

時系列理論による強震動のシミュレーション

土岐 憲三・佐藤 忠信・江尻 譲嗣

SIMULATION OF STRONG MOTION SEISMOGRAMS BY AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE PROCESS

By *Kenzo TOKI, Tadanobu SATO and Joji EJIRI*

Synopsis

This paper is concerned with procedures of synthesizing strong motion accelerograms, in which the earthquake motion is modeled as a nonstationary second order autoregressive moving average (AR-MA) process. Multi-dimensional AR-MA process is defined and the identification procedure is also developed for the case when the linear filter is excited by multi-dimensional non-stationary white noise. The filtering characteristics such as the natural frequency and damping factor of multi-dimensional system are detected by using recorded accelerograms. Using the simple time functions to model the filtering characteristics, the strong earthquake motions are simulated and compared with the recorded one with the aid of power spectra.

1. ま え が き

本研究は、強震地動のシミュレーション手法について述べたものである。地震動を模擬するには大きく分けて2つの方法がある。1つは、地震の発生機構を忠実に表現できる断層モデルを用いるものである。この解析では数十秒という長周期の地震動の再現に関してはかなりの精度を有することが明らかにされ、さらに、短周期の地震動を再現するために断層の詳細なモデル化が行なわれるようになって来ている。しかし、土木構造物の耐震設計で問題になる数秒以下0.1秒程度までの周波数成分を含む地震動を再現する場合には、ramp functionの選定、断層面上の破壊面の拡大速度、破壊過程の不規則性などの情報が不足していること、さらに地質の不規則性を考慮できるような簡単な弾性特異解を求めることが困難なことなどが原因となって、精度の良いシミュレーションは行なわれていない。

第2の方法は、これまでで得られた強震記録を用いて、地震動の波形の特性を抽出し、それを基にして地震動のシミュレーションを行なおうとするものである。このためには、まず実地震動の非正常スペクトルを計算し、その一般的な特性を把握しておかなければならない。非正常不規則過程のスペクトル解析理論には数多くの手法¹⁻⁴⁾が提案されているが、定義の一般性・結果の解釈・適用範囲のすべての点で満足できる非正常スペクトル理論はないため、解析の対象とする問題ごとに使いやすい新しいスペクトル解析法が提案⁵⁾されているのが現状である。しかしながら、これまでに提案されているいずれの手法を用いても、ある程度まで適確にスペクトルの非正常性が抽出できるので、この結果をモデル化することにより地震動のシミュレーションが行なわれている。こうした観点から、これまでの研究を大別すると2つに分けることができる。すなわち、非正常スペクトルをモデル化する場合に、その振動数軸上の変化に主眼を置くもの⁶⁻⁸⁾と時間軸上の変化に着目するもの⁹⁾に分けられる。

ここでは、自動制御の分野で良く用いられている時系列の中の自己回帰・移動平均過程を用いて、地震動の非正常特性を抽出し、その結果に基づいて地震動をシミュレートする。時系列の次数を高くすればするほど、地震動の詳細なスペクトル構造が再現されるが、モデル化という立場に立つと次数はなるべく低い方が

良い、したがって理論の展開では一般の多次元過程について述べるが、実際の数値計算では 2 次の自己回帰・移動平均過程を用いた。これは、地震動を非定常白色雑音が入力する 1 自由度系の応答値と仮定することに相当するので、地震動の特性を規定することになるが、フィルター特性を規定する変数が少なくすむため、地震動のシミュレーションが比較的簡単にできるという利点がある。

まず、時系列理論の概略を説明した後、フィルター特性の同定法について述べ、3 種類の方法により地震動をシミュレートし、その結果について比較検討する。

2. 非定常時系列の概念

地震動のシミュレーションを行なう際に用いる時系列は主として 1 次元入力を受ける場合のもので、その次数は 2 次のものであるが、ここでは、多次元入力を受けるフィルターに関する一般的な説明を行なう。入力が 1 次元の場合についてはすでに報告⁽¹⁾してあるが、今回定義する時系列は、これをさらに一般化したものである。

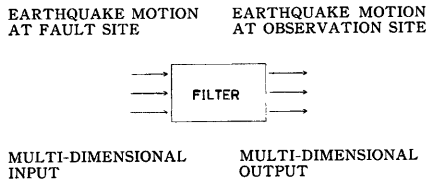


Fig. 1. Filtering system of earthquake motions.

いま、Fig. 1 に示すように、震源から観測点までの波動の伝播経路を 1 種の多次元フィルターとみなし、震源において発生する地震動が N 次元の成分を持ったものと考えベクトル E_i で表わす。さらに、地震動観測地点において地震動の N 成分（実際的には上下、水平 2 成分で合計 3 成分となる）が観測され、 Y_i で与えられるものとする。さらに、フィルターを有限長とすれば、 q 次の N 次元移動平均過程 $MA(q)$ が次式のように定義される。

$$Y_i = E_i + H_1(t)E_{i-1} + H_2(t)E_{i-2} + \dots + H_q(t)E_{i-q} \dots\dots\dots (1)$$

