

# 地下水システムのモデル同定と その最適運用に関する研究

池淵 周一・小尻 利治・山本 浩

## IDENTIFICATION AND OPERATION OF GROUNDWATER SYSTEMS BASED ON MULTI-LEVEL OPTIMIZATION METHOD

By *Shuichi IKEBUCHI, Toshiharu KOJIRI and Hiroshi YAMAMOTO*

### Synopsis

The aim of this study is to establish the identification of model parameters of groundwater systems and the conjugative management between the water resources systems, such as dam reservoirs, pumping wells and recharging wells. Especially, we introduce the multi-level optimization method (Goal Coordination Method) to solve the identification and management problems of complex water resources systems.

In the identification model, after formulating groundwater systems by three dimensional multi-cell model, the total system can be arbitrarily divided into several subsystems. Then, the optimal value of model parameters of confined or unconfined aquifers will be decided by iterative calculation of parameter identification in subsystems and interaction balance in total system. On the other hand, management or operation model is decomposed into surface water systems and groundwater systems. Each subsystem is optimally controlled by using Linear Programming or Non-Linear Programming. Total control policy will be also gained in the basis of multi-level optimization method.

These approaches are applied to a part of the Nara basin for verification of theory. And we discuss their effectiveness and limitation.

### 1. 序 論

水は人間活動ひいては全生物の活動因子であり、現代のように高度に文明化された時代においても、その意味が変わることはない。むしろ、供給状態が中断すると全ての生産・社会活動が破壊されることになり、水のもつ影響は拡大したといえる。しかし、水資源の賦存量には限界があり、いきおい、高度利用が重要な課題となってくる。また、昭和53年の渇水における地域的特性の要因構造分析によると、都市の地下水依存度が高いほど渇水の緩和が大きいかも得られている<sup>1)</sup>。したがって、地下水流動を的確に把握し利用可能水量を予測することは、水資源の有効利用をはかるうえで不可欠の要素といえる。ところが、現在の地下水モデルの構成法をみると、サンプリングや揚水試験、電気探査などの実測データに基づき、モデルに含まれるパラメータ値が決定されていた。同定を重視する場合でも、得られたパラメータ値に対してキャリブレーションによるモデルの内そう検定という手順がとられているにすぎない。これらは、いずれも本質的に点推定もしくは局所推定と呼ばれる同定であり、対象流域の拡大やモデル精度の向上につれて必要とされるデータ量は急激に増加し、経済上からも実用的とはいえない。

一方、河川表流水と地下水の利用については、それぞれ独立して扱われており、地下水の持つ貯留機能を十分に生かしていない。地下水の積極的利用は、地盤沈下や水質悪化などの地下水障害はもちろん避けなけ

ればならないが、河川表流水に対する補完機能や渇水時の安定供給機能を有している。こうした点からも、河川表流水と地下水の有機関係を考慮した水利用法を明らかにし、その最適運用政策の決定が極めて重要になる。

以上の点を鑑み、本研究では、地下水システムのモデル同定に対して、流域水資源の利用という意味での最適パラメータ値の導出を行うとともに、その成果を基にして、地下水システムとダム貯水池を含む河川表流水システムとの有機的運用法を確立しようとするものである。とくに、多数に分割された地下水システムやダム貯水池、揚水・涵養井を含む複雑な水利用システムなどを念頭におき、大規模最適化問題の解法として注目されている多層最適化手法を導入して、一般的な問題への対処をはかるものである。

## 2. 大規模システムと多層最適化手法

本章では、多層最適化手法の水資源システムへの適用に先立って、最適化の基礎理論について述べておこう。

一般に、システムが大規模になるということは、多変数、多目的、多時間といった次元的にも変数的にもばう大な空間を構成することになり、その最適化を一気にはかることはきわめて困難である。その解決の一つの方向には、システムの分解および合成であり、多層最適化手法 (multi-level optimization technique) はその思考を最高度に発揮している。多層最適化手法には、(i) 常に全体の実行可能な解集合を求めていく Model coordination Method (あるいは Feasible Method) と、(ii) サブシステムでは実行可能だが、全体としては実行不可能な解集合より最適解に接近していく Goal Coordination Method (あるいは Non-feasible Method) とがある。ここでは、反復計算に有利な後者を用いるので、次にその概略を述べる。

### 2.1 Goal Coordination Method

一つのシステムを幾つかのサブシステムに分割しようとすると、サブシステム間を結合する変数を分断しなければならぬ。すなわち、サブシステム間の相互作用を表わす結合変数  $x$  を何らかの形で、独立な操作変数へと変換することである。このため、擬似変数 (quasi-variable あるいは pseudo-variable) と呼ばれる操作変数  $\sigma$  が用いられる。もちろん、結合変数と擬似変数の間には、

$$x - \sigma = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

が成立する。ところで、全体の目的関数を  $Z(x)$  とすれば、新たに擬似変数を加えた目的関数はラグランジュ乗数を導入して

$$L(x, \sigma, \lambda) = Z(x) + \lambda(x - \sigma) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。右辺第2項はペナルティ項として付加されたものであり、 $L(\cdot)$  を等式制約に基づくラグランジュ関数と呼ぶ。Goal Coordination Method においては、 $L(\cdot)$  を部分問題として分割し、2段階の最適化を反復的に行うことにより、最適値への接近をはかるものである<sup>9)</sup>。具体的には、原問題が

$$Z(m, y, x) = Z_1(m_1, y_1, x_1) + Z_2(m_2, y_2, x_2) \xrightarrow{[m, y, x]} \min \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{subject to } G(m, y, x) = 0$$

