を用いて第1近似解とするわけである。これらの2式から $\left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)$ を消去すると、

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D \cdot (1-A)}{M+K \cdot \left\{ (1-A) \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) + A \cdot \varepsilon \right\}} \quad \dots\dots\dots (43)$$

がえられ、さらに t を固定して θ について θ から θ_1 まで積分し、条件式(23)を考慮すると次式をうる。

$$x = x_1 - \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{M+K \cdot (1-A) \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) + K \cdot A \cdot \varepsilon} \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots (44)$$

ここで、上式右辺の積分内の分母の近似を考える。すなわち、 $\rho_a/\rho_w \sim 10^{-3}$ であるから、

$$\rho_a/\rho_w \ll 1, \text{ すなわち } 1 - (\rho_a/\rho_w) \doteq 1 \quad \dots\dots\dots (45)$$

とすることができる。ついで、式(34)より、 $p_{a,L}$ を円筒下端での測定空気圧とすると、 $KA\varepsilon \sim (\theta_s \cdot L / \bar{P}_a) \cdot (dp_{a,L}/dt)$ である。本実験の場合には、 $\bar{P}_a \sim 10^3 \text{ cmAq}$ 、 $\theta_s \sim 0.5$ 、 $L \sim 10^2 \text{ cm}$ であるので、 $KA\varepsilon \sim 5 \times 10^{-2} \cdot A \cdot (dp_{a,L}/dt)$ となる。一方、K-7砂を用いた場合の実験によると、擬飽和領域が形成されているときの浸透強度 ($-M$) は低くても $2.5 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$ のオーダーであり、また円筒下端での空気圧の時間的変化の割合 ($dp_{a,L}/dt$) は 10^{-3} cmAq/sec のオーダーである。よって、

$$\frac{A \cdot K \cdot \varepsilon}{(-M)} \sim 1.5 \times 10^{-2} \cdot A$$

となり、 A は式(33)より明らかに1より小さい値であるから、少なくとも本実験の範囲では

$$K \cdot A \cdot \varepsilon \ll |M| \quad \dots\dots\dots (46)$$

とすることができる。式(45)、(46)の関係を式(44)に用いることによって次の近似式をうる。

$$x = x_1 - \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{M+K \cdot (1-A)} \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots (47)$$

この式が Parlange の意味での第1次近似である。

つぎに第2次近似に便利なように、式(47)を t で偏微分すると、

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{dx_1}{dt} + \frac{dM}{dt} \cdot \int_{\theta}^{\theta_1} w_2(\theta, t) \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここに、 $w_2 = D \cdot (1-A) / \{M+K \cdot (1-A)\}^2$ (49)

がえられるが、さらに、上式を t を固定して θ について0から θ_1 まで積分し、 $\int_0^{\theta_1} (\partial x / \partial t) \cdot d\theta = -M$ を考慮すると、次式がえられる。

$$\frac{dM}{dt} = -\left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) / \int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots (50)$$

また、式(50)を式(48)に用いるとつぎの関係がえられる。

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{dx_1}{dt} - \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{\int_0^{\theta_1} w_2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta} \quad \dots\dots\dots (51)$$

(b) 第2次近似解

基礎式の1つである式(35)の左辺に、 θ の大きいところに着目してえられた第1次近似式(51)を代入すると次式となる。

$$\frac{dx_1}{dt} - \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{\int_0^{\theta_1} w_2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta} = -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[D / \frac{\partial x}{\partial \theta} - K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (52)$$

上式を t を固定して θ について 0 から θ まで積分し、境界条件式 (25) を考慮すると、次式がえられる。

$$\theta \cdot \frac{dx_1}{dt} - \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{\int_0^\theta d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta} = -D \left/ \frac{\partial x}{\partial \theta} + K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \right) \left/ \frac{\partial x}{\partial \theta} \right. \right\} \right. \dots (53)$$

つぎに、第 1 次近似の場合と同様に、式 (36) と式 (53) から $\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \left/ \frac{\partial x}{\partial \theta} \right.$ を消去して $\partial x / \partial \theta$ について整理すると次式となる。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) + K \cdot A \cdot \varepsilon - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot I} \dots (54)$$

ここに、

$$I = \frac{\int_0^\theta d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta} \dots (55)$$

いまの場合にも式 (45) が成立することは明らかである。

また、 θ が大きい場合は式 (46) より形式的に $\varepsilon=0$ とすることができようし、一方、 θ が小さい場合には、後述するように A の値が十分小さくなるので、結局のところ、式 (54) の分母において $K \cdot A \cdot \varepsilon$ の項を他の項に比して小さいとして無視することができると思われる。よって、式 (54) は近似的につぎのようになる。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot I} \dots (56)$$

上式において、 t を固定して θ について θ から θ_1 まで積分し、境界条件式 (23) を考慮することによって次式をうる。

$$x = x_1 - \int_\theta^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot I} \cdot d\theta \dots (57)$$

式 (57) が第 2 次近似であるが、式中の M は、Parlange の開放浸透に対する解析法に従えば式 (50) に従うということになる。しかし、J. R. Philip⁷⁾ が指摘しているように、第 2 次近似で水の連続性が保持されないので、J. Cisler⁸⁾ の方法に従って次の関係式を満足するものとする。