つきに、式 (1) を E_i に関して逆変換した形式を考え、有限長のフィルターを扱うことにすれば、次式のような p 次の N 次元自己回帰過程 $AR(p)$ が定義できる。

$$Y_i = -A_1(t)Y_{i-1} - A_2(t)Y_{i-2} - \dots - A_p(t)Y_{i-p} + E_i \dots\dots\dots (2)$$

また、両者を重ね合わせた過程として、 (p, q) 次の自己回帰移動平均過程 $AR \cdot MA(p, q)$ が次のように定義できる。

$$Y_i = -a_1(t)Y_{i-1} - \dots - a_p Y_{i-p} + E_i + \beta_1(t)E_{i-1} + \dots + \beta_q(t)E_{i-q} \dots\dots\dots (3)$$

式 (1) ~ (3) は定常過程における定義式と形式的に同形であるが、係数 $H_i(t)$, $A_i(t)$, $a_i(t)$, $\beta_i(t)$ ($i=1, 2, \dots, p$ or q) が時刻 t の関数になっている点が定常過程の場合とは異っている。このように時刻とともに係数値が変化する過程を合理的に推定することは容易ではない。そこで、出力値に長方形ウィンドウを乗じて求めたデータ列に定常時系列理論を適用し、時系列の係数を求め、これをウィンドウ中央点における非定常時系列の推定値として採用した。

3. 多次元定常時系列の推定

上述の非定常時系列の係数を決定するためには、定常時系列の推定法が必要になるので、以下にそれを述べる。定常時系列では、式 (1) ~ (3) に現われる係数は定数になるので、これを各々 H_i , A_i , a_i , β_i と表わすことにする。また、入力のデータ列 E_i は白色雑音と仮定される。

AR 過程の係数の推定：1 次元 AR 過程の係数を推定するのに最も良く用いられる方法は Yule-Walker の方程式⁽¹⁾を直接解く方法である。ここでは、多次元の AR 過程の推定法について考察を加える。定常過程に書きなおした式 (2) の右方から Y_{i-1}^T を乗じ、そのアンサンブル平均を取ると次式をうる。

$$\rho_i = -A_1 \rho_{i-1} - A_2 \rho_{i-2} - \dots - A_p \rho_{i-p} \dots\dots\dots (4)$$

式 (4) を誘導するに当り、入力 E_i は白色雑音と仮定してあるので、 $E(Y_{i-1}E_i) = 0$ ($i > 0$) の関係を用い

ている。式(4)に現われる ρ_k ($k=1, 2, \dots, p$) はデータのエルゴード性を仮定すれば、地震動の観測データから求められる自己相関関数ならびに相互相関関数からなるマトリックスで、 k は時間のずれを表わす指標であり、以下のように表わされる。

$$\rho_k = \begin{bmatrix} \rho_{11}(k) & \rho_{12}(k) & \cdots & \rho_{1N}(k) \\ \rho_{21}(k) & \rho_{22}(k) & \cdots & \rho_{2N}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{N1}(k) & \rho_{N2}(k) & \cdots & \rho_{NN}(k) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

なお、マトリックスの各要素は次式で与えられる。

$$\rho_{ij}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-|k|} \{y_i(t+k) - m_i\} \{y_j(t) - m_j\} \dots\dots\dots (6)$$

$$m_j = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n y_j(t) \dots\dots\dots (7)$$

式(4)の i に対し、 $i=1, 2, 3, \dots, p+1$ を代入することにより、多次元過程に対する Yule-Walker の連立方程式が誘導される。式(5)は出力データから計算できるから、 $N \times N \times (p-1)$ 個の連立方程式を解くことにより、AR 過程の係数の推定値が求められる。

また、入力として仮定した白色雑音の分散の推定値 σ^2 は、式(2)の両辺に \mathbf{Y}_i^T を乗じアンサンブル平均を取ることで次式で与えられる。

$$\sigma^2 = \rho_0 + \mathbf{A}_1 \rho_1 + \mathbf{A}_2 \rho_2 + \cdots + \mathbf{A}_p \rho_p \dots\dots\dots (8)$$

ここに

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \cdots & \sigma_{NN} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

さらに、Yule-Walker の方程式を解くために Durbin¹²⁾ により提案された手法を、多次元 AR 過程に適用すると次式をうる。この式を用いることにより任意の次数 p における係数の推定値 $\hat{\mathbf{A}}_{pi}$ が行列計算を行わずに求められる。

$$\hat{\mathbf{A}}_{p+1, i} = \hat{\mathbf{A}}_{p, i} + \hat{\mathbf{A}}_{p+1, p+1} \hat{\mathbf{A}}_{p, p-i+1} \dots\dots\dots (10)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_{p+1, p+1} = \frac{-\rho_{p+1} - \sum_{i=1}^p \hat{\mathbf{A}}_{pi} \rho_{p+1-i}}{\hat{\sigma}_p^2} \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 $\hat{\mathbf{A}}_{pi}$ と $\hat{\sigma}_p$ は各々 AR(p) 過程の i 番目の係数ならびに入力の分散の推定値である。 $\hat{\sigma}_p$ は次式で与えられる。

$$\hat{\sigma}_p = \rho_0 + \hat{\mathbf{A}}_{p1} \rho_1 + \hat{\mathbf{A}}_{p2} \rho_2 + \cdots + \hat{\mathbf{A}}_{pp} \rho_p \dots\dots\dots (12)$$

