

# 間隙空気の閉塞を伴う一定強度の降雨浸透について

石原安雄・下島栄一

## CONFINED INFILTRATION WITH CONSTANT INTENSITY OF RAINFALL

By Yasuo ISHIHARA and Eiichi SHIMOJIMA

### Synopsis

The water falling as rain on the land penetrates downwards displacing the air in the soil. Usually at the beginning of rainfall all of water infiltrate into the soil, but thereafter, if the rainfall intensity is larger beyond some critical value, the ponding occurs on the land and only some fraction of rain water becomes to infiltrate.

In order to clarify such an infiltration phenomenon, the experiments with constant intensity of rainfall at the surface have carried out by the use of sand column in the cylinder with bottom plate.

Comparing the results of experiments with the ones which are obtained from the flow equations derived combining generalized Darcy's laws, mass conservation laws, for immiscible two fluids, and equation of state for gas, the followings are disclosed.

- 1) There is possibility of occurrence of the ponding only when the rainfall intensity is larger than the maximum value  $k_m$  of  $k = K \cdot K_a / (K + K_a)$ .
- 2) In the region of  $q < k_m$ , with lapse of time the wetting front becomes to move downwards at the constant velocity with the unchangeable shape and the pore-air pressure becomes to change at constant rate of increase.
- 3) In the region of  $q > k_m$ ,
  - (a) when the moisture content at the surface reaches nearly 90% of saturation, the pore-air pressure increases abruptly.
  - (b) when the ponding occurs, the moisture content at the sand surface reaches nearly the state of saturation.

### 1. ま え が き

降雨が山腹斜面に降り続けると、その雨水は総て下方に浸透していく場合もあるが、降雨強度の大きさによっては、斜面が裸地のときは地面に表面流が、また地表が活性層で覆われているときは活性層の底部で中間流が発生するようになり、一種の湛水が生じる場合もある。その際、地中には地下水面や不透水層が存在するのが普通であり、このような場へ雨水は間隙空気と交換しつつ浸透していく。そこで、このような浸透現象を理解する上で、間隙空気が浸透に及ぼす影響を明確にすることは非常に重要な問題である。

本研究は、一様な浸透場に一定強度の降雨を与えるという条件下で実験を行ない、浸透水の移動に及ぼす間隙空気の影響や間隙空気の挙動について考察したものである。

### 2. 実 験 方 法

まず、内径 18.5 cm、長さ 170 cm の透明アクリル樹脂製の底部を密閉した円筒に、Fig. 1 で示した 3 種類の気乾状態の砂をほぼ一様になるように充填して約 169.5 cm の単一砂柱を作った。そして、その砂層表面より上方へ数 cm 離れた場所から種々の一定強度の給水を行ったが、給水装置はつきのようである。すなわ

ち、貯水槽よりポンプで吸い上げられた水を流量計 (日本フローセル社製のフローマチックミニバルブ) を通して注射針を多数取付けた給水部に送り込むシステムであるが、給水部は内径 18.5cm, 長さ 20cm の円筒の両端を同径の円板で密閉した容器の底部に、頭を切った内径 0.8mm の注射針 69 本を内部に数 cm 頭が出るようにしてほぼ一様な分布に差し込み、一方容器の他端には管を付けて流量計からの水が内部に流れ込むようにして、注射針から給水が行えるようにしたものである。また、この種の流量計を用いたのは、これに対する 1 次圧, 2 次圧が多少変動しても所定の流量を安定した状態で与えることができるためである。なお、砂層表面には注射針からの水滴による衝激を緩和するため、1mm メッシュ程度の金網を敷いた。

つきに測定<sup>1)</sup>であるが、水分については電気容量方式により 10cm~15cm 間隔で計測し、また空気圧については円筒底部に取付けた圧力変換器で計測を行った。

### 3. 理論的考察

#### 3.1 基礎式と近似基礎式

一様な場に雨水が浸透するとき、その雨水によって地面に湛水が生じ、そのため浸透面直下で飽和状態に近い領域 (これを擬飽和域と呼ぶ<sup>2)</sup>) が形成される場合の擬飽和域を除外し、比較的水分の小さな領域での浸透水と間隙空気の運動は以下の式には従う。

$$\text{浸透水;} \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (1), \quad v = -D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x}\right) \quad \dots\dots (2)$$

$$\text{間隙空気;} \quad \frac{\partial \rho_a \cdot (\theta_{sat} - \theta)}{\partial t} + \frac{\partial \rho_a \cdot v_a}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots (3), \quad v_a = -K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w}\right) \quad \dots\dots (4)$$

$$\rho_a = \text{const} \cdot (P_{a,0} + p_a) = \text{const} \cdot P_a \quad \dots\dots (5)$$

式 (1), 式 (3) は連続式, 式 (2), 式 (4) は運動の式, 式 (5) は状態方程式である。ここに,  $v, v_a$ ; それぞれ水, 空気の流量流速,  $\theta$ ; 体積含水比,  $\theta_{sat}$ ; 飽和体積含水比,  $D(\theta)$ ; 水の拡散係数,  $K(\theta)$ ; 不飽和透水係数,  $K_a(\theta)$ ; 透気係数,  $p_a$ ; 大気圧  $P_{a,0}$  からの増加空気圧 ( $= P_a - P_{a,0}$ ),  $\rho_w, \rho_a$ ; それぞれ, 水, 空気の密度,  $x$ ; 浸透面を基準とし重力方向を正符号とする位置座標,  $t$ ; 給水開始時点を基準とする時間座標, である。

また、いまの場合の初期条件, 境界条件は湛水しないとして砂層表面で与えられる一定の降雨強度を  $q$  とし, また砂層厚を  $L$  とすると 2 より次式となる。

$$\text{初期条件;} \quad \theta(x) \div 0 \quad \dots\dots (6), \quad p_a(x) = 0 \quad \dots\dots (7)$$

$$\text{境界条件;} \quad x = 0 \text{ で, } -D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x}\right) = q \quad \dots\dots (8), \quad p_a(x, t) \div 0 \quad \dots\dots (9)$$

$$x = L \text{ で, } -D \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + K \cdot \left(1 - \frac{\partial p_a}{\partial x}\right) = 0 \quad \dots\dots (10), \quad -K_a \cdot \left(\frac{\partial p_a}{\partial x} - \frac{\rho_a}{\rho_w}\right) = 0 \quad \dots\dots (11)$$

ところで、既報<sup>3)</sup>で述べたように、基礎式 式 (1)~(5) および境界条件式 (10), 式 (11) より次式が与えられる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial x} = -\frac{D \cdot A}{K} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} + A \cdot (1 - \varepsilon) + (1 - A) \cdot \frac{\rho_a}{\rho_w} \quad \dots\dots (12)$$

$$\text{ここに, } A(\theta) = K / (K + K_a) \quad \dots\dots (13), \quad \varepsilon = \int_x^L (\theta_{sat} - \theta) \cdot \frac{\partial P_a}{\partial t} \cdot dx / K_a \cdot \bar{P}_a \quad \dots\dots (14)$$

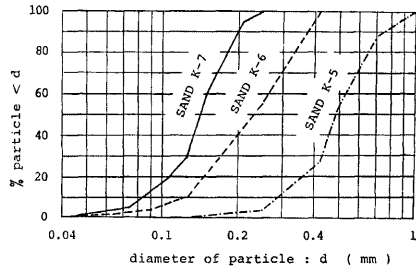


Fig. 1. Distribution of particle size.

なお、 $\bar{P}_a(t)$  は  $P_a(t) = \bar{P}_a + \Delta p_a(x, t)$ ,  $\bar{P}_a \gg |\Delta p_a|$  である。

さらに、式 (12) において  $\varepsilon$  と  $\rho_a/\rho_w$  が十分小さく他の項に比べ無視できると仮定し、独立変数  $(x, t)$  を  $(\theta, t)$  に変換すると次式となる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} = -\frac{D \cdot A}{K} / \frac{\partial x}{\partial \theta} + A \quad \dots\dots\dots (15)$$

また、式 (2) の  $v$  を  $(\theta, t)$  の関数とみなして式 (15) を代入すると次式となる。

$$v(\theta, t) = -D \cdot (1-A) / \frac{\partial x}{\partial \theta} + K \cdot (1-A) \quad \dots\dots\dots (16)$$

よって、式 (1) を独立変数  $(\theta, t)$  で変換した式に式 (16) を代入すると次式がえられる。

$$-\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ D \cdot (1-A) / \frac{\partial x}{\partial \theta} - K \cdot (1-A) \right] \quad \dots\dots\dots (17)$$

結局、基礎式系式 (1)～式 (5) は近似的に式 (15)、式 (17) に変換されたことになる。本来水分の移動を決定する基礎式式 (1)、式 (2) に対し、空気圧の効果は  $\partial p_a/\partial x$  の形で含まれていたが、近似的に誘導した式 (17) では拡散係数および不飽和透水係数をそれぞれ  $D \cdot (1-A)$ ,  $K \cdot (1-A)$  のように  $A(\theta)$  で修正した形でその効果が現われることになる。その結果、水分の移動に対しては連立偏微分方程式を解く必要がなくなり、1つの偏微分方程式を解ければよいことになる。