すなわち、式 (57) を t で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} = & \frac{dx_1}{dt} + \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \int_\theta^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A) \cdot \theta_1}{Y} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{\theta}{\theta_1} \right) \cdot d\theta \\ & + \frac{dM}{dt} \cdot \int_\theta^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{Y} \cdot \left\{ \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right. \\ & \left. + 2 \cdot \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{B_2(\theta_1)}{B_2(\theta_1)} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right) \right\} \cdot d\theta \dots (58) \end{aligned}$$

ここに、

$$B_2(\theta) = B_2(\theta; M) = \int_0^\theta d\theta \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta = \int_0^\theta d\theta \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{\{M + K \cdot (1-A)\}^2} \cdot d\theta, \dots (59)$$

$$B_3(\theta) = B_3(\theta; M) = \int_0^\theta d\theta \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{\{M + K \cdot (1-A)\}^3} \cdot d\theta, \dots (60)$$

$$Y = \left\{ K \cdot (1-A) - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right\}^2 \dots (61)$$

となるので、これを t を固定して θ について 0 から θ_1 まで積分し、条件式 (24) を考慮すると次式がえられる。

$$-\frac{dM}{dt} = \int_0^{\theta_1} d\theta \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A) \cdot \theta_1}{Y} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{\theta}{\theta_1} \right) \cdot d\theta$$

$$+ 2 \cdot \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{B_2(\theta_1)}{B_2(\theta_1)} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right) \} d\theta \quad (62)$$

結局、式 (57)、(62) が求める第 2 次近似解である。

5. 第 2 次近似解の性質と実験結果の比較

(1) 第 2 次近似解の 2, 3 の性質

i) A 及び $K \cdot (1-A)$ の性質

式 (57)、(62) の性質を調べるには、まずこれらの式に含まれている A 及び $K \cdot (1-A)$ の θ に対する変化の様を知る必要がある。 K と θ との関係は水平浸透実験より求まる $D(\theta)$ と、毛管ポテンシャル ψ と θ の関係より間接的に求めたが、 K_a と θ との関係は本研究では測定しなかった。ここでは、 K_a と θ との関係には、前記のように式 (17)₁、あるいは式 (17)₂ を仮定したが、その際いずれがよいかを即断することはできない。しかし、2, 3 の試算の結果、式 (17)₂ の方がよいように思われたので、ここでは式 (17)₂ によって K_a と θ との関係を算定した。

このようにしてえられた K と θ 、 K_a と θ の関係を用いて、式 (33) で定義されている A 、及び $K \cdot (1-A)$ と θ との関係を $K-7$ 砂の場合について計算したものが Fig. 4 である。この図においてもっとも特徴的なことは、 $K \cdot (1-A)$ の値が θ のある値 θ_0 (図の場合は $\theta_0 \approx 0.36$) で極大値をもつということである。なお、この性質は $K-6$ 砂及び $K-5$ 砂の場合にも同様に認められた。

なお、 $\theta < \theta_1$ なる断面における単位面積当りの浸透水量 F は、

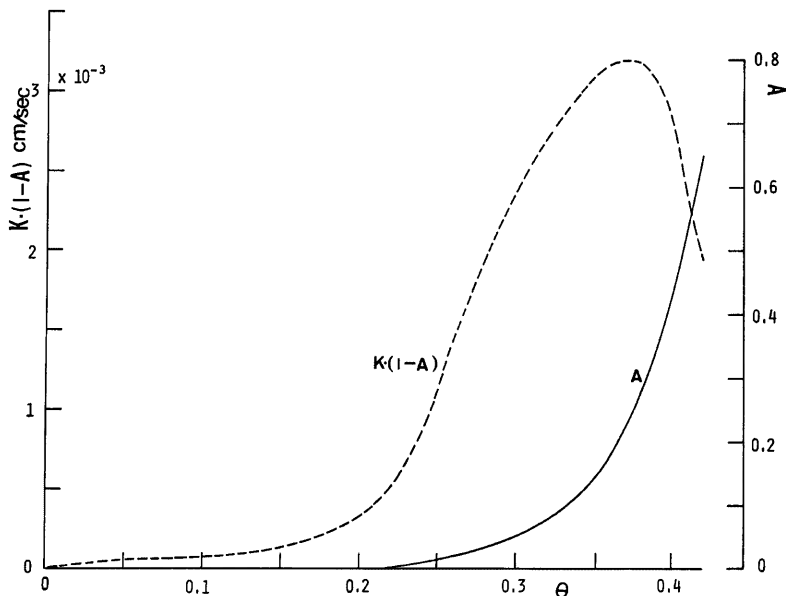


Fig. 4. Relation between A or $K \cdot (1-A)$ and soil moisture content θ in Sand K-7.

$$F = -D \frac{\partial x}{\partial \theta} + K \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{\partial p_a}{\partial \theta} \frac{\partial x}{\partial \theta} \right) \right\} \dots\dots\dots (63)$$

で与えられるが、この式と基礎式 (36) とから、次式がえられる。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D \cdot (1-A)}{-F + K \cdot (1-A) \cdot \left(1 - \frac{\rho_a}{\rho_w} \right) + K \cdot A \cdot \varepsilon} \dots\dots\dots (64)$$

