

# 繰返し荷重を受ける鋼構造架構の弾塑性解析

若林 實・柴田 道生

## ANALYSIS OF ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF STEEL FRAME

By *Minoru WAKABAYASHI* and *Michio SHIBATA*

### Synopsis

A practical method of analysing a braced- and/or unbraced-steel frame under repeated horizontal load is presented. The influence of the Bauschinger's effect and the strain hardening, which are characteristic of structural steel, is reasonably reflected in the result. The member stiffness equation for an unbraced frame is expressed in a simple form by neglecting the variation of member axial force. For a braced frame, the governing equations are obtained taking into account of the variation of member axial forces and large deformations of brace members, where the optimum increment of the step-by-step computation is obtained as the solution of the non-linear simultaneous equations. The computed results agree reasonably well with the experimental results.

### 1. 序

鋼構造架構は、筋違を含まない純ラーメン架構と筋違付架構に大別され、純ラーメン架構では各部材の軸力変動は一般に小さく、その変形も小さくて微小変形理論の適用が可能である。これに対し、筋違付架構では筋違および筋違に隣接する柱・はりには大きな軸力が生ずるので、全塑性モーメントの変化に及ぼす影響を無視することができない。また、筋違の屈服後の挙動については有限変形の効果を考慮に入れる必要がある。

鋼構造架構の弾塑性解析手法は、大別して塑性ヒンジ理論に基づくもの<sup>1)</sup>と、1次元有限要素理論に基づくもの<sup>2)</sup>の2種類に大別される。塑性ヒンジ理論に基づく解析は理論的に明解であり、比較的短い計算時間で構造物が崩壊に到る過程を追跡することができるが、原則的には完全塑性理論に基づいているため、ひずみ硬化やバウシinger効果といった鋼素材に特有の性質や、部分降伏の影響が考慮されず、得られた荷重-変位曲線は必ずしも実験等で得られた実際の挙動と正確に対応するものではない。

これに対し、1次元有限要素法理論に基づく数値解析によれば、精密な応力-ひずみ関係を仮定することにより極めて実際に近い解析結果を得ることが可能であるが、ごく簡単な問題を除いては大型計算機による長時間の計算が要求される。

本研究は、鋼構造架構を構成する各部材について大胆なモデル化を行ない、比較的短時間の計算で鋼素材の特性を反映した解析結果が得られるような解析手法を導くとともに、既往の実験結果との比較検討を行なう。

### 2. 仮 定

1<sup>°</sup> 架構を構成する各部材を **Fig. 1(a)** に示すような2個の直線部材と、3個の弾塑性バネで構成されたモデルで置換する。材端力、材端モーメントおよび中央点Cでの曲げモーメントの正の方向を **Fig. 1(b), (c)** に示す。

2<sup>°</sup> 弾塑性バネ  $k$  ( $k=A, B, C$ ) における相対回転角  $\psi_k$  は、その点での曲率  $\kappa_k$  (これは、その点での軸方向

力  $N$  と曲げモーメント  $M_k$  の関数として決定される) と、次の関係にあるものとする。

$$\psi_k = C_k \kappa_k \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここに  $C_k$  は長さの次元を持つ定数である。

3° 材端でのバネの相対回転角  $\psi_A, \psi_B$  は、材端での節点回転角  $\theta_A, \theta_B$ 、部材回転角  $R$  および中央点での相対回転角  $\psi_C$  を用いて次のように表わされ (Fig. 1(b) 参照)。

$$\psi_A = \theta_A - R - \psi_C, \quad \psi_B = \theta_B - R + \psi_C \quad \dots\dots\dots(2)$$

変形パラメータ  $\theta_A, \theta_B, R, \psi_C$  の増分の2次以上の項は、筋違における  $(d\psi_C)^2$  の項を除き、各々の1次の項に比べて無視できる程度に小さいものと仮定する。

4° 各バネの断面では平面保持の仮定が成立し、材料の応力-ひずみ関係は区分線形とする。

5° 外力は各節点にのみ作用するものとし、各部材の中間荷重は考えない。この場合、柱、はり材では中央のバネCは常に弾性状態にあり、次式が成立するものと考えられる。

$$M_C = EI \psi_C / C_C \quad \dots\dots\dots(3)$$

ここに  $E$  は材料の Young 係数、 $I$  は断面2次モーメントである。

6° 純ラーメン架構では、各部材の軸力変動は小さく、無視できる。

7° バネの定数  $C_k$  の評価

筋違は座屈が生じることを前提として設計されるから、その弾塑性挙動を正確に解析するためには、座屈後の挙動を正確に反映するモデルが採用されねばならない。文献3)によれば、両端単純支持の単一筋違を2個の直線部材と1個の弾塑性バネに置換する場合、バネの定数を材長の1/3とすることにより座屈後の繰返し挙動を正確に追跡できることが報告されている。筋違の両端が骨組に剛結されているものとしてその有効

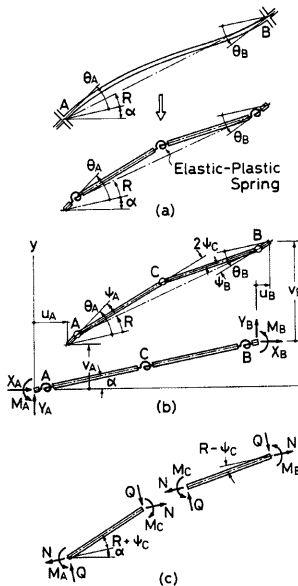


Fig. 1. Analytical model.

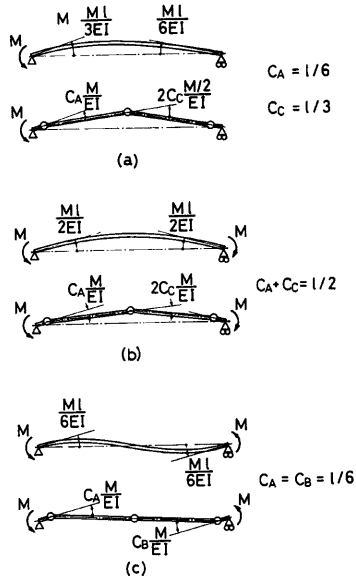


Fig. 2. Estimation of C value.

