

# 自己回帰・移動平均法による構造物の動的 パラメータの推定

土岐 憲三・佐藤 忠信・生木 泰秀

## DETECTION OF DYNAMIC PROPERTIES OF STRUCTURAL SYSTEMS BY THE AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE METHOD

By Kenzo TOKI, Tadanobu SATO and Yasuhide OIKI

### Synopsis

This paper is concerned with the detection of natural periods and damping factors from uniformly sampled data of the response of a linear structural system subjected to stationary random excitation. The analytical procedure is based on the least-square method (LS) for synthesizing the discrete time series. The discrete time series of uniformly spaced samples from the output of a linear differential equation excited by the stationally white noise is represented as an autoregressive moving average time series (AR-MA). And the parameters of the AR-MA model is computed by a tow stage least-square method (2SLS). In the first LS stage, the autoregressive parameters are estimated from the sequence of data by solving the Yule-Walker equation and by using the concept of maximum entropy proposed by Burg. Numerical examinations show that the computational expense for the estimation of structural properties by the former method is much more than the latter method.

### 1. ま え が き

本研究は、定常ランダム外力が作用している線形構造系の応答観測結果を用いて、系の固有振動数や減衰定数を決定するための方法論に考察を加えたものである。構造物の振動特性を推定するために、起振器を用いた定常強制振動実験を行うことが多いが、構造物が大きくなると起振器の性能などの制約から定常加振を行い得なくなる状態が生ずる場合も起り、実験の実施が困難になる場合がある。

一方、構造物の微動を計測することによって構造物の動特性を推定する手法は、その簡便さなどから広く用いられている。常時微動は主として地盤の震動特性を推定するために測定されていたものであり<sup>1,2)</sup> 我国のように堆積層厚が薄い所では有効な地盤調査法であることが判明し、これを構造物に適用しようとしたものである。微動の振幅は計測しうる最小レベルのものであるから、構造物の固有周期は定常強制振動実験によるものに比べ若干高くなるが、一般に構造物上部の微動の平均周期は構造物の固有周期と数%の誤差で一致する<sup>3)</sup> と言われており、微動のパワースペクトル密度を評価することにより、構造物の固有周期がかなりの精度で推定できることが明らかになっている。これに反し、構造物の耐震性を検討する場合に重要な要因となる減衰性に関しては、1自由度系の自己相関関数やパワースペクトル密度などとの比較から減衰性を決めるため、スペクトル評価の際の解析時間の長さやウィンドウ処理などの影響によってその値はかなり変動する。<sup>4)</sup> これは Cherry ら<sup>5)</sup> が指摘しているように、構造系は入力として常時微動や自然風などの性格の不明な外力を受けるため、構造物の微動には多くの次数の固有振動成分が混在しており、単純な1自由度系に準拠した解析だけでは構造物の特性が抽出されないためと考えられる。こうした観点から狭帯域バンドパスフィルターを用いて固有振動数近傍の振動エネルギーを通過させ、これから系の動特性を推定しようとする試み

も行われている。<sup>6,7)</sup>

以上述べてきた方法とは異なるが、自動制御の分野で良く用いられる定常時系列の概念を用いて、線形系の応答の予測を行い、その結果から系のパラメータを推定する手法が開発されており、<sup>8-10)</sup> これも線形構造系の動特性の推定に用いることができる。この解析では系を駆動させる入力として白色雑音を仮定するので、常時微動や自然風の特性を規定することになるが、解析手法が明確であるので今後広く用いられるものと考えられる。これは Yule-Walker 方程式を経由することにより自己回帰・移動平均過程の係数を推定し、この係数と構造物の固有振動数と減衰定数の間に成立する関係式を用いることにより、微動の観測データから直接構造系の振動特性を推定しようとするものである。Yule-Walker の方程式を解くためには、あらかじめ、観測値の自己相関関数を推定しておかなければならないため、データ長をかなり長く取らなければならない。一方、最大エントロピー法と呼ばれる新しいスペクトルの計算法が Burg<sup>11)</sup> によって提案され、従来の方法に比べ、スペクトルの分解能がきわめて良く、かつ短いデータからでもスペクトルの計算が可能であることが示された。<sup>12)</sup> この方法によっても自己回帰・移動平均過程の推定が可能なので、本研究では両者の方法によって求まる構造物の動的パラメータを比較することにより、構造系の動特性を推定する際に必要となるデータ長について詳細な検討を加える。なお解析手法の検討が目的であるので、実際の微動観測は行わず、線形構造系に白色雑音の加速度が入力した場合のシミュレーションを行い、その結果を観測データとした。

2. 線形定常時系列の概念

線形定常時系列の代表的なものとしては、自己回帰過程、移動平均過程ならびにこれらの混合した自己回帰・移動平均過程の 3 種類が有る。<sup>13)</sup> いま、平均値ゼロで分散が  $\sigma_a^2$  の白色雑音が入力する線形構造系の任意点の応答値を等時間間隔  $T$  でサンプリングしたデータ列を  $\{y_k\}$  ( $k=t, t-1, t-2, \dots, t-N$ ) とし、入力のデータ列を  $\{a_k\}$  とすれば、 $y_t$  は線形フィルターからの時刻  $t$  における出力値と見なせるから次式をうる。

$$y_t = a_t + h_1 a_{t-1} + h_2 a_{t-2} + \dots \quad (1)$$

後進演算子を  $z$  とすれば、この線形フィルターは  $H(z) = 1 + h_1 z + h_2 z^2 + \dots$  となる。この線形フィルターは定常性の条件を常に満たしている。