で表わされるとすると、擬似変数  $\sigma_i$  ( $i=1, 2$ ) によりある固定されたラグランジュ乗数  $\lambda_i$  ( $i=1, 2$ ) に対して部分問題は、それぞれ、次のようになる。

サブシステム1:

$$Z_1(m_1, y_1, x_1, \sigma_1, \sigma_2 | \lambda_1, \lambda_2) = Z_1(m_1, y_1, x_1) + \lambda_1 x_1 - \lambda_2 \sigma_2 \longrightarrow \min \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{subject to } G_1(m_1, y_1, x_1, \sigma_2) = 0$$

サブシステム2:

$$Z_2(m_2, y_2, x_2, \sigma_1 | \lambda_1, \lambda_2) = Z_2(m_2, y_2, x_2) - \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 x_2 \longrightarrow \min \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\text{subject to } G_2(m_2, y_2, x_2, \sigma_1) = 0$$

しかしながら、独立した部分問題が系全体の最適性を保証するには、相互均衡原理 (Interaction Balance

Principle) が満足されていること, いいかえると, 分割化に際して選ばれた  $x_i$  と  $\sigma_i$  が実際には等しいことが必要である。ゆえに, 第2段階においては, 第1段階で設定されたラグランジュ乗数が

$$\lambda_i^{k+1} = \lambda_i^k + \Delta \lambda_i^k (x_i^k - \sigma_i^k) \dots\dots\dots (6)$$

subject to  $\Delta \lambda_i^k > 0 \quad (i=1, 2)$

で改善されることになる。ただし,  $k$  は反復回数,  $\Delta \lambda_i^k$  は改善のステップ幅を示す。式(4)~(6)が繰り返し適用され, 双対性理論から明らかなように, ラグランジュ関数の増加(原問題が最大化問題であれば, ラグランジュ関数は減少)が止まれば, 最適解に収束したとみなされる<sup>3)</sup>。

2.2 ラグランジュ関数の収束過程

ラグランジュ乗数は, 式(6)のように  $x_i^k$  と  $\Delta \lambda_i^k$  によって改善の方向が定まるわけであるが, 解の収束には, ステップ幅や鞍点(Saddle Point)<sup>4)</sup> 付近の解曲面も重要な要素を占めている。なぜなら, ステップ幅が大きいと  $(x_i^k - \sigma_i^k)$  の値によっては発散したり (Fig. 1(a) 参照), 小さすぎると最適解の手前で収束する可能性がある (同図 (b))。また, 解曲面が凸でなければ, 局所解に収束する場合も考えられる (同図 (c))。ただ, ステップ幅の決め方に対する明確な基準はなく, 現在のところ, ラグランジュ関数の動きによって判断することになる。すなわち, 最初はステップ巾を大きくとり, ラグランジュ関数が発散するならば, 次第に小さくしていくのである。さらに, 局所解もしくはステップ幅の狭小による収束を避けるために, 収束したならば, やや大きくして再度計算をすることが必要である。

ところで, ラグランジュ関数の収束判定条件であるが, 関数値の増加の割合によって判定することができ, ここでは次式を用いることにする。

$$\frac{||L^{k+1}|| - ||L^k||}{\min \{ ||L^{k+1}||, ||L^k|| \}} \leq ERC \dots\dots\dots (7)$$

ただし, ERC は判定基準であり, 最適解という性質上, 10% 以下が望ましい。

3. 地下水モデルとパラメータ同定

3.1 3次元 Multicell Model

地下水モデルは, 差分法や有限要素法によりかなりミクロなレベルまで流動のモデル化がなされている<sup>3), 5)</sup>。しかし, 利用しうる水資源システムおよびその運用モデルとしてとらえる場合, 地下水モデルの有する条件としては, (i) モデル構成の簡単さ, (ii) 外力に対する地下水位の応答が必要な精度で表現できること, (iii) 大規模流域において適用可能なことがとりあげられ, 本研究では, 不圧, 被圧帯水層での空間的流動を把握するため, 平面2次元モデルを3次元に拡大した Multicell Model<sup>6)</sup> を用いる。

Multicell Model とは, 帯水層を任意の多角形(セル)に分割し, 各セルでの水収支を考える方法である。帯水層を不圧層と被圧層に分ければ, 第  $j$  期でのセル  $r$  は次のように定式化される。

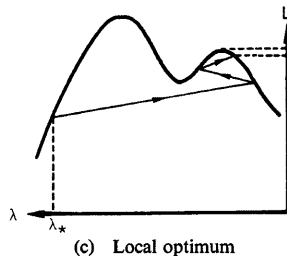
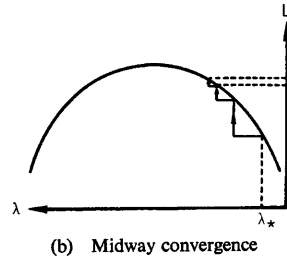
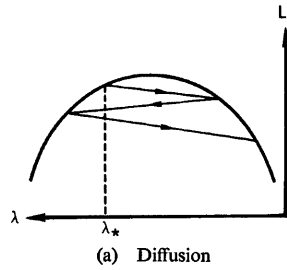


Fig. 1 Conceptual chart of diffusion and convergence process of Lagrange function.