座屈長さを  $l/2$  とおき、式(1)および Fig. 1 (b) における、 $\psi_A, \psi_B, \psi_C$  の定義に従って文献 3) の考え方を適用すれば次式が得られる。

$$C_A = C_B = C_C = l/12 \quad \dots\dots\dots(4)$$

これに対し、柱・はり材は座屈が生じないように設計されるから、座屈が生じない状態で材端モーメントと材端回転角の関係が最も正確に表現されるようなモデルが望ましい。ここでは、弾性状態における両者の関係が正確に表現されるような定数として、Fig. 2 に示す対応より

$$C_A = C_B = l/6, \quad C_C = l/3 \quad \dots\dots\dots(5)$$

と定めた。

### 3. 純ラーメン架構の解析

#### 3.1 部材剛性関係式

部材  $i$  の弾塑性バネ  $k$  における軸力増分  $dN$  および曲げモーメント増分  $dM_k$  と材軸上での伸びひずみ増分  $d\varepsilon_k$  および曲率増分  $d\kappa_k$  の間には、次の関係が成立する。

$$dN = \bar{A}_k d\varepsilon_k + \bar{S}_k d\kappa_k \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$dM_k = \bar{S}_k d\varepsilon_k + \bar{I}_k d\kappa_k \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 $\bar{A}_k \equiv \int_A E' dA$ ,  $\bar{S}_k \equiv \int_A y E' dA$ ,  $\bar{I}_k \equiv \int_A y^2 E' dA$  はバネ要素を構成する各繊維要素の接線弾性係数  $E'$  を断面全体について積分することにより得られ、 $y$  は各繊維要素の材軸からの距離である。式(6), (7) より次の表現が得られ、

$$d\varepsilon_k = (1/\bar{A}_k) dN - \bar{T}_k d\kappa_k \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$dM_k = \bar{T}_k dN + \bar{K}_k d\kappa_k \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\bar{T}_k \equiv \bar{S}_k / \bar{A}_k, \quad \bar{K}_k \equiv \bar{I}_k - \bar{S}_k^2 / \bar{A}_k$$

仮定 6° にしたがって  $dN=0$  とおくと式(9)は次のように書ける。

$$dM_k = \bar{K}_k d\kappa_k \quad \dots\dots\dots(10)$$

式(1), (2)を式(10)に代入すれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} dM_A &= \bar{K}_A (d\theta_A - dR - d\psi_C) / C_A \\ dM_B &= \bar{K}_B (d\theta_B - dR + d\psi_C) / C_B \\ dM_C &= \bar{K}_C d\psi_C / C_C \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(11)$$

一方、Fig. 1(c) に示す自由体に作用する力の釣合より次式が得られ、

$$dQl/2 = dM_A - dM_C = dM_C + dM_B \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$dQl = dM_A + dM_B \quad \dots\dots\dots(13)$$

式(11)~(13)より  $dM_C, d\psi_C$  を消去すれば、純ラーメン架構に対する部材剛性関係式が得られる。

$$\begin{pmatrix} dM_A \\ dM_B \\ dM_C \end{pmatrix} = [D] \begin{pmatrix} d\theta_A \\ d\theta_B \\ dR \end{pmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$[D] = \frac{1}{\frac{C_A C_B}{\bar{K}_A \bar{K}_B} + \left( \frac{C_A}{\bar{K}_A} + \frac{C_B}{\bar{K}_B} \right) \frac{C_C}{2\bar{K}_C}} \begin{pmatrix} \frac{C_B}{\bar{K}_B} + \frac{C_C}{2\bar{K}_C} & -\frac{C_C}{2\bar{K}_C} & \frac{C_B}{\bar{K}_B} \\ -\frac{C_C}{2\bar{K}_C} & \frac{C_A}{\bar{K}_A} + \frac{C_C}{2\bar{K}_C} & \frac{C_A}{\bar{K}_A} \\ \frac{C_B}{\bar{K}_B} & \frac{C_A}{\bar{K}_A} & \frac{C_A}{\bar{K}_A} + \frac{C_B}{\bar{K}_B} \end{pmatrix}$$

部材剛性関係式(14)を各部材について重ね合わせるにより、系剛性方程式が得られる。式(14)はたわみ角法の基本式と同じ形式で表わされているから、系剛性方程式の未知数は節点回転角と部材角のみであり、整形ラーメンの場合、1次元有限要素法理論を適用した場合に比べてはるかに少ない未知数の方程式を解くことにより、精度の高い解が得られる。

### 3.2 数値解析手法

各バネ要素が有限個の繊維要素で構成される場合、仮定4°より各バネの $\bar{A}, \bar{S}, \bar{I}$ は荷重の変動とともに段階的に変化し、式(13)は $\bar{A}, \bar{S}, \bar{I}$ が一定値を保っている間、有限の増分に対して有効である。段階的数値計算を正確にかつ効率よく行なうためには、 $\bar{A}, \bar{S}, \bar{I}$ が変化する時点、すなわち構造物の剛性が変化する時点を正確に追跡していく必要がある。

バネ要素 $k$ の第 $j$ 番目の繊維要素のひずみ増分は、その繊維要素の材軸からの距離を $y_j$ とすれば次式で表わされ、

$$d\epsilon_{kj} = d\epsilon_k + y_j d\kappa_k = (y_j - \bar{T}_k) d\psi_k / C_k \quad \dots\dots\dots(15)$$

その繊維要素の剛性が次に変化するまでに必要とするひずみ増分は、それまでのひずみ履歴から決定される。次に剛性変化を生じる繊維要素について、剛性変化が生ずるまでのひずみ増分を式(15)の左辺に代入すれば、必要増分 $d\psi_k$ が求まる。前節の手法で得られた系剛性方程式は線形であるから、単位荷重増分(あるいは単位強制変位増分)に対する応答値は連立1次方程式の根として求まり、その結果得られた $d\psi_k$ と式(15)の根との比較より最適荷重増分(あるいは最適強制変位増分)が定まる。

## 4. 筋違付架構の解析

### 4.1 部材剛性関係式

筋違付架構は一般に、各部材に生ずる軸力変動が大きいので、式(8),(9)において $dN=0$ とおくことはできない。また、筋違については大たわみの効果を考慮せねばならないから、3章で扱ったように簡単に $d\psi_C$ を消去することができない。新たに追加された未知数 $dN, d\psi_C$ に対する条件式としては、材端の軸方向変位を規定する条件式および中央のバネ要素に作用する力の釣合条件式を用いる。

材端での軸方向相対伸び変形 $\Delta$ は、各バネ要素と直線部分の伸びおよび幾何学的変化の材軸方向成分の和

$$\Delta = C_A \epsilon_A + C_B \epsilon_B + 2C_C \epsilon_C + (l - C_A - C_B - 2C_C) \epsilon_R + (R^2 + \psi_C^2) l / 2 \quad \dots\dots\dots(16)$$