自己回帰過程： 式 (1) の  $z$  変換、すなわち、 $y_t = H(z)a_t$  を考え、 $\Phi(z) = H^{-1}(z)$  とすれば、次式をうる。

$$a_t = \Phi(z)y_t \quad (2)$$

式 (2) の時間領域における表現は次式となる。

$$y_t = -\phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} - \dots + a_t \quad (3)$$

式 (3) を誘導する際、線形過程の可逆性を仮定したが、これは  $\Phi(z)$  が単位円の中で収束すれば満たされる。

式 (3) の形で表わされる線形過程はパラメータとして無限個の係数が必要となるため、その有用性は少ない。確率過程は有限な線形過程で表現されることが多いので、式 (3) の  $p$  項までを取った次式のことを  $p$  次の自己回帰過程 (AR( $p$ ) 過程と略記する) と呼び、確率過程の解析に良く用いられる。

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_p y_{t-p} + a_t \quad (4)$$

$p$  が有限であるから可逆性は保証され、定常性の条件は  $1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \dots + \alpha_p z^p = 0$  の根が単位円の外側に存在するときに満たされる。

移動平均過程： 式 (1) を有限長のフィルターで表わすと次式をうる。

$$y_t = a_t + \beta_1 a_{t-1} + \beta_2 a_{t-2} + \dots + \beta_q a_{t-q} \quad (5)$$

これは  $q$  次の移動平均過程 (MA( $q$ ) 過程と略記する) と呼ばれる。有限の MA 過程は常に定常であり、可逆性の条件は  $1 + \beta_1 z + \beta_2 z^2 + \dots + \beta_q z^q = 0$  の根が単位円の外側に存在するときに満たされる。

自己回帰・移動平均過程： 式 (4) と式 (5) を重ね合わせた過程をいい、以下これを AR-MA( $p, q$ ) 過程と略記する。

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_p y_{t-p} + a_t + \beta_1 a_{t-1} + \beta_2 a_{t-2} + \dots + \beta_q a_{t-q} \quad (6)$$

以上に述べた各時系列のスペクトルは次のように与えられる。<sup>14)</sup>

$$\left. \begin{aligned} S(f) &= \frac{2\sigma_a^2}{\left|1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i e^{-i2\pi f T}\right|^2} (AR), & S(f) &= 2\sigma_a^2 \left|1 - \sum_{i=1}^q \beta_i e^{-j2\pi f T}\right|^2 (MA) \\ S(f) &= 2\sigma_a^2 \left|1 - \sum_{i=1}^q \beta_i e^{-i2\pi f T}\right|^2 / \left|1 - \sum_{i=1}^q \alpha_i e^{-i2\pi f T}\right|^2 (AR-MA) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 $0 < f < \frac{1}{2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  である。

### 3. 線形定常時系列の推定

ここでは、前節で述べた3種類の時系列の係数が、観測データを用いて、どのように決定されるかを簡単に述べる。式(4)にもどり、次数  $M$  の AR 過程を考えると、

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} - \dots - \alpha_M y_{t-M} + a_t \dots\dots\dots (8)$$

式(8)に  $y_{t-k}$  を乗じ、その期待値を取ることによって次式をうる。

$$\rho_k = -\alpha_1 \rho_{k-1} - \alpha_2 \rho_{k-2} - \dots - \alpha_M \rho_{k-M} \quad (k > 0) \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 $\rho_j (j=0, 1, \dots, M)$  は自己相関係数であり、この式を誘導するに当り、 $E(y_{t-k} a_t) = 0 (k > 0)$  の関係を用いている。

式(9)に  $k=1, 2, \dots, M+1$  を代入すれば、良く知られている Yule-Walker の方程式<sup>15)</sup> が次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 + \alpha_1 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 + \dots + \alpha_M \rho_{M-1} &= 0 \\ \rho_2 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_0 + \dots + \alpha_M \rho_{M-2} &= 0 \\ \vdots & \\ \rho_{M+1} + \alpha_1 \rho_M + \alpha_2 \rho_{M-1} + \dots + \alpha_M \rho_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

いま、 $\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_M$  の  $M+1$  個の自己相関係数が既知とすれば、式(10)の上から  $M$  番目までの式を用いることにより  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_M$  が決定される。さらに、 $\rho_{M+1}$  は次式から求まる。

$$\det \begin{vmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{M-1} \\ \rho_2 & \rho_1 & \dots & \rho_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{M+1} & \rho_M & \dots & \rho_1 \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

入力の分散の推定値  $\sigma_a^2$  は、式(8)に  $y_t$  を乗じ、その期待値を取ることにより、次式のように与えられる。

$$\sigma_a^2 = \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \dots + \alpha_M \rho_M \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 $E(y_t a_t) = \sigma_a^2$  なる関係式を用いている。

#### Yule-Walker による AR 係数の決定

AR 過程の係数  $\alpha_j$  の推定値  $\hat{\alpha}_j$  を求めるのに最も良く用いられる方法は Yule-Walker の方程式を直接解く方法である。この場合、 $\rho_k$  の推定値を  $\hat{\rho}_k$  とすれば、 $\hat{\rho}_k$  の値として次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{\rho}_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (y_{i+k} - m)(y_i - m) \\ m &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 $N$  はデータ数、 $m$  は平均値である。

自己相関係数の推定値として、式(13)の値を用いることは、2乗誤差を最小にする観点から見ると、他の方法によるものより良い結果を与えることが Jenkins ら<sup>14)</sup> によって示されている。