不圧層：

$$\sum_{l=1}^R K_{lr} \cdot \frac{h_l(j) - h_r(j)}{L_{lr}} \cdot W_{lr} \cdot \left[ \frac{h_l(j) + h_r(j)}{2} - (F_{lr} - F_{lr}') \right] \cdot dt$$

$$= A_r \cdot S_r \cdot [h_r(j+1) - h_r(j)] + Q_r(j) - W_r(j) - Q_r^*(j) - \sum_{m=1}^M A_{r,m} \cdot C_{r,m} \cdot [h_r(j) - h_m(j)] \cdot dt \quad (8)$$

被圧層：

$$\sum_{r=1}^R A_{r,m} \cdot C_{r,m} [h_r(j) - h_m(j)] \cdot dt + \sum_{m'=1}^M T_{m',m} \cdot \frac{h_{m'}(j) - h_m(j)}{L_{m',m}} \cdot B_{m',m} \cdot dt$$

$$+ \sum_{m'=1}^M A_{m',m} \cdot C_{m',m} [h_{m'}(j) - h_m(j)] \cdot dt$$

$$= [h_m(j+1) - h_m(j)] \cdot A_m \cdot S_m - Q_m^*(j) + Q_m(j) \quad (9)$$

ここに、 $r, l$  は不圧層セル番号、 $m, m', m''$  は被圧層のセル番号、 $R, M$  は各層でのセルの総数、 $h_r(j), Q_r(j), W_r(j), Q_r^*(j)$  はそれぞれセル  $r$  の平均水量、揚水・人工涵養量、自然涵養量、境界流入量であり、 $L_{..}, B_{..}, E_{..}, F_{..}$  はそれぞれセル間の代表点距離、隣接幅、平均有効帯水層厚、帯水層頂部の平均標高である。 $A_r, A_{r,m}, A_{m',m}$  はそれぞれ不圧層セル  $r$  の面積、不圧層セル  $r$  と被圧層セル  $m$  の接触水平面積、被圧層セル間の接触水平面積、 $S_r, C_{..}, K_{..}, T_{..}, dt$  はそれぞれ、貯留係数、セル間の漏水係数、不圧層の透水係数、被圧層の透水量係数、単位期間の長さである。また、セルとセル外との境界条件として、(i) 山側境界においては、不圧層では境界水位を与え、被圧層では不透水層に囲まれているとみなし、水の移動を考えない。一方、(ii) 河川側境界においては、河川水位と浅層地下水水位差によってのみ浸透量が決まるものとする。(iii) 平野部・下流部境界においては、境界水頭を与えるものとする。このようにして、式(8)、(9)と境界条件により3次元 Multicell Model が構成される。

3.2 多層最適化手法によるパラメータ同定

地下水モデルのパラメータ同定として、観測井の水頭（水位）とモデルシミュレーションによる計算水頭（水位）との誤差ノルムの最小化をはかることと定義すると目的関数  $Z$  は

$$Z(S, K) = \sqrt{\sum_{j=1}^J \sum_{r=1}^R [h_r^o(j) - h_r^c(j)]^2} \rightarrow \min_{(S, K)} \quad (10)$$

となる。ここに、 $h_r^o(j), h_r^c(j), S, K, J$  は、それぞれ、セル  $r$  における第  $j$  期平均水頭の観測値、モデルシミュレーションにおける計算水頭、貯留係数ベクトル、統合された透水・漏水係数ベクトル、同定期間数である。式(10)より、目的関数は明らかに  $(S, K)$  に関する多変数高次元非線形関数である。地下水モデルにそのまま非線形最適化手法を適用して、直接、解くことも可能ではあるが、パラメータの増加に伴う計算の実行可能性に疑問があり、先述の多層最適化手法を適用して、パラメータの決定を行おう。

いま、目的関数を各セルに分割するために、(i) セル間の透水係数・漏水係数を擬似変数化し

$$K_{r,l} \text{ (原変数)} = \tilde{K}_{r,l} \text{ (擬似変数)} \quad (11)$$

とおき、(ii) 各セルの水頭も変数化および擬似変数化し、

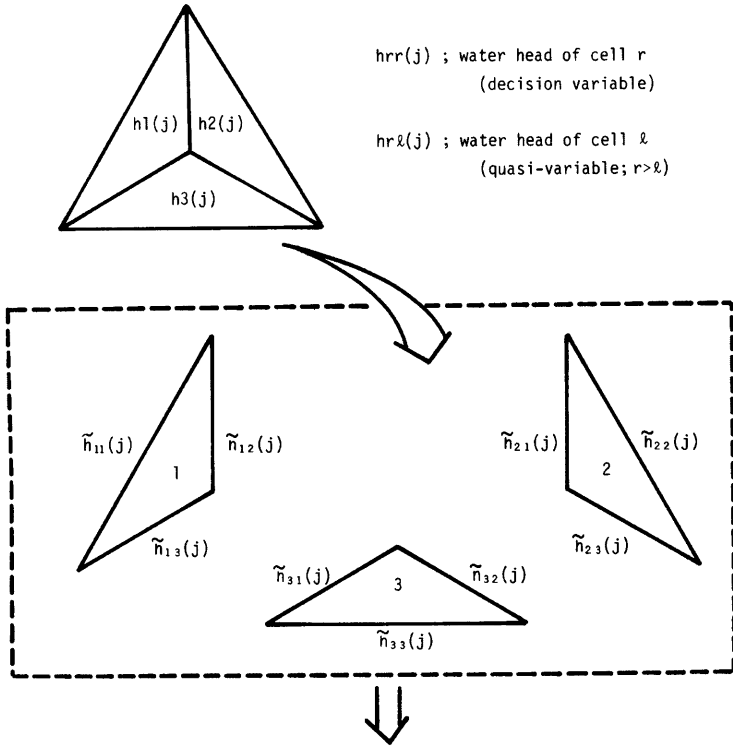
$$\tilde{h}_{r,r}(j) \text{ (原変数)} = \tilde{h}_{r,r}(j) \text{ (擬似変数)} \quad (12)$$