で表わされる。ここに、 $\epsilon_A, \epsilon_B, \epsilon_C$ および $\epsilon_R$ は各バネ要素および直線部分の伸びひずみであり、直線部分における接線弾性係数を $E'_R$ で表わすと、

$$dN = E'_R A d\epsilon_R \quad \dots\dots\dots(17)$$

が成立するから、仮定3°および式(8)を考慮して式(16)を増分で表現し、

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta}{l} = & \frac{1}{\bar{a}} dN - \frac{\bar{T}_A}{l} d\theta_A - \frac{\bar{T}_B}{l} d\theta_B + \left( \frac{\bar{T}_A + \bar{T}_B}{l} - R \right) dR \\ & + \left( \frac{\bar{T}_A - \bar{T}_B - 2\bar{T}_C}{l} - \psi_C \right) d\psi_C - (d\psi_C)^2 / 2 \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

より、次式を得る。

$$dN = \frac{\bar{a}}{l} \{ \bar{T}_A d\theta_A + \bar{T}_B d\theta_B + d\Delta - \bar{r}_1 dR - \bar{r}_2 d\psi_C + (d\psi_C)^2 l / 2 \} \quad \dots\dots\dots(19)$$

ここに、

$$\bar{a} \equiv l \left\{ \frac{C_A}{\bar{A}_A} + \frac{C_B}{\bar{A}_B} + \frac{2C_C}{\bar{A}_C} + \frac{(l - C_A - C_B - 2C_C)}{E'_R A} \right\}$$

$$\bar{i}_1 \equiv \bar{T}_A + \bar{T}_B - Rl, \quad \bar{i}_2 \equiv \bar{T}_A - \bar{T}_B - 2\bar{T}_C - \psi c l$$

である。

式(1), (2), (19)を式(9)に代入すれば次式が得られ、

$$\begin{aligned} d\bar{M}_A = \frac{\bar{\alpha}}{l} \{ & (\bar{T}_A^2 + \bar{J}_A)d\theta_A + \bar{T}_A \bar{T}_B d\theta_B + \bar{T}_A d\Delta \\ & - (\bar{T}_A \bar{i}_1 + \bar{J}_A)dR - (\bar{T}_A \bar{i}_2 + \bar{J}_A)d\psi_C + (\bar{T}_A l/2)(d\psi_C)^2 \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$\begin{aligned} d\bar{M}_B = \frac{\bar{\alpha}}{l} \{ & \bar{T}_A \bar{T}_B d\theta_A + (\bar{T}_B^2 + \bar{J}_B)d\theta_B + \bar{T}_B d\Delta \\ & - (\bar{T}_B \bar{i}_1 + \bar{J}_B)dR - (\bar{T}_B \bar{i}_2 - \bar{J}_B)d\psi_C + (\bar{T}_B l/2)(d\psi_C)^2 \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$\begin{aligned} d\bar{M}_C = \frac{\bar{\alpha}}{l} \{ & \bar{T}_A \bar{T}_C d\theta_A + \bar{T}_B \bar{T}_C d\theta_B + \bar{T}_C d\Delta \\ & - \bar{T}_C \bar{i}_1 dR - (\bar{T}_C \bar{i}_2 - \bar{J}_C)d\psi_C + (\bar{T}_C l/2)(d\psi_C)^2 \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$\bar{J}_k \equiv \bar{K}_k l / (C_k \bar{\alpha}) \quad (k = A, B, C)$$

Fig. 1 (c) に示す自由体の、有限変形を考慮した釣合条件式、

$$\begin{aligned} dQl - dM_A - dM_B + (N dR + R dN)l &= 0 \\ dM_A - dM_B - 2dM_C - (N d\psi_C + \psi_C dN + dN d\psi_C)l &= 0 \end{aligned}$$

に式(20)～(22)を代入すれば次式が得られる。

$$\begin{aligned} dQl = \frac{\bar{\alpha}}{l} \left\{ & (\bar{T}_A \bar{i}_1 + \bar{J}_A)d\theta_A + (\bar{T}_B \bar{i}_1 + \bar{J}_B)d\theta_B + \bar{i}_1 d\Delta - \left( \frac{Nl^2}{\bar{\alpha}} + \bar{i}_1^2 + \bar{J}_A + \bar{J}_B \right) dR \right. \\ & \left. - \bar{i}_1 \bar{i}_2 + \bar{J}_A - \bar{J}_B \right\} d\psi_C + \frac{1}{2} \bar{i}_1 l (d\psi_C)^2 \} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\bar{\alpha}}{l} \left\{ & -(\bar{T}_A \bar{i}_2 + \bar{J}_A)d\theta_A - (\bar{T}_B \bar{i}_2 - \bar{J}_B)d\theta_B - \bar{i}_2 d\Delta + (\bar{i}_1 \bar{i}_2 + \bar{J}_A - \bar{J}_B)dR \right. \\ & \left. + \left( \frac{Nl^2}{\bar{\alpha}} + \bar{i}_2^2 + \bar{J}_A + \bar{J}_B + 2\bar{J}_C \right) d\psi_C - \frac{3}{2} \bar{i}_2 l (d\psi_C)^2 \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(24)$$

式(19), (20), (21), (23), (24)をまとめると部材剛性関係式は次のように表わされ、

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} 0 \\ dM_A \\ dM_B \\ dN \\ dQ \end{Bmatrix} &= [D] \begin{Bmatrix} d\psi_C \\ d\theta_A \\ d\theta_B \\ d\Delta \\ dR \end{Bmatrix} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \begin{Bmatrix} -3\bar{i}_2 \\ \bar{T}_A \\ \bar{T}_B \\ 1 \\ -\bar{i}_1 \end{Bmatrix} (d\psi_C)^2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(25)$$

$$[D] = \begin{Bmatrix} \frac{Nl^2}{\bar{\alpha}} + \bar{i}_2 + \bar{J}_A + \bar{J}_B + 2\bar{J}_C & -(\bar{T}_A \bar{i}_2 + \bar{J}_A) & -(\bar{T}_B \bar{i}_2 - \bar{J}_B) & -\bar{i}_2 & \frac{\bar{i}_1 \bar{i}_2 \bar{J}_A - \bar{J}_B}{l} \\ -(\bar{T}_A \bar{i}_2 + \bar{J}_A) & \bar{T}_A^2 + \bar{J}_A & \bar{T}_A \bar{T}_B & \bar{T}_A & -\frac{\bar{T}_A \bar{i}_1 + \bar{J}_A}{l} \\ -(\bar{T}_B \bar{i}_2 - \bar{J}_B) & \bar{T}_A \bar{T}_B & \bar{T}_B^2 + \bar{J}_B & \bar{T}_B & -\frac{\bar{T}_B \bar{i}_1 + \bar{J}_B}{l} \\ -\bar{i}_2 & \bar{T}_A & \bar{T}_B & 1 & -\bar{i}_1/l \\ \frac{\bar{i}_1 \bar{i}_2 + \bar{J}_A - \bar{J}_B}{l} & -\frac{\bar{T}_A \bar{i}_1 + \bar{J}_A}{l} & -\frac{\bar{T}_B \bar{i}_1 + \bar{J}_B}{l} & -\frac{\bar{i}_1}{l} & \frac{N}{\bar{\alpha}} + \frac{\bar{i}_1^2 + \bar{J}_A + \bar{J}_B}{l^2} \end{Bmatrix}$$