Yule-Walker 方程式を再掲すれば次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} \hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_2 & \dots & \hat{\rho}_{M-1} \\ \hat{\rho}_1 & \hat{\rho}_0 & \hat{\rho}_1 & \dots & \hat{\rho}_{M-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\rho}_{M-1} & \hat{\rho}_{M-2} & \hat{\rho}_{M-3} & \dots & \hat{\rho}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{M1} \\ \alpha_{M2} \\ \vdots \\ \alpha_{MM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\rho}_1 \\ -\hat{\rho}_2 \\ \vdots \\ -\hat{\rho}_M \end{bmatrix} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $\hat{\alpha}_{Mj}$  ( $j=1, 2, \dots, M$ ) は  $M$  次の AR 過程の  $j$  番目の係数である。

式 (14) を解くための漸化式が Durbin<sup>18)</sup> により提案されているので、任意の次数の係数  $\hat{\alpha}_{Mj}$  が行列計算を直接行なわなくても求まる。すなわち

$$\hat{\alpha}_{M+1,j} = \hat{\alpha}_{Mj} + \hat{\alpha}_{M+1,M+1} \hat{\alpha}_{M,M-j+1} \dots \dots \dots (15)$$

$$\hat{\alpha}_{M+1,M+1} = \frac{-\hat{\rho}_{M+1} - \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_{Mj} \hat{\rho}_{M+1-j}}{\hat{\sigma}_{\alpha M}^2} \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 $\hat{\sigma}_{\alpha M}^2$  は次数  $M$  の AR 係数より推定される入力の分散の推定値であり、式 (12) より次式のようになる。

$$\hat{\sigma}_{\alpha M}^2 = \rho_0 + \hat{\alpha}_{M+1}\rho_1 + \hat{\alpha}_{M2}\rho_2 + \dots + \hat{\alpha}_{MM}\rho_M \dots \dots \dots (17)$$

実際の現象を解析する場合に  $M$  の値としてどのような値を取れば良いかについては、各種の提案がなされているが、<sup>17-19)</sup> いずれも理論的な裏付けが明確でなかった。ここでは、赤池が提案した手法<sup>20-22)</sup> を用いることにする。これは、式 (15) から求まる  $\hat{\alpha}_{Mj}$  を用いて応答  $y_t$  の予測値  $\hat{y}_t$  を求める場合、誤差の推定値  $FPE(M) = E[(\hat{y}_t - y_t)^2]$  を最小にする  $M$  を AR 過程の最適次数とするものである。 $FPE(M)$  の具体的な表現は次式で与えられる。

$$FPE(M) = \frac{N+(M+1)}{N-(M+1)} \sigma_{\alpha M}^2 \dots \dots \dots (18)$$

#### Burg による AR 係数の推定

Burg は AR 過程の係数を決定するのに、あらかじめ自己相関係数を推定せずに、スペクトルのフーリエ変換が相関関数であるという Wiener-Khinchine の関係の制約のもとで情報エントロピーを増加させないように、未知の部分の自己相関関数を推定することが最も合理的であると提案した。<sup>12)</sup> 具体的には、式 (16) に相当する基準を求めると、係数  $\hat{\alpha}_{Mj}$  を予測フィルタとみなし、これに信号を正および逆方向に通したときの出力の 2 乗誤差を最小にするという規範を用いた。<sup>23)</sup> すなわち、

$$P_{M+1} = \frac{1}{2(N-M)} \sum_{t=M}^N \{ (y_t - \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_{Mj} y_{t-M})^2 + (y_{t-M} - \sum_{j=1}^M \hat{\alpha}_{Mj} y_{t-M+j})^2 \} \dots \dots \dots (19)$$

$$\frac{\partial P_{M+1}}{\partial \hat{\alpha}_{Mj}} = 0 \dots \dots \dots (20)$$

式 (15) には  $\hat{\rho}_M$  が含まれていないので、この式は Burg の推定法においてもそのまま成立する。したがって、式 (20) と式 (15) を連立させて解けば AR 過程の係数が決定されることになる。

#### MA 係数と AR 係数の関係

式 (8) の AR 過程はその可逆性が保証されていたから、これに対応する MA 過程

$$y_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i a_{t-i} \quad h_0 = 1 \dots \dots \dots (21)$$

の係数  $h_i$  は式 (21) を式 (8) に代入した時に得られる次式の漸化式を順次解くことによって決定される。

$$h_l = - \sum_{j=1}^l \alpha_j h_{l-j} \quad (l=1, 2, \dots) \dots \dots \dots (22)$$

#### AM-MA (2n, 2n) 過程の係数決定

次節で自由度  $n$  の線形構造物の応答を等時間間隔  $T_s$  でサンプリングしたデータ列が AR-MR(2n, 2n) 過程になることの証明を与えるが、この結果を用いて構造物の動特性を推定するためには、AR-MA(2n, 2n) 過程の係数を観測値より決定しなければならない。ここでは Gersh らによる 2 段階最小 2 乗法 (Two stage least squares procedure) によりその値を推定する。AR-MA(2n, 2n) 過程は次式のように表わされる。

$$y_t = x' \theta + a_t \dots \dots \dots (23)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x' &= [-y_{t-1}, \dots, -y_{t-2n}, a_{t-1}, \dots, a_{t-2n}] \\ \theta' &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (24)$$

式 (23) で時刻  $t=2n+1, 2n+2, \dots, 2n+N$  における  $N$  組の出力データ  $y_{2n+1}, y_{2n+2}, \dots, y_{2n+N}$  が与えられたとすれば次式をうる。

$$Y = X\theta + e \quad \dots \dots \dots (25)$$

ここに、

$$Y' = [y_{2n+1}, y_{2n+2}, \dots, y_{2n+N}], \quad e' = [a_{2n+1}, a_{2n+2}, \dots, a_{2n+N}]$$

$$X = \begin{bmatrix} -y_{2n}, & -y_{2n-1}, & \dots, & -y_1, & a_{2n}, & a_{2n-1}, & \dots, & a_1 \\ -y_{2n+1}, & -y_{2n}, & \dots, & -y_2, & a_{2n+1}, & a_{2n}, & \dots, & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{2n+N-1}, & -y_{2n+N-2}, & \dots, & -y_N, & a_{2n+N-1}, & a_{2n+N-2}, & \dots, & a_N \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (26)$$