なお、自己回帰過程の最適次数 M を決定するためには、赤池¹³⁾ の提案した手法を用いている。

MA 過程と AR 過程の関係：定常過程に書きなおした時の式(1)に式(2)を代入すると、次式のような漸化式を得る。これを順次解くことにより MA 過程の係数 \mathbf{H}_j が推定できる。

$$\mathbf{H}_j = - \sum_{l=1}^j \mathbf{A}_l \mathbf{H}_{j-l} \quad (j=1, 2, \dots) \dots\dots\dots (13)$$

AR・MA 過程の推定：定常過程に書きなおした時の式(3)において、 p および q をそれぞれ $2n$ としたとき、すなわち AR・MA($2n, 2n$) 過程の係数を推定するために、Gersh¹⁴⁾ が提案した 2 段階最小 2 乗法を用いる。時刻 $t=2n+1, 2n+2, \dots, 2n+L$ における L 組の出力データ列ベクトル $\mathbf{Y}_{2n+1}, \mathbf{Y}_{2n+2}, \dots, \mathbf{Y}_{2n+L}$ が与えられたとすると、次式をうる。

$$\mathbf{Z} = \theta \mathbf{X} + \mathbf{U} \dots\dots\dots (14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} Z &= [Y_{2n+1}, Y_{2n+2}, Y_{2n+3}, \dots, Y_{2n+L}] \\ U &= [E_{2n+1}, E_{2n+2}, E_{2n+3}, \dots, E_{2n+L}] \\ \theta &= [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2n}] \\ X &= \begin{bmatrix} -Y_{2n} & -Y_{2n+1} & \dots & -Y_{2n+L-1} \\ -Y_1 & -Y_2 & \dots & -Y_L \\ E_{2n} & E_{2n+1} & \dots & E_{2n+L-1} \\ E_1 & E_2 & \dots & E_L \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (15)$$

式 (14) の右辺から X^T を乗じ、両辺の期待値を取ると θ の期待値 $\hat{\theta}$ として次式をうる。

$$\hat{\theta} = [XX^T]^{-1} [ZX^T] \dots \dots \dots (16)$$

この式を誘導するに当り、入力を白色雑音と仮定して得られる次式の性質が必要である。

$$E(UU^T) = \sigma^2 \quad E(U) = 0 \dots \dots \dots (17)$$

なお、式 (16) に現われる $[XX^T]$ $[ZX^T]$ の具体的な表現は次式で与えられる。

$$[XX^T] = \begin{bmatrix} R_{YY}(0) & R_{YY}(1) & \dots & R_{YY}(2n-1) - R_{YE}(0) & -R_{YE}(1) & \dots & -R_{YE}(2n-1) \\ R_{YY}(1) & R_{YY}(0) & \dots & R_{YY}(2n-2) - R_{YE}(-1) & -R_{YE}(0) & \dots & -R_{YE}(2n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{YY}(2n-1) & R_{YY}(2n-2) & \dots & R_{YY}(0) & -R_{YE}(1-2n) - R_{YE}(2-2n) & \dots & -R_{YE}(0) \\ -R_{EY}(0) & -R_{EY}(1) & \dots & -R_{EY}(2n-1) & R_{EE}(0) & R_{EE}(1) & \dots & R_{EE}(2n-1) \\ -R_{EY}(-1) & -R_{EY}(0) & \dots & -R_{EY}(2n-2) & R_{EE}(1) & R_{EE}(0) & \dots & R_{EE}(2n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -R_{EY}(1-2n) - R_{EY}(2-2n) & \dots & -R_{EY}(0) & R_{EE}(2n-1) & R_{EE}(2n-2) & \dots & R_{EE}(0) \end{bmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

$$[ZX^T] = [-R_{YY}(1) \quad -R_{YY}(2) \dots -R_{YY}(2n) \quad R_{YE}(1) \quad R_{YE}(2) \dots R_{YE}(2n)] \dots \dots \dots (19)$$

$R_{YY}(k)$, $R_{EY}(k)$, $R_{YE}(k)$, $R_{EE}(k)$ の内容は、入力および出力の自己共分散および相互共分散マトリックスであり、これらは入力が白色雑音であることを考慮すれば次式のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_{YY}(k) &= E(Y_{t+k} Y_t^T) & R_{EY}(k) &= E(E_{t+k} Y_t^T) = R_{YE}(-k) \\ R_{YE}(k) &= E(Y_t E_{t+k}^T) = E\left(\sum_{j=1}^k H_j E_{t-j} E_{t-k}^T\right) & R_{EE}(k) &= E(E_{t+k} E_t^T) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

式 (20) の第 3 式を具体的に計算し $H_{-k} = 0$ ($k > 0$) であることを考慮すれば次式をうる。

$$R_{YE}(k) = \begin{cases} H_k \sigma^2 & (k \geq 0) \\ 0 & (k < 0) \end{cases} \dots \dots \dots (21)$$

$$R_{EY}(k) = \begin{cases} \sigma^2 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \dots \dots \dots (22)$$

$$R_{EE}(k) = \begin{cases} \sigma^2 & (k=0) \\ 0 & (k \neq 0) \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