**3.2 近似基礎式の解法**

誘導した基礎式式 (15)、式 (17) の解を求めるには、まず式 (17) に注目して既報<sup>3)</sup>で行ったように Parlange の方法を用いて水分に関する近似解  $x(\theta, t)$  を誘導し、これを式 (15) に用いて空気に関する近似解  $p_a(\theta, t)$  を求めることができるが、後述の 3.3 での考察に際しては Philip の方法<sup>4)</sup>における演算過程を準用した方が便利であるので、以下では後者に従うことにする。

まず、式 (16) の  $v(\theta, t)$  を  $x=0$  での浸透水の流量流速  $v(\theta_s, t)$ , すなわち降雨強度  $q$  で割った量を考える。

$$F(\theta, t) \equiv \frac{v(\theta, t)}{v(\theta_s, t)} = [-D \cdot (1-A) / \frac{\partial x}{\partial \theta} + K \cdot (1-A)] / q \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに、 $\theta_s(t)$  は  $x=0$  での  $\theta$  の値である。この式より  $\frac{\partial x}{\partial \theta}$  は形式的に次式のように書き表わせる。

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} \quad \dots\dots\dots (19)$$

よって、上式を時間を固定して  $\theta$  につき区間  $[\theta, \theta_s]$  で積分すると次式となる。

$$x(\theta, t) = - \int_{\theta}^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} d\theta \quad \dots\dots\dots (20)$$

さらに、式 (20) を  $t$  で偏微分し、 $F(\theta_s, t) = 1$  の関係を考慮すると次式となる。

$$\frac{\partial x}{\partial t} = - \frac{d\theta_s}{dt} \left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - \frac{d\theta_s}{dt} \int_{\theta}^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A) \cdot \partial q F / \partial \theta_s}{[K \cdot (1-A) - q \cdot F]^2} d\theta \quad \dots\dots\dots (21)$$

ところで、式 (21) を  $t$  を固定し  $\theta$  につき区間  $[0, \theta_s]$  で積分したものは、式 (6) および式 (10) を考慮すると水の連続式式 (17) より  $q$  に等しくなるので次式が求まる。

$$q = \frac{d}{dt} \int_0^{\theta_s} x d\theta = \int_0^{\theta_s} \frac{\partial x}{\partial t} d\theta = - \frac{d\theta_s}{dt} \left[ \left\{ \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} + \int_0^{\theta_s} \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A) \cdot \partial q F / \partial \theta_s}{[K \cdot (1-A) - q \cdot F]^2} d\theta \right] \quad \dots\dots\dots (22)$$

この式より  $d\theta_s/dt$  を求めると次式となる。

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -q / \left[ \left\{ \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} + \int_0^{\theta_s} \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A) \cdot \partial q F / \partial \theta_s}{[K \cdot (1-A) - q \cdot F]^2} d\theta \right] \quad \dots\dots\dots (23)$$

そこで、上式を式 (21) の  $d\theta_s/dt$  に代入すると次式となる。

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{q}{\theta_s} \cdot \frac{\left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} + \int_{\theta_s}^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A) \partial q F / \partial \theta_s}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}_s^2} d\theta}{\left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} + \int_{\theta_s}^{\theta_s} \theta \cdot \frac{D \cdot (1-A) \cdot \partial q F / \partial \theta_s}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}_s^2} d\theta} \dots (24)$$

一方、空気圧については、まず式 (15) に式 (19) を代入すると次式となる。

$$\frac{\partial p_a}{\partial \theta} = -\frac{D \cdot A}{K} + A \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} \dots (25)$$

よって、上式で  $t$  を固定し  $\theta$  につき区間  $[\theta, \theta_s]$  で積分すると次式となる。なお、 $p_a(\theta_s, t)$  は浸透面での空気圧 (式 (9)) に対応する。

$$p_a(\theta, t) = p_a(\theta_s, t) + \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{A \cdot D}{K} d\theta - \int_{\theta_s}^{\theta} A \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} d\theta \dots (26)$$

さて、上記のように誘導された諸式には未知関数  $F(\theta, \theta_s)$  が含まれているので、 $F$  の関数形を決定しなければならない。そこで、 $F$  の決定を逐次近似法を用いて決定するが、その手順はつきのとおりである。すなわち、第  $i$  近似の  $F_i$  が決れば、この  $F_i$  を式 (24) の  $F$  に代入して  $(\partial x / \partial t)_i$  を求め、この  $(\partial x / \partial t)_i$  を用いて第  $(i+1)$  次近似の  $F$  を、その定義式を考慮して次式より求めることにする。

$$F_{i+1} = \int_0^{\theta} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_i d\theta / \int_0^{\theta_s} \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_i d\theta \dots (27)$$

このような方法を用いることにより、以下高次近似の  $F$  が形式的に求まることになる。そして、適当な第  $n$  次近似の  $F_n$  を用いることによって、式 (23) で  $\theta_s(t)$  が求まるので、各時間に対応する水分分布および空気圧分布はそれぞれ式 (20)、式 (26) より決定できる。なお、具体的な近似解の表現は 3.4 で述べることにする。

### 3.3 近似基礎式からの 1 特性

近似基礎式では唯一の砂層厚の効果を含む  $s$  の項を無視したので、この基礎式は砂層厚の大小に係らず成立することになる。従って砂層厚の大きいときの性質を調べることによって、時間経過とともに変化する水分の状態を知ることができるはずである。そこで、降雨強度が如何なる値以上になると砂層表面の水分が増大しつづけば飽和状態に向かうかという事象を背理法を用いて調べてみることにする。

最初に、 $q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合を考える。ここに、 $\{K \cdot (1-A)\}_{max}$  とは  $K \cdot (1-A)$  の最大値のことであり、 $K \cdot (1-A)$  と  $\theta$  の関係は後述の Fig. 3 で示されている。そして、次式を仮定する。

$$t \rightarrow \text{大のとき}, \theta_s \rightarrow \theta_{s,\infty} (= \text{const.}) = \bar{\theta} - \eta \dots \text{仮定式}$$

ここに、 $\bar{\theta}$  は  $q = K \cdot (1-A)$  を満す 2 つの水分のうち小さな方の値であり、大きな方を  $\bar{\theta}'$  とする。また、 $\eta$  は  $\bar{\theta} > \eta > 0$  とする。

まず、wetting front のある水分に注目してその位置を  $x_f$  とすると、 $t$  が非常に大きくなったときは次式が満足されるはずである。

$$x_f \rightarrow \text{大} \dots \text{①}$$

ところで、式 (20) は  $x_f$  の示式でもあるので、上の関係が成立するためには式 (20) の被積分関数がある水分  $\theta_j (j=1, 2, \dots)$  で十分に大きな値となる必要があるが、 $D \cdot (1-A)$  はさほど大きな値とはならないので、結局次式が成立せねばならない。

$$t \rightarrow \text{大のとき}, \{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}_{\theta_j} \rightarrow 0 \dots \text{②}$$

$$\text{すなわち}, \left\{ \frac{K \cdot (1-A)}{q} \right\}_{\theta_j} \div \{F\}_{\theta_j} \dots \text{③}$$

さらに、式③で  $F$  の定義式 式(18) を考慮すると次式が成立することになる。

$$t \rightarrow \text{大のとき}, \left( \frac{\partial x}{\partial \theta} \right)_{\theta_j} \rightarrow \infty \dots \text{④}$$

ここで、 $\theta_j$  の最大値を  $\theta_{j,max}$  とし、 $\theta_{j,max} \equiv \theta_{s,\infty}$  の場合で  $\theta_{s,\infty} \geq \theta > \theta_{j,max}$  なる領域での水分分布形を考えると、式 (20) および水の連続式 式 (1) よりそれぞれ以下の式が成立することになる。

$$t \rightarrow \text{大のとき}, x(\theta, t) < \text{有限値} \quad \dots\dots \textcircled{5}, \quad -\frac{\partial x}{\partial t} / \frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial \theta} / \frac{\partial x}{\partial \theta} \neq 0 \quad \dots\dots \textcircled{6}$$

式⑥は  $\theta_{s,\infty} \geq \theta > \theta_{j,max}$  に対し、 $t \rightarrow \text{大}$  で  $F \rightarrow 1$  となることに対応するが、 $\theta \rightarrow \theta_{j,max}$  での  $F$  を考えるとき、 $F$  は不連続関数とは考えられないので  $F \rightarrow 1$  とならう。その結果、 $\theta = \theta_{j,max}$  での  $v$  は式(16)および式④より  $v = \{K(1-A)\}_{\theta_{j,max}} = q$  となる。ところで、仮定式より  $\hat{\theta} > \theta_{j,max}$  であるが、 $\hat{\theta}$  の定義からすると  $v = \{K(1-A)\}_{\theta_{j,max}}$  と  $v = q$  とは同時に成立しないことになる。

