

# 軸力と2軸曲げを受ける鉄筋コンクリート 長柱の弾塑性安定解析

若林 實・中村 武・岩井 哲

## ELASTIC-PLASTIC STABILITY ANALYSIS OF SLENDER REINFORCED CONCRETE COLUMNS SUBJECTED TO AXIAL LOAD AND BIAXIAL BENDING

By *Minoru WAKABAYASHI, Takeshi NAKAMURA and Satoshi IWAI*

### Synopsis

The load carrying capacity of a reinforced concrete column subjected to axial load and biaxial bending is investigated analytically. Remarkable influences of reinforcing bar arrangement and the value of concrete ultimate strain on the ultimate strength of a column section are recognized. Three analytical methods are described for slender columns under biaxially eccentric loads. The analysis using the finite difference method was difficult to obtain the load-deflection curves post the maximum load. The second method using the Runge-Kutta-Gill method obtained successfully the curves up to failure and undertook that the third analysis, where the deflected column shape was approximated by a planar cosine curve and the conditions of equilibrium were satisfied at the section at mid-height, was also useful in the study of the column behavior.

### 1. 序

わが国の建築構造物では、通常、柱の設計は地震時の荷重に支配され、採用される柱材は比較的太短いもので、いわゆる短柱に属するものがほとんどであり、長柱に関する研究はわずかしが行われていない。日本建築学会の鉄筋コンクリート構造計算規準<sup>1)</sup>では長柱については15条7項(1)に「材の最小径とその主要支点間距離の比は、鉄筋普通コンクリートでは1/15以上、鉄筋軽量コンクリートでは1/10以上とする。ただし、柱の有効細長比を考慮した構造計算によって、構造耐力上安全であることが確かめられた場合においてはこの限りでない」と記述されているにすぎない。地震のない諸外国においては固定荷重による軸圧縮力が支配的であり、座屈安定問題が大きく取り上げられている。わが国としても鉄筋コンクリート長柱に関して、中心圧縮、偏心圧縮、あるいは曲げモーメントと軸圧縮力が同程度に影響を及ぼす柱部材の弾塑性性状に関連する系統的な、実験的及び理論的研究を今後行っていくことが必要であると思われる。

一般に柱は長期荷重時においても短期荷重時においても任意の方向からの曲げを受ける。しかし、鉄筋コンクリート構造計算規準では(1)通常、柱の設計が長期荷重で支配される場合が少ないこと、及び(2)地震力などは2方向から別々に作用するたてまえをとっていること、などを考慮して柱の断面設計は2方向の応力に対してそれぞれ独立に行うこととし、同時に2方向から応力を受ける場合については特に触れてはいない。従ってこのような前提に合致しない場合、例えば隅柱で長期荷重時の応力が大きい場合などでは1方向の応力のみを考慮した場合よりも部材は厳しい応力状態にあると考えられ、2方向の応力について検討することが必要となる。

本報告は以上のような観点から、軸力と2軸曲げを受ける鉄筋コンクリート柱の断面の耐力、及び部材の変形によって生じる軸圧縮力の2次効果を考慮した長柱の荷重-変形関係を追跡する解析的方法に関して述

べるものである。

## 2. 既往の研究

鉄筋コンクリート柱の2軸曲げの問題に関する研究は、1960年代の後半に至るまで、2軸回りの曲げモーメントの大ききの比が一定、即ち合モーメントの方向が一定の場合の断面の終局強度に主眼を置いたものが大半であった。それらの2軸曲げを受ける断面の終局強度計算式の中で比較的好く引用されるのはBresler<sup>2)</sup>の提案した式である。彼は1軸偏心圧縮時の終局荷重を両主軸方向について求め、中心圧縮時の終局荷重と組合せて2軸曲げ終局強度を求める式と、一定軸力下における曲げモーメント相関曲線を表現する近似式の2種を提案した。断面耐力の相関曲線の形状は、断面の幾何学的形状、材料の強度、配筋状態と鉄筋量、軸力の大きさなどによって変化し、一つの式で表現することは難しい。Parme, Nieves, Gouwens<sup>3)</sup>は曲げモーメント相関曲線の形状を決定する定数について配筋状態、鉄筋の降伏強度、鉄筋係数(reinforcement index)、軸力比に対して用いるべき値を図表で示した。Meek<sup>4)</sup>は正方形断面を有する柱断面について、2方向の主軸回りの曲げモーメントと対角軸回りの曲げモーメントの3点を結ぶ2直線で相関曲線を安全側に近似する方法を提案した。Weber<sup>5)</sup>は正方形断面の対角軸上に偏心圧縮荷重を受ける場合について軸力一曲げモーメント設計図表を提示し、主軸回りの荷重については従来の設計図表を併用することによって、両者の線形補間により、設計する方法を提案した。岡田、平沢ら<sup>6)</sup>は長方形断面の終局強度算定には電子計算機を利用して精算することが最も適当な方法であると述べている。

鉄筋コンクリート柱が偏心荷重を受けるとき部材が変形するために生ずる軸力による2次モーメントの影響は短柱や比較的曲げ剛性の高い柱では小さく、耐力点が断面の耐力相関曲面上に達することによって「材料破壊」することになるが、曲げ剛性のより低い長柱においては最も厳しい応力状態にある断面においてその持ち得る荷重抵抗能力を発揮しないで「不安定破壊」の現象を生ずることになる。このような長柱の安定問題に関する研究は、1軸曲げを受ける柱については解析方法や実験結果が幾つか発表されているが、2軸曲げを受ける柱については数少ない。偏心軸圧縮力あるいは一定軸圧縮力と曲げモーメントを受ける柱の耐力の算定方法としては、材軸に沿ったすべての断面で力の釣合条件を満足させる精算法を、Kabaila, Hall<sup>7)</sup>, Gaughan<sup>8)</sup>(以上、1軸曲げ)、Farah, Huggins<sup>9)</sup>(2軸曲げ)らが発表しており、部材のたわみ曲線の形を例えば正弦曲線に仮定し部材中央点でのみ釣合条件を満足させるような略算法をKabaila, Hall<sup>7)</sup>(1軸曲げ)、Warner<sup>10)</sup>(2軸曲げ)らがそれぞれ発表している。岡田、平沢ら<sup>11)</sup>は終局耐力時の中央断面の載荷点からの偏心量及び終局曲げモーメントの相関曲線をそれぞれ近似式において、両者を用いて終局耐力を計算する簡便法を提案している。Chen, Shoraka<sup>12)</sup>は一定軸力下で2軸曲げを受ける正方形断面柱を、両材端対称荷重時と非対称荷重時について、断面及び材軸を分割することによって解析しACI規準(ACI318-71)の等価モーメント法によるものと比較している。