また、白色雑音の性質より

$$E(ee') = \sigma_a^2, \quad E(e) = 0 \quad \dots \dots \dots (27)$$

であるから、式 (25) の両辺の期待値を取ると  $\theta$  の期待値  $\hat{\theta}$  として次式をうる。

$$\hat{\theta} = [X'X]^{-1}(X'Y) \quad \dots \dots \dots (28)$$

ここに、行列  $[X'X]$  は共分散係数  $\gamma_{yy}(k), \gamma_{ya}(k), \gamma_{ay}(k)$  などを用いて次式のように表わされる。

$$[X'X] = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(0) & \gamma_{yy}(1) & \dots & \gamma_{yy}(2n-1) & -\gamma_{ya}(0) - \gamma_{ya}(1) & \dots & -\gamma_{ya}(2n-1) \\ \gamma_{yy}(1) & \gamma_{yy}(0) & \dots & \gamma_{yy}(2n-2) & -\gamma_{ya}(-1) - \gamma_{ya}(0) & \dots & -\gamma_{ya}(2n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{yy}(2n-1) & \gamma_{yy}(2n-2) & \dots & \gamma_{yy}(0) & -\gamma_{ya}(1-2n) - \gamma_{ya}(2-2n) & \dots & -\gamma_{ya}(0) \\ -\gamma_{ay}(0) - \gamma_{ay}(1) & \dots & \dots & -\gamma_{ay}(2n-1) & \gamma_{aa}(0) & \gamma_{aa}(1) & \dots & \gamma_{aa}(2n-1) \\ -\gamma_{ay}(-1) - \gamma_{ay}(0) & \dots & \dots & -\gamma_{ay}(2n-2) & \gamma_{aa}(1) & \gamma_{aa}(0) & \dots & \gamma_{aa}(2n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\gamma_{ay}(1-2n) - \gamma_{ay}(2-2n) & \dots & \dots & -\gamma_{ay}(0) & \gamma_{aa}(2n-1) & \gamma_{aa}(2n-2) & \dots & \gamma_{aa}(0) \end{bmatrix} \quad \dots \dots \dots (29)$$

$$[X'Y] = \{-\gamma_{yy}(1), -\gamma_{yy}(2), \dots, -\gamma_{yy}(2n), \gamma_{ay}(1), \gamma_{ay}(2), \dots, \gamma_{ay}(2n)\}' \quad \dots \dots \dots (30)$$

一般に  $\gamma_{ya}(k) = E(y_t a_{t-k})$  であるから、MA 過程  $y_t = \sum_{i=0}^{\infty} h_i a_{t-i}$  を用いれば  $\gamma_{ya}(k) = E(\sum_{i=1}^{\infty} h_i a_{t-i} a_{t-k})$  となる。したがって、式 (27) の関係を利用すれば次式をうる。

$$\gamma_{ya}(k) = h_k \sigma_a^2 \quad (k \geq 0) \quad \dots \dots \dots (31)$$

一方、 $\gamma_{ay}(k) = \gamma_{ya}(-k)$  であるから、 $h_{-k} = 0 \quad (k > 0)$  を考慮して次式をうる。

$$\gamma_{ay}(k) = \{\sigma_a^2(k=0), \quad 0(k > 0)\} \quad \dots \dots \dots (32)$$

式 (29), (30) を構成する値のうち  $\gamma_{yy}(k)$  は自己相関係数の推定値  $\hat{\rho}_k$  で与えられ、 $\sigma_a^2$  の推定値は式 (17) より、 $h_i$  は式 (22) より求められるから、AR-MA(2n, 2n) 過程  $n$  係数は観測値のみから決定できる。

#### 4. 白色雑音を入力とする線形系の同定

自由度  $n$  の線形構造物が白色雑音の外力を受けている場合の運動方程式は次式で表わされる。

$$M\ddot{z}(\tau) + C\dot{z}(\tau) + Kz(\tau) = f(\tau) \quad \dots \dots \dots (33)$$

ここに、 $\tau$  は時間、 $M, C, K$  は各々質量、粘性ならびに剛性マトリックス、 $z$  は節点変位ベクトル、 $f$  は外力のベクトルであり白色雑音より構成される。式 (33) を変形し次式をうる。

$$\ddot{z} + \tilde{C}\dot{z} + \tilde{K}z = M^{-1/2}f(\tau) \quad \dots \dots \dots (34)$$

ここに、 $\tilde{C} = M^{-1/2}CM^{-1/2}$ ,  $\tilde{K} = M^{-1/2}KM^{-1/2}$  なる対称マトリックスである。いま次式で表わされる変換を用いると

$$q_i = r_i \quad q_{i+n} = \dot{r}_i$$

式 (34) は次式となる。

$$\frac{dq(\tau)}{d\tau} = Aq(\tau) + Bf(\tau) \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$z_j(\tau) = c'q(\tau) \dots \dots \dots (36)$$

ここに、 $z_j(\tau)$  は式 (33) で表わされる節点変位ベクトル  $z(\tau)$  の  $j$  節点における変位を表わしている。なお、式 (36) に現われる  $2n \times 2n$  次のマトリックス  $A$ 、 $2n \times n$  次のマトリックス  $B$  ならびに  $2n$  次のベクトル  $c$  は次式で定義される。

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R & -\hat{c} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1/2} \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1/\sqrt{m_j} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (37)$$