一方、 $\theta_{j,max} = \theta_{s,\infty}$  の場合、 $x=0$  では  $v=q$  となるが、 $\theta_s \rightarrow \theta_{j,max}$  であるので前述と同様  $v = \{K(1-A)\}_{\theta_{j,max}}$  の関係も成立しなければならない。ところで、 $\hat{\theta} > \theta_{j,max}$  であるので二つの  $v$  の表現は同時に成立しないことになる。結局、以上のことより仮定式は合理的でなかったことになる。

つぎに、仮定式で  $\eta$  の値が  $\eta < 0$  となる場合を調べる。このとき、 $\theta_{s,\infty}$  は (i)  $\theta_{s,\infty} < \hat{\theta}'$  (ii)  $\theta_{s,\infty} \geq \hat{\theta}'$  のいずれかにあるはずである。まず (i) の場合に注目すると、 $\theta_{j,max}$  は  $\eta > 0$  の場合と同様に  $\theta_{j,max} \neq \theta_{s,\infty}$ 、 $\theta_{j,max} = \theta_{s,\infty}$  とに分けて考える必要がある。そこで、 $\theta_{j,max} \neq \theta_{s,\infty}$  のとき、 $\theta_{s,\infty} \geq \theta > \max(\theta_{j,max}, \hat{\theta})$  にある  $\theta$  では、 $t \rightarrow \text{大}$  で式⑤、式⑥が成立し  $F \rightarrow 1$  (i.e.  $v \rightarrow q$ ) となる。一方、 $v$  は式(16)で与えられたので  $\partial x / \partial \theta < 0$  を考慮すると  $v > K \cdot (1-A)$  となるが、 $\hat{\theta}' > \theta > \max(\theta_{j,max}, \hat{\theta})$  の条件より  $v > K \cdot (1-A) > \{K \cdot (1-A)\}_{\hat{\theta}} = q$  となり、上記の  $v \rightarrow q$  の結果と同時に成立しないことになる。つぎに  $\theta_{s,\infty} = \theta_{j,max}$  のとき、 $x=0$  では  $v=q$  であるが、 $\theta_s \rightarrow \theta_{j,max}$  であるので式④および式(16)より  $v = \{K \cdot (1-A)\}_{\theta_{j,max}}$  となる。しかし、 $\{K \cdot (1-A)\}_{\theta_{j,max}} > \{K \cdot (1-A)\}_{\hat{\theta}} = q$  より、上記の  $v$  に関する二つの関係は同時に成立しないことになる。(ii) の場合、前述と同様な議論を行うこと、 $\theta_{j,max}$  が  $\theta_{j,max} = \hat{\theta}'$  を満すときのみ表面上矛盾が生じないことがわかる。しかし、式(1)に注目し  $\partial \theta / \partial t > 0$  の条件を設定すると、 $\partial v / \partial x < 0$  すなわち  $\partial x / \partial \theta < 0$  より  $\partial v / \partial \theta > 0$  となる。それゆえ、 $\hat{\theta} < \theta < \theta_{j,max}$  での  $\theta$  の  $v$  は  $\partial x / \partial \theta < 0$  を考慮すると式(16)より  $v > K \cdot (1-A)$  となるが、この  $v$  は  $\theta_{j,max}$  での  $v$  より大きくなり  $\partial v / \partial \theta > 0$  なる条件に反することになるので、この場合も不合理となる。

以上の考察より、仮定式の  $t \rightarrow \text{大}$  で  $\theta_s \rightarrow \text{const.}$  となるためには  $\eta = 0$  となる必要があり、 $\theta_{s,\infty}$  は  $\hat{\theta}$  と一致することがわかったので、 $\theta_s$  が  $\theta_{s,\infty}$  となるに要する時間を検討してみる。まず、式(21)での  $\theta$  を  $\theta_s$  に等しくおくと次式となる。

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_{\theta_s} = -\frac{d\theta_s}{dt} \cdot \left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s}$$

右辺の {...} で  $\theta_s \rightarrow \hat{\theta}$  になると十分に大となるが、 $(\partial x / \partial t)_{\theta_s}$  は物理的に正のある有限値となる必要があるので  $d\theta_s / dt \rightarrow 0_+$  とならう。このことは  $\theta_s$  が  $\hat{\theta}$  に漸近するのに非常に大きな時間を要すると考えられ上述の妥当性が認められよう。

つぎに、 $q > \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合を考え次式を仮定する。

$$t \rightarrow \text{大のとき}, \theta_s \rightarrow \theta_{s,\infty} (= \text{const.}) = \theta_{sat} - \eta \quad \dots\dots\dots \text{仮定式}$$

ここに、 $\eta$  は正のある値とする。そこで、 $q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合と同様な議論の展開(式①～式⑥)を行うと、 $\theta_{j,max}$  では  $v = \{K \cdot (1-A)\}_{\theta_{j,max}}$  となるが、同時に  $v = q$  が成立する必要がある。しかし、いまの場合  $q > \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  であるので、この二つの関係は同時に成立しないことになり、仮定式が不合理であったことがわかる。このことは、砂層厚が十分にある場合、 $q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合と異なり  $\theta_s$  に対し  $q$  に対応する固有の水分  $\hat{\theta}$  が存在しないこと、またいずれかの時間に湛水が生じることを意味する。

以上の結果を要約すると、砂層厚は有限であるので、表層表面の水分が飽和状態近傍程度まで増大しつづけるためには、少なくとも降雨強度は  $\{K \cdot (1-A)\}_{max}$  より大きくなければならない。

**3.4 近似基礎式の解**

ここでは3.2での  $F(\theta, \theta_s)$  の近似的表現を求め、それに対する  $x(\theta, t)$ ,  $p_a(\theta, t)$  などの解を導びく。

(1) 近似解の誘導

まず、第1次近似の  $F$  を Parlange<sup>5)</sup> に従って次式で与える。

$$F_1=1 \dots\dots\dots(28)$$

よって、式 (20)、式 (23) および式 (24) はそれぞれつぎようになる。

$$x = -\int_0^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} d\theta \dots\dots(29) \quad \frac{d\theta_s}{dt} = -q / \left\{ \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} \dots\dots(30)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{q}{\theta_s} \dots\dots\dots(31)$$

つぎに、第 2 次近似の  $F$  は式 (27) に式 (31) を代入することにより次式となる。

$$F_2 = \frac{\theta}{\theta_s} \dots\dots\dots(32)$$

よって、式 (20)、式 (23) および式 (24) はつぎようになる。

$$x = -\int_0^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}} d\theta \dots\dots\dots(33)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -q / \left[ \left\{ \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - q \cdot \int_0^{\theta_s} \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^2 \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\left\{ K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s} \right\}^2} d\theta \right] \dots\dots\dots(34)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{q}{\theta_s} \frac{\left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - \frac{q}{\theta_s} \cdot \int_0^{\theta_s} \frac{\theta}{\theta_s} \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\left\{ K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s} \right\}^2} d\theta}{\left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - \frac{q}{\theta_s} \cdot \int_0^{\theta_s} \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^2 \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\left\{ K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s} \right\}^2} d\theta} \dots\dots\dots(35)$$

さらに、第 3 近似の  $F$  は同様に式 (35) を用いればよく、ここでは  $F_3$  のみを示すことにする。

$$F_3 = \frac{\theta_s \cdot \left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - \frac{q}{\theta_s} \cdot \int_0^{\theta_s} d\theta \int_0^{\theta_s} \frac{\theta}{\theta_s} \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\left\{ K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s} \right\}^2} d\theta}{\theta_s \cdot \left\{ \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q} \right\}_{\theta_s} - \frac{q}{\theta_s} \cdot \int_0^{\theta_s} \left( \frac{\theta}{\theta_s} \right)^2 \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\left\{ K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s} \right\}^2} d\theta} \dots\dots\dots(36)$$

さて、一般的な  $q$  を対象にしたとき  $K \cdot (1-A) \sim \theta$  は後述の Fig. 3 で示すような関数形であるので、開放浸透の場合 ( $A=0$  としたときに対応) のように近似の次数を上げることによって近似解の精度が上がるかどうか疑問である。そこで、ここでは第 2 次近似解の精度について調べてみることにする。

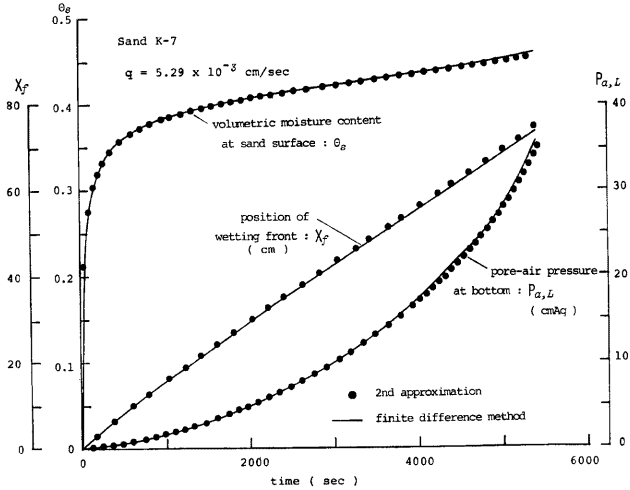
## (2) 第 2 次近似解の精度の検討

近似解は近似基礎式に対するものであって、基礎式 (1)~(5) に対しては二度の近似化が行われている。そこで、まず比較の対象となるのは基礎式でなければならないが、本文で扱っている連立非線形偏微分方程式の解の表示は現時点では見出されていないものと思われる。そのため、ここでは厳密解の代替として差分解を考えることにする。なお、以下で示す差分解は非線形方程式の解法に常用される Newton-Raphson 法により求めた。