## 3. 解析の仮定

断面の主軸  $x, y$  に対して偏心軸圧縮力  $P$  が Fig. 1 (a) のように作用すると考える。座標  $x, y$  に作用する圧縮力を正とすると、座標軸  $z$  の正面の曲げモーメントの符号については Fig. 1 (b) の  $M_x, M_y$  を正にとる。本解析に用いられた仮定の主なものは次の通りである。

- (1) たわみは材長に比べて微小であり、たわみ角の2乗は1に比べて無視できる。
- (2) 平面保持の法則が成立する。
- (3) 柱材のせん断変形及びびねり変形を無視する。
- (4) コンクリート及び鉄筋の応力-歪関係はそれぞれ Fig. 2 (a), (b) に示される放物線-直線型及び完全弾塑性型とする。符号は圧縮を正にとる。コンクリートは引張応力をもたない。

4. 断面耐力についての解析

4.1 解析方法

断面内の歪分布は、 $x$  軸回りの回転に対する曲率  $\phi_x$ 、 $y$  軸回りの回転に対する曲率  $\phi_y$  及び断面内のある点における歪（例えば重心の歪  $\epsilon_0$  あるいは最大圧縮点の歪  $\epsilon_1$  など）の3変数によって与えられる。断面力としての軸方向力  $N$ 、 $x$  軸回りの曲げモーメント  $M_x$  及び  $y$  軸回りの曲げモーメント  $M_y$  は、コンクリート応力を  $\sigma_c$ 、鉄筋応力を  $\sigma_s$  としてそれぞれ次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \int A_c \sigma_c(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) dA_c + \int A_s \sigma_s(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) dA_s \\ M_x &= \int A_c \sigma_c(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) \cdot y dA_c + \int A_s \sigma_s(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) \cdot y dA_s \\ M_y &= \int A_c \sigma_c(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) \cdot x dA_c + \int A_s \sigma_s(\epsilon_0, \phi_x, \phi_y) \cdot x dA_s \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(1)$$

ここで、 $A_c$  はコンクリートの断面積、 $A_s$  は鉄筋の断面積である。

応力-歪関係に任意の非線形関数をとった場合、(1)式の積分を主軸に関して実行するには煩雑さが伴う。

そこで Fig. 3 に示すように座標軸  $l$  を中立軸に一致させる (Case 1~4) か、あるいは中立軸に平行で断面内の最小圧縮点を通る (Case 5) ようにとり、直交する座標軸  $h$  をとれば、応力分布は1変数  $h$  のみの関数となるため比較的簡単に積分がなされる。断面力の大きさは軸方向応力及びその応力ブロックの重心位置が求められることにより算定される。

また Fig. 4 (a) のコンクリート断面  $B \times D$  を、Fig. 4 (b) に示すように小矩形要素  $\Delta A_{ij}$  に分割し、各要素の歪  $\epsilon$  をその要素の重心  $(x_i, y_j)$  の歪で代表させると次式で表わされる。

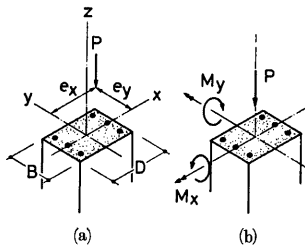
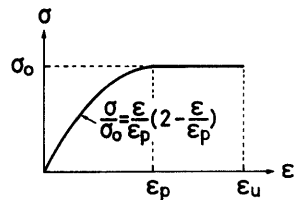
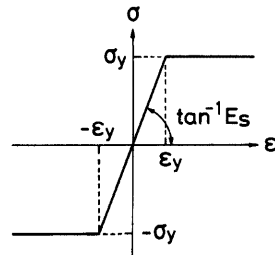


Fig. 1. Reinforced Concrete Column Section with Biaxial Bending



(a) Concrete



(b) Steel

Fig. 2. Stress-Strain Relations of Materials (a) Concrete (b) Reinforcing Bar

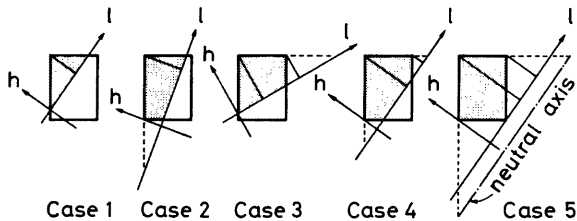


Fig. 3. Possible Shapes of the Area of the Compressive Stress Zone

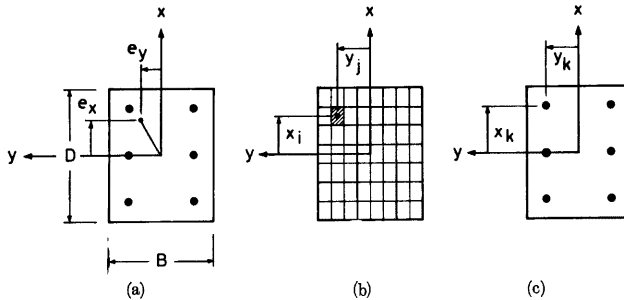


Fig. 4. Partitioning of Cross Section

$$\epsilon(x_i, y_j) = \epsilon_0 + x_i \cdot \phi_x + y_j \cdot \phi_y \quad \dots\dots\dots(2)$$