Fig. 1 (b) で定義した材端力ベクトル  $\{\mathbf{X}\}^T \equiv \{0, dX_A, dY_A, dM_A, dX_B, dY_B, dM_B\}^T$  と材端変位ベクトル  $\{\mathbf{u}\}^T \equiv \{d\psi_C, du_A, dv_A, d\theta_A, du_B, dv_B, d\theta_B\}^T$  の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{X}\} &= [D_0] \{\mathbf{u}\} + \{f\} (d\psi_C)^2 \quad \dots\dots\dots(26) \\ [D_0] &= [C]^T [D] [C], \end{aligned}$$

$$\{f\} = \frac{\bar{\alpha}}{2} [C]^T \begin{Bmatrix} -3\bar{l}_2 \\ \bar{T}_A \\ \bar{T}_B \\ 1 \\ -\bar{l}_1 \end{Bmatrix}, \quad [C] = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -\mu & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & \mu & -\lambda & 0 & -\mu & \lambda & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\lambda \equiv \cos \alpha, \quad \mu \equiv \sin \alpha$$

式(26)を全部材について重ね合わせることで、各部材中央での相対回転角  $\psi_c$  および各節点の変位  $u, v, \theta$  の増分を未知数とする系剛性方程式が得られる。

4.2 最適増分の決定

剛性分布が段階的に変化するので、剛性の変化を逐次追跡することにより正確な段階的数値計算を行なうことができるという点に関しては、純ラーメン架構の場合と同様であるが、支配方程式が非線形の項を含んでいるため、単位荷重増分に対する応答値から比例計算により最適増分を決定することはできない。

バネの要素  $k$  の第  $j$  番目の繊維要素のひずみ増分

$$d\epsilon_{kj} = d\epsilon_k + y_j d\kappa_k \tag{27}$$

は、式(1), (2), (8), (19)を考慮すると次式で表わされ、

$$\begin{Bmatrix} d\epsilon_{Aj} \\ d\epsilon_{Bj} \\ d\epsilon_{Cj} \end{Bmatrix} = ([B_0] + y_j [B_1]) \begin{Bmatrix} d\psi_c \\ d\theta_A \\ d\theta_B \\ d\Delta \\ dRl \end{Bmatrix} + \frac{\bar{\alpha}}{2} \begin{Bmatrix} 1/\bar{A}_A \\ 1/\bar{A}_B \\ 1/\bar{A}_C \end{Bmatrix} (d\psi_c)^2 \tag{28}$$

$$[B_0] = \frac{\bar{\alpha}}{l} \begin{Bmatrix} -\frac{\bar{l}_2}{\bar{A}_A} + \frac{\bar{T}_A l}{C_A \bar{a}} & \frac{\bar{T}_A}{\bar{A}_A} - \frac{\bar{T}_A l}{C_A \bar{a}} & \frac{\bar{T}_B}{\bar{A}_A} & \frac{1}{\bar{A}_A} & -\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{A}_A} - \frac{\bar{T}_A l}{C_A \bar{a}}\right)/l \\ -\frac{\bar{l}_2}{\bar{A}_B} - \frac{\bar{T}_B l}{C_B \bar{a}} & \frac{\bar{T}_A}{\bar{A}_B} & \frac{\bar{T}_B}{\bar{A}_B} - \frac{\bar{T}_B l}{C_B \bar{a}} & \frac{1}{\bar{A}_B} & -\left(\frac{\bar{l}_1}{\bar{A}_B} + \frac{\bar{T}_B l}{C_B \bar{a}}\right)/l \\ -\frac{\bar{l}_2}{\bar{A}_C} - \frac{\bar{T}_C l}{C_C \bar{a}} & \frac{\bar{T}_A}{\bar{A}_C} & \frac{\bar{T}_B}{\bar{A}_C} & \frac{1}{\bar{A}_C} & -\frac{\bar{l}_1}{\bar{A}_C l} \end{Bmatrix}$$

$$[B_1] = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{C_A} & \frac{1}{C_A} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_A l} \\ \frac{1}{C_B} & 0 & \frac{1}{C_B} & 0 & -\frac{1}{C_B l} \\ \frac{1}{C_C} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

直線部分のひずみ増分は式(17), (19)より次のように表わされる。

$$d\epsilon_R = \frac{\bar{\alpha}}{E_R' A l} \{(-\bar{l}_2, \bar{T}_A, \bar{T}_B, 1, -\bar{l}_1/l) [C] \{u\} + (l/2)(d\psi_c)^2\} \tag{29}$$

次に剛性変化を生ずる繊維要素に関する式(28)または式(29)と前節で得られた系剛性方程式を連立に解くことにより、荷重および各変形パラメータに対する最適増分が定まる。

連立方程式の一般的な表現は次のように表わされる。

$$\begin{matrix} 1 & \dots & b \\ \vdots & & \\ b & & \\ \vdots & & \\ m & & \\ \vdots & & \\ N & & \\ N+1 & & \end{matrix} \begin{Bmatrix} * & \dots & 0 \\ * & \dots & * \\ 0 & \dots & * \\ ** & \dots & * \\ ** & \dots & * \\ \vdots & & \\ ** & \dots & * \\ ** & \dots & * \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} (d\psi_1)^2 \\ (d\psi_2)^2 \\ \vdots \\ (d\psi_b)^2 \end{Bmatrix} + \begin{matrix} 1 & \dots & N & N+1 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ m & & \\ \vdots & & \\ N & & \\ N+1 & & \end{matrix} \begin{Bmatrix} * & \dots & * & * \\ * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & * \\ * & \dots & * & * \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d\psi_1 \\ d\psi_2 \\ \vdots \\ d\psi_m \\ \vdots \\ du_n \\ du^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d\epsilon^* \end{Bmatrix} \tag{30}$$

ここに  $b$  は筋違部材数,  $N=m+n$  は全部材数  $m$  と変位成分数  $n$  の和,  $du_1, du_2, \dots, du_n$  は節点変位成分,  $du^*$  は強制変位点の変位,  $d\varepsilon^*$  は次に剛性変化が生ずる繊維要素が, 剛性変化を生ずるのに必要とするひずみ増分である。