一方、 x と x_1 との間、すなわち θ と θ_1 との間の領域に含まれる水分量は時間の経過と共に増加することが期待され、また $\theta = \theta_1$ における浸透水量は条件式 (24) より $-M$ であるから、つぎの関係が成立すると考えてよい。

$$-M \geq F \dots\dots\dots (65)$$

また、この種の浸透問題では θ の増加は x の減少に対応するので、

$$\partial x / \partial \theta < 0 \dots\dots\dots (66)$$

である。ところで、 θ の大きいところを対象として考えると、式 (46) が成立し、また、式 (45) も成立するので、結局、式 (64)、(65)、(66) の関係より、

$$0 > \frac{\partial x}{\partial \theta} \doteq \frac{D \cdot (1-A)}{-F + K \cdot (1-A)} \geq \frac{D \cdot (1-A)}{M + K \cdot (1-A)} \dots\dots\dots (67)$$

となるので、

$$M + K \cdot (1-A) < 0, \text{ すなわち } K \cdot (1-A) < -M \dots\dots\dots (68)$$

でなければならないこととなる。このことを Fig. 4 で説明すると、 $x = x_1$ における浸透強度 $-M$ を図中に描いたとするとこの直線は $K \cdot (1-A)$ の曲線の上部に位置し決して交わらないということである。

ii) 浸透強度が減少する場合の伝播特性

式 (57) 中の I は式 (55) で定義されているが、 $-M$ が減少するに従い w_2 の値は θ_c の近傍で大となり、 I の値もほぼこの近傍でまきるので、

$$I = \frac{\int_0^\theta d\alpha \int_\alpha^{\theta_1} w_2 d\beta}{\int_0^{\theta_1} d\alpha \int_\alpha^{\theta_1} w_2 d\beta} = \frac{\theta \cdot \int_0^{\theta_1} w_2 d\theta + \int_0^\theta \theta \cdot w_2 d\theta}{\int_0^{\theta_1} \theta \cdot w_2 d\theta} \doteq \begin{cases} \theta / \theta_c, & \text{for } \theta < \theta_c \\ 1, & \text{for } \theta > \theta_c \end{cases} \dots\dots\dots (69)$$

と近似できる。よって、式 (57) の近似式として次式がえられる。

$$x = x_1 - \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{\theta}{\theta_c}} \cdot d\theta, \text{ for } \theta < \theta_c \dots\dots\dots (70)_1$$

$$x = x_1 - \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) + (\theta_1 - \theta) \cdot \frac{dx_1}{dt} + M} \cdot d\theta, \text{ for } \theta > \theta_c \dots\dots\dots (70)_2$$

つぎに、式 (56) の $\partial \theta / \partial x$ がほぼ零となるようなところの水分量を θ_* とし、式 (69) の上式を考慮すると次の近似が成立する。

$$-M \doteq (\theta_1 - \theta_c) \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\theta_c}{\theta_*} \cdot K_* \cdot (1-A_*) \dots\dots\dots (71)$$

また、上式は dx_1/dt のいかにかわからず成立するはずであるから、式 (68) の条件より、

$$\theta_* < \theta_c \dots\dots\dots (72)$$

であり、しかもこのような θ_* は小さな値とは考えられないので、式 (32) より、近似的に次式が成立する。

$$A_* \doteq (\partial p_a / \partial x)_* \dots\dots\dots (73)$$

さらに、このような $\partial \theta / \partial x$ が零に近い状態における水分の伝播速度を調べる。式 (58) 中の dM/dt に式 (62) を代入して二重積分を部分積分によって表わすと次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} = & \frac{dx_1}{dt} + \theta_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{Y} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \theta \right) \cdot d\theta \\ & - \left\{ M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} + \theta_1 \cdot \frac{d^2 x_1}{dt^2} \cdot \int_0^{\theta_1} \theta \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{Y} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \theta \right) \cdot d\theta \right\} \\ & \times \int_0^{\theta_1} \frac{D \cdot (1-A)}{Y} \cdot \left\{ \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} + 2 \cdot \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{B_2(\theta_1)}{B_2(\theta_1)} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right) \right\} \cdot d\theta \\ & \times \int_0^{\theta_1} \theta \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{Y} \cdot \left\{ \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} + 2 \cdot \left(M + \theta_1 \cdot \frac{dx_1}{dt} \right) \cdot \frac{B_2(\theta_1)}{B_2(\theta_1)} \cdot \left(\frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} - \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \right) \right\} \cdot d\theta \end{aligned} \quad (74)$$

上式において擬飽和領域下端の進行速度が一定に近づくと、すなわち $d^2 x_1/dt^2=0$ の場合には、 $\theta > \theta_c$ に対して、式 (69) を導いたと同様の手順により、

$$\frac{\partial x}{\partial t} \doteq dx_1/dt \quad (75)$$

$\theta < \theta_*$ に対して、式 (71) をも用いることにより、

$$\frac{\partial x}{\partial t} \doteq \frac{\theta_* - \theta_c}{\theta_* + \theta_c} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{2 \cdot \theta_c}{\theta_* + \theta_c} \cdot \frac{K_* \cdot (1-A_*)}{\theta_*} \quad (76)_1$$