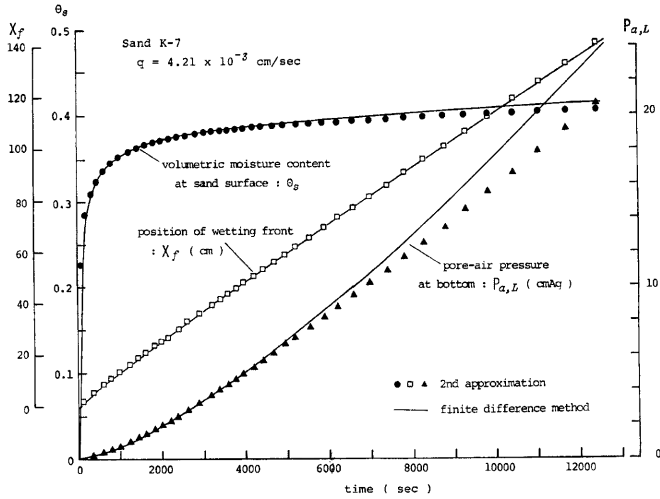
さて、Fig. 2(1)、(2) は K-7 砂での第 2 次近似解と差分解との比較図であって、Fig. 2(1) の場合の降雨強度は  $\{K \cdot (1-A)\}_{\langle \theta \rangle} \cdot \theta_{sat} / \langle \theta \rangle >$  より若干大きく、一方、Fig. 2(2) の場合は  $\{K \cdot (1-A)\}_{\langle \theta \rangle} \cdot \theta_{sat} / \langle \theta \rangle >$  と  $\{K \cdot (1-A)\}_{\langle \theta \rangle}$  との中間的な値の降雨強度である。ここに、 $K \cdot (1-A)$  と  $\theta$  との関係は Fig. 3 のとおりであって、 $\langle \theta \rangle$  は原点を通る直線が  $K \cdot (1-A)$  と接する  $\theta$  の値、 $\theta_m$  は  $K \cdot (1-A)$  が最大値をとる  $\theta$  の値、 $\theta_m$  は湛水が生起する際の  $\theta_s$  の値で、 $\theta_m > \theta_s$  と仮定している。なお、本文で使っている湛水とは wetting front が円筒下端に達する前に浸透面が水がたまることを意味する。計算の比較量として  $\theta=0.2$  に注目した wetting front の移動、 $x=L$  に対応する空気圧変化  $p_{a,L}$ 、および  $x=0$  での水分変化  $\theta_s$  をとっている。この図の (1) の場合、両者は非常によい精度で一致しており、一方 (2) の場合、ある程度の時間まではよい精度で一致しているが、 $\theta_s$  が 0.39 程度 ( $\theta_m$  の値にほぼ一致) より  $\theta_s$ 、 $p_{a,L}$  は時間とともに離反していき、

第2次近似解の方が小さくなっている。しかし、wetting front の移動に関してはほぼ一致しているとみさせる。

ここで示さなかった  $q < [K \cdot (1-A)]_{(s)}$  の場合、直線差分解との比較を行っていないが、少なくとも



(1)  $q = 5.29 \times 10^{-3}$  cm/sec (Sand K-7).



(2)  $q = 4.21 \times 10^{-3}$  cm/sec (Sand K-7).

Fig. 2. Comparison of calculated results by eq. (33), eq. (34) and eq. (38) and finite difference method.

$\partial p_a / \partial t$ , すなわち式 (14) の  $\varepsilon$  が近似解に及ぼす影響は Fig. 2 (1) の場合に比べ小さいと考えられ問題はなかろうと推測される。

以上、若干の比較であるが、第 2 次近似解はある範囲を除外すれば、差分解との代替が可能であることがわかった。ただ、降雨強度が非常に大きくなると、近似解の空気圧は式 (14) で  $\varepsilon$  を無視しているので、その値は本来のものより小さく見積られる可能性がある。

(3) 第 2 次近似解の性質とその適用限界

以下では降雨強度を、 $0 < q \leq [K \cdot (1-A)]_{\theta}$ ,  $[K \cdot (1-A)]_{\theta} < q \leq [K \cdot (1-A)]_{\theta_m}$ ,  $[K \cdot (1-A)]_{\theta_m} < q$  の場合に分け考察する。

a.  $[K \cdot (1-A)]_{\theta} \geq q > 0$  の場合

式 (34) に注目すると、 $d\theta_s/dt \geq 0$  となることわかれるが、 $\theta_s$  が  $q = K \cdot (1-A)$  を満たす水分  $\theta_{s,\infty}$  に近づくにつれ  $d\theta_s/dt \rightarrow 0$  となるので、 $\theta_s$  が  $\theta_{s,\infty}$  になるには十分に大きな時間が必要となろう。その際、式 (33) を調べると被積分関数は  $\theta = \theta_s$  で十分に大きくなり、wetting front は十分に進んだ状態にある。そこで、このような状態の水分の移動状況を調べることにする。

いま、 $d$  を正のある値とし  $\theta < \theta_s - d$  なる wetting front の水分に注目する。そうすると、式 (35) の積分における被積分関数は  $\theta = \theta_s$  近傍で他の  $\theta$  に比べ十分大きく寄与するものと考えられ、次式で近似できる。

$$\int_0^{\theta_s} \frac{\theta}{\theta_s} \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}\}^2} d\theta \div \int_0^{\theta_s} \frac{\theta}{\theta_s} \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}\}^2} d\theta$$

$$\int_0^{\theta_s} \left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^2 \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}\}^2} d\theta \div \int_0^{\theta_s} \frac{\theta}{\theta_s} \cdot \frac{D \cdot (1-A)}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}\}^2} d\theta$$

それゆえ、上式を式 (35) に用いると次式のようになる。

$$\frac{\partial x}{\partial t} \div \frac{q}{\theta_{s,\infty}} = \frac{\{K \cdot (1-A)\}_{\theta_{s,\infty}}}{\theta_{s,\infty}} \equiv \omega_* \quad \text{ただし、} \theta < \theta_{s,\infty} - d \quad \dots\dots\dots (37)$$

この結果は、wetting front の形状が保持され、かつその伝播速度が一定になることを意味する。

つぎに間隙空気圧の変化を調べることにすると、式 (26) はいまの場合つぎのようになる。

$$p_a(\theta, t) = p_a(\theta_s, t) + \int_0^{\theta_s} \frac{A \cdot D}{K} d\theta - \int_0^{\theta_s} \frac{A \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}} d\theta \quad \dots\dots\dots (38)$$

ところで、時間経過とともに  $\theta < \theta_s - d$  の場合、上式右辺の第 3 項は前述の考察より次式のように近似できる。なお、 $A_s$  は  $A(\theta_s)$  を意味する。

$$\int_0^{\theta_s} \frac{A \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}} d\theta \div A_s \cdot \int_0^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot \frac{\theta}{\theta_s}} d\theta$$

よって、この近似式および式 (33) を式 (38) に用いると次式となる。

$$p_a(\theta, t) \div p_a(\theta_s, t) + \left[ \int_0^{\theta_s} \frac{A \cdot D}{K} d\theta - A_s \cdot x(\theta, t) \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

また、式 (37) の関係は  $t_0$  をある定数とし、 $x_0(\theta)$  を一定の wetting front の形状として次式の形に換える。

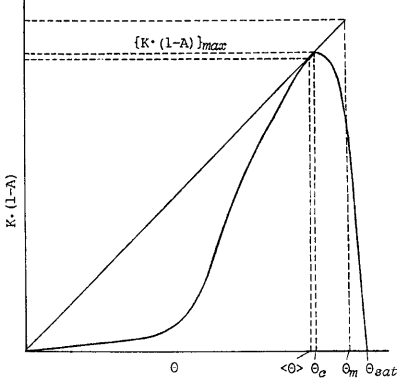


Fig. 3. Relation between  $K \cdot (1-A)$  and  $\theta$ .



$$x(\theta, t) \doteq \omega_* \cdot (t - t_0) + x_0(\theta); \theta < \theta_s - d \dots\dots\dots (40)$$

よって、この関係を式 (39) に代入すると空気圧の時間的変化がわかる。

$$p_a(\theta, t) \doteq p_a(\theta_s, t) + \left\{ \int_{\theta}^{\theta_s} \frac{A \cdot D}{K} d\theta - A_s \cdot x_0(\theta) \right\} - A_s \cdot \omega_* \cdot (t - t_0) \dots\dots\dots (41)$$