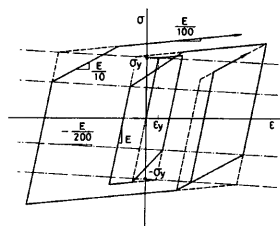
5. 解析結果と考察

5.1 応力-ひずみ関係の仮定

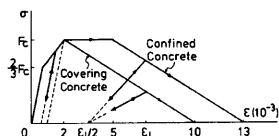
本解析で用いた鋼素材の応力-ひずみ関係を Fig. 3(a) に示す。特にことわらないかぎりひずみ硬化係数は  $E/100$  とした。Fig. 3(b) は本解析を鉄骨鉄筋コンクリート架構に適用したときに用いたコンクリートの応力-ひずみ関係を示す。

5.2 純ラーメン架構

文献4)の実験結果と本解析結果との比較を Fig. 4 に、供試体の概要を Table 1 に示す。本解析例のように骨組を構成する部材が I 形断面材で構成されている場合、解析結果は実験結果とよく一致する。これは I 形断面材では曲げモーメント-曲率関係と部材としての荷重-変形関係が相似な挙動を示すことから説明される。

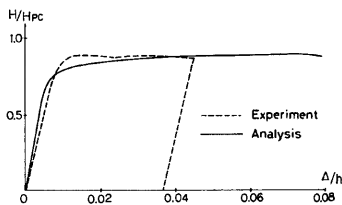


(a) Steel

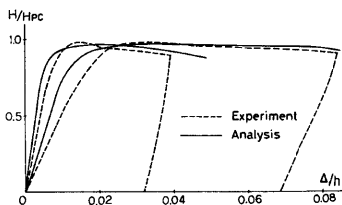


(b) Concrete

Fig. 3. Stress-strain relationships.



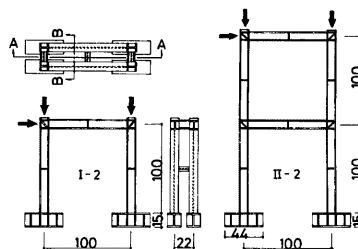
(a) Specimen I-2



(b) Specimen II-2

Table 1. Summary of specimens (Ref. 4).

		I - 2	II - 2
$N/N_0$		0.31	0.34
Column	Member	H100×100×6×8	H100×100×6×8
	$A(\text{cm}^2)$	22.2	22.1
	$I(\text{cm}^4)$	286	397
	$Z_p(\text{cm}^3)$	88.2	89.7
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	2.90	2.67
Beam	Member	H100×50×4×6	H100×50×4×6
	$A(\text{cm}^2)$	10.9	10.6
	$I(\text{cm}^4)$	181	177
	$Z_p(\text{cm}^3)$	41.5	40.6
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	3.44	3.08



(c) unit : cm

Fig. 4. Load-displacement relationship of unbraced frame.

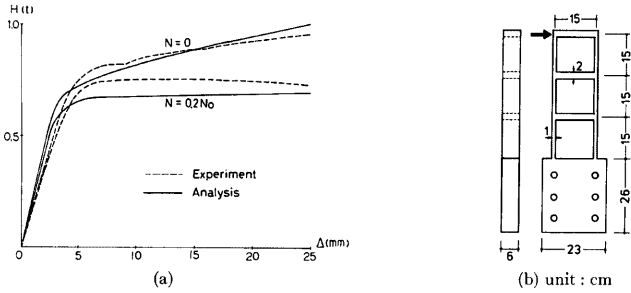


Fig. 5. Load-displacement relationship of unbraced frame.

Table 2. Summary of specimens (Ref. 5).

		2000 B	2020 B
$N/N_0$		0	0.2
Column	$D(\text{cm})$	1	1
	$B(\text{cm})$	6	6
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	1.70	1.70
Beam	$D(\text{cm})$	2.0	2.0
	$B(\text{cm})$	6	6
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	1.70	1.70

Table 3 Summary of specimens (Ref. 6).

		I - 1	I - 2
$N/N_0$		0	0.34
Column	Member	H100×100×6×8	H100×100×6×8
	$A(\text{cm}^2)$	22.5	22.4
	$I(\text{cm}^4)$	401	406
	$Z_p(\text{cm}^3)$	91.7	90.0
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	2.67	2.65
Beam	Member	H100×50×4×6	H100×50×4×6
	$A(\text{cm}^2)$	11.0	10.8
	$I(\text{cm}^4)$	183	181
	$Z_p(\text{cm}^3)$	42.1	41.4
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	3.24	3.24

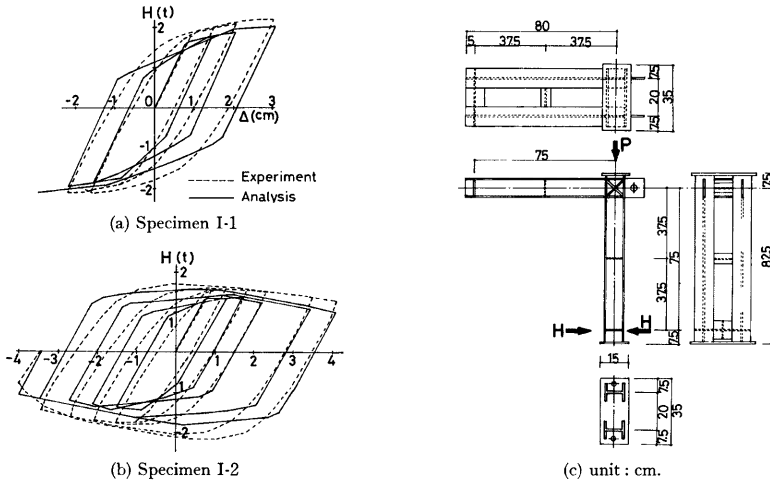


Fig. 6. Load-displacement relationship of unbraced frame.



これに対し文献5)の実験のように骨組を構成する部材が長方形断面材で構成されている場合、曲げモーメント-曲率関係と荷重-変形関係は必ずしも相似な挙動を示さないが、便宜上ひずみ硬化係数を  $3E/100$  程度に見積ってやれば Fig. 5 のような良好な一致を得る。なお供試体の概要を Table 2 に示す。

Fig. 6 は文献6)における繰返し裁荷実験と本解析結果の比較であり、供試体の概要を Table 3 に示す。素材の応力-ひずみ関係を実際に近い形で仮定することができるという本解析の特徴が発揮され、解析結果は実験結果とよく一致しており、さらに精密な応力-ひずみ関係を仮定すればさらに精度のよい結果が得られることが期待される。

Fig. 7 は本解析手法を SRC 架構に適用した場合の実験値<sup>9)</sup>との比較を示し、供試体の概要を Table 4 に示す。 $N=0$  の場合、解析結果は初期剛性を大きく評価する傾向があるが全体の荷重変形曲線は実験値とよく一致している。 $N=0.4N_0$  の場合、最大耐力については解析結果が実験値を下まわっているが、最大耐力を経て耐力が低下していく過程をよく追跡している。