さらに、式 (76)₁ において、 $\theta_* \doteq \theta_c$ の場合には、式 (73) を考慮してつぎのように近似できる。

$$\frac{\partial x}{\partial t} \doteq K_* \cdot [1 - (\partial p_a / \partial x)_*] / \theta_* \quad (76)_2$$

すなわち、擬飽和領域下端の進行速度 dx_1/dt が一定に近づいたときには、 $\partial \theta / \partial x \doteq 0$ の状態の伝播速度が二つ存在し、その一つは dx_1/dt にほぼ一致し、もう一つは式 (76)₁ で与えられる。さらに、式 (76)₂ は、wetting front の進行速度を与える式 (21) に一致しているので、結局、式 (76)₁ は wetting front の進行速度を与える式といえる。

Fig. 5 (a), (b) は、式 (73) について、 $dx_1/dt = \text{const.}$, $d^2 x_1/dt^2 = 0$ として $-M$ を変えた場合の水分 θ の伝播速度 $(\partial x / \partial t)_\theta$ を θ をパラメーターとして描いた図である。実験結果を参照して、 $\theta_1 = 0.41$, dx_1/dt

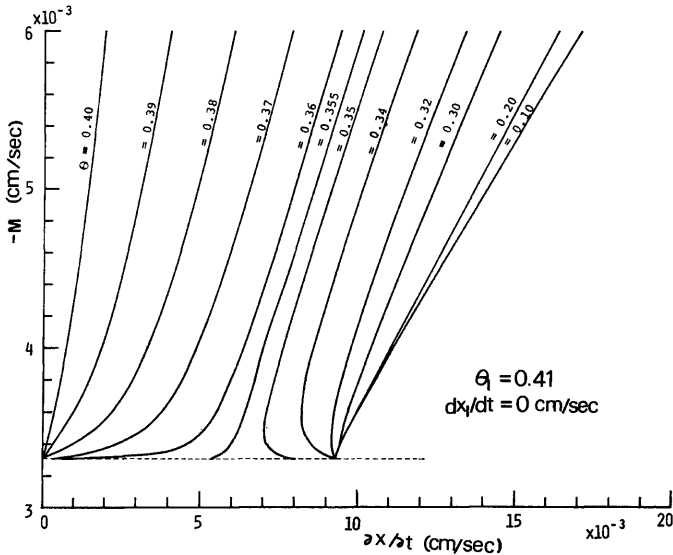


Fig. 5(a). Relation between travelling velocity for some moisture content $(\partial x / \partial t)_\theta$ and infiltration rate $-M$.

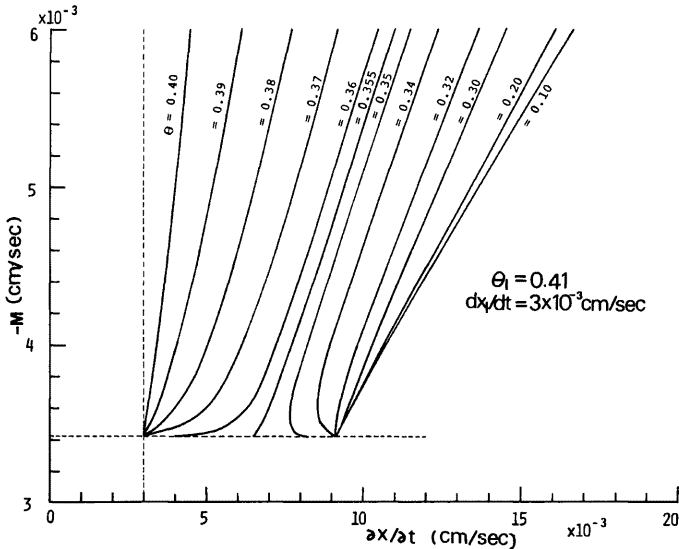


Fig. 5(b). Same as (a).

=0 及び 3×10^{-3} cm/sec の場合を示したが、いずれの場合も、 $-M$ の値の減少とともに $(\partial x / \partial t)_0$ も減少する傾向にあるが、 $-M$ の値がある値 (式 (68) からほぼ $K \cdot (1-A)$ であるが) に近づくに従って大略 $\theta = \theta_0$ を境として二つの極限値に収斂する傾向を示している。この場合 θ の大きいものは dx_1/dt の値に近づき、小さいものは式 (76)₂ で与えられる値 (Fig. 5 (b) の場合は 9.1×10^{-3} cm/sec) にほぼ近づいており、前記の式 (75)～式 (76)₂ の間の考察結果と一致している。この伝播特性は浸透強度が減少して一定値に近づくようになると、ほぼ一定の形状と速度で進行する wetting front が形成されるという実験事実をよく説明している。

iii) 水分分布形

Fig. 6 (a), (b) は、式 (57) について、 $dx_1/dt = \text{const.}$ とし、 $-M$ の値を種々変えた場合の計算結果を $-M$ をパラメーターとして示したものである。その際、 x_1 と $-M$ の関係は後述する v) において $-M_0 = 6 \times 10^{-3}$ cm/sec で $x_1 = 0$ としており、これについての詳細は v) を参照されたい。いずれの図においても、 $-M$ の値が大きいときは、 x の値は小さく、また $-M$ の変化に対する x の変化は小さいが、 $-M$ の値が小さくなるに従って、 $-M$ の変化に対する x の変化は大きくなっている。このことは、浸透が進行していくと、浸透強度の僅かな減少にもかなり長時間を要し、実験結果をみたときに浸透強度が長時間ほぼ一定になっているようにみえることに対応していると思われる。