とする。前者は1期間内での空間的分割、後者は時間的なセル間の相互作用を遮断するもので時間的分割といえる。このとき、各セルの水頭（水位）の関係は Fig. 2 に示すようになる。結局、各セルを1個のサブシステムとすれば、サブシステム  $r$  の目的関数はラグランジュ乗数を導入して

$$Z_r = \sum_{j=1}^J [h_r^o(j+1) - V_r(j)]^2 + \sum_{(i+1)}^{j-1} \sum_{(i+1)}^{j-1} [\lambda_{r,i}(j+1) \cdot \tilde{h}_{r,r}(j+1) - \lambda_{r,i}(j+1) \cdot \tilde{h}_{r,r}(j+1)]$$

$$+ \sum_{l=r+1}^R \rho_{r,l} \cdot \tilde{K}_{r,l} - \sum_{l=1}^{r-1} \rho_{l,r} \cdot \tilde{K}_{l,r} + \sum_{j=0}^j \lambda_{r,r}(i+1) \cdot [\tilde{h}_{r,r}(j+1) - V_r(j)] \quad (13)$$

と表わすことができる。ただし、セルの順番は不圧層、被圧層で区別せず、不圧層より連続的に与えるもの



$$( h_1^c(j+1), h_2^c(j+1), h_3^c(j+1) )$$

Fig. 2 Decomposition of multicell model.

とし、 $\rho_{ri}$  は浸透係数・漏水係数に、 $\lambda_r$  は水位に関するラグランジュ乗数である。 $V_r(j)$  は計算上の水頭であり、不圧層、被圧層それぞれ次のようになる。

不圧層セル： $(r < a_1; a_1$  は順序づけられたセル集合での最初の被圧層の番号)

$$\begin{aligned}
 V_r(j) = & \tilde{h}_{rr}(j) + \frac{1}{A_r S_r} \cdot \left[ [W_r(j) - Q_r(j) + \sum_{i=r+1}^{a_1-1} K_{ri} \frac{\tilde{h}_{ri}(j) - \tilde{h}_{rr}(j)}{L_{ri}} \cdot W_{ri} \left\{ \frac{\tilde{h}_{ri}(j) + \tilde{h}_{rr}(j)}{2} \right. \right. \\
 & \left. \left. - (F_{ri} - E_{ri}) \right\} \cdot \Delta t + \sum_{i=1}^{r-1} K_{ri} \frac{\tilde{h}_{ri}(j) - \tilde{h}_{rr}(j)}{L_{ri}} \cdot W_{ri} \left\{ \frac{\tilde{h}_{ri}(j) + \tilde{h}_{rr}(j)}{2} - (F_{ri} - E_{ri}) \right\} \cdot \Delta t \right. \\
 & \left. + \sum_{i=1}^k K_{ri} \{ \tilde{h}_{ri}(j) - \tilde{h}_{rr}(j) \} \cdot A_{ri} \cdot \Delta t + \sum_{u=1}^v \bar{K}_{ru} \frac{h_{ru}^0(j) - \tilde{h}_{rr}(j)}{L_{ru}} \cdot W_{ru} \cdot \right. \\
 & \left. \{ h_{ru}^0(j) - (F_{ru} - E_{ru}) \} \cdot \Delta t + \sum_{u'=1}^{v'} \bar{K}_{ru'} \frac{h_{ru'}^0(j) - \tilde{h}_{rr}(j)}{L_{ru'}} \cdot W_{ru'} \{ h_{ru'}^0(j) - (F_{ru'} - E_{ru'}) \} \cdot \Delta t \right] \quad (14)
 \end{aligned}$$

被圧層セル： $(r \geq a_1)$

$$V_r(j) = \tilde{h}_{rr}(j) + \frac{1}{A_r S_r} \left[ -Q_r(j) + \sum_{i=1}^{a_1-1} \bar{K}_{ri} \{ \tilde{h}_{ri}(j) - \tilde{h}_{rr}(j) \} \cdot A_{ri} \cdot \Delta t \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=r+1}^R K_{r,i} \cdot SH_{r,i} \cdot \frac{\bar{h}_{r,i}(j) - \bar{h}_{r,r}(j)}{L_{r,i}} \cdot W_{r,i} \cdot \Delta t + \sum_{i=1}^{r-1} \bar{K}_{r,i} \cdot SH_{r,i} \cdot \frac{\bar{h}_{r,i}(j) - \bar{h}_{r,r}(j)}{L_{r,i}} \\
 & \left[ W_{r,i} \cdot \Delta t + \sum_{i=2}^U \bar{K}_{r,u} \cdot \{h_{u,u}^0(j) - \bar{h}_{r,r}(j)\} \cdot SH_{r,u} \cdot \Delta t \right] \dots\dots\dots (15)
 \end{aligned}$$