ここで、 $\epsilon_0$  は断面の塑性重心 (plastic centroid ; ここでは座標軸の原点) における歪である。応力は 仮定 (4) によって歪の確定関数で与えられることから、要素に作用する応力がそれぞれ得られ、断面力(1)式の積分は次に示す総和で置換できる。

$$\left. \begin{aligned} N &= \sum_{i,j} \sigma_c(x_i, y_j) \cdot \Delta A_{ij} + \sum_k \sigma_s(x_k, y_k) \cdot \Delta A_k \\ M_x &= \sum_{i,j} \sigma_c(x_i, y_j) \cdot y_j \cdot \Delta A_{ij} + \sum_k \sigma_s(x_k, y_k) \cdot y_k \cdot \Delta A_k \\ M_y &= \sum_{i,j} \sigma_c(x_i, y_j) \cdot x_i \cdot \Delta A_{ij} + \sum_k \sigma_s(x_k, y_k) \cdot x_k \cdot \Delta A_k \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここで  $x_k, y_k$  は Fig. 4 (c) に示されるように鉄筋の重心の座標、 $\Delta A_k$  は鉄筋 1 本当りの断面積である。鉄筋断面積が比較的大きい場合には第 2 項の鉄筋応力  $\sigma_s$  を  $\sigma_s(\epsilon_k) - \sigma_c(\epsilon_k)$  に置換すれば第 1 項のコンクリート応力との重複を避けることができる。

断面力は軸力比  $N/N_0$  ( $N_0$  は断面の全塑性圧縮軸力) を一定とし、両主軸回りの曲げモーメント比  $M_x/M_y$  の値を与えて積分を実行することにより算定された。ここでは断面の最大圧縮点の歪  $\epsilon_1$  を一定値において、曲率  $\phi_x$  と  $\phi_y$  の 2 変数に関して Newton-Raphson 法を適用することによって断面力比の条件を満足するまで収れん計算を行っている。

4.2 数値計算例

数値計算で用いられた断面は、正方形断面 ( $B=D$ ) で鉄筋総断面積比  $A_s/BD = 4\%$  とし、かぶり厚は断面せいの 1/10 である。コンクリート強度  $\sigma_0 = 240 \text{ kg/cm}^2$ 、歪  $\epsilon_p = 0.002$ 、鉄筋降伏応力  $\sigma_y = 3000 \text{ kg/cm}^2$ 、ヤング係数  $E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  が材料定数としてとられた。

軸力-曲げモーメント ( $N-M_x-M_y$ ) 相関曲面の鉄筋配筋状態の変化による差異を調べたものが、Figs. 5~7 (a) で、断面隅角部の最大圧縮歪  $\epsilon_1 = \epsilon_u = 0.004$  で一定にとり、鉄筋総断面積比を変えずにそれぞれ 4 本配筋 (引張鉄筋比  $p_t = 2\%$ )、8 本配筋 ( $p_t = 1.5\%$ )、12 本配筋 ( $p_t = 1.33\%$ ) とした場合である。Figs. 5~7 (b) は一定軸力下の  $M_x-M_y$  相関曲線であり、破線は軸力比の低いものを示す。軸力比  $N/N_0$  は 0.1 刻みで与えられた。4 隅に配筋された場合、1 軸曲げ時の引張鉄筋比が大きくなるため 1 軸曲げモーメントは他の 2 者に比べると軸力比  $N/N_0 = 0.2 \sim 0.4$  あたりで大きくなり、2 軸曲げ耐力線は直線的な相関を示している。鉄筋本数を増すことにより相関曲線は円形状になり、8 本配筋と 12 本配筋とは曲げモーメント耐力の大きさ・相関曲線の形状ともほぼ一致してくる。従って 4 本配筋断面はむしろ特殊な断面として扱われるべきである。8 本配筋断面について、断面の最大圧縮歪を  $\epsilon_1 = \epsilon_u = 0.003 \sim 0.006$  で変化させて軸力比を 0.2 刻みで比較したものが Fig. 8 である。ここでは偏心角  $\theta = \tan^{-1}(M_x/M_y)$  を 1 度の刻みで求めている。軸力比 0 の場合を除いて相関曲線に現われる曲げ耐力の大きさにかなりの差がみられる。1 方向曲げ耐力よ

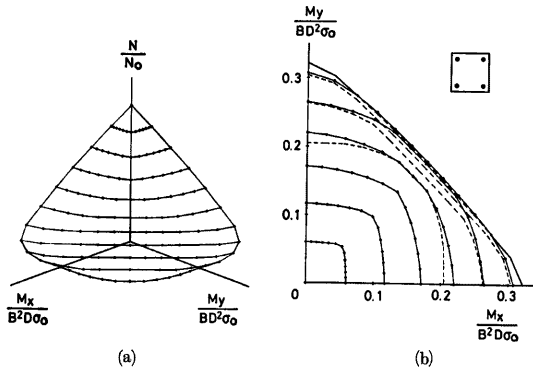


Fig. 5. Interaction Surface for a Column Section  
(a) Interaction Surface (b) Contour Line

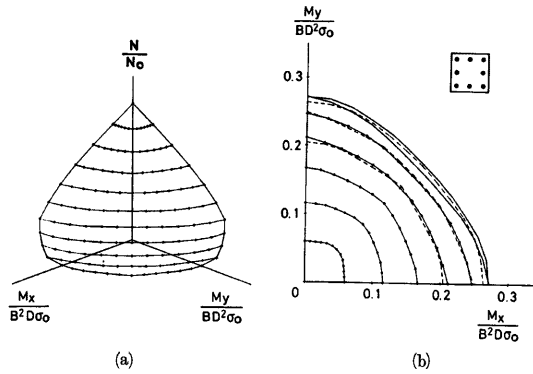


Fig. 6. Interaction Surface for a Column Section  
(a) Interaction Line Surface (b) Contour Line