また、不飽和領域においてほぼ一定の wetting front が形成されるという特性も、これらの図からうかがうことができる。

iv) 間隙気圧の変化

間隙気圧 p_a の変化を調べるために、式 (36) について、第 1 近似解を求めたと同様の近似、すなわち ϵ と ρ_a / ρ_w を微小量とすると次式となる。

$$\partial p_a / \partial \theta = -A \cdot D / K + A \cdot \partial x / \partial \theta \dots\dots\dots (77)$$

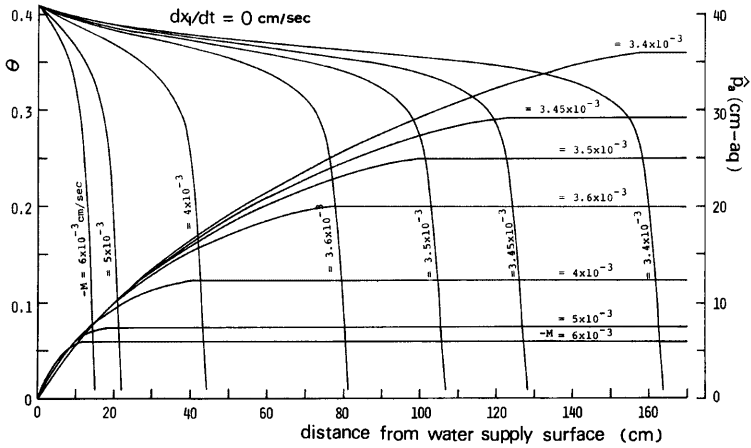


Fig. 6(a). Calculated moisture profile $\theta(x)$ and pore-air pressure one $\hat{p}_a(x)$ for various infiltration rates $-M$.

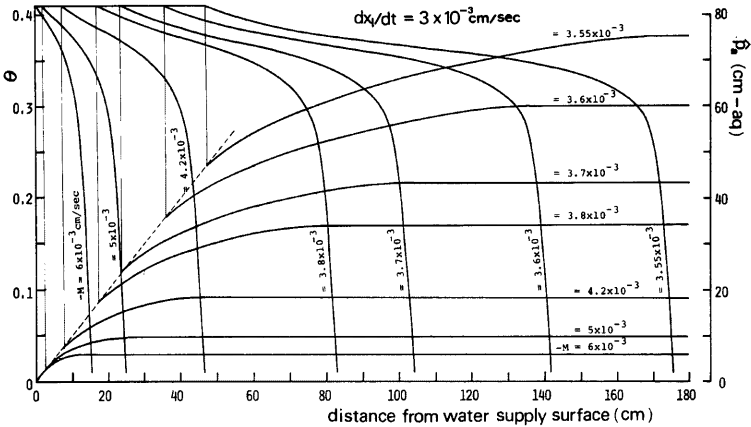


Fig. 6(b). Same as (a).

さらに、式 (56) を上式に代入したのち、 t を固定して θ について θ から θ_1 まで積分すると次式がえられる。

$$\begin{aligned}
 \Delta p_a(\theta) &= p_a(\theta, t) - p_a(\theta_1, t) \\
 &= \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{A \cdot D}{K} d\theta - \int_{\theta}^{\theta_1} \frac{A \cdot (1-A) \cdot D}{K \cdot (1-A) - \theta \cdot \frac{dx_1}{dt} + (M + \theta_1) \cdot \frac{dx_1}{dt}} \cdot \frac{B_2(\theta)}{B_2(\theta_1)} \cdot d\theta
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

上式を用いて、Fig. 6 の場合について $\Delta p_a(\theta)$ を計算し、 $\theta(x)$ の場合と同様に $\Delta p_a(x)$ に換算したものに x_1 を加えて、 $\hat{p}_a = x_1 + \Delta p_a(x)$ としたが同時に記入されており、wetting front より下方の空気圧は一樣であり、wetting front の背後では水分量の増加とともに減少していく様子を示している。

つぎに, Fig. 7 は $\Delta p_a(0) = p_a(0, t) - p_a(\theta_s, t)$, すなわち円筒下端における相対的空気圧を, $dx_1/dt = \text{const.}$ の場合に対して, $-M$ の値を変化させて計算した結果を示したものである。この図から, $-M$ の値の減少とともに $\Delta p_a(0)$ の値は増加し, $\Delta p_a(0)$ の $-M$ に対する感度が $-M$ の減少とともに増大することがわかる。こうした性質は Fig. 6 の $-M$ と x との間の特性と同じである。