4. フィルター特性の同定

自由度 n の線形系が白色雑音の外力を受けている場合の運動方程式は次式で与えられる。

$$M\ddot{Z} + C\dot{Z} + KZ = F \dots \dots \dots (24)$$

式 (24) の状態方程式は次式で与えられて

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS(t)}{dt} &= AS(t) + BF(t) \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} 0 \\ M^{-1} \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (25)$$

ここに、 S は $2n$ 次元のベクトルである。

ここでは、入力次元が N 次元で、出力次元が N 次元のフィルタ特性を同定することが問題になっているわけであるから、観測方程式として次式のものを考えなければならない。すなわち、観測データ行列を \mathbf{Y} (N 次元ベクトル) とすれば

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 \mathbf{C} は $N \times 2n$ のマトリックスである。式 (26) は観測値 \mathbf{Y} が実際の応答値の重みつき平均値で与えられ、重みを与えるのがマトリックス \mathbf{C} であることを意味している。

式 (25) をサンプリング時間間隔 T_s について積分し、状態推移方程式を求めると次式となる。

$$\mathbf{S}_{t+1} = \Phi\mathbf{S}_t + \mathbf{D}\mathbf{U}_t \quad \dots\dots\dots (27)$$

この場合、観測方程式は次式で与えられる。

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{Y}(tT_s) = \mathbf{C}\mathbf{S}_t \quad \dots\dots\dots (28)$$

式 (27), (28) は Lee¹⁵⁾ が提案したのと同様な式 (29) で与えられる変換マトリックス \mathbf{L} を用いることにより、式 (30) に示されるような標準形に変換できる。

$$\mathbf{X}_t = \mathbf{L}\mathbf{S}_t \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\Phi \\ \vdots \\ \mathbf{C}\Phi^{m-1} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (29)$$

$$\mathbf{X}_{t+1} = \Phi^* \mathbf{X}_t + \mathbf{C}^* \mathbf{U}_t \quad \mathbf{Y}_t = \mathbf{C}^* \mathbf{X}_t \quad \dots\dots\dots (30)$$

$$\Phi^* = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\alpha_{2m} & -\alpha_{2m-1} \dots -\alpha_1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix}}^{N \text{ 個}} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{2n \text{ 個}} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (31)$$

ただし、 m は $2m \times N = 2n$ を満たすように選ばれていなければならない。

一方、式 (3) で表わされる $AR \cdot MA(2m, 2m)$ 過程も、1 次元入力の場合に用いた方法と同様な手法¹⁰⁾ により式 (30), (31) の標準形に変換できるので、 N 次元入力を受ける自由度 n の線形系の応答は $AR \cdot MA(2m, 2m)$ 過程で表現できることが証明される。

いま、式 (31) で与えられる Φ^* の固有値を λ とすれば、これは次式で表わされる。

$$\mathbf{I}\lambda^{2m} + \alpha_1 \lambda^{2m-1} + \dots + \alpha_{2m} = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

$\alpha_i (i=1, 2, \dots, 2m)$ の次元は $N \times N$ であるから、式 (32) から $2n = 2m \times N$ 個の固有値が得られる。普通は n 組の共役複素根となる。この固有値と線形系の動特性との間には、以下に述べるような関係があるので、線形系のフィルタ特性が同定できることになる。すなわち、 Φ^* と Φ の固有値が一致し、 Φ の固有値は AT_s の固有値の指数乗になることに着目し、 AT_s の固有値をまず求める。これは次式によって与えられる。

$$\mathbf{I}\mu^2 + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}T_s\mu + \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}T_s^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

μ は一般に共役複素数になっているので、いま j 次モードに対応する値を μ_j, μ_j^* とすれば、これに対応する λ_j ならびに λ_j^* が次式のように与えられる。

$$\lambda_j = \exp(\mu_j) \quad \lambda_j^* = \exp(\mu_j^*) \quad \dots\dots\dots (34)$$

さらに、 μ_j と μ_j^* は j 次モードの固有円振動数 ω_j と減衰定数 h_j とによって次式のように表わされる。

$$\left. \begin{matrix} \mu_j \\ \mu_j^* \end{matrix} \right\} = -\omega_j h_j T_s \pm i \omega_j T_s \sqrt{1 - h_j^2} \quad \dots\dots\dots (35)$$

5. 1 次元入力の場合の地震動シミュレーション

5.1 直接法によるシミュレーション

ここでは、 $N=1, n=1$ の場合の理論を用いて地震動の入力特性とフィルタ特性を抽出し、これを用い

て地震動のシミュレーションを行なう。解析に用いた地震記録は El Centro (1940) の3成分である。2節で述べたように、非常定時系列に長方形ウィンドウを乗じ、このデータ列に3節で述べた定常時系列理論を用いて、非定常フィルター特性を抽出しているわけであるから、まずウィンドウ長がシミュレーション結果に及ぼす影響について考察を加える。ここでは、El Centro の記録 (Fig. 2) を用い、ウィンドウ長を1, 3, 5秒とし、 $T_s=0.02$ 秒とした時、0.02秒ごとにフィルター特性を推定し、この値を直接式(3)に代入し、地震動を再現した。Figs. 3, 4, 5 は各々ウィンドウ長を変化させた場合の再現波を示している。Fig. 2 の記録波形と比較すると再現波はウィンドウ長によらず、各成分とも全体的に、加速度振幅は小さくなる。しかし、原波形の2秒付近のピーク、ならびに水平成分の12秒付近に表われるやや長周期の波形も良く再現されていると思われる。しかし、加速度振幅の絶対最大値が出現する時刻はウィンドウ長が長くなるとかなり異なるよう