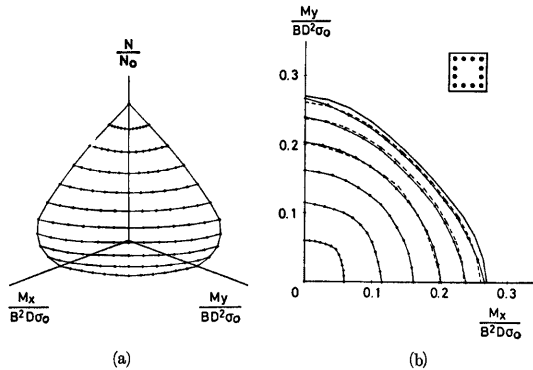


Fig. 7. Interaction Surface for a Column Section  
(a) Interaction Surface (b) Contour Line

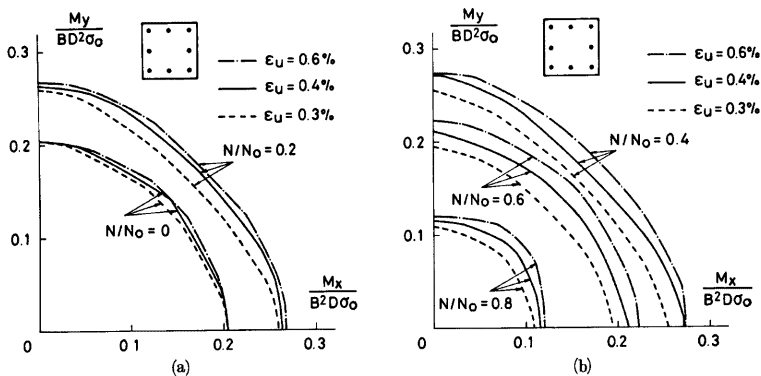


Fig. 8. Interaction Line at Constant Axial Load

りも2方向曲げ耐力にその差が大きいことがわかる。コンクリート断面を小要素に分割して断面力を求める方法との比較では、要素数 5×5, 10×10, 20×20 の正方形要素について計算されたが、いずれも得られた耐力には要素数による差はほとんど見られなかった。

5. 2 軸偏心圧縮柱の荷重-変形関係の解析

両材端でピン支持された材長  $L$  の柱が2軸偏心軸圧縮力  $P$  を受けるとする。 $x$  軸,  $y$  軸回りの回転に対する曲率  $\phi_x, \phi_y$  は, Fig. 9 に示されるように  $v_x, v_y$  をそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸方向のたわみ量にとると, 仮定(1)により次式で表現される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= -\frac{d^2 v_x}{dz^2} \\ \phi_y &= -\frac{d^2 v_y}{dz^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

柱材軸方向の任意の断面  $r$  での応力  $N, M_x, M_y$  は

$$\left. \begin{aligned} M_x &= M_x \left( -\frac{d^2 v_x}{dz^2}, -\frac{d^2 v_y}{dz^2} \right) \\ M_y &= M_y \left( -\frac{d^2 v_x}{dz^2}, -\frac{d^2 v_y}{dz^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

で表わされる。外力と内力の曲げモーメントの釣合条件から本解析の支配方程式は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= P \cdot (v_{yr} + e_{yr}) \\ M_y &= P \cdot (v_{xr} + e_{xr}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここで  $e_{xr}, e_{yr}$  は荷重の偏心距離及び柱材の初期たわみを含むもので, 各断面位置  $r$  について与えられる。

5.1 差分法を用いた逐次近似による解法

両材端で等偏心軸圧縮力  $P$  を受ける柱を解析する。荷重及び変形の対称性を考えて Fig. 10 に示す部材半分について解くものとする。部材半長  $L/2$  を  $n$  等分する。Fig. 11 に示すように曲げモーメント-曲率曲面上で与えられた曲率点  $(\phi_x, \phi_y)$  における接平面の  $x$  方向及び  $y$  方向成分である接線を用いて, 次式で

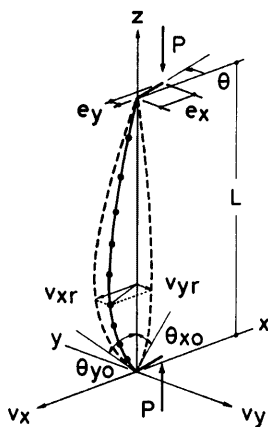


Fig. 9. Notations Relating to Column Analysis

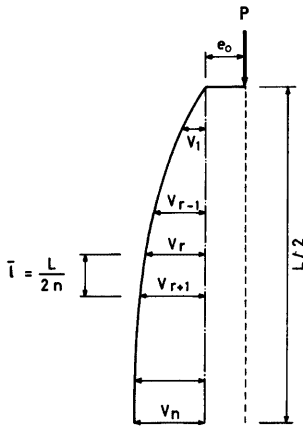


Fig. 10. Column Deflected Shape

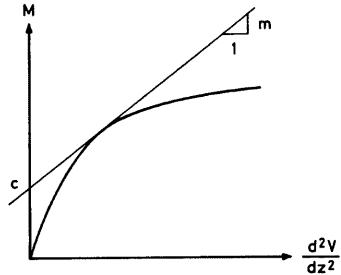


Fig. 11. Tangent Approximation to Local Behavior of Moment-Curvature Relation

その曲率点付近の曲げモーメント-曲率関係を近似する。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= m_{yr} \cdot \left( \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right)_r + c_{yr} \\ M_y &= m_{xr} \cdot \left( \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right)_r + c_{xr} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