この結果は、 $p_a(\theta_s, t)$  はほぼ零と考えてよい (式 (9)) ので  $\theta < \theta_s - d$  を満す水分に注目したとき、その点の空気圧は時間経過とともに wetting front の移動あるいは経過時間と直線的な関係になり、その勾配は  $\theta$  に関係なく一定であるので、 $\omega_* \cdot (t - t_0)$  の移動座標系で空気圧分布をみたときその形状が保持されることを意味する。なお、円筒下端での空気圧は  $p_a(\theta = 0, t)$  と考えてよいので、上記の直線の変化が同様に認められることになる。

b.  $\{K \cdot (1-A)\}_{(s)} < q \leq \{K \cdot (1-A)\}_{(m)}$  の場合

Fig. 3 および式 (33) あるいは式 (34) よりすると、 $\theta_s$  は時間経過とともに  $\theta_m$  より小さな最大値  $\theta'_{s,\infty}$  に漸近することになり、その値は  $q$  によって異なったものとなる。

$$\theta'_{s,\infty} = q \cdot \theta > / \{K \cdot (1-A)\}_{(s)}$$

ところで、3.3 の結果よりすれば、 $q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合  $\theta'_{s,\infty}$  は  $q = K \cdot (1-A)$  を満す水分  $\theta_{s,\infty}$  と一致せねばならないが、いまの場合  $\theta_{s,\infty} \doteq \theta'_{s,\infty}$  となるので  $\{K \cdot (1-A)\}_{(s)} < q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合は問題が残る。しかし、 $K \cdot (1-A) \sim \theta$  の関数形よりすれば計算上は大した問題にはならないであろう。一方、 $q > \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の場合、 $\theta_s$  は 3.3 の結果より  $\theta_m$  までは増大しつづけるはずであるが、上記の  $\theta'_{s,\infty}$  は  $\theta_m$  より小さくなり問題である。結局、降雨強度が  $\{K \cdot (1-A)\}_{max} < q < \{K \cdot (1-A)\}_{(m)}$  の範囲にあるとき、時間経過とともに近似解の精度が悪くなり、計算による  $\theta_s$  は本来のものより小さくなるので、空気圧の計算値は本来のものより小さく評価されることになる。Fig. 2 (2) の降雨強度は丁度この範囲の場合であって、差分解との比較で  $\theta_s > \theta_c$  程度より  $\theta_s, p_{a,L}$  が小さく計算されたということは上記の理由から明らかである。

c.  $q > \{K \cdot (1-A)\}_{(m)}$  の場合

この場合は b. で生じた問題はなく、式 (34) からわかるように砂層表面の水分は時間経過とともに  $\theta_{sat.}$  に向い、かつそれに要する時間は有限となり、3.3 の結果と一致する。しかし、a. で述べたような特性は認められない。

以上の諸検討より、4. での実験値との比較においては、降雨強度が  $\{K \cdot (1-A)\}_{max} < q < \{K \cdot (1-A)\}_{(m)}$  で時間がある程度経過した以降の計算には注目しないものとして、第 2 次近似解を用いることにする。というのも、Fig. 2 の差分解では  $\Delta x = 1 \text{ cm}$ ,  $\Delta t = 0.25 \text{ sec}$  の格子間隔を用いたが、計算所要時間が FACOM 230-48 で (1) の場合 13 時間、(2) の場合 24 時間という莫大な計算が必要となるが、近似解の場合は差分解の 1/30 程度の時間で済むことによる。

4. 実験結果の考察

(1) 透気係数の評価

実験値と計算値とを比較する場合、まず問題となるのは計算における諸係数  $K(\theta)$ ,  $D(\theta)$ ,  $K_a(\theta)$  の決定である。 $K(\theta)$ ,  $D(\theta)$  は別の実験で求めたが、 $K_a(\theta)$  については求まっていない。そのため、以下では透気係数を次式で示したように 1 つのパラメータ  $\lambda$  をもった形式で表示できるものとし、 $\lambda$  の値は計算での円筒下端に対応する空気圧  $p_a(\theta = 0, t)$  が計測空気圧  $p_{a,L}$  と合致するように決定した。

$$K_a(\theta) = K(\theta_{sat.}) \cdot \frac{\mu_w}{\mu_a} \cdot \left(1 - \frac{\theta}{\theta_{sat.}}\right)^\lambda \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 $\mu_w$ ,  $\mu_a$  はそれぞれ水と空気の粘性係数である。その際、 $\lambda$  の値の変化によって計算値がどの程度変化するかをあらかじめ検討しておく必要がある。そこで、円筒下端に対応する空気圧の時間的変化および  $\theta = 0.2$  で代表させた wetting front の移動の様子を調べたものが Fig. 4 であり、K-7 砂で降雨強度が  $q > \{K \cdot (1-A)\}_{(s)} \cdot \theta_{sat.} / \langle \theta \rangle$  の場合である。なお、図中の空気圧の曲線上には、砂層表面での水分の時間変化を示すため  $\theta_s$  をパラメータにとった破線が示されている。ここでの  $\lambda$  の変化域は後述 (2) の  $\lambda = 1.4$

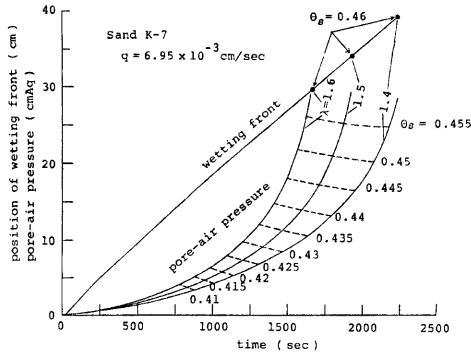


Fig. 4. Changes of wetting front and pore-air pressure due to parameter  $\lambda$ .

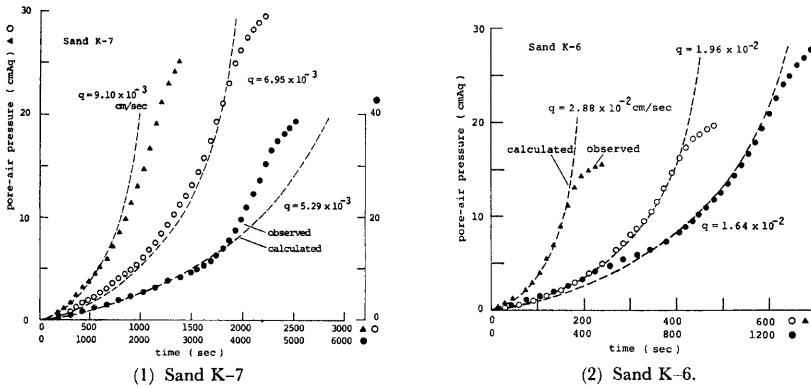


Fig. 5. Pore-air pressure at the bottom of sand layer.

~1.6 を用いた。図より空気圧については、 $\theta_s$  が 0.42 (飽和率で 91%) 程度より時間の変化が  $\lambda$  によって顕著に異ってくるが、飽和状態 ( $\theta_s = 0.46$ ) に近づくにつれ各  $\lambda$  で  $\theta_s$  が等しくなる時の空気圧はほぼ等しい値となることわかる。一方、wetting front は図中で区別できない程度に同一線上を移動し、ただ砂層表面の水分が飽和状態となる時間 (図中の黒丸に対応) が  $\lambda$  によって異ってくるという結果がえられる。

(2) 湛水が生じた場合

Fig. 5 (1), (2) は湛水が生じた直後までの実験空気圧と 4. (1) の方法で求めた計算空気圧との比較を示したものであり、それぞれ K-7 砂, K-6 砂の場合である。また、Fig. 6 (1), (2) はそれぞれ Fig. 5 (1), (2) に対応する wetting front の移動の実験と計算での比較であり、実験と計算ではよく合致していることがわかる。まず、実験空気圧で気付く点は、①実験開始時よりある時間  $\langle t \rangle$  まではほぼ  $d^2 p_{a,L} / dt^2 > 0$  の変化を示すこと、②その間のある時間  $t_r$  より空気圧は急激な増加を示すようになること、③その急増後 ( $t = \langle t \rangle$ ) に  $d^2 p_{a,L} / dt^2 = 0$  なる変曲点が現われること、である。

そこで、まず種々の降雨強度の実験において②の事実に注目し、 $t_r$  での wetting front の位置と空気圧と

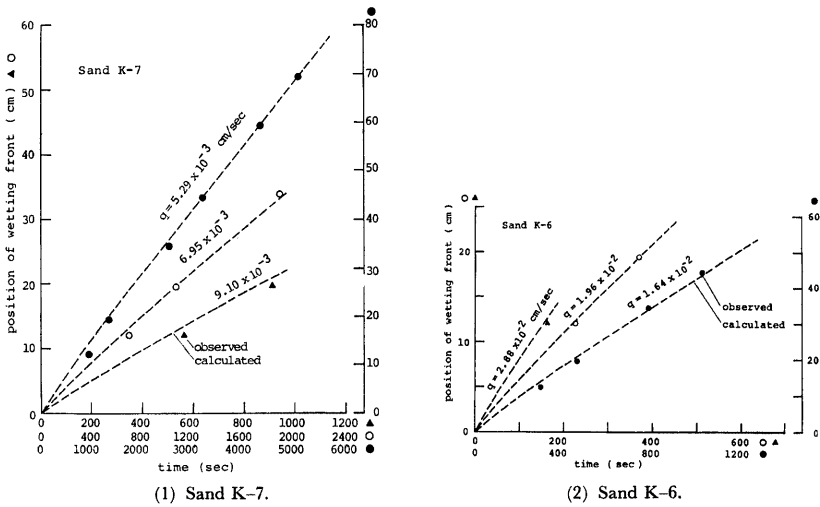


Fig. 6. Travelling of wetting front.