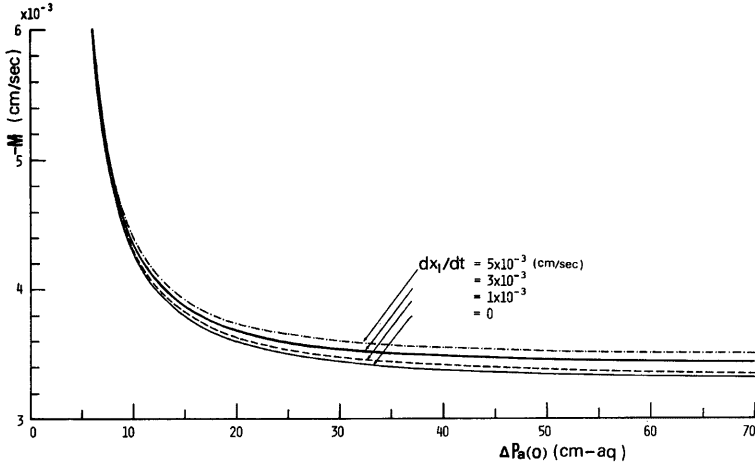


Fig. 7. Relation between relative pore-air pressure $\Delta p_a(0)$ and infiltration rate $-M$ for various constant moving velocities of nearly saturated zone (pseudo-saturated zone) dx_1/dt .

v) 浸透強度の変化

式 (62) において, $d^2 x_1/dt^2 = 0$ とし, さらに dx_1/dt の値を与えると, つぎの形の式がえられる。

$$t - t_0(M_0) = \int_{M_0}^M \frac{dM}{F_n(M; dx_1/dt)} \dots\dots\dots (79)$$

ここに, 下付 “0” は計算の初期値を示し, $F_n(M; dx_1/dt)$ は dx_1/dt を与えたとき M の関数であることを示す。

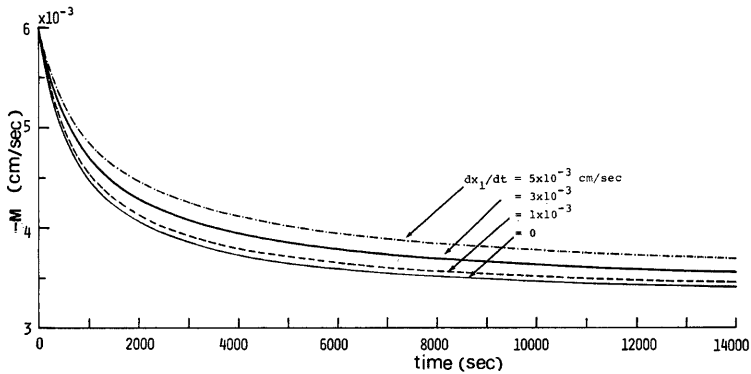


Fig. 8. Relation between infiltration rate $-M$ and lapse time for various constant moving velocities of pseudo-saturated zone dx_1/dt .

Fig. 8 は, $\theta_1=0.41$, $dx_1/dt=0, 1 \times 10^{-3}, 3 \times 10^{-3}, 5 \times 10^{-3}$ cm/sec として式 (79) を計算した結果である。なお, $-M_0=6 \times 10^{-3}$ cm/sec としているが, これは $K(\theta_s)$ に近い値である。この図から, dx_1/dt の値が大きいものほど浸透強度は大きく, 時間の経過とともに dx_1/dt の値に対応した最終浸透強度に漸近して見えるが, ここで対象とした dx_1/dt の値の範囲内ではさほど最終浸透強度には差がない。なお, 開放浸透の場合, 湛水深のいかんにかかわらず, 最終浸透強度がほぼ同一になるという結果^{5), 9)} があり, 上述の結果との対比は興味深い。

(2) 実験結果との比較

以上のようにして第 2 次近似解の諸特性が求められたので, つぎにこれらと著者らがさきに行った実験結果^{1), 2)} との比較を試みる。もちろん, ここで求めた解は, その解析過程からわかるように, 浸透強度 $-M$, 擬飽和領域の長さ x_1 , その発達速度 dx_1/dt 等のパラメーターを含んでおり, 解は不飽和領域の内部を対象としたものである。

さて, Fig. 9 (a), (b), (c) は, 式 (79) の計算結果と実験結果を比較したものである。この場合, 計算の時間原点 t_0 は, 実験での浸透強度が 6×10^{-3} cm/sec となる時間にとり, そのときに, $-M=6 \times 10^{-3}$ cm/sec となとした。また, 同図には空気圧の比較も同時に示されており, 式 (78) によって計算したものであるが, 同式中の $p_a(\theta, t)$ を, 湛水深 h_w , air entry potential ψ_e (K-7 砂は場合, -30 cm Ag 程度) を用いて,

$$p_a(\theta, t) = h_w + (t - t_0) \cdot \frac{dx_1}{dt} - \psi_e \dots\dots\dots (80)$$

と表わし, 円筒下端での空気圧を示す $p_a(0, t) (=p_{a,L})$ を求めた。浸透強度, 空気圧とも計算値と実測値とはほぼ一致した傾向を示している。ただし, 計算に当っては実測の dx_1/dt を使用すべきであるが, 実測か