更にとわみの2階微分を差分形で表示する。

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right)_r &= \frac{v_{xr-1} - 2v_{xr} + v_{xr+1}}{\bar{l}^2} \\ \left( \frac{d^2 v_y}{dz^2} \right)_r &= \frac{v_{yr-1} - 2v_{yr} + v_{yr+1}}{\bar{l}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 $\bar{l} = \frac{L}{2n}$  \dots\dots\dots (9)

は材軸方向要素の長さである。

(8)式を(7)式へ代入し、更に(6)式へ代入することによって部材中の1断面  $r$  における釣合式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{m_{xr}}{\bar{l}^2} (v_{xr-1} - 2v_{xr} + v_{xr+1}) + c_{xr} &= P(v_{xr} + e_{xr}) \\ \frac{m_{yr}}{\bar{l}^2} (v_{yr-1} - 2v_{yr} + v_{yr+1}) + c_{yr} &= P(v_{yr} + e_{yr}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられることになる。ここで、

$$v_{x0} = 0, \quad v_{y0} = 0 \quad (r=1 \text{ のとき}) \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$v_{xn+1} = v_{xn-1}, \quad v_{yn+1} = v_{yn-1} \quad (r=n \text{ のとき}) \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。

係数  $m_{xr}$ ,  $m_{yr}$ ,  $c_{xr}$ ,  $c_{yr}$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) が計算されれば、方程式が  $2n$  個であるのに対し、未知数が荷重  $P$  とたわみ量  $v_{xr}$ ,  $v_{yr}$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) の  $2n+1$  個になる。従って未知数の1個が与えられれば  $2n$  元連立代数方程式として解くことができる。ここでは  $x$  方向の中央たわみ量  $v_{xn}$  を荷重段階の基準増分変数として与える。(10)式を書き下すと次のようになる。

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc}
 2\bar{m}_{y1} & -\bar{m}_{y1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 -\bar{m}_{y2} & 2\bar{m}_{y2} & -\bar{m}_{y2} & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & -\bar{m}_{yn-1} & 2\bar{m}_{yn-1} & -\bar{m}_{yn-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & -2\bar{m}_{yn} & 2\bar{m}_{yn} & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{c} E_{y1} \\ E_{y2} \\ \vdots \\ E_{yn-1} \\ E_{yn} \end{array} = \begin{array}{c} v_{y1} \\ v_{y2} \\ \vdots \\ v_{yn-1} \\ v_{yn} \end{array} \left( \begin{array}{c} c_{y1} \\ c_{y2} \\ \vdots \\ c_{yn-1} \\ c_{yn} \end{array} \right) \\
 \left( \begin{array}{ccc|ccc}
 2\bar{m}_{x1} & -\bar{m}_{x1} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 -\bar{m}_{x2} & 2\bar{m}_{x2} & -\bar{m}_{x2} & & & \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & -\bar{m}_{xn-1} & 2\bar{m}_{xn-1} & -\bar{m}_{xn-1} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & 0 & -2\bar{m}_{xn} & 2\bar{m}_{xn} & 0
 \end{array} \right) \begin{array}{c} E_{x1} \\ E_{x2} \\ \vdots \\ E_{xn-1} \\ E_{xn} \end{array} = \begin{array}{c} v_{x1} \\ v_{x2} \\ \vdots \\ v_{xn-1} \\ v_{xn} \end{array} \left( \begin{array}{c} c_{x1} \\ c_{x2} \\ \vdots \\ c_{xn-1} + \bar{m}_{xn-1} \cdot v_{xn} \\ c_{xn} - 2\bar{m}_{xn} \cdot v_{xn} \end{array} \right)$$

(13)

但し、

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{xr} &= \frac{m_{yr}}{I^2} \\
 \bar{m}_{yr} &= \frac{m_{xr}}{I^2} \\
 E_{xr} &= v_{xr} + c_{x0} \\
 E_{yr} &= v_{yr} + c_{y0}
 \end{aligned}$$

である。

係数  $m_{xr}$ ,  $m_{yr}$ ,  $c_{xr}$ ,  $c_{yr}$  はそれぞれ軸力  $N$  及び曲率  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  に依存する量であるため、くり返しの数値計算によって(13)式を解くことになる。解析手順は次の通りである。

- (1)  $x$  方向の中央たわみ量  $v_{xn}$  を与える。
- (2) 軸圧縮力  $P$  及びたわみ量  $v_{x1}$ ,  $\dots$ ,  $v_{xn-1}$ ,  $v_{y1}$ ,  $\dots$ ,  $v_{yn}$  を仮定する。
- (3) (8)式により曲率  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  が計算される。
- (4) 両曲率に対して軸力  $N=P$  に釣合う歪分布が求められ断面に働く曲げモーメント  $M_x$ ,  $M_y$  が計算される。
- (5) (7)式の係数  $m_{xr}$ ,  $m_{yr}$ ,  $c_{xr}$ ,  $c_{yr}$  が定められる。
- (6) (13)式に  $E_{xr}$ ,  $E_{yr}$ ,  $m_{xr}$ ,  $m_{yr}$ ,  $c_{xr}$ ,  $c_{yr}$  ( $r=1, 2, \dots, n$ ) 及び  $v_{xn}$  の値を代入して解き、軸圧縮力  $P$  及びたわみ量  $v_{x1}$ ,  $\dots$ ,  $v_{xn-1}$ ,  $v_{y1}$ ,  $\dots$ ,  $v_{yn}$  が解として得られる。
- (7) (2)で仮定された値と(6)で得られた値との差が許容誤差範囲内に納まっていれば、これを正しい釣合・変形状態とする。続いて、中央たわみ量  $v_{xn}$  を新たに増大させて与え、(2)以降をくり返す。