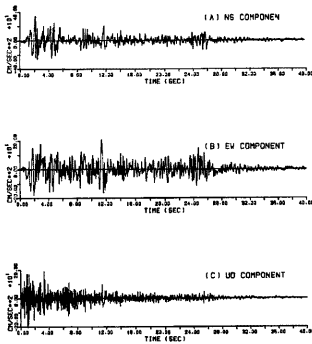


Fig. 2. Accelerograms recorded at El Centro (1940).

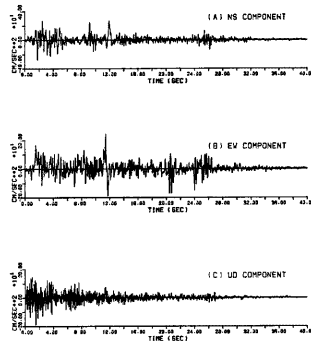


Fig. 3. Synthesized accelerograms by one dimensional $AR-MA(2, 2)$ process (Window length: 1 sec).

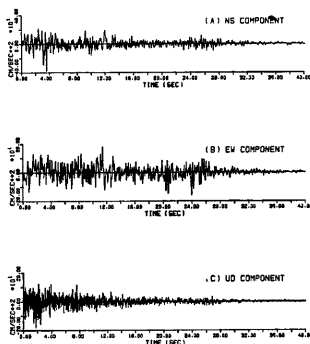


Fig. 4. Synthesized accelerograms by one dimensional $AR-MA(2, 2)$ process (Window length: 3 sec).

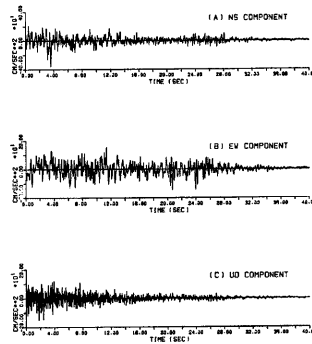


Fig. 5. Synthesized accelerograms by one dimensional $AR-MA(2, 2)$ process (Window length: 5 sec).

である。ウィンドウ長を短かくすればするほど、地震動の非定常構造が詳細に推定できるわけであるが、データ解析上データ数、フィルターの固有振動数ならびにサンプリング時間間隔の積を大きくすることも必要な条件となる。¹⁶⁾ こういった観点からウィンドウ長として1~3秒程度の値を用いるのが適当であろうと考えられる。また、フィルター特性を推定する時に必要となるAR過程の最適次数はウィンドウ長が長くなるにつれて増加するが、ウィンドウ長を固定すれば、地震の継続時間中ほぼ一定で、ウィンドウ長を1秒とした場合を例にとると、その次数は2あるいは3となる。

再現波の周波数特性を調べるために、実地震動と再現波（ウィンドウ長：1秒）のパワースペクトルをFigs. 6, 7に示した。水平成分の再現波は0~12 Hzの周波数成分が卓越している。この傾向は実地震動の周波数特性によく一致しているが、再現波では低周波成分の強度が他の周波数領域に比べて大きい。また、再現波のスペクトルのピーク強度は実地震動のそれに比べかなり小さい値を示す。これは、時系列の係数が自己相関関数に基づいて推定されているため、再現波では周波数領域における局所的な変動は平滑化され、地震動の全パワーならびにスペクトルの全体的な傾向が表現されているためである。鉛直成分に関しては再現波と実地震動のスペクトル特性はほぼ一致していると考えてよい。

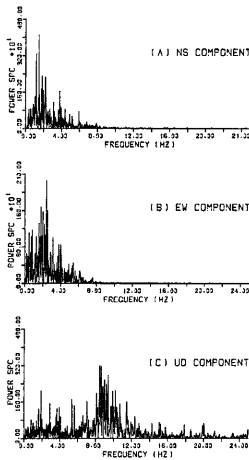


Fig. 6. Power spectra of recorded accelerograms at El Centro (1940).

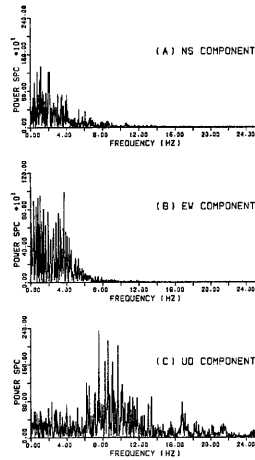


Fig. 7. Power spectra of synthesized accelerograms by one dimensional AR·MA(2, 2) process (Window length: 1 sec).