ここに、 $\bar{K}_{r..}$  は境界条件での浸透係数・漏水係数、 $SH_{r..}$  は被圧層の代表点間の平均層厚を表わしており、 $u, u', u''$  はそれぞれ 不圧層山側境界・不圧層平野部境界流入量、不圧層・河床浸透量、被圧層・平野部流入量をもつセルを意味し、 $U, U', U''$  は各境界セルの総数である。

次に、ラグランジュ乗数の改善は、時・空間に関する擬似変数が含まれているので、次式により決定される。

$$\lambda_{r,i}^{t+1}(j) = \lambda_{r,i}^t(j) + D_{r,i}^t \cdot [\bar{h}_{r,i}^t(j) - \bar{h}_{r,r}^t(j)] \dots\dots\dots (16)$$

$$\lambda_{r,i}^{t+1}(j+1) = \lambda_{r,i}^t(j+1) + D_{r,i}^t \cdot [\bar{h}_{r,i}^t(j+1) - V_{r,i}^t(j+1)] \dots\dots\dots (17)$$

$$\rho_{r,i}^{t+1} = \rho_{r,i}^t + D_{r,i}^t (K_{r,i}^t - \bar{K}_{r,i}^t) \quad (r < l) \dots\dots\dots (18)$$

$$\rho_{r,i}^{t+1} = \rho_{r,i}^t + D_{r,i}^t (K_{r,i}^t - \bar{K}_{r,i}^t) \quad (r > l) \dots\dots\dots (19)$$

したがって、式(13)～(15)の第1レベルと式(16)～(19)の第2レベルを繰り返し計算すれば、最適な地下水パラメータが決定される。

3.3 目的関数分割の特徴

目的関数を分割したことによる計算時の特徴を明らかにするために、Fig. 3 のような隣接セルを4個有する三角柱セルを考えよう。三角柱体を用いた流域分割において、1つのサブシステムで処理しなければならない変数としては、

- (i) 水平隣接部との透水係数……………3個
- (ii) 鉛直隣接部との漏水係数……………不圧層：1個，被圧層：最大2個
- (iii) 河川からの浸透係数……………不圧層：最大1個
- (iv) 貯留係数……………1個

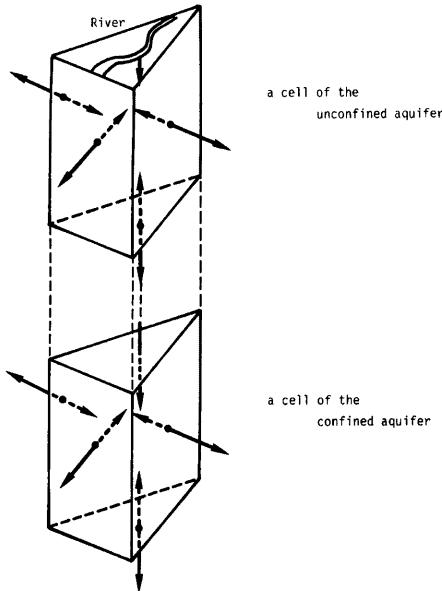


Fig. 3 Triangular prism of unit cell.

となり、1つのセルで5ないし6個のパラメータが必要になる。さらに、隣接セルの水頭を変数化するために、1期間当り最大6個の変数が追加される。ゆえに、同定期間がJの場合の決定変数の合計  $SUM_1(J)$  の最大値は

$$SUM_1(J) \cong 6 \cdot (J+1) \dots\dots\dots (20)$$

である。これに対して、もとのままの原問題と

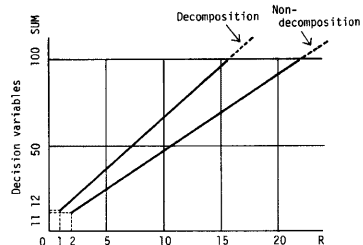


Fig. 4 Comparison of decision variable amounts between decomposition and non-decomposition methods.

して計算すると、上下2個の地下水層（2個のセル）ではその間の漏水係数が1つ減り、11個の決定変数になる。以後、不圧層あるいは被圧層セルが1つ追加されるごとに最大5個（上下2層になると1個減少する）の決定変数が必要となる。よって、不圧層、被圧層が共存するセル（総数  $R$ ）での決定変数の合計  $SUM_2(R)$  の最大値は、近似的に

$$SUM_2(R) \cong \frac{9}{2} \cdot R + 2 \dots\dots\dots (21)$$

より求められる。Fig. 4 は適用時に用いる京都大学大型計算機センターのライブラリー COMPLEX（非線形最適化手法）の可能範囲である決定変数 100 個を目安として両者を比較したものである。分割する場合は、16ヵ月同定で、分割しない場合は、セル数が22で限界となる。したがって、セル数が20以下で期間が20以上にわたる長期の同定問題では、モデルの分割化はあまり必要なく、かえって決定変数を増加させることがわかる。しかし、12ヵ月程度を対象とし、セル数が20以上になると、モデルを分割し同定する方が計算の実行可能性が高まってくる。とくに、流域を細分化し、揚水・涵養といった利用方法や地形・地質によるパラメータ値の相違を知りたい問題に対しては、本分割化手法が有効であろう。