もし両者の差が許容誤差範囲を越えているならば、(6)で得られた解を新しい仮定値として与え、(3)以降をくり返す。

**5.2 Runge-Kutta-Gill 法による解法**

(5)式及び(6)式からなる2階の連立微分方程式を次のような1階の連立微分方程式に置換する。

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{dv_x}{dz} = \theta_y \\
 \frac{dv_y}{dz} = \theta_x \\
 M_x \left( -\frac{d\theta_x}{dz}, -\frac{d\theta_y}{dz} \right) = P \cdot (v_y + e_y) \\
 M_y \left( -\frac{d\theta_x}{dz}, -\frac{d\theta_y}{dz} \right) = P \cdot (v_x + e_x)
 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  はそれぞれ  $x$  軸,  $y$  軸回りの回転に対するたわみ角である。(14)式について Runge-Kutta-Gill 法を適用して、微分方程式の境界値問題を1階の連立微分方程式の初期値問題として射的型の解法によ



り求める。この解析では、材軸方向各点での偏心量  $e_x, e_y$  の与え方によって非対称偏心載荷に対しても計算が可能である。材軸  $z$  に沿って部材長  $L$  を  $n$  等分する。材端での  $z$  座標を  $z_0$  とすると、要素の位置は次式で表わされる。

$$z_r = z_0 + r \cdot \bar{h} \quad (r=0, 1, 2, \dots, n) \quad \dots\dots\dots(15)$$

但し、 $\bar{h} = L/n$  \dots\dots\dots(16)

である。解析手順は次の通りである。

- (1) 1 荷重段階の基準増分変数として材端  $z=z_0$  におけるたわみ角の1つ  $\theta_{x0}$  を与える (Fig.9 参照)。
- (2) 荷重  $P$  と材端でのもう1つのたわみ角  $\theta_{y0}$  を仮定する。
- (3)  $r$  点 (最初の点は  $r=0$ ) のたわみ  $v_{xr}, v_{yr}$  を用いて  $z=z_r$  における外力が(6)式により求められ、抵抗モーメント  $M_{xr}, M_{yr}$  が得られる。
- (4) 断面力 ( $N, M_x, M_y$ ) に対応する歪分布 ( $\epsilon_0, \phi_x, \phi_y$ ) を3変数に関する Newton-Raphson 法を用いて求める。
- (5) たわみ角  $\theta_{xr}, \theta_{yr}$  と曲率  $\phi_{xr} = -\frac{d\theta_x}{dz}, \phi_{yr} = -\frac{d\theta_y}{dz}$  を用いてたわみ  $v_{x,r+1}, v_{y,r+1}$  及びたわみ角  $\theta_{x,r+1}, \theta_{y,r+1}$  を求める。 $\theta_{xr}, \theta_{yr}, v_{xr}, v_{yr}$  に対するそれぞれの近似増分は Runge-Kutta-Gill 法の補助増分の公式を用いることで計算される。
- (6)  $r=0$  から  $n-1$  までについて(3)~(5)をくり返し、最終状態として他端のたわみ  $v_{xn}, v_{yn}$  とたわみ角  $\theta_{xn}, \theta_{yn}$  が得られる。
- (7)  $v_{xn} = v_{yn} = 0$  となれば、これが正しい釣合・変形状態である。続いて、新たに  $\theta_{x0}$  を増大させて与え、(2)以降をくり返す。もし  $v_{xn}$  と  $v_{yn}$  が0でないならば、荷重  $P$  とたわみ角  $\theta_{y0}$  を仮定し直して(3)~(6)をくり返す。この収れん計算の過程には、2変数  $P$  と  $\theta_{y0}$  に関して Newton-Raphson 法が用いられた。

5.3 たわみ曲線仮定による近似解法

両材端で等偏心圧縮力  $P$  を受ける柱のたわみ曲線を、Fig. 12 のように  $x$  軸から角度  $\xi$  だけ傾いた平面内に含まれる余弦半波形式に仮定する。たわみ  $v(z)$  を、

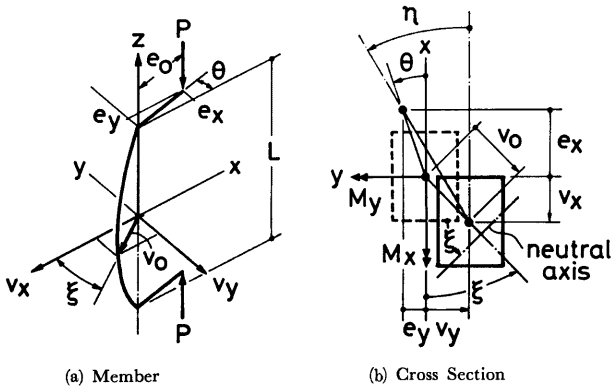


Fig. 12. Notations Relating to Column Analysis  
 (a) Assumed Deflected Shape  
 (b) Deflection of the Section at Mid-Height

$$v(z) = v_0 \cdot \cos\left(\frac{\pi z}{L}\right) \quad \dots\dots\dots(17)$$

とおくと、部材中央での曲率  $\phi_0$  は、

$$\phi_0 = -\left. \frac{d^2 v}{dz^2} \right|_{z=0} = v_0 \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \quad \dots\dots\dots(18)$$

で与えられる。 $v_0$  は部材中央のたわみ量である。中立軸はたわみ曲線を含む平面に垂直であるから、 $y$  軸に対して  $\xi$  だけ傾いている。従って曲率  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  は、

$$\left. \begin{aligned} \phi_x &= \phi_0 \sin \xi \\ \phi_y &= \phi_0 \cos \xi \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(19)$$

となり、部材中央断面の重心の  $x$  軸方向及び  $y$  軸方向のたわみ  $v_x$ ,  $v_y$  は次式で得られる。

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \xi = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \phi_y \\ v_y &= v_0 \sin \xi = \left(\frac{L}{\pi}\right)^2 \phi_x \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(20)$$