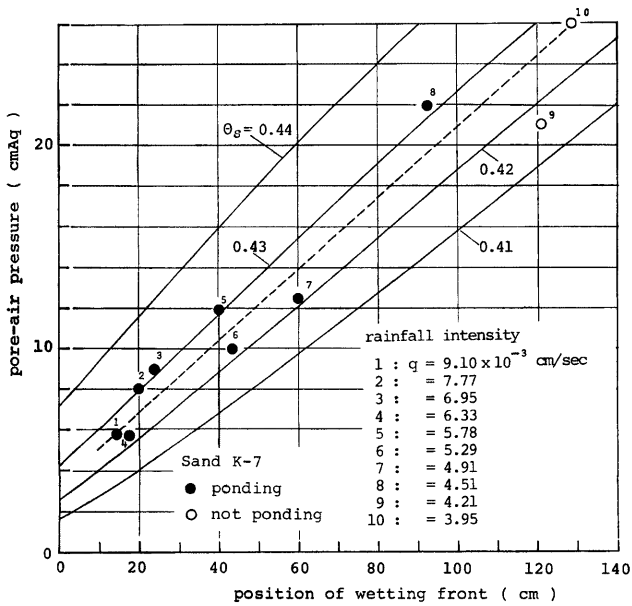


Fig. 7. Relation between pore-air pressure and position of wetting front when pore-air pressure increases abruptly.

の関係を K-7 砂の場合について示したものが Fig. 7 である。図中には実験で湛水が生じなかったが、式 (41) よりも予想できる①の特性を有した実験例 (後述の Fig. 13 (1) を参照) も同時に示してある。また、 $\theta_s$  をパラメータにとった計算値が示されているが、K-7 砂の場合での式 (42) の  $\lambda$  値はほぼ 1.4~1.6 の範囲にあり多くは 1.5 程度となったので、 $\lambda=1.5$  として計算されている。この図より、実験値は破線で示したような直線的な関係にあること、また実験値は計算値の  $\theta_s=0.42\sim 0.43$  の間にほぼあることがわかる。一方、K-7 砂に比べ粒径の大きな K-6 砂、K-5 砂の場合  $\lambda$  にかんがりのバラツキが認められたので Fig. 7 のような図は書けなかったが、実験値は K-7 砂の場合と同様な直線的関係をほぼ示し、その勾配も同程度となっていた。ここで、直線性とその勾配について調べてみる。

まず、式 (20) で  $\theta \rightarrow \delta$  ( $\delta$ : 比較的小さな一定値) としたもので wetting front を示し、その位置を  $x_f$  とおこう。そして、 $\theta_s$  を固定して  $q$  で偏微分した式および式 (26) で同様に  $q$  で偏微分した式はそれぞれ以下のとおりである。

$$\left(\frac{\partial x_f}{\partial q}\right)_{\theta_s} = -\int_{\theta_s}^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A) \cdot F}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}^2} d\theta, \quad \left(\frac{\partial p_{a,L}}{\partial q}\right)_{\theta_s} = -\int_{\theta_s}^{\theta_s} \frac{A \cdot D \cdot (1-A) \cdot F}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}^2} d\theta$$

よって、 $(\partial p_{a,L} / \partial x_f)_{\theta_s}$  は上式より次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial p_{a,L}}{\partial x_f}\right)_{\theta_s} &= \frac{\partial(p_{a,L}, \theta_s) / \partial(q, \theta_s)}{\partial(x_f, \theta_s) / \partial(q, \theta_s)} = \left(\frac{\partial p_{a,L}}{\partial q}\right)_{\theta_s} / \left(\frac{\partial x_f}{\partial q}\right)_{\theta_s} \\ &= \int_{\theta_s}^{\theta_s} \frac{A \cdot D \cdot (1-A) \cdot F}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}^2} d\theta / \int_{\theta_s}^{\theta_s} \frac{D \cdot (1-A) \cdot F}{\{K \cdot (1-A) - q \cdot F\}^2} d\theta \dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

ところで、本実験の降雨強度の範囲は  $\{K \cdot (1-A)\}_{max}$  と比べ 2 倍程度である。よって、 $F$  が第 2 次近似では  $\theta / \theta_s$  となることからの類推より、また  $D \cdot (1-A)$  が  $K \cdot (1-A)$  とほぼ等しい  $\theta$  で最大値をもち形状も類似であることを考慮すると、 $\theta_s$  が  $\theta_c$  近傍もしくは  $\theta_c$  より大きな値の場合、 $A(\theta)$  を weight とした積分項の比は  $\theta_c$  近傍で決ると大略考えてよく、ほぼ一定の  $A(\theta_c)$  となる。そこで Fig. 7 の破線の勾配を調べてみるとほぼ 0.17 cmAg/cm 程度となっているが、この値に対応する  $A(\theta)$  の  $\theta$  の値は 0.39 程度で  $\theta_c$  とほぼ一致することがわかった。なお、K-6 砂、K-5 砂の場合  $\lambda$  によって  $\theta_c, A(\theta_c)$  の値はある程度変化するが、大略同様な結果が得られ  $\theta_c$  は 0.4 程度となる。

以上の結果より、砂層表面の水分が 90% 程度の飽和状態になると空気圧は急激な増大を始め、その際の空気圧の値と wetting front の位置との変化割合はほぼ  $A(\theta_c)$  で決るといえる。なお、各砂の  $\theta_{sat}$  は 0.46 程度である。

つぎに③について調べてみるが、空気圧が変曲点を示す時間  $\langle t \rangle$  は浸透面に湛水が始まる時間にほぼ一致することが実験中の観察より認められているので、この変曲点時をもって以下湛水開始時間とする。

Fig. 8 は湛水開始時での wetting front の位置と降雨強度の関係を K-7 砂の場合について示したものであるが、同時に砂層表面の水分をパラメータにとった計算値も示されている。実験値を計算値と比較することは若干問題があるが、湛水は砂層表面の水分が非常に飽和に近い状態で生じることがわかる。この結果、Fig. 3 での  $\theta_m$  の値

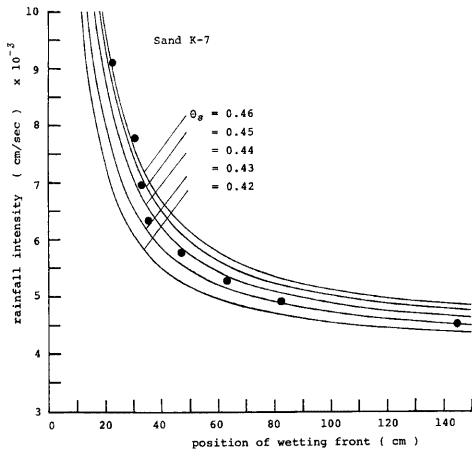


Fig. 8. Relation between position of wetting front and rainfall intensity when the ponding occurs.

は  $\theta_c$  より少なくとも大きな値であって、 $\theta_m \doteq \theta_{sat}$  と考えてよく、また Fig. 8 の実験値の降雨強度は  $q > [K \cdot (1-A)]_{max}$  の範囲にあり 3.3 での結果の妥当性を示唆するものである。なお、砂層厚の問題があるので、砂層厚が決められたとき、どの程度以上の降雨強度がなければ湛水が生じないかは Fig. 8 より大略知ることができる。

ここで、Fig. 5 で空気圧が急激な増加を始め湛水が始まる間の空気圧の挙動について調べてみる。この間での砂層表面近傍の水分は飽和に近い状態にあるので、Fig. 4 の結果を考慮すると、空気圧の時間的変化は

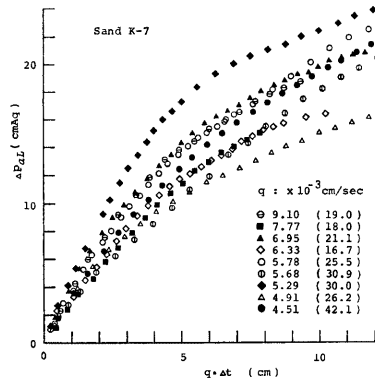


Fig. 9. Increment of pore-air pressure.  
(1) Sand K-7.