5.3 筋違付架構

筋違と骨組要素の相互作用効果が最も大きい筋違付架構として K 型筋違付架構をとりあげ、文献8)の実験結果との比較を行なう。K 型筋違付架構では 2 本の筋違の軸力差の鉛直成分がはりに横力として作用し、はりがその横力によって降伏すると引張筋違がその機能を発揮できなくなるため架構の耐力が急激に低下する。繰返し裁荷の場合には繰返しにともなう耐力低下のみならず、はりの鉛直変位の増大が建築物としての機能を著しく低下させるおそれがある。これを防ぐにははりを強固に設計する必要があるが、筋違断面がよほど小さい場合を除き、はりが横力によって塑性化しないような設計を行なえば非常に大きなはり断面を必要とし、実際の設計においてそのような大きなはり断面が採用されることは少ない。

文献8)の実験は、K 型筋違付架構におけるはりの塑性化が架構の履歴特性に及ぼす影響を明らかにすることを目的として行なわれたもので、本解析との比較を行った 3 体の供試体の概要を Fig. 8(a) および Table 5 に示す。各部材は鋼板で構成され筋違のみかけの細長比(材長  $l_b$  の 1/2 と断面 2 次半径  $i$  の比)は A-1, A-3 供試体の場合  $\lambda \approx 80$ , B-3 の場合  $\lambda \approx 30$  である。

Table 4. Summary of specimens (Ref. 7).

		FM 0	FM 4
$N/N_0$		0	0.4
Column	Steel frame $\sigma_y(t/cm^2)$	H100×100×6×8 2.95	H100×100×6×8 2.83
	Steel bar $\sigma_y(t/cm^2)$	4-D6 2.61	4-D6 2.61
	$F_c(kg/cm^2)$	228	242
	Beam		
Steel frame $\sigma_y(t/cm^2)$	H100×100×6×8 2.95	H100×100×6×8 2.83	
Steel bar $\sigma_y(t/cm^2)$	4-D6 2.61	4-D6 2.61	
$F_c(kg/cm^2)$	228	242	

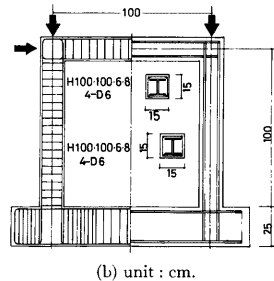
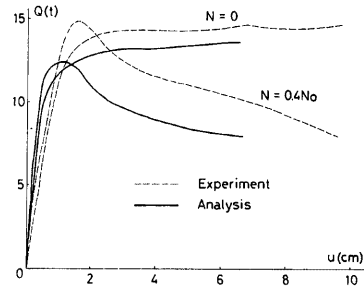


Fig. 7. Load-displacement relationship of SRC frame.

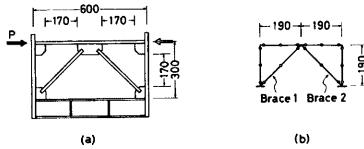


Fig. 8. K-type braced frame.

A-1 は比較的強固なはりを持つものに対し、A-3、B-3 では筋違に比べてはりの耐力が小さく、実際のK型筋違付架構の場合に近い。

解析では接合部の影響を考慮し、Fig. 8 (b) に示す解析モデルについて計算した。各バネ要素の断面分割数は5である。このモデルでは筋違の材長は供試体における筋違の内法寸法とほぼ等しいが、はり・柱の材長は供試体における内法寸法よりやや大きいため、骨組部の筋違に対する拘束効果を小さく見積る可能性がある。解析における繰返し回数は計算

時間を短縮するため各振幅に対して実験の場合より1~2回少ない。このため解析結果と実験値とは厳密に対応し得ないが、同一振幅の繰返しにおいて最初の数回で履歴ループが収束するような場合には繰返し回数の差による影響は少ないものと考えられる。

Fig. 9~11 は本解析結果と実験結果の比較を示す。図中実線は本解析結果、破線は実験値である。Fig. 9 は荷重  $P$  とはり中央の水平変位  $u$  の関係を示し、A-1、A-3 の場合解析結果は実験値と極めてよく一致している。B-3 では解析結果は小振幅域での繰返しにともなう耐力劣化を過大に評価する傾向がみられるが、実験で得られた挙動と解析結果はよく対応している。

Fig. 10 ははり中央部の鉛直変位  $v$  と水平位  $u$  の関係を示す。A-1 供試体の場合同一振幅の繰返しでははりは弾性的に挙動し、振幅を増大する際にはりの塑性化が進行して鉛直方向の残留変形が増大する。解析結果は実験値とよく一致している。A-3 の挙動もA-1 と同様の傾向を示し、第2振幅までは解析結果は実験値とよく一致している。第3振幅以降、実験値は同一振幅の繰返しにおいても鉛直方向の残留変形がわずかながら増大しているのに対し、解析結果は同一振幅の繰返しに対し弾性的挙動を示す。B-3 の場合、同一振幅の繰返しにおいても鉛直方向の残留変形が増大し、解析結果は実験値に比べて小振幅域では残留変形の増大を過大に評価し、大振幅域では過小に評価する傾向がある。

Fig. 11 は筋違の分担する水平力  $P_b$  と水平変位  $u$  の関係を示し縦軸は  $P_{b0} \equiv 2T_0 \cos \alpha$  で無次元されている。ここに  $T_0$  は筋違の降伏軸力、 $\alpha$  は筋違の取付角である。解析では各筋違の軸力の水平方向成分の和  $P_b = (T_1 - T_2) \cos \alpha$  として  $P_b$  を評価した。これに対し実験値は柱に貼付したひずみゲージの値から柱の分担水平力  $P_c$  を推定し、作用荷重  $P$  との差  $P_b = P - P_c$  として  $P_b$  を評価したので、解析結果と実験値とは厳密には対応しないが本質的に大きな差はないものと考えられる。A-3 供試体の場合解析結果と実験値は極めてよく一致している。A-1 の場合解析結果と実験値は第3振幅まではよく一致しているが、第4振幅において両者に差が生じている。いずれの場合も単一筋違の挙動<sup>9)</sup>を重ね合わせて得られる履歴特性あるいはX型筋違付架構の場合<sup>10)</sup>に比べて筋違の分担水平力が小さく、とくにはり断面の小さいA-3においてその傾向が著しい。B-3 では解析結果は繰返しにともなう耐力劣化を過大に評価する傾向にあるが実験値の示す挙動とはよく対応している。このような差異を生じた原因としては、以下のような理由が考えられる。

1) 解析における  $P_b$  の算定では、筋違の軸方向力のみを考慮し、せん断力の影響を無視したこと。この影響は主として小さな細長比の筋違を用いた場合に著しいと考えられる。

Table 5. Summary of specimens (Ref. 8).