5.2 設定関数法によるシミュレーション

まず、1次元AR·MA(2, 2)過程を用い、フィルターの非定常特性すなわち1自由度系の固有振動数ならびに減衰定数を推定する。Figs. 8, 9, 10は解析に使用したEl Centro(1940)の加速度記録のNS, EW, UD成分に対応するフィルター特性が示されている。解析に用いたウィンドウ長はいずれも1秒である。図中の不規則な実線がAR·MA過程によって推定された入力の分散(A)、固有振動数(B)、減衰定数(C)である。なお、1秒間隔のマークを結んだ実線は各々の時間的変動を近似したもので、次式によって表現されている。

$$g(t) = a + b \left(\frac{t}{t_p} \right) \exp \left(1 - \frac{t}{t_p} \right) \dots \dots \dots (36)$$

ここに、 a は時刻 $t=0$ における関数値、 t_p は関数値の最大値あるいは最小値が発生する時刻を示している。

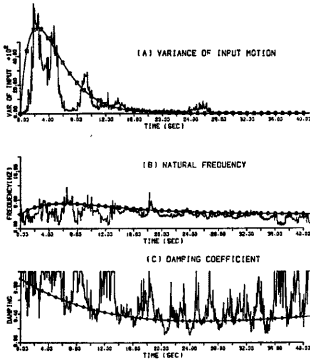


Fig. 8. Filtering characteristics of El Centro (1940) record (NS component).

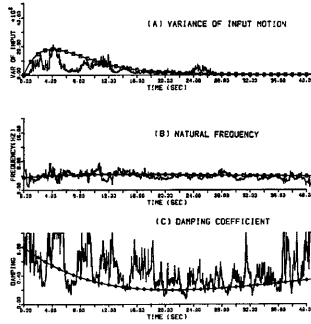


Fig. 9. Filtering characteristics of El Centro (1940) record (EW component).

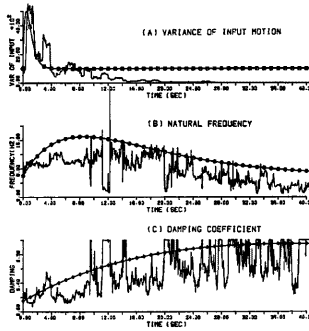


Fig. 10. Filtering characteristics of El Centro (1940) record (UD component).

以下に、この近似関数で表わされたフィルタ特性を用いて、逆に AR・MA (2, 2) 過程の係数を推定し、地震動のシミュレーションを行なう。このためには、以下の考察が必要である。1 次元 AR・MA (2, 2) 過程は式 (3) を書きなおすことにより次式のように表わされる。

$$y_t = -\alpha_1 y_{t-1} - \alpha_2 y_{t-2} + E_t + \beta_1 E_{t-1} + \beta_2 E_{t-2} \dots (37)$$

式 (37) の両辺に $y_{t-i} (i=1, 2)$ を乗じ、両辺のアンサンブル平均を取り式 (17), (21), (22) の関係を用いれば、 $\beta_i (i=1, 2)$ は α_i 、自己相関関数 $\rho_y(k)$ ならびに入力分散 σ^2 で次式のように表わされる。

$$\beta_2 = \frac{\rho_y(2) + \alpha_1 \rho_y(1) + \alpha_2 \rho_y(0)}{\sigma^2} \quad \beta_1 = \frac{\rho_y(1) + \alpha_1 \rho_y(0) + \alpha_2 \rho_y(1) + \alpha_1 \beta_2 \sigma^2}{\sigma^2(1 + \beta_2)} \dots (38)$$

ここで、係数 α_i は近似された固有振動数 $f_0(t)$ と減衰定数 $h_0(t)$ を用いて次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\exp(-2\pi f_0 h_0 T_s) \cos(2\pi f_0 T_s \sqrt{1-h_0^2}) \\ \alpha_2 &= \exp(-4\pi f_0 h_0 T_s) \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

入力分散の時間的変動はすでに式 (36) の形で表現されているから、式 (38), (39) を式 (3) に代入することにより地震動のシミュレーションが可能になるが、自己相関関数 $\rho_y(k)$ を前もって推定しておかなければ

ればならない。これは、解析の対象とする直前までのシミュレーション値に長さ T_0 の長方形ウィンドウを乗じ、そのデータ列の自己相関関数を計算しそれを推定値として用いた。

Fig. 11 に T_0 を 2 秒とした場合のシミュレーション結果が示されている。波形に関しては NS , EW 成分とも原波形の特徴を比較的良く再現しているものと考えられる。 UD 成分に関しては、12 秒までの再現性はかなり良いがそれ以後振幅が減少せずほぼ一定の加速度振幅の波が 40 秒まで継続する。これは、入力関数近似がうまく行われていないためであり、入力の分散の推定精度が再現波の加速度振幅に大きな影響を及ぼすことがわかる。

Fig. 12 は再現波のパワースペクトルを示している。水平 2 成分の周波数特性は原波形の特徴をかなり良く再現しているが、原波形に比べ卓越周期がやや強調されている。 UD 成分は原波形に比べスペクトルの形状が平坦になるが、これは入力の分散の関数近似があまり良くなく、高周波成分の卓越する時間帯でかなり大きな分散値が仮定されていることに起因している。