ただし  $c$  の非ゼロ要素は  $j$  番目だけに現われる。

いま、サンプリング間隔を  $T_s$  とし、時刻  $tT_s$  における  $q(\tau)$  の値が  $q_t$  と与えられた場合、時刻  $(t+1)T_s$  における  $q(\tau)$  の値を  $q_{t+1}$  とすれば、これは式 (35) を積分することにより次式ようになる。

$$q_{t+1} = \Phi q_t + D u_t, \quad y_t = z_j(tT_s) = c'q_t \dots \dots \dots (38)$$

ここに、

$$\Phi = \exp(AT_s) \\ D u_t = \int_{tT_s}^{(t+1)T_s} \exp[A\{(t+1)T_s - \tau\}] B f(\tau) d\tau \dots \dots \dots (39)$$

であり、 $u_t$  は時刻  $tT_s$  における白色雑音、 $D$  は  $u_t$  の影響を時刻  $(t+1)T_s$  の値に変換する作用素である。式 (39)<sub>2</sub> における  $u_t$  の値を厳密に決定することは簡単ではないが、外力項  $f(\tau)$  が時刻  $tT_s$  から  $(t+1)T_s$  まで一定値を保ち、それが時刻  $tT_s$  における値  $f_t$  に一致するものとすれば  $u_t = B f_t$  となる。

式 (38) の形式は標準変換  $L$  を用いれば次式ようになる。<sup>20)</sup>

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= \Phi^* x_t + D^* u_t & x_t &= L q_t \\ y_t &= c^* x_t & D^* &= L D \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (40)$$

ここに、

$$\Phi^* = L \Phi L^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & & & \\ & I & & & \\ & & -\alpha_{2n} & & \\ & & & -\alpha_{2n-1} & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -\alpha_1 \end{bmatrix}, \quad c^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} c' \\ c' \Phi \\ \vdots \\ c' \Phi^{2n-1} \end{bmatrix} \dots (41)$$

一方、AR-MA(2n, 2n) 過程

$$y_t + \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 y_{t-2} + \dots + \alpha_{2n} y_{t-2n} = a_t + \beta_1 a_{t-1} + \dots + \beta_{2n} a_{t-2n} \dots \dots \dots (42)$$

は Lee<sup>20)</sup> によって次式に示されるような標準系に変換できることが証明されている。

$$\left. \begin{aligned} x_{t+1} &= \Phi^* x_t + d^* a_t \\ y_t &= h^* x_t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (43)$$

ここに、 $\Phi^*$  は式 (41)<sub>1</sub> で与えられ、 $d^*$  と  $h^*$  は次式で定義される。

$$d^* = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ \alpha_1 & 1 & & & \\ \alpha_2 & & \alpha_1 & 1 & \\ \vdots & & & & \\ \alpha_{2n-1} & & & & \alpha_1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{2n} \end{bmatrix}, \quad h^* = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots \dots \dots (44)$$

式 (40) と式 (43) を比較することにより、自由度  $n$  の線形構造系の応答は  $(2n, 2n)$  次の AR-MA 過程で表現できることが判明する。いま、式 (41)<sub>1</sub> で表わされる  $\Phi^*$  の固有値を  $\lambda$  とすれば、 $\lambda$  は次式で表わされる  $2n$  次の高次方程式の根として与えられる。

$$\alpha_1 \lambda^{2n} + \alpha_2 \lambda^{2n-1} + \dots + \alpha_{2n-1} \lambda + \alpha_{2n} = 0 \dots \dots \dots (45)$$

一方、 $\Phi^*$  の誘導過程から  $\Phi^*$  の固有値は  $\Phi$  の固有値に一致し、 $\Phi$  の固有値は  $AT_s$  の固有値の指数乗に一致する。 $AT_s$  の固有値  $\mu$  は次式で与えられる。

$$I\mu^2 + \hat{c}T_s\mu + \hat{K}T_s^2 = 0 \dots \dots \dots (46)$$

したがって、線形構造系の  $j$  次モードの固有円振動数を  $\omega_j$ 、減衰定数を  $\eta_j$  とすれば、式 (45) の根として次式に示すような共役根  $\lambda_j, \lambda_j^*$  をうる。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j &= \exp(\mu_j), \quad \lambda_j^* = \exp(\mu_j^*) \\ \left. \begin{aligned} \mu_j \\ \mu_j^* \end{aligned} \right\} &= -\omega_j \eta_j T_s \pm i \omega_j T_s \sqrt{1 - \eta_j^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (47)$$

ここに、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $\mu_j^*$  は  $\mu_j$  の共役複素数である。

### 5. 数値計算例

以上に述べてきた手法を用い、構造物の動的パラメータの推定を行った。ここでは解析手法の妥当性を検証するのが目的であるから、常時微動などの計測データを用いることはせずに、構造物の応答データとしては、白色雑音の加速度が入力する線形構造物の変位応答をデジタル計算機内でシミュレートし、これを解析データとした。多自由度系のシミュレーションに当っては、数値計算によって発生する誤差を小さくするために、モード解析を行った後 Duhamel 積分を行うことにより質点の変位応答を求めた。解析に用いた白色雑音の発生には、著者の 1 人が提案した方法<sup>27)</sup>を用い、高速フーリエ変換を用いることにより計算時間の短縮をはかった。Fig. 1 は解析に用いた白色雑音の 1 部を示している。なおデータのサンプリング間隔は特に断わらないかぎり 0.02 秒とする。

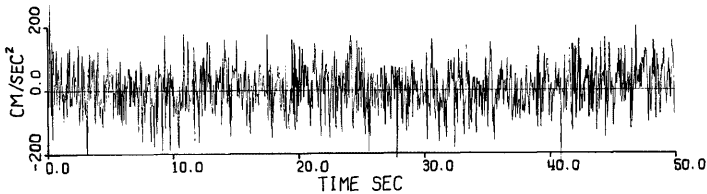


Fig. 1. An example of accelerogram (band passed white noise).