#### 4. 奈良盆地における適用例

##### 4.1 流域の概要

地下水モデルのパラメータ同定に関する適用流域として、奈良市、大和郡山市、天理市より構成される奈良盆地の一部（約 108 km<sup>2</sup>）を取り上げよう。Fig. 5 は流域の概略と分割方法を示している。不圧層のみを2個のセルに分割し、被圧層が1個である。セル1とセル2（不圧層）は、それぞれ中央に河川を持ち、そこから帯水層への透水係数を同定パラメータとしている。また、セル1, 2, 3とも各境界との透水係数を同定パラメータとして扱っており、セル1と2の境界にある高瀬川からの透水係数は各々のセルに対し固有のパラメータとして処理している。さらに、セル1と2の間の透水係数ならびにセル1と3、セル2と3の間の漏水係数および各セルの貯留係数も同定パラメータとしている。なお、用いるデータは、昭和53年10月から54年10月までの13ヵ月にわたる月単位データであり、欠測値については次のような補正を行った。

(i) 浅層における鉛直涵養量に関するデータ

降雨による涵養率  $\alpha$  を0.31とし<sup>9)</sup>、奈良における月降雨量データ  $RAIN(j)$  を用いて、セル1, 2の鉛直涵養量  $W_r(j)$  を

$$W_r(j) = RAIN(j) \cdot A_r \cdot \alpha \quad (r=1, 2) \dots\dots\dots (22)$$

として評価した。ここに  $A_r$  はセル  $r$  の流域面積である。

(ii) 揚水量に関するデータ

各セルごとの揚水量データを集めることができなかったため、昭和50年の深層・浅層別年次揚水量より<sup>9)</sup>、各都市間の揚水量比を設定した。そして、大和郡山市昭和浄水場の月揚水量データ  $q'(j)$  をもとに、大和郡山市の揚水量  $q(j)$  を

$$q(j) = 1.60 \cdot q'(j) \dots\dots\dots (23)$$

とし、大和郡山市、奈良市、天理市の揚水量換算をそれぞれ、

不圧層からの揚水量：

$$\left. \begin{aligned} QY(j) &\cong 0.0201 \cdot q(j) \\ QN(j) &\cong 0.0007 \cdot q(j) \\ QT(j) &\cong 0.0462 \cdot q(j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

被圧層からの揚水量：

$$\left. \begin{aligned} Q\bar{Y}(j) &\cong 1.401 \cdot q(j) \\ Q\bar{N}(j) &\cong 0.492 \cdot q(j) \\ Q\bar{T}(j) &\cong 0.449 \cdot q(j) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (25)$$

より求め、各セルの月揚水量を決定した。

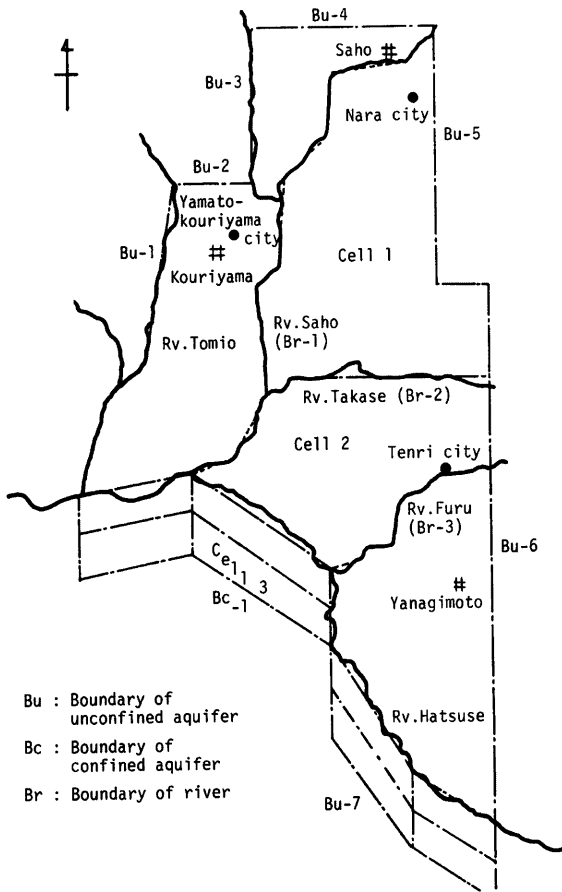


Fig. 5 Cubic representation of river basin and aquifer.

4.2 結果と考察

(1) パラメータ同定

同定期間としては、境界条件の安定している11月~1月の3ヶ月を選んだ。Table 1 は同定されたパラメータ値である。反復計算による多層適化手法の1つの欠点として、表中の透水係数にみられるように、原変数と擬似変数とが完全に一致しないことがある。ここでは、

(i) 原変数と擬似変数との同定値に大きな差異がない場合は、これらの平均値をとる。

(ii) 得られた同定値のまわりに変数の定義域をより狭く再定義し、新たなステップ幅をもってパラメータ最適化を再度実行する。

といった方法によって、最終的な決定を行った。表をみると、セル1に関する値が、一般の物理定数より大きく出ている。その原因として、セル内の河川やため池のモデル化が十分になされていないこと、および、境界条件の設定の粗さがあげられよう。Fig. 6 は Multicell Model による再現シミュレーションの結果である。最初の半年程度の再現性はかなり良好であるのに対して、後半は極端に悪くなっ

Table 1 Identified parameter values.