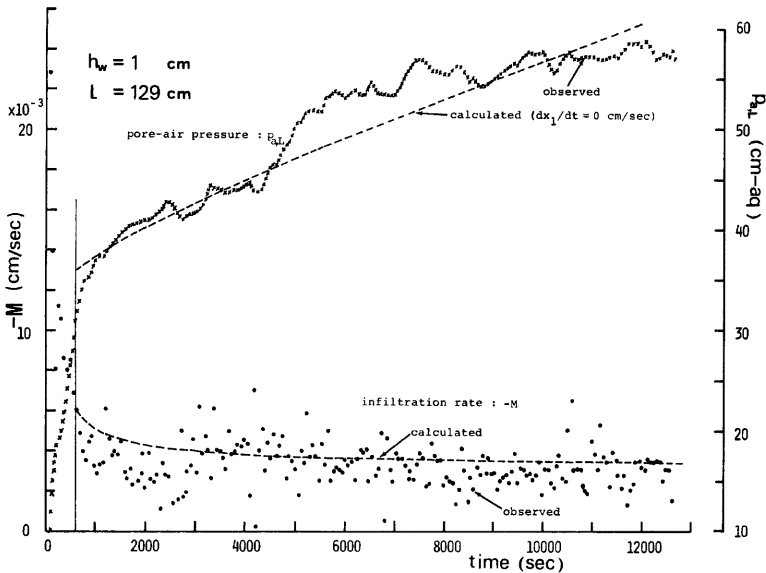


Fig. 9(a). Comparison between observed values and calculated ones on infiltration rate $-M$ and pore-air pressure at the bottom of cylinder $p_{a,L}$.

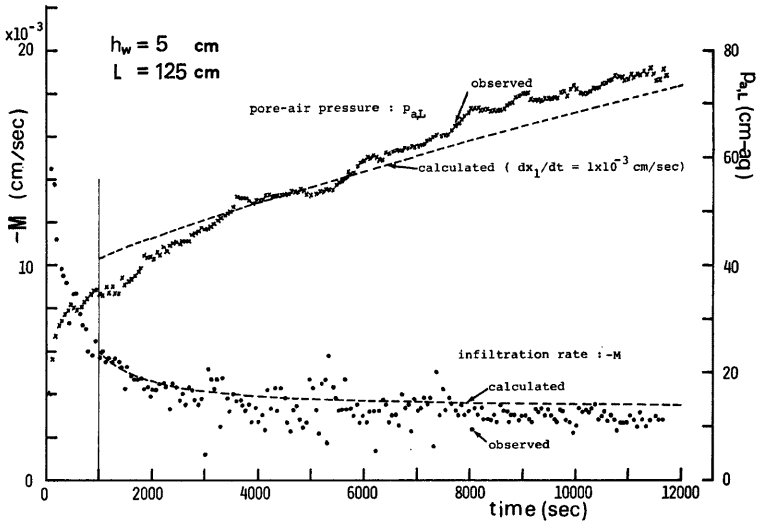


Fig. 9(b). Same as (a).

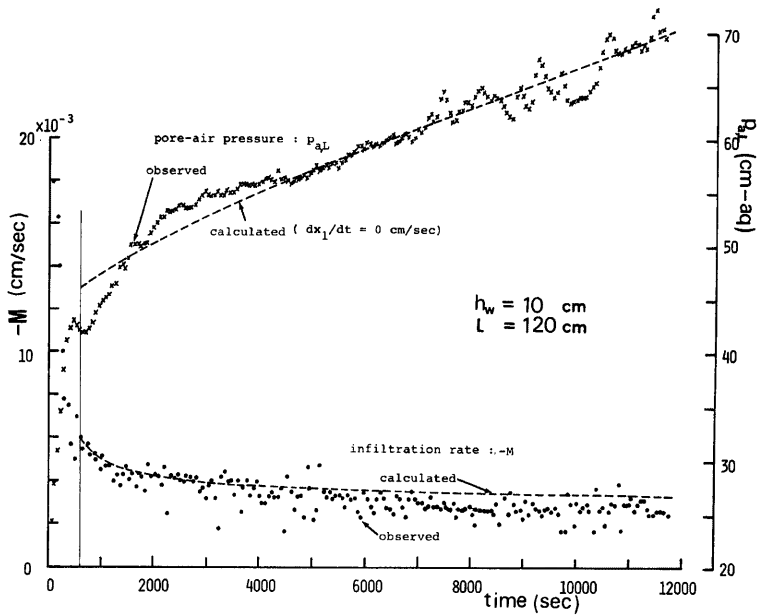


Fig. 9(c). Same as (a).

らこの値を決定することが困難であったため、 dx_1/dt の値を仮定して空気圧の計算を行い、その結果と実測値とがほぼ一致する場合の dx_1/dt の値を求めたもの (図中記入の値) を両者の計算に用いた。このような取扱いはあるが、計算値と実測値の一致はかなりよいといえよう。なお、空気圧の計算の基礎である式 (77) をみてすぐ気がつくように、この式の中には砂層厚 L の効果が直接入っていない。これは式の誘導に際して ϵ を小さいとして無視したためであるが、しかし、当然のことながら条件式 (26) は考慮されており、空気は円筒下端より下方へ流出しないという条件は満足されている。したがって空気圧の計算結果は砂層厚に無関係ということになる (間接的には dx_1/dt の値に関係していると考えられるが)。換言すると、浸透がかなり進んだ段階では、円筒下端での空気圧の上昇の様子は砂層厚に無関係であるということであり、こうした関係は実験結果とほぼ一致している。