		A-1	A-3	B-3
Brace	$D(\text{cm})$	0.555	0.575	1.57
	$B(\text{cm})$	3.19	4.98	1.88
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	2.58	2.58	2.92
	$T_0(t)$	4.57	7.39	8.62
	$\lambda$	84.6	81.9	29.9
Beam	$D(\text{cm})$	2.46	1.58	1.58
	$B(\text{cm})$	4.99	5.03	5.03
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	2.86	2.92	2.92
	$M_{g0}(\text{cm})$	21.6	9.17	9.17
Column	$D(\text{cm})$	2.78	1.86	1.86
	$B(\text{cm})$	5.03	5.01	4.99
	$\sigma_y(t/\text{cm}^2)$	2.62	3.07	3.07
$2M_{g0}/(I_g T_0)$		0.556	0.146	0.125

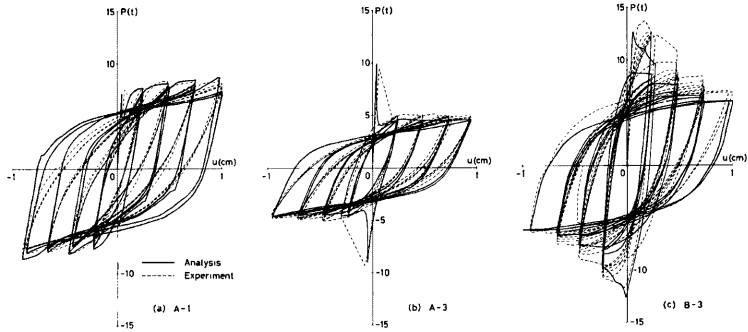


Fig. 9. Load-displacement relationship of K-type braced frame.

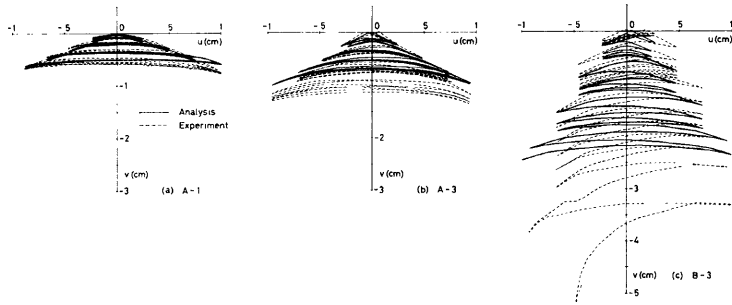


Fig. 10.  $v-u$  relationship.

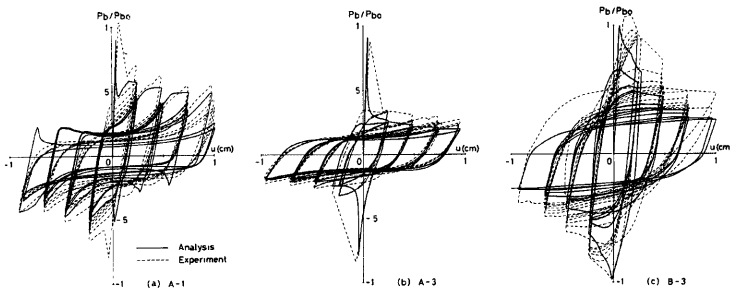


Fig. 11.  $P_b/P_{b0}-u$  relationship.

2) はり、柱が長方形断面材であるにもかかわらず、ひずみ硬化係数を  $E/100$  と仮定したこと、およびはり、柱の材長を供試体部材の内法寸法より大きく設定したこと。これらは、はり・柱の筋違に対する塑性域での拘束効果を小さく見積ることになる。

**Figs. 12, 13** は解析で得られた筋違の軸力  $T_1, T_2$  の変動状況を示し、図中の実線および破線は **Fig. 8 (b)** における筋違 1 および筋違 2 の挙動を示す。**Fig. 12** は各筋違の軸力  $T_1, T_2$  と軸方向変位  $\Delta_1, \Delta_2$  の関係を示す。

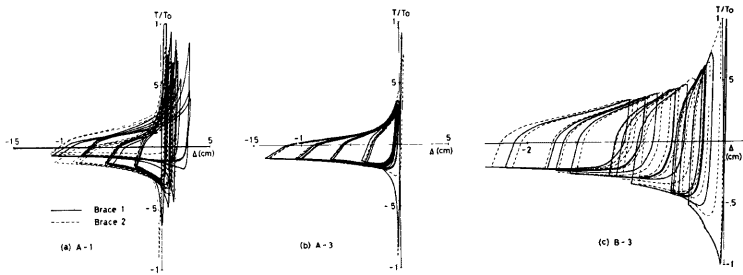


Fig. 12.  $T/T_0-\Delta$  relationship.

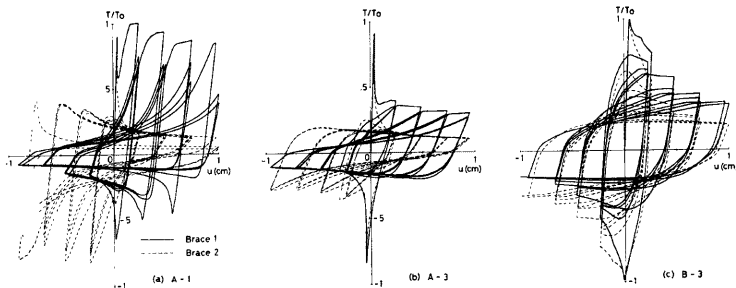


Fig. 13.  $T_1/T_0-u, (-T_2/T_0)-u$  relationship.

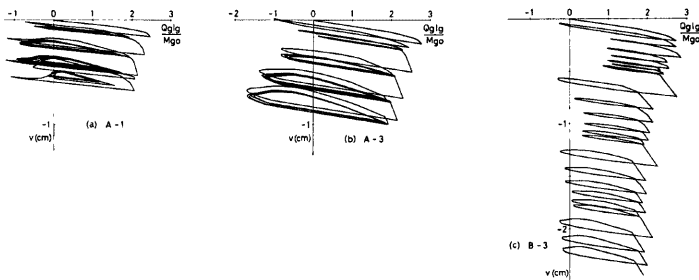


Fig. 14.  $Q_g-v$  relationship.