仮に同一の水分状態であっても、 $\lambda$  に影響すると考えられる空隙の分布状態、すなわち空气の逃げ道の状況によって顕著に影響を受けると予想でき、このことが必ずしもよくない実験値と計算値との合致度に反映されていると考えられる。一方、wetting front の移動に関しては空気圧の場合と異なり実験値と計算値とはよく合致していることは前述したが、このことは  $\lambda$  の変化に対して感度が低いという Fig. 4 の結果から一応の理解はできる。そこで、空気圧の挙動を、湛水開始時  $t > t_0$  とそのときの空気圧  $\langle p_{a,L} \rangle$  を座標原点にとって調べたものが Fig. 9(1), (2), (3) であって、それぞれ K-7 砂, K-6 砂, K-5 砂の場合である。ただし、ある時間  $t$  の空気圧を  $p_{a,L}$  としたとき、 $\Delta t = \langle t \rangle - t_0$ ,  $\Delta p_{a,L} = \langle p_{a,L} \rangle - p_{a,L}$  であり、また図中の ( ) 内の数値は  $\langle p_{a,L} \rangle$  の値を示すが、プロットの範囲は時間が  $t_0$  より小さな部分も含まれている。このような関係を  $\lambda$  を一定として計算す

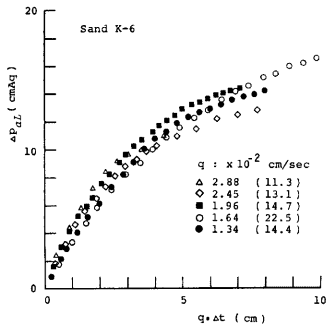


Fig. 9. (2) Sand K-6.

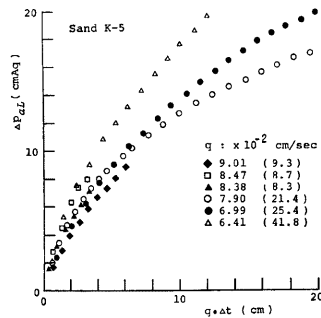


Fig. 9. (3) Sand K-5.

ると、 $q \cdot \Delta t$  が比較的小さな部分では  $q$  が大きくなると  $\Delta p_{a,L}$  は大きくなるということが認められるが、実験結果はその傾向を示さず若干の例外はあるものの大略一つの曲線として変化しているように思える。以下若干の検討を行うことにし、 $\Delta p_{a,L}$  を式 (20)、式 (26) および連続式式 (22) を用いて表わすと次式となる。

$$\Delta p_{a,L} = \int_{\theta_m}^{\theta_s} \frac{A \cdot D}{K} d\theta + q \cdot \langle t \rangle \cdot \left[ \int_0^{\theta_m} \frac{A \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F_m} d\theta - \int_0^{\theta_s} \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F_m} d\theta \right] - q \cdot \langle t \rangle \cdot \left[ \int_0^{\theta_s} \frac{A \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} d\theta - \int_0^{\theta_s} \frac{\theta \cdot D \cdot (1-A)}{K \cdot (1-A) - q \cdot F} d\theta \right] \quad (44)$$

ここに、 $F_m$  は  $\theta_s$  が  $\theta_m$  のときの  $F$  の値である。上式の  $\theta_s$  を  $\theta_c$  より大きな場合を考え、右辺第 2 項、第 3 項の積分に対し式 (43) で行った同様な近似をすると上式は次式となる。

$$\Delta p_{a,L} \sim \int_{\theta_s}^{\theta_m} \frac{A \cdot D}{K} d\theta + \frac{A(\theta_c)}{\theta_c} \cdot q \cdot \Delta t \dots\dots\dots (45)$$

ところで、 $A(\theta_c)/\theta_c \sim 0.5$  であるが、Fig. 9 (1), (2) での  $q \cdot \Delta t$  が比較的小さな領域の勾配は 0.5 よりかなり大きい値となっているので、 $\Delta p_{a,L}$  に対し order 的に第 2 項を無視することにする。K-7 砂の場合の  $t_r$  での  $\Delta p_{a,L}$  の値は、 $q = 5.29 \times 10^{-3}$ ,  $4.51 \times 10^{-3}$  cm/sec のとき 20 cm Aq 程度となるのが、他の  $q$  では 11~14 cm Aq 程度となっているので、Fig. 7 の結果を用い  $\theta_s = 0.425$  として式 (46) の第 1 項が 10 cm Aq 程度となる  $\theta_m$  を求めるとほぼ 0.45 程度となり、Fig. 8 での  $\theta_m$  とほぼ等しくなることがわかる。この結果は  $\Delta p_{a,L}$  に対する時間的経緯を無視しているの、ここで対象としているような飽和に近い状態でも基礎式式 (1)~式 (5) および境界条件式 (9) が適用可能と仮定すれば、Fig. 4 での結果、すなわち  $\lambda$  の変化に対して  $\theta_s$  を固定した場合  $p_{a,L}$  が大略一定であるということに寄因し、 $\theta_m$  がほぼ一定であることを示唆するものである。

さて、つぎに水分分布について調べてみる。Fig. 10 は  $q = 5.29 \times 10^{-3}$  cm/sec で K-7 砂の実験における水分分布の時間的変化を示したものであって、Fig. 6(1) に対応する。Fig. 11 は Fig. 10 に対応する同様な計算値であり、また Fig. 12 は水分をパラメータにとった際の伝播速度の変化を示したものであり Fig. 11 に対応する。実験において灌水が始まる時点 ( $t = 4500$  sec 程度) の砂層表面近傍の水分値は測定精度から知ることはでき

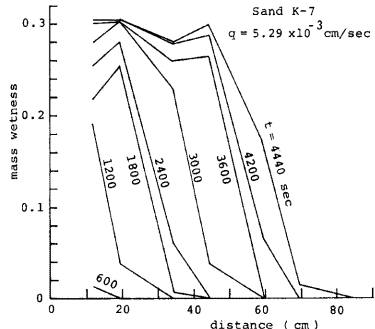


Fig. 10. Observed profiles of soil moisture.

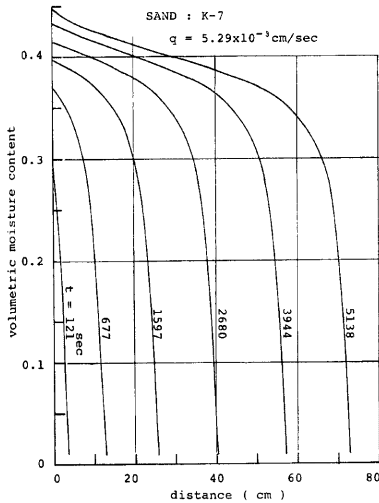


Fig. 11. Calculated profiles of soil moisture in the case of Fig. 10.

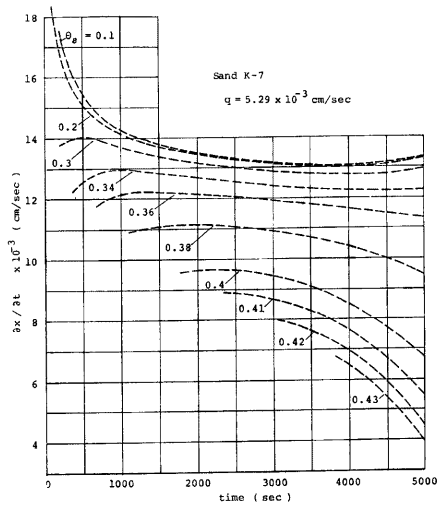


Fig. 12. Calculated travelling velocity of soil moisture, corresponding to Fig. 11.

ないが、非常に大きな値となっていることがわかり、Fig. 8 での考察を保証している。なお、mas wetness の飽和状態は0.32~0.33程度である。一方、水分分布の計算で  $t=5138 \text{ sec}$  の状態を調べると、水分の大きな部分で  $\partial^2\theta/\partial x^2=0$  となる変曲点が現われており、また伝播速度については時間とともに水分の大きな領域 ( $\theta>0.4$  程度) では小さくなり、水分の小さな領域 ( $\theta<0.36$  程度) では  $\theta$  に無関係にほぼ一定の値をとり  $\theta>0.4$  程度の場合と比べるとかなり大きいことがわかる。この結果は  $\theta<0.36$  程度で wetting front が形成されること、また  $\theta<0.36$  程度と  $\theta>0.4$  程度の領域での伝播速度の差が大きくなることによって  $0.36<\theta<0.4$  程度の領域で transmission zone が形成され発達し、水分分布に変曲点が生じる (後述の Fig. 13(2) を参照) ようになることを意味する。この特性は灌水浸透<sup>1),2)</sup> においても認められるが、その理由は  $K \cdot (1-A)$  の最大値が  $\theta_c (<\theta_{sat})$  に現われること、すなわち浸透水の流れが空気の流れと逆方向にあるためである。

(3) 灌水が生じなかった場合

Fig. 13 (1), (2) および Fig. 14 (1), (2) は灌水が生じなかった K-7 砂の場合であり、降雨強度はそれぞれ  $q=4.21 \times 10^{-3}, 3.29 \times 10^{-3} \text{ cm/sec}$  である。そして、Fig. 13 (1), Fig. 14 (1) は空気圧の時間的変化と wetting front の移動の様子を示しており、計算値も同時に示されている。また、Fig. 13 (2), Fig. 14 (2) は水分分布の時間的変化を示したものである。まず実験値で気付く点はずきのようなことである。すなわち、空気圧については Fig. 13 の場合  $d^2p_{a,L}/dt^2 > 0$  となっているが、Fig. 14 の場合  $dp_{a,L}/dt = \text{const.}$  となっている。また水分分布は Fig. 13 の場合、砂層表面近傍の水分は時間とともに増加をつづき最終的には非常に大きな値となっており、形状については  $\partial\theta/\partial x < 0$  で Fig. 11, Fig. 12 で述べた  $\partial^2\theta/\partial x^2=0$  なる

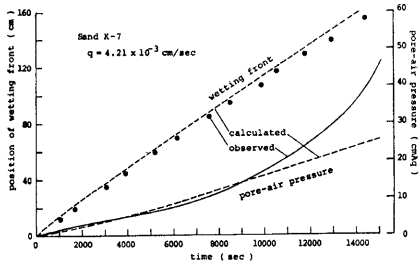


Fig. 13. (1) Position of wetting front and pore-air pressure.