地震動をシミュレートするためには、なるべく少ないパラメータで、その非定常特性が推定されていなければならない。ここで述べた手法を用いれば、フィルターとして 1 自由度の振動を仮定するから、その固有振動数、減衰定数ならびに入力の分散の時間的変動の 3 変数が明らかになればよい。したがって、多数の地震観測記録を用いて、そのフィルター特性を抽出し、これをいくつかのパターンに分類した上で、震央距離、マグニチュードならびに地盤特性を考慮に入れたフィルター特性を抽出することも不可能ではないと考えられる。

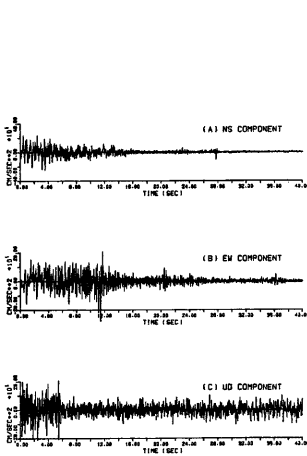


Fig. 11. Synthesized accelerograms by one dimensional $AR\cdot MA(2, 2)$ process using simplified filtering characteristics. (Window length: 2 sec)

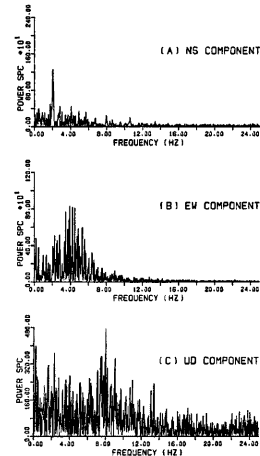


Fig. 12. Power spectra of synthesized accelerograms by one dimensional $AR\cdot MA(2, 2)$ process using simplified filtering characteristics. (Window length: 2 sec)

5.3 フィルター法による地震動のシミュレーション

以上は、近似関数で表現された固有振動数と減衰定数から $AR\cdot MA(2, 2)$ 過程の係数を逆推定し、式 (3) を用いて地震動をシミュレートする場合について述べたわけであるが、もう 1 つの方法として、固有振動数と減衰定数が時間的に変化する 1 自由度系の応答を数値的に求めることによって地震動がシミュレートできる。ここでは、1 自由度系の応答変位を線形加速度法によって求め、これを模擬地震動の加速度波形とし

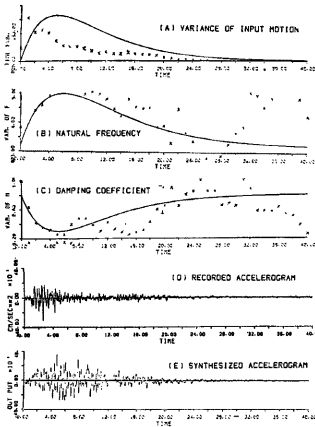


Fig. 13. Filtering characteristics of Castaic (1971) record and synthesized accelerograms obtained by the response analysis of one degree of freedom system.

6. 3次元 AR・MA(2, 2) 過程による地震動のシミュレーション

ここでは、3次元入力を受ける時のフィルター特性を3次元 AR・MA(2, 2) 過程で推定する。3次元過程が1次元過程と本質的に異なる点は、3次元 AR・MA 過程の係数が3×3のマトリックスで表現されていることである。すなわち、係数マトリックスの非対角要素によって、1次元 AR・MA 過程では考慮できなかった。

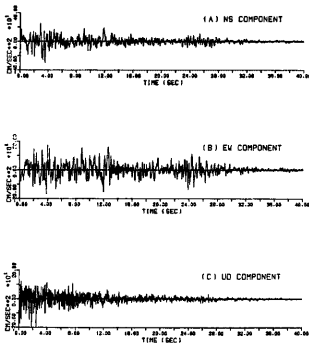


Fig. 14. Synthesized accelerograms by three dimensional AR・MA(2, 2) process. (Window length: 3 sec)

た。この場合、入力加速度の波形が必要となるが、これは 0~25 Hz で一様なスペクトル強度を有する白色雑音に確定関数を乗じたもので与えられるとし、確定関数の振幅特性を規定する入力の分散の時間的変動は次式によって推定した。

$$\sigma^2(t) = 8h_0(t) [2\pi f_0(t)]^3 \sigma_y^2(t) / T_s \dots (40)$$

ここに、 $\sigma^2(t)$ 、 $\sigma_y^2(t)$ は各々時刻 t における入力と地震動の分散である。

Fig. 13 は San Fernando 地震 (1971) の際に Castaic で記録された N21E 成分を用いて上述の解析を行なった例である。図中の×印は AR・MA(2, 2) 過程に基づくフィルター特性の時間的変動を示し、実線は式 (36) で示される近似関数によるものである。図中 (A) は分散を、(B) は固有振動数を、(C) は減衰定数を、(D) は実地震動を、(E) はシミュレーション結果を表わしている。図から明らかなように、かなり粗い近似関数を用いても、地震動の特性が比較的良く再現されていることがわかる。

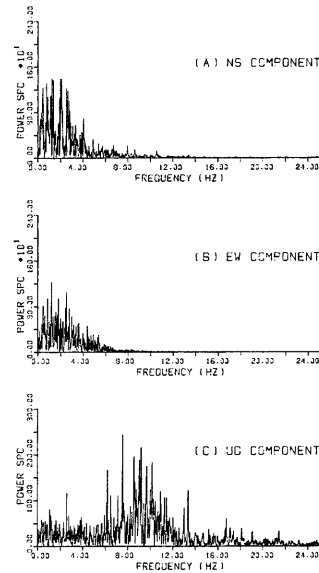


Fig. 15. Power spectra of synthesized accelerograms by three dimensional AR・MA(2, 2) process. (Window length: 3 sec)