まず、1 自由度の構造物を対象として、その固有振動数  $f_0$  を 0.75~5Hz、減衰定数  $\eta_0$  を 2~10% と変化させ、それぞれの組合せに対し加速度応答を計算し、3 節で述べた方法によって固有振動数の推定値  $f_n$  ならびに減衰定数の推定値  $\eta_n$  を求める。超高層建築物、長大橋梁あるいは複雑な構成をもつ地盤の応答解析においては、系を多自由度の振動系として取り扱わねばならないが、通常の構造物や施設においては、その動的特性は 1 自由度の振動系として十分把握しうる場合も少なくない。やや複雑な系においても、その第 1 近似としては 1 自由度の線形系として表現できる場合が多く、そのような系の特性を未確定な外力での応答値から推測しうることは実際問題への適用の観点から極めて有用性が高いと考えられるので、まず、1 自由度系を対象として詳しい解析を行う。

Fig. 2 は  $\eta_0 = 5\%$  とし  $f_0$  を変化させた場合の  $f_n$  の値を示している。 $f_n$  の計算には Yule-Walker 方程式を直接解く方法を用いた。推定値の精度は系の固有振動数  $f_0$ 、減衰定数  $\eta_0$ 、データのサンプリング間隔  $T_s$  ならびにデータ数  $N$  によって変化する。いま  $Nf_0T_s$  なる指標を用いると図中の各点は、この値が 25~250 の領域に入っている。したがって減衰定数が 5% 以上の系では  $Nf_0T_s$  の値として 25 以上の値を取れば十分な精度で固有振動数の推定が行えることがわかる。Fig. 3 は  $f_0$  を 3Hz とし  $\eta_0$  を変化させた場合のものである。この場合には  $Nf_0T_s$  の値が 150 以上にならないと精度の良い推定値を与えないようである。また  $\eta_0$  の値が小さくなると  $Nf_0T_s$  はさらに大きく取らなければならないことも明らかになる。

次に、自己回帰過程の係数の推定を Yule-Walker 法によって行った場合と Burg 法によって行った場合の比較を行う。Fig. 4 は固有振動数  $f_0$  を 0.764Hz とし減衰定数  $\eta_0$  を 5% とした場合のものである。○印

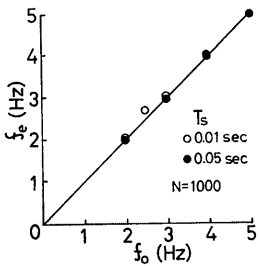


Fig. 2. Estimation of natural frequency.

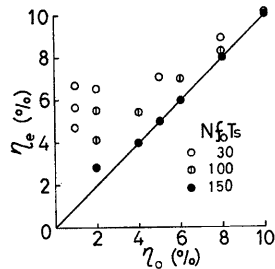


Fig. 3. Estimation of natural damping.

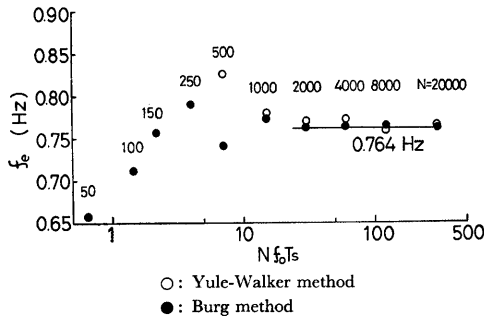


Fig. 4. Comparison of natural frequencies obtained by Yule-Walker and Burg method.

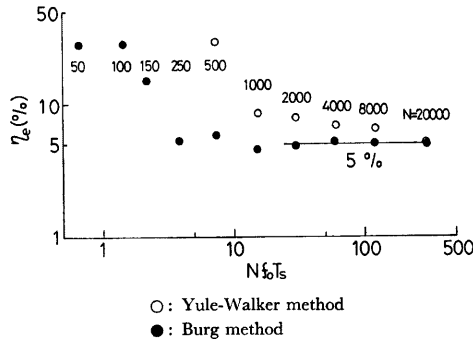


Fig. 5. Comparison of damping coefficients obtained by Yule-Walker and Burg method.

は Yule-Walker 法による、●印は Burg 法を用いた場合の固有振動数の推定値  $f_e$  を示している。図から明らかかなように  $Nf_oT_s$  の値として 30 程度以上の値を取れば、いずれの手法を用いても十分な精度の推定値が求められる。Fig. 5 は減衰定数に関して同様の考察を加えたものである。この場合、Burg 法による推定では  $Nf_oT_s$  の値として 30 程度あればかなり良い推定値を与えるのに対し、Yule-Walker 法による推定値では



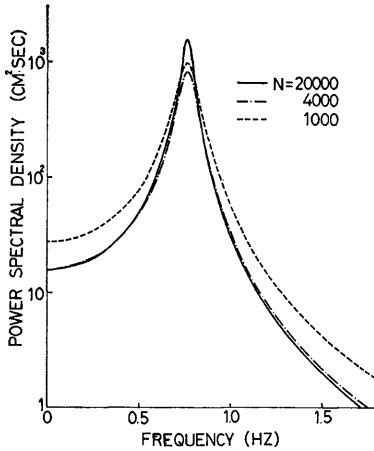


Fig. 6. Power spectra calculated from various data (Yule-Walker Method).