(1) 0.188 $S_s$ (2) 0.247 (3) 0.196	(cm/sec) (1, 2) 0.465E-3 $K_{r1}$ (1/sec) (2, 3) 0.313E-9 {(3, 1) 0.319E-9}	(cm/sec) (2, 1) 0.543E-3 $\tilde{K}_{1r}$ (1/sec) (3, 2) 0.129E-9 {(1, 3) 0.134E-9}
$K_{ru}$ (cm/sec)	(1, 1) 0.280E-3 (1, 2) 0.425E-3 (1, 3) 0.280E-3 (1, 4) 0.425E-3 (1, 5) 0.425E-3 (2, 6) 0.310E-3 (2, 7) 0.697E-6	(1, 1) 0.511E-3 (1, 2) 0.231E-3 $K_{ru'}$ (cm/sec) (2, 2) 0.991E-6 (2, 3) 0.966E-6
		$\tilde{K}_{ru''}$ (cm/sec) (3, 1) 0.340E-3



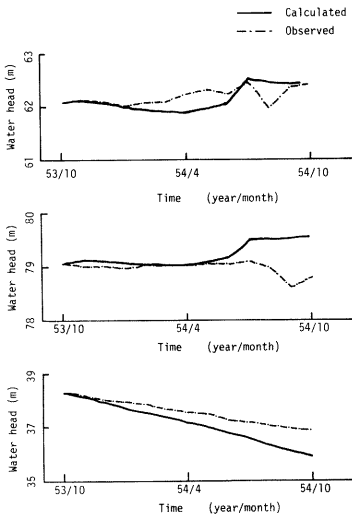


Fig. 6 Simulation results of groundwater systems (I).

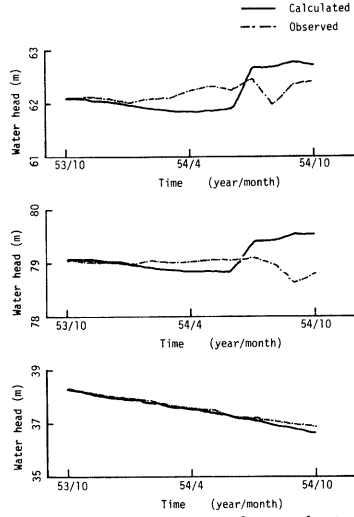


Fig. 7 Simulation results of groundwater systems (II).

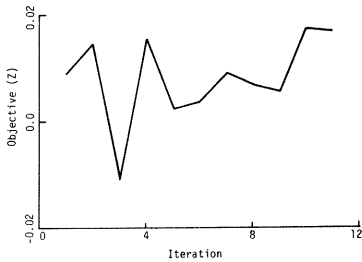


Fig. 8 Convergence process of Lagrange function (Identification model).

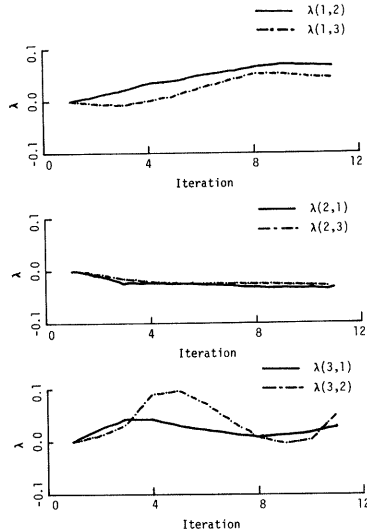


Fig. 9 Convergence process of Lagrange multipliers.

ている。同時期かんがい湛水期にあたることから、水田から地下水への涵養機構を考慮する必要がある、次のように行った。

(2) かんがい期における水田涵養量の設定

奈良盆地での水田の占有率をセル 1, 2 とも 50%としよう。また、水田における非かんがい期とかんがい期の涵養量をみると、かんがい期/非かんがい期 $\approx 4.681$ となっているので、非かんがい期の涵養量  $QW$  に対応するかんがい期の涵養量  $QW'$  は

$$QW' = 2.84 \cdot QW \dots\dots\dots (26)$$

より得られる。なお、水収支からすると、降雨の涵養率が0.31では大きすぎるので、以後の適用では  $\alpha =$

0.13とした。

Fig. 7 は鉛直涵養量を取り入れた同定パラメータでの再現シミュレーションである。パラメータ値に変化があるのは当然であるが、セル 3 では大幅な改善が行われており、涵養機構を導入した効果が表われている。さらに、セル 1, 2 でも平均的にみて水位が合致しており、同定が良好な方向に進んでいるのがわかる。

### (3) ラグランジュ関数の収束過程

多層最適化手法による収束過程について考察を加えよう。Fig. 8 はラグランジュ関数の動きを示したものであり、長期的には増加傾向を示し、最適値への接近がうかがえる。ラグランジュ乗数やパラメータについても同様の動きがみられる (Fig. 9 参照)。だが、サブシステムの目的関数値には収束がうかがえない。このことは、ラグランジュ関数が常に鞍点近傍にあり、原変数と擬似変数の一致に重点的な努力が払われた結果であろう。真の最適解に近づけるためには、ラグランジュ乗数に応じてステップ幅を細かく変化させたり、非線形最適化プログラムの収束判定条件を厳しくしていくことが必要であろう。