た成分間の相関性が考慮できることになる。Fig. 14 はウィンドウ長を3秒とした場合の El Centro (1940) の加速度記録に対する再現波である。地震動のシミュレーションには直接法を用いた。Fig. 15 は再現波のパワースペクトルである。全体的にみると加速度振幅は実地震波より小さめであるが、波形の特徴は良く再現されている。水平成分では12秒付近に現われる比較的長周期の波動もうまく表現されている。水平成分におけるスペクトルのピーク強度はかなり小さくなっているが、卓越振幅数やスペクトルの全体的な傾向は実地震動のものを比較的良く再現している。鉛直成分のスペクトルは強度特性のみならず全体的な傾向も実地震動と良い一致を示している。

3次元 $AR \cdot MA(2, 2)$ 過程を用いる場合には、式 (32) より明らかなように、3組の共役複素根が求まり、これから3組の固有振動数と減衰定数が決定される。さらに、固有ベクトルを求めることにより地震動の震動主軸を決定することが出来る。こうした変数の時間的変動をモデル化することが今後の課題である。

7. む す び

本論文では、地震動を非正常白色雑音が入力する非正常フィルターの出力値と考えることにより、地震動の非正常特性が抽出できることを示し、さらにこの結果を用いて地震動のシミュレーションを行なったものである。自動制御の分野で開発された定常自己回帰移動平均過程を非正常過程に拡張することにより、理論の展開を行なった。多次元過程の同定法に関する理論的考察を加えた後、1次元過程を用いて、直接法、設定関数法ならびにフィルター法と名づけた3種類の方法によって地震動のシミュレーションを行ない、いずれの方法によっても十分なシミュレーションが行なえる事を示した。後2者の手法は、非正常フィルターの特性を簡単な時間関数に置き換えるものであるから、多数の地震動記録を基にした統計処理により、フィルター特性を地震のマグニチュードや震央距離の関数として表現するのに適しているものと考えられる。さらに、3次元自己回帰・移動平均過程を用いて、地震動のシミュレーションを行なった。3次元過程を用いることにより従来は考慮できなかった、地震動の各成分間の相関性を考慮できる様になるので、シミュレーションの精度が向上するものと考えられる。しかし、地震動のどのような特性を基にしてシミュレーションの精度を検討すればよいかが明確でないで、今後このような観点からの研究が行なわれなければならない。

参 考 文 献

- 1) Page, C. H.: Instantaneous Power Spectra, Jour. Appl. Phys. 23, pp. 103-106, 1952.
- 2) Priestley, M. B.: Evolutionary Spectra and Non-Stationary Processes, Jour. Royal Statistical Society, B27, pp. 204-237, 1965.
- 3) Lin, Y. K.: Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill, p. 60, 1967.
- 4) Mark, W. D.: Spectral Analysis of the Convolution and Filtering of Non-Stationary Stochastic Processes, Jour. Sound Vibration, 11, pp. 16-63, 1970.
- 5) 亀田弘行：強震地震動の非正常パワースペクトルの算出法に関する一考察，土木学会論文報告集，No. 235, pp. 55-62, 1975.
- 6) 後藤尚男・北浦 勝：地震動の非正常スペクトル密度とその模式化，土木学会論文報告集，第236号，pp. 47-58, 1975.
- 7) 星谷 勝・磯山龍二：多次元非正常確率過程による地震動シミュレーション，土木学会論文報告集，第269号，pp. 41-52, 1978.
- 8) 土岐憲三・佐藤忠信：時系列理論による地震動特性の推定，京都大学防災研究所年報，第22 B-2号，pp. 25-36, 1979.
- 9) 後藤尚男・亀田弘行・杉戸真太：非正常強震地震動の統計的予測モデル，土木学会論文報告集，第286号，pp. 37-51, 1979.
- 10) 土岐憲三・佐藤忠信・生木泰秀：自己回帰・移動平均法による構造物の動的パラメータの推定，京都大学防災研究所年報，第21 B-2号，pp. 57-68.

- 11) Walker, G.: On Periodicity in Series of Related Terms, Proc. Roy. Soc. London, Ser A, 131, pp. 518-532, 1931.
- 12) Durbin, J.: The Fitting of Time Series Models, Rev. Int. Inst. Statist., 28, pp. 233-244, 1960.
- 13) Akfike, H.: Statistical Predictor Identification, Ann. Inst. Statist. Math., 22, pp. 203-257, 1970.
- 14) Gersh, W. and R. S-Z. Liu: Time Series Method for the Synthesis of Random Vibrations Systems, Jour. Appl. Mecha., pp. 159-165, 1976.
- 15) Lee, R. C. K.: Optimal Estimations Identification and Control, MIT Press, 1964.
- 16) 土岐憲三・佐藤忠信：時系列理論による構造物特性の推定，第 5 回日本地震工学シンポジウム講演集，pp. 1009-1016, 1978.