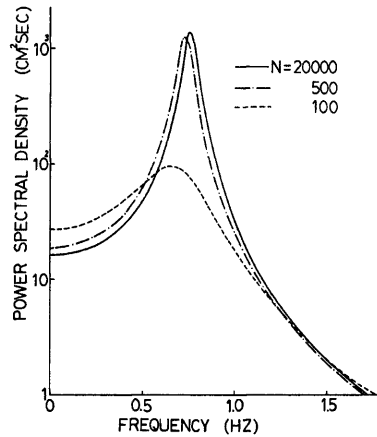


Fig. 7. Power spectra calculated from various data (Burg method).

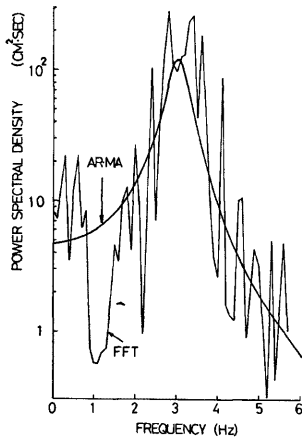


Fig. 8. Comparison of power spectra.

Table 1. Estimated dynamic parameters of two degree of freedom system.

	1st Mode		2nd Mode	
	$f_1$ (Hz)	$\eta_1$ (%)	$f_2$ (Hz)	$\eta_2$ (%)
Exact value	0.756	5.0	1.768	5.0
Estimation 1	0.863	12.6	1.896	9.8
Estimation 2	0.755	4.8	1.671	12.8
Estimation 3	—	—	1.760	5.7
Estimation 4	0.758	5.7	1.776	4.9

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 61 & -49 \\ -49 & 85 \end{bmatrix}$$

$Nf_0T_s$ として200程度の値が必要となることが判明する。**Figs. 6, 7**は各々、式(7)<sub>3</sub>から求まるスペクトル密度の推定をサンプリングデータ数をパラメータとして示したもので、前者はYule-Walker法によるものであり、後者はBurg法によるものである。データ数が20000の場合には両者のスペクトルの形状ならびに強度はほぼ一致している。データ数の少ない時

にはBurg法によるものが良い推定値を与えていることが明らかである。

**Fig. 8**は $f_0$ を3Hz、 $\eta_0$ を5%とした系の応答解析結果から $Nf_0T_s \geq 150$ を満たすようにデータをサンプリングし、Burg法と高速フーリエ変換を利用して求めたスペクトル密度を比較したものである。この図から、自己回帰・移動平均法を用いたパワースペクトル密度の推定法は非常に合理的なものであることがわかる。

以上1自由度系に限定して考察を加えてきたが、以下に多自由度系にこの解析法を適用した例を示す。**Table 1**は2自由度系の推定結果である。推定値1~3はYule-Walker法によるものであり、解析に用い

たデータは質点 1 の加速度応答でありサンプリングの個数は 20000 である。推定値 1 はこのデータを直接用いた場合のものであり、推定値 2 は 0.3-3Hz のバンドパスフィルターを通したデータに対するものである。推定値 2 では 1 次モードに対応する値はかなり良く推定されるが、2 次モードの減衰定数の推定値は仮定値の 2 倍程度になっている。さらに、1.5-3Hz のバンドパスフィルターを通したデータを用い 1 自由度系として動特性の推定を行ったのが推定値 3 である。推定値 4 は Burg 法によって生のデータから推定したものである。Burg 法による推定法は構造物の自由度が高くなると、1 自由度系の場合よりさらに有効になることが明らかである。Table 2 は Burg 法によって 5 自由度系の構造物の動的パラメータを推定した例である。シミュレーションに用いた構造物の質量ならびに剛性マトリックスは Table 2 の下段に示されている。構造物の自由度が高くなると 1 つの質点の応答データだけから全てのモードに対応する動的パラメータを推定することは困難となるが、適当なバンドパスフィルターを用い、そこを通過したデータに対し上述の解析手法を適用すればかなりの精度で動特性が推定できることが示される。推定値 1 は第 1 質点の加速度についての 20000 個のデータを用い直接推定したものである。推定値 2 は 0.5-2.5Hz のバンドパスフィルターを通した結果から、推定値 3 は 2.0~4.0Hz のバンドパスフィルターを通した結果から 3 自由度系として解析したものである。

Table 2. Estimated dynamic parameters of five degree of freedom system.

	1st mode		2nd mode		3rd mode		4th mode		5th mode			
	$f_1$ (Hz)	$\eta_1$ (%)	$f_2$ (Hz)	$\eta_2$ (%)	$f_3$ (Hz)	$\eta_3$ (%)	$f_4$ (Hz)	$\eta_4$ (%)	$f_5$ (Hz)	$\eta_5$ (%)		
Exact value	0.760	5.0	1.401	5.0	2.122	5.0	2.891	5.0	3.841	5.0		
Estimation 1	0.859	10.4	1.971	22.0	—	—	2.874	8.9	3.807	12.3	8.528	31.0
Estimation 2	0.742	4.3	1.486	2.9	2.304	4.0	—	—	—	—		
Estimation 3	—	—	—	—	2.091	6.3	2.981	5.2	3.765	3.6		
$M =$	$\begin{bmatrix} 59.49 & 0 \\ & 16.32 \end{bmatrix}$		$\begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & 13.02 & & & \\ & 0 & & 10.85 & & \\ & & & & 6.25 & \end{bmatrix}$		$K = \begin{bmatrix} 8380 & -4048 & & & & \\ -4048 & 6612 & -2564 & & & \\ & -2564 & 4084 & -1520 & & \\ & & -1520 & 2276 & -7560 & \\ & & & -756 & 756 & \end{bmatrix}$							