はり断面が小さい場合、筋違に伸び変形が生ずることは極めてまれであり、筋違が伸びきって引張で降伏するという現象は、はり断面の大きい A-1 供試体の処女載荷時以外にはみられない。A-3, B-3 の履歴曲線は単一筋違の履歴曲線<sup>9)</sup>と対応関係が認められ、A-3 では各振幅とも数回の繰返しにより履歴ループが収束する。これに対し B-3 では、はり筋違の耐力比が A-3 とほぼ等しいにもかかわらず (Table 5 参照)、履歴ループの収束性は悪く、はりの塑性化の進行とともに圧縮側の変形が蓄積していく。

A-1 の場合は単一筋違の履歴特性との対応関係が成立せず、筋違 1 では第 3 振幅で、筋違 2 は第 4 振幅において耐力レベルの変動が生じている。これは、その時点において座屈モードの変化 (それまで上側に凸に変形していた筋違が下側にはらみだす) が生じたためであるが、このような座屈モードの変化は実験では

認められなかった。

**Fig. 13** は筋違 1 の引張力  $T_1$  および筋違 2 の圧縮力 ( $-T_2$ ) とはり中央の水平変位  $u$  の関係を示し、これらを重ね合わせたものが **Fig. 11** の実線に対応する。はり断面の大きい A-1 では処女載荷時に筋違 2 の座屈とともにはりが弾性的に変形するため、筋違 1 は一旦除荷を生ずるが、はりが耐力を発揮するにしたがって筋違 1 の軸力は再び増大して降伏軸力に達する。同一振幅の繰返しでは単一筋違の性状とよく似た挙動を示すが、筋違 2 では大振幅で繰返した場合の方が圧縮側の耐力が大きいう点が単一材の場合と異なる。これははりの鉛直方向の残留変形が増大し圧縮筋違を拘束するためと考えられる。振幅が増大する際、はりの塑性化が進行するため筋違 1 の軸力は降伏軸力に達し得ず頭打ちの現象を示す。はり断面の小さい A-3 では処女載荷時においても筋違 1 が降伏することはない。振幅を増大させる際、軸力の頭打ち現象が見られるのは A-1 の場合と同様であり、第 1 振幅から第 2 振幅に移行する際には筋違 1 に除荷を生じている。はりの耐力が小さいため筋違の分担する軸力は A-1 の場合に比べて小さいが、繰返しループは早期に収束する傾向を示す。B-3 の場合には軸力の頭打現象が振幅を増大させる時だけでなく同一振幅の繰返しにおいても生じており、履歴ループの収束性は悪い。

**Fig. 14** は解析で得られたはり中央の鉛直変位  $v$  と、はりに作用する横力  $Q_0 = (T_1 + T_2) \sin \alpha$  の関係を示す。横軸ははりの全塑性モーメント  $M_{g0}$  とはりの材長  $l_g$  の比により無次元化されている。はりの耐力は、鉛直変位の増大とともに減少する傾向がみられ、これは、筋違のはりに対する回転拘束効果によるものと考えられる。**Fig. 14** によれば K 型筋違付架構におけるはりの横方向耐力は  $Q_{g0} = 2M_{g0}/l_g$  で評価することができ、文献(8)で提案された結果と一致する。

## 6. 結 論

鋼構造架構を構成する各部材を 3 個の弾塑性バネと 2 個の直線部材からなるモデルに置換し、比較的短時間の数値計算により、鋼素材の材料特性を忠実に反映し得る弾塑性解析手法を導いた。純ラーメン架構の場合、各部材の軸力変動の効果を無視することにより、たわみ角法と同じ形式の部材剛性関係式が得られ、解析結果は既往の実験結果とよく一致した。この解析手法は、鉄骨鉄筋コンクリート構造純ラーメン架構にも適用することができる。

筋違付架構の場合は、各部材の軸力変動と筋違部材の大たわみを考慮した部材剛性関係式を導いた。支配方程式は変形の 2 次の項を含み、非線形の連立方程式を解くことにより、増分解析における最適増分を決定することができる。解析結果は K 型筋違付架構の実験結果と、極めてよく一致した。K 型筋違付架構では、はりが横力によって降伏すると、引張筋違がその機能を発揮し得なくなるため、その履歴特性ははりの塑性化の進行と密接な関係がある。はりの塑性化の進行は、はりと筋違の耐力比および筋違の細長比に依存し、はりの耐力が小さい場合、細長比の小さな筋違を用いると、繰返し数の増加とともにはりの塑性化が進行し、耐力が著しく低下するとともに、筋違には圧縮側の塑性変形が蓄積していく。

## 謝 辞

本研究のうち、純ラーメン架構の解析に関しては丸山佳博氏（当時大阪工業大学学生）の協力を得た。ここに厚く感謝する。

## 参 考 文 献

- 1) 例えば坂本順・多賀直恒・小浜芳朗：塑性設計骨組の静的並びに動荷応答性状に関する考察，日本建築学会論文報告集，第200号，昭和47年10月，pp. 55-63.
- 2) 例えば藤本盛久・和田 章・白方和彦・小杉 立：筋違付鉄骨ラーメンの弾塑性解析に関する研究，日本建築学会論文報告集，第209号，昭和48年7月，pp. 41-51.

- 3) Shibata, M.: Analysis of Elastic-Plastic Behavior of a Steel Brace Subjected to Repeated Axial Force, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 18, No. 3, 1982, pp. 217-228.
- 4) 若林 実・松井千秋：鉄骨ラーメンの弾塑性安定に関する実験的研究一(その2) H形鋼部材よりなる門型ラーメン, *日本建築学会論文報告集*, 第193号, 昭和47年3月, pp. 17-27.
- 5) Wakabayashi, M., Nonaka, T. and Morino, S.: An Experimental Study on the Inelastic Behavior of Steel Frames with a Rectangular Cross-Section Subjected to Vertical and Horizontal Loading, *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ.*, Vol. 18, Part 3, No. 145, Feb. 1969, pp. 65-82.
- 6) 若林 実・松井千秋・三谷 勲：鉄骨ラーメンの弾塑性安定に関する実験的研究一(その4) 繰返し水平力を受けるH形鋼集材, *日本建築学会論文報告集*, 第195号, 昭和47年5月, pp. 25-37.
- 7) 若林 実・南 宏一・古村勝寛：H形鋼を用いた鉄骨鉄筋コンクリート部材の曲げ変形状に関する実験的研究, *京都大学防災研究所年報*, 第14号A, 昭和46年4月, pp. 417-437.
- 8) 若林 実・柴田道生・今村哲雄・西野孝仁：K型筋違付架構の弾塑性挙動に関する実験的研究, *京都大学防災研究所年報*, 第24号B-1, 昭和56年4月, pp. 171-183.
- 9) 若林 実・野中泰二郎・中村 武・森野捷輔・吉田 望：繰返し軸方向力を受ける部材の挙動に関する実験(その1), *京都大学防災研究所年報*, 第16号B, 昭和48年4月, pp. 113-125.
- 10) M. Wakabayashi, T. Nakamura and N. Yoshida: Experimental Studies on the Elastic-Plastic Behavior of Braced Frame under Repeated Loading (Part 1), *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, Kyoto Univ.*, Vol. 27, Sept. 1977, pp. 121-154.