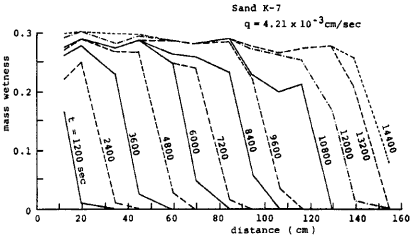


Fig. 13. (2) Observed profiles of soil moisture.

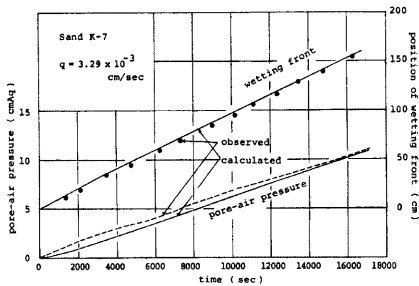


Fig. 14. (1) Position of wetting front and pore-air pressure.

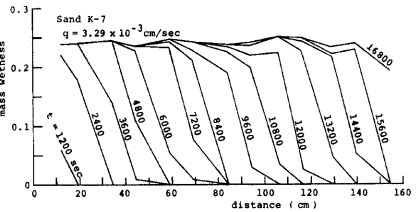


Fig. 14. (2) Observed profiles of soil moisture.

変曲点が認められ、その近傍の水分に対し transmission zone が形成・発達していることがわかる。Fig. 14 の場合は砂層表面近傍の水分は比較的早く一定値となっており、形状は wetting front の部分を除くと  $\partial\theta/\partial x \neq 0$  の状態にある。ところで、実験で湛水が生じなかった場合には、砂層厚の関係で生じなかった場合と砂層厚に無関係に生じなかった場合とがある。Fig. 13 の場合の空気圧変化と水分分布形は (2) での湛水が生じた場合と類似であり、一方 Fig. 14 の場合の空気圧、水分分布形および wetting front の移動は 3.4 で述べた  $q < \{K \cdot (1-A)\}_{\theta_c}$  の場合の式 (41)、式 (40) の結果と一致している。このことより降雨強度と  $\{K \cdot (1-A)\}_{max}$  との関係は、 $4.21 \times 10^{-3} > \{K \cdot (1-A)\}_{max} > 3.29 \times 10^{-3}$  となることが結論される。ちなみに  $\lambda = 1.5$  として  $\{K \cdot (1-A)\}_{max}$  の値を調べてみると  $3.9 \times 10^{-3}$  cm/sec となり上記の不等号の妥当性がわかる。なお、Fig. 13 (1) の計算空気圧は時間経過とともに実験値と傾向を異にしているが、この場合の降雨強度は  $\{K \cdot (1-A)\}_{max} < q < \{K \cdot (1-A)\}_{\theta_{sat}}$  の範囲にあるため、3.4 (3) b. で述べた問題が生じたためと考えられる。

ここで参考のため  $q < \{K \cdot (1-A)\}_{max}$  と考えられる K-6 砂の場合の実験例を Fig. 15 に示しておく。計算値との比較は行わなかったが、K-7 砂の場合の Fig. 14 (1) と同様な特性が認められる。

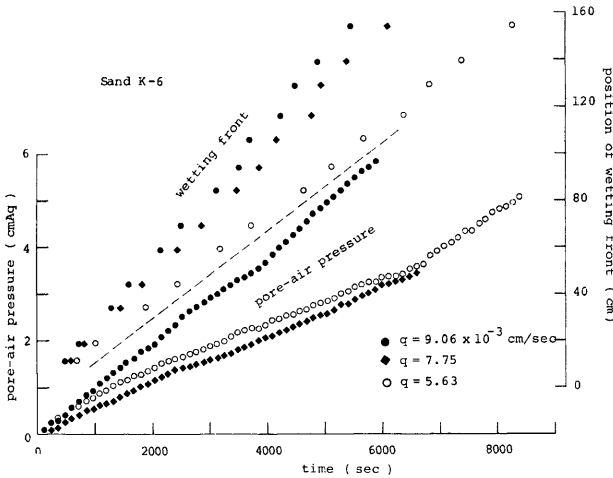


Fig. 15. Observed position of wetting front and pore-air pressure.

さて、Fig. 14 での特徴特性を利用すると、以下のように  $\theta < \theta_c$  の範囲の透気係数が求まる。すなわち、時間経過とともに式 (37) より  $q = K \cdot (1-A)$  が成立するので、これより  $K = K_a \cdot q / (K_a - q)$  と書き換えられる。なお、簡単のため添字  $\theta_s$  を省略している。そこで、式 (41) で示した関係  $dp_{a,L}/dt = A \cdot \omega_* = K \cdot \omega_* / (K + K_a)$  に上記の K の式を代入すると、実験定数を用いて  $K_a$  をつぎのように表わすことができる。

$$\theta = q/\omega_* \text{ に対して、 } K_a(\theta) = \omega_* \cdot q / \frac{dp_{a,L}}{dt} \dots\dots\dots (46)$$

この結果を K-7 砂の Fig. 14 について適用してみる。この場合  $q = 3.29 \times 10^{-3}$  cm/sec であるが、 $\omega_*$ 、 $dp_{a,L}/dt$  の値は図よりそれぞれ  $9.48 \times 10^{-3}$  cm/sec、 $6.17 \times 10^{-4}$  cm Ag/sec となるので、 $\theta = 0.347$ 、 $K_a = 5.05 \times 10^{-2}$  cm/sec が求まる。なお、この  $\theta$ 、 $K_a$  の値を式 (42) に代入して  $\lambda$  の値を求めると 1.4 となることがわかる。



## 5. む す び

下端を閉じた砂層への一定強度の降雨浸透について、実験を行ない検討を加えた。その結果、つぎのことが明らかになった。

1) 降雨強度  $q$  が  $k = K_a \cdot K / (K + K_a)$  の最大値  $k_m$  より少なくとも大ききとき、湛水の可能性がある。そして、この  $k_m$  の値は、浸透において空気の流れの影響を無視した従来の不飽和浸透理論で決る湛水生成条件<sup>5)</sup>  $q > K(\theta_{sat})$  での  $K(\theta_{sat})$  の値より小さく、 $K(\theta_{sat})$  の0.5~0.6程度低下する。

2)  $q < k_m$  の場合、時間経過とともに砂層表面の水分は  $q = K \cdot (1 - A)$  を満す水分  $\theta_{s,\infty}$  に漸近し、wetting front はその水分をほぼ最大値とし形状を保持して一定速度  $q/\theta_{s,\infty}$  で移動するようになる。その際の円筒下端での空気圧  $p_{a,L}$  はほぼ  $\{K/(K + K_a)\}_{\theta_{s,\infty}} \cdot q/\theta_{s,\infty}$  なる一定割合で増加する。

3)  $q > k_m$  の場合、円筒下端での空気圧は  $d^2 p_{a,L} / dt^2 > 0$  なる変化を示し、砂層表面の水分量が90%飽和程度になると急激な増大を始める。そして、その後湛水が始まる時点にほぼ対応して空気圧は変曲点  $d^2 p_{a,L} / dt^2 = 0$  を示すが、その際の砂層表面の水分はほぼ飽和に近い状態にある。

しかしながら、湛水が生起する直前の機構には不明な点もあり、湛水生成後の湛水浸透への移行過程を含めて今後現象の解明に努めたい。

最後に、本研究を進めるにあたり実験とその整理に助力いただいた当時京都大学院生の時松昌則君（現在、岡山県に勤務）、並びに差分計算に関し甚大な援助をいただいた京都大学防災研究所の早瀬吉雄氏に感謝の意を表します。なお、計算は京都大学化学研究所の FACOM 230-48 を使用した。

## 参 考 文 献

- 1) 石原安雄・下島栄一：閉塞単一砂層への雨水浸透に関する研究，京都大学防災研究所年報，第19号 B，1976，pp. 99-122.
- 2) 石原安雄・下島栄一：閉塞浸透機構に関する研究（2），京都大学防災研究所年報，第22号 B-2，1979，pp. 271-289.
- 3) 石原安雄・下島栄一：閉塞浸透における不飽和域の解析，京都大学防災研究所年報，第21号 B-2，1978，pp. 173-191.
- 4) Philip, J. R. and J. H. Knight: On solving the unsaturated flow equations: 3, New quasi-analytical technique, Soil Sci., Vol. 117, 1974, pp. 1-13.
- 5) Parlange, J. Y.: Theory of water movement in soils: 8, one-dimensional infiltration with constant flux at the surface, Soil Sci., Vol. 114, 1972, pp. 1-4.