## 6. む す び

本論文では主として構造物の常時微動計測などから、系の固有振動数や減衰定数を推定するための手法について考察を加えた。解析手法の骨子は、水文現象の解析などに用いられている線形定常時系列の理論を用いて、構造系の応答の予測を行う事であり、予測の方法としては Yule-Walker 方程式を用いる方法と Burg による最大エントロピー規範を用いる場合の 2 通りの解析を行って、両者の結果を比較検討した。その結果、後者による方が前者のものより良い推定値を与えることを明らかにした。本研究では線形構造系に白色雑音の加速度が入力する場合の系の応答を計算機によりシミュレートし、その結果を観測値として採用しており、実際の観測値をサンプリングしたものではなかった。したがって、常時微動などのように人力の特性が明確でない時系列に対し、本解析法がどの程度の適用性を持つかについては今後の課題として残された。なお、地震動などのように非定常な入力を受ける構造物の応答観測データに上述した手法を適用できるようになれば、強震時の観測データを用いることにより大きな振幅に対応した構造特性が抽出できるようになるものと考えられるが、このためには非定常時系列の理論が展開されなければならない。さらに、周波数特性を有する地動が入力する場合には、地動の特性をあらかじめ仮定するか、地動と応答の同時観測データがあれば構造物と地盤の動的相互作用に基づき減衰定数やばね剛性の推定も可能になると考えられるが、これも今後に残された課題である。

## 参 考 文 献

- 1) Kanai K., T. Tanaka and K. Osada: Measurements of Microtremor I, *Bull. Earthq. Res. Int.*, 32, pp. 199-209, 1954.
- 2) Kanai K., T. Tanaka and S. Yoshizawa: On Microtremor IX, *Bull. Earthq. Res. Inst.* 45, pp. 43-59, 1967.
- 3) 金井 清：地震工学，共立出版，1969.
- 4) 小堀鐸二・南井良一郎・竹内吉弘・河野允宏：動特性を 求めるための 構造物試験について一減衰評価の方法一，京都大学防災研究所年報，第11号 A, pp. 475-487, 1968.
- 5) Chery, S. and A. G. Brady: Determination of Structural Dynamic Properties by Statistical Analysis of Random Vibrations, *Proc. 3rd WCEE Vol. II*, pp. 50-67, 1965.
- 6) Ward, H. S. and R. Crawford: Wind Induced Vibrations and Building Modes, *Bull. Seis. Soci. Am.*, 56, pp. 793-813, 1966.
- 7) 小堀鐸二・鎌田輝男：微動の相関関数に基いた構造物の振動特性の検出について，第 14 回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集，pp. 363-366, 1977.
- 8) Gersch, W.: Estimation of the Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving Average Time Series, *IEEE, Trans. Auto. Cont.*, AC-15, pp. 583-588, 1970.
- 9) Gersch, W.: On the Achievable Accuracy of Structural System Parameter Estimates, *Jour. Sound and Vibration*, 34, pp. 63-79, 1974.
- 10) Gersch, W. and D. A. Foutch: Least Squares Estimates of Structural System Parameters Using Covariance Function Data, *IEEE, Trans. Auto. Cont.*, AC-19, pp. 898-903, 1974.
- 11) Burg, J. P.: The Relationship between Maximum Entropy Spectra and Maximum Likelihood Spectra, *Geophysics*, 37, pp. 375-376, 1972.
- 12) 日野幹雄：MEM・最大エントロピー法による新しいスペクトルの計算法，*土木学会誌*，pp. 50-54, 7月，1976.
- 13) Box, G. E. P. and G. M. Jenkins: *Time Series Analysis; Forecasting and Control*, Holden-Day, 1970.
- 14) Jenkins, G. M. and D. G. Watts: *Spectral Analysis and Its Applications*, Holden-Day, 1969.
- 15) Walker, G.: On Periodicity in Series of Related Terms, *Proc. Roy. Soc. London, serA*, 131, pp. 518-532, 1931.
- 16) Durbin, J.: The Fitting of Time Series Models. *Rev. Int. Inst. Statist.*, 28, pp. 233-244, 1960.
- 17) Anderson, T. W.: Determination of the Order of Dependence in Normally Distributed Time Series, in *Time Series Analysis*, edited by W. Rosenblatt, pp. 425-446, John Wiley, 1963.
- 18) Jones, R. H.: Prediction of Multivariate Time Series, *J. Appl. Meteorol.* 3, pp. 255-289, 1964.
- 19) Galbraith, J. N.: Prediction Error on a Criterion for Operator Length, *Geophysics*, 35, pp. 251-265, 1971.
- 20) Akaike, H.: Fitting Autoregressive Models for Prediction, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, pp. 243-247, 1969.
- 21) Akaike, H.: Power Spectrum Estimation through Autoregressive Model Fitting, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, pp. 407-419, 1969.
- 22) Akaike, H.: Statistical Predictor Identification, *Ann. Inst. Statist. Math.*, 22, pp. 203-217, 1970.
- 23) Ulrych, T. J. and T. N. Bishop: Maximum Entropy Spectral Analysis and Autoregressive Decomposition, *Review of Geophy. and Space Phy.*, 73, No. 1, pp. 183-200, 1975.
- 24) Gersch, W. and R. S-Z. Liu: Time Series Method for the Synthesis of Random Vibration Systems, *Jour. Appl. Mech.*, pp. 159-165, 1976.
- 25) Gersch, W., G. T. Taoka and R. S-Z. Liu: Structural System Parameter Estimation by Two-Stage Least-Squares Method, *Proc. ASCE, EM*, 5, pp. 883-899, 1976.

- 26) Lee, R. C. K.: Optimal Estimation Identification and Control, MIT Press, 1964.
- 27) 後藤尚男・土岐憲三・秋吉 卓：電子計算機による耐震設計用の人工地震波に関する研究，日本地震工学シンポジウム講演集，pp. 25-30, 1966.