つぎに、Fig. 10 は式 (79) より求まる $M(t; dx_1/dt)$ を媒介して、式 (57) より求められた wetting front と実験より求めた wetting front の伝播の様子を比較したものである。この場合、計算による wetting front は水分量が $\theta_1/2=0.205$ の点で代表させた。また、計算においては、 $t=t_0$ のとき $-M=-M_0=6 \times 10^{-3}$ cm/sec としたので、実験値の対比のために実験における浸透強度が 6×10^{-3} cm/sec となる時間 t_0 を 800 sec として図示されている。図からわかるように、 $(\partial x/\partial t)_{\theta=\theta_{1,2}}$ の計算値の方がやや大きな値となっているが、使用した諸定数の推定誤差を考慮すると、大略の傾向として両者はよく一致しているといえよう。

最後に、2. で記した実験事実①について検討してみよう。K-7 砂を用いた著者らの実験¹⁾ によると、Fig. 9 でみられるような wetting front のほぼ一定の伝播速度として、 $\omega_* = 8 \sim 9 \times 10^{-3}$ cm/sec、また水分量は $\theta_* = 0.35$ 程度であった。すでに、Fig. 5 のところで説明したように、ほぼ $\theta_c = 0.36$ より小さい領域の伝播速度は一定値に近づき、その値はほぼ 9.2×10^{-3} cm/sec であったが、これらの値はそれぞれ上記の θ_* と ω_* の値とほぼ一致している。

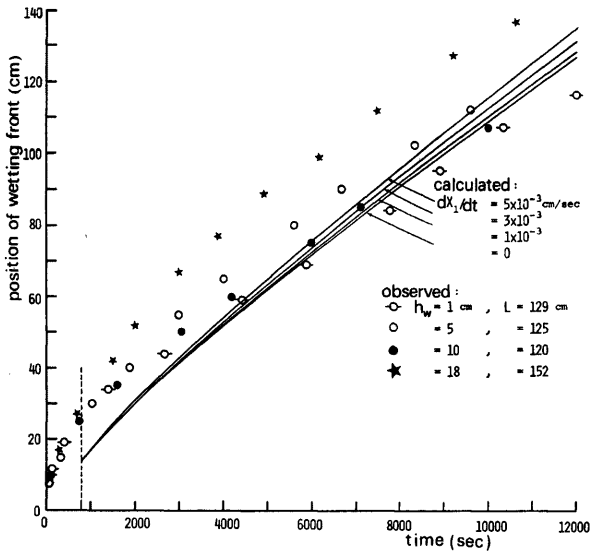


Fig. 10. Comparison between various observed movements of wetting front and calculated ones.

6. む す び

以上、下端を閉じた円筒内につめた砂層への湛水浸透における不飽和領域の解析を試みたのであるが、その結果、砂層の表面直下に生ずる擬飽和領域を除き、その下方に連なる不飽和領域における浸透流は、水及び空気の流れが拡張された Darcy 則に従うとする式 (1), (2) と空気の状態方程式 (3) によって表現されることが明らかになった。すなわち、擬飽和領域の下端及び砂層下端における境界条件と初期条件を与えて、Parlange の意味での第 2 次近似解を求めたところ、つぎのような特性が明らかになった。

- 1) 実験によると、擬飽和領域の下端と不飽和領域の下端で二つ wetting front が生じ、進行速度は後者が速いことが観測されるが (Fig. 2 参照)、その原因は Fig. 4 に示すように $K \cdot (1-A)$ の値に極大値が存在することである。
 - 2) 浸透がある程度進行したのちの不飽和領域内の空気圧の相対的变化は、砂層厚にはほぼ無関係である。
 - 3) 浸透強度も、空気圧の場合と同様で、ある程度浸透が進むと砂層厚にはほぼ無関係になる。
- しかしながら、上述したことは、不飽和領域を対象とした解析結果であって、とくに擬飽和領域の下端の境界条件を a priori に与えている。こうした閉塞浸透の特徴はむしろ擬飽和領域の形成にあるように思われるので、今後はこの問題について研究を継続していくつもりである。なお、計算に際して京都大学化学研究所 FACOM 230-48 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 石原安雄・下島栄一：閉塞単一砂層への雨水浸透に関する研究，京都大学防災研究所年報，第19号 B，1976，pp. 99-122.
- 2) 石原安雄・下島栄一：閉塞2層砂への雨水浸透に関する実験的研究，京都大学防災研究所年報，第20号 B，1977，pp. 119-147.
- 3) 下島栄一・石原安雄・時松昌則：降雨後の浸透水の移動について，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集第2部，1977，pp. 225-226.
- 4) Scheidegger, A. E.: The Physics of flow through porous media, Univ. of Toronto Press, 1959, p. 224.
- 5) De Wiest, R. J. M.: Flow through porous media, Academic Press, 1969, p. 486.
- 6) Parlange, J. Y.: 例えば Theory of water movement in soil: 6. Effect of water depth over soil, Soil Sci., Vol. 113, 1972, pp. 156-161.
- 7) Knight, J. and J. R. Philip: On solving the unsaturated flow equation: 2, Critique of Parlange method, Soil Sci., Vol. 184, 1974, pp. 407-416.
- 8) Cislér, J.: Note on the Parlange method for numerical solution of horizontal infiltration of water into soil, Soil Sci., Vol. 117, 1974, pp. 70-73.
- 9) Philip, J. R.: The theory of infiltration: 6. Effect of water depth over soil, Soil Sci., Vol. 85, 1958, pp. 278-286.