解析手順は次の通りである。

- (1) 荷重段階の基準増分変数として柱材中央断面における最大圧縮点の歪  $\epsilon_1$  を仮定する。
- (2) 2 主軸回りの曲率  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  を仮定すると(1)式から部材中央断面の変位  $v_x$ ,  $v_y$  が求められる。
- (3) (1)で仮定された歪と(2)で仮定された曲率より、平面保持の仮定を用いて断面全体の歪分布が求まり、応力-歪関係より応力分布が定まる。
- (4) 2 主軸回りの内力曲げモーメント及び軸力が得られる。
- (5) (4)で得られた軸力と(2)で求められた変形量から外力による曲げモーメントが計算される。
- (6) (4)で求められた内力モーメントと(5)で求められた外力モーメントが釣合っているかどうかを検討し、釣合っていなければ Newton-Raphson 法あるいは線形補間法によって、2 主軸回りの曲率を新たに仮定し直し、(2)~(5)の操作をくり返す。
- (7) 釣合状態にある軸力、曲げモーメント、歪分布状態及び変形量が求まる。
- (8)  $\epsilon_1$  を増大させ、(2)~(7)の操作を行うことにより、荷重と変形の関係が求められる。

#### 5.4 数値計算例

(1) 解析方法による比較：比較のために数値計算で用いられた柱部材は  $L/D=30$  で、断面に関しては鉄筋総断面積比  $A_s/BD=2.55\%$  で 4 本配筋であることを除けば、材料定数も含めて 4.2 の断面の数値計算例に用いられたものと同じである。断面力の計算には断面を  $10 \times 10$  の要素に分割して求める方法を用いている。材端偏心角  $\theta=22.5^\circ$  で  $e/D=0.05$  の等偏心載荷を受けた場合の解析結果が Figs. 13, 14 に示されている。図中の破線は Runge-Kutta-Gill 法を用いた解析結果で、Fig. 13 の実線は差分法を用いた解析結果である。両者は材軸方向に 10 等分した各点で釣合条件を満足するものであり、ほぼ一致している。差分法を用いた解析方法では、最大耐力点に近づくに従って計算過程における仮定値と解との差に関する収れんが悪くなり、解が発散して得られなくなる場合が生ずるという難点が見られた。Runge-Kutta-Gill 法による解析はその点について改善されており、最大耐力点以降の荷重-変形挙動を追跡し易くなっている。Fig. 14(a) の実線及び (b), (c) の黒丸線はたわみ曲線仮定による解析結果で、これは前の 2 つの解析結果よりもやや高い耐力値を示し、最大耐力以後の変形状態にも差が見られるが、全体として柱部材の挙動を表わし得ると言える。

(2) 柱部材の軸力-材端モーメント関係：4 本配筋の正方形断面を有する柱で、鉄筋重心間距離  $D'=0.6D$ 、鉄筋総断面積比 2.55% とした。コンクリート強度  $\sigma_0=240 \text{ kg/cm}^2$ 、歪  $\epsilon_p=0.0025$ 、鉄筋降伏応力度  $\sigma_y=3500 \text{ kg/cm}^2$ 、ヤング係数  $E_s=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$  である。コンクリート断面の分割数を  $5 \times 5$  として差分法を用いた解析方法により、柱材軸方向には部材半長を 5 等分して、材端偏心角  $\theta$  を  $0^\circ, 22.5^\circ, 45^\circ$  の 3 種について軸力-材端モーメント相関曲線を求めたものが Fig. 15 である。横座標の曲げモーメントは主

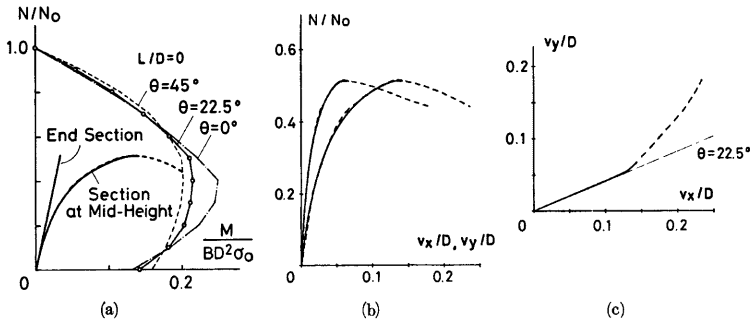


Fig. 13. Comparison between the Analyses Using the Finite Difference Method and the Runge-Kutta-Gill Method

- (a) Interaction Diagram
- (b) Load-Deflection Curve
- (c) Trajectory of Displacement at the Mid-Height Section

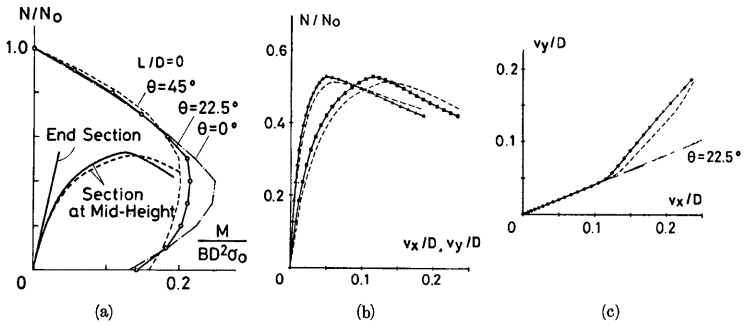


Fig. 14. Comparison between the Analyses Using the Assumed Deflected Curve and the Runge-Kutta-Gill Method

- (a) Interaction Diagram
- (b) Load-Deflection Curve
- (c) Trajectory of Displacement at the Mid-Height Section

軸回りの全塑性曲げモーメントに相当する量

$$M_0 = B(D - D')\sigma_0/8 + A_s D' \sigma_s/2 \dots\dots\dots (21)$$

によって無次元化されている。本解析値は黒丸印で示されたもので、 $\theta = 0^\circ$  の場合の実線はたわみ曲線仮定による解析の結果である。

## 6. 結 論

軸力と2軸曲げを受ける鉄筋コンクリート柱の断面耐力及び長柱の弾塑性安定問題について解析的に調べ、次のような結論を得た。

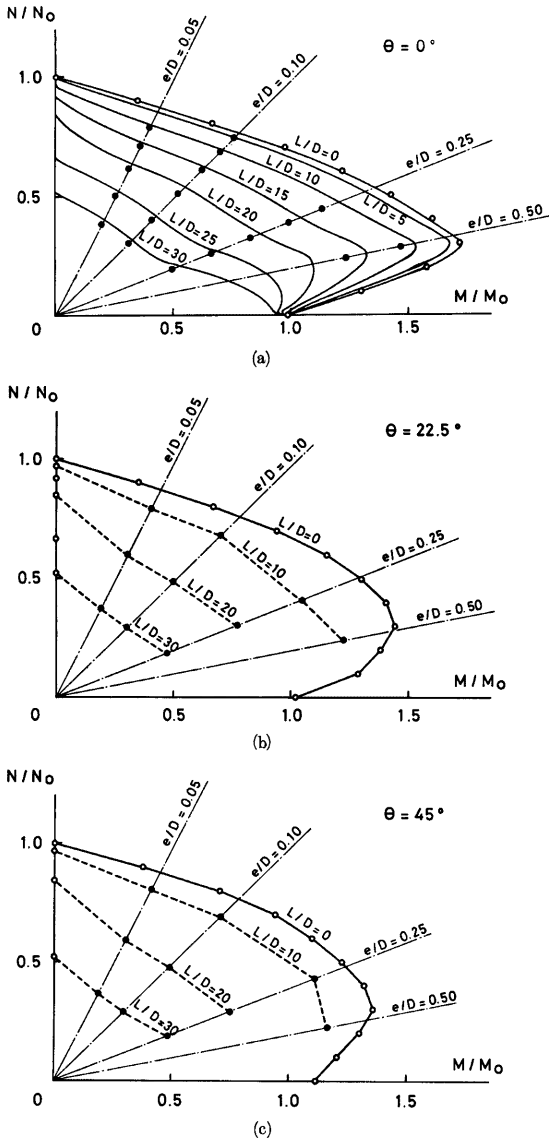


Fig. 15. Slender Column Interaction Diagrams

(1) 柱断面の2軸曲げ終局耐力に関して、鉄筋の分布状態、コンクリートの終局歪の大きさによる比較が

行われ、曲げモーメント相関曲線の形状・大きさに変化が認められた。8本配筋断面と12本配筋断面とでは曲げモーメント耐力の大きさ、相関曲線の形状ともほぼ一致するが、4本配筋柱は軸力比が0.2~0.4あたりで2つの主軸回りの曲げモーメントについて直線的な相関が強くなり、前二者とは異なった耐力・形状を示す。またコンクリートの終局歪を0.003~0.006の間で変えた場合、軸力比0の場合を除いて、特に2方向偏心曲げ耐力にかなりの差がみられた。

(2) 長柱の破壊に至るまでの荷重-変形曲線を得るための3つの解析方法が提示された。2つの解析法は柱材軸方向に幾つかの要素に分割し、その各点で釣合条件を満足させる精算法である。差分法を用いて釣合微分方程式を連立代数方程式に変換して逐次近似で求める方法は最大耐力以後の挙動を追跡し難く、微分方程式の解法に Runge-Kutta-Gill 法を用いて初期値問題として扱うことにより最大耐力以後も追跡し易くなるよう改善された。たわみ曲線を仮定して部材中央断面で釣合条件を満足させる近似解法は、柱の挙動の概略を知るのに有用である。

## 謝 辞

本報告の長柱の解析にあたり、当時、京都大学防災研究所研修員であった吉田望氏（現在、佐藤工業株式会社）に多くの助言を頂きました。本紙上を借りてここに深甚なる謝意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 日本建築学会, 「鉄筋コンクリート構造計算規準・同解説」, 1975改定.
- 2) Bresler, B., "Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending," ACI Journal, Proceedings Vol. 57, Nov. 1960, pp. 481-490.
- 3) Parme, A.L., Nieves, J.M. and Gouwens, A., "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending," ACI Journal, Proceedings Vol. 63, No. 9, Sept. 1966, pp. 911-923.
- 4) Meek, J.L., "Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads," ACI Journal, Proceedings Vol. 60, No. 8, Aug. 1963, pp. 1053-1064.
- 5) Weber, D.C., "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending," ACI Journal, Proceedings Vol. 63, No. 11, Nov. 1966, pp. 1205-1230.
- 6) 岡田 清, 平沢征夫, 米田俊一, 「鉄筋コンクリート単柱の2方向偏心荷重載荷実験」, セメント技術年報, XXIII, 1969, pp. 593-600.
- 7) Kabaila, A.P. and Hall, A.S., "Analysis of Instability of Unrestrained Prestressed Concrete Columns with End Eccentricities," Symposium on Reinforced Concrete Columns, ACI Special Publication No. 13, 1966, pp. 157-178.
- 8) Gaughan, J., "Computer Analysis for Slender Concrete Columns," Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 100, No. ST10, Oct. 1974, pp. 2123-2141.
- 9) Farah, A. and Huggins, M.W., "Analysis of Reinforced Concrete Columns Subjected to Logitudinal Load and Biaxial Bending," ACI Journal, Proceedings Vol. 66, No. 7, July 1969, pp. 569-575.
- 10) Warner, R.F., "Long Reinforced Concrete Columns in Biaxial Bending," IABSE Publications, Vol. 29-I, 1969, pp. 133-148.
- 11) Okada, K., Kojima, T. and Hirasawa, I., "Strength of Columns under Biaxially Eccentric Loads," Introductory Report, IABSE Symposium, Québec, 1974, pp. 171-178.
- 12) Chen, W.F. and Shoraka, M.T., "Analysis and Design of Reinforced Columns under Biaxial Loading," Introductory Report, IABSE Symposium, Québec, 1974, pp. 187-195.