## 5. 流域水資源システムの最適運用

### 5.1 流域水資源システム概念

流域水資源システムとは、対象とするいくつかの流域を 1 つのシステムとみなし、降雨から流出までの水循環に関与する自然システムと人間活動で表わされる人為システムなどの構成要素を含めた複雑かつ大規模な有機的構成体といえよう。これを、直接使用可能な資源としてとらえれば、(i) 河川、ダム貯水池、配水システムで代表される地上システムと、(ii) 不圧もしくは被圧の帯水層である地下システムより構成されている。また、これら部分システム間は、涵養あるいは揚水によって有機的に結合されている。さらに、降水や境界流入、蒸発散によって外部システムと密接な関係を保っている。したがって、人為作用のモデル化とその人為作用を管理・運用していくに必要な精度をもった自然現象のモデル化が要求される。もし、月単位レベルでの運用を考えると、地上システムでは河道や貯水池のミクロな水解析は不要になる。地下システムにおいても同様のことがいえるが、涵養や揚水による地下水位の変動を把握しなければならないことはいうまでもない。こうした点より本研究では、河川流量は等ボリューム流下、ダム貯水池水位は各時間ステップの期首 (もしくは期末) での瞬時変化とし、地下水は前出の 3 次元 Multicell Model を用いてシステムの構成をはかることにする。

### 5.2 線形応答関数 (ATF) の導入

Multicell Model をそのまま適用することは、セル数の増加に伴って定式化が複雑になり、計算時間が増加する。そこで、Multicell Model による地下水情報を利用し、運用モデルへの結合が容易な方法として、線形応答関数 (Algebraic Technological Function; 以後 AFT と呼ぶ)<sup>7)</sup> があり、次のように適用できる。

ATF は、本来、時間の連続関数であるが、実際の取り扱い上期間単位ごとに離散化をほどこし、 $\beta(e_1, e_2, j-jj+1)$  で表わされる。 $\beta(\cdot)$  は “井戸  $e_1, e_2$  について第  $jj$  期に井戸  $e_2$  で単位の揚水を実施したときに、第  $j$  期末において井戸  $e_1$  で予測される水位低下量” である。この低下量は Multicell Model をシミュレートすることによって得られる値である。したがって、 $\beta$ -関数を用いれば、第  $j$  期末の井戸  $e_1$  の水位低下量  $D(e_1, j)$  は

$$D(e_1, j) = \sum_{e_2=1}^E \sum_{jj=1}^j \beta(e_1, e_2, j-jj+1) \cdot q(jj, e_2) \dots\dots\dots (27)$$

となる。ここに、 $E$  は流域内の井戸の総数、 $q(jj, e_2)$  は流域内の井戸  $e_2$  で第  $jj$  期中に行う揚水量 ( $\geq 0$ ) である。

一方、人工涵養に対する ATF は負の  $\beta$  とみなし

$$\beta(e_1, e_2, j-jj+1) = -\beta(e_1, e_2, j-jj+1) \dots\dots\dots (28)$$

とおく。ただし、現段階の実験データでは、涵養井の日づまり現象による涵養能力の低下が時間的に大きい

ことが示されており、影響する時間的範囲も  $\beta(\bullet)$  より狭いことが予想される。いま、計算開始前の井戸  $e1$  の水頭を  $H(e1, 0)$  とすると、第 1 期以前の揚水・涵養の影響が以後の期間にわたって回復していくことになり、第  $j$  期末の水頭は

$$\begin{aligned}
 H(e1, j) = & H(e1, 0) - \sum_{e_2=1}^E \sum_{jj=1}^j [\beta(e1, e2, j-jj+1) \cdot q(jj, e2)] \\
 & + \beta'(e1, e2, j-jj+1) \cdot v(jj, e2) + \sum_{e_2=1}^E \sum_{jj=0}^{-TB} [\tilde{\beta}(e1, e2, j-jj+1) \cdot q(jj, e2)] \\
 & + \tilde{\beta}'(e1, e2, j-jj+1) \cdot v(jj, e2) \dots\dots\dots (29)
 \end{aligned}$$

より求められる。ここに、 $v(jj, e2)$  は流域内の井戸  $e2$  で第  $jj$  期に涵養する水量、 $TB$  はATF としての  $\beta(\bullet)$  の存在限界、いいかえると影響期間、右辺の第 3 項目の和集合は計算開始以前の揚水・涵養によって井戸  $e1$  で生じる第  $j$  期末の回復量を表わし、 $\tilde{\beta}(\bullet)$  は次式より得られる。

$$\begin{aligned}
 & j-jj+1 \leq TB, (jj \leq 0): \\
 & \left. \begin{aligned} \tilde{\beta}(e1, e2, j-jj+1) &= \beta(e1, e2, 1-jj) - \beta(e1, e2, j-jj+1) \\ \tilde{\beta}'(e1, e2, j-jj+1) &= -\hat{\beta}(e1, e2, j-jj+1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30) \\
 & j-jj+1 > TB, (jj \leq 0): \\
 & \left. \begin{aligned} \hat{\beta}(e1, e2, j-jj+1) &= \beta(e1, e2, 1-jj) - \beta(e1, e2, TB) \\ \hat{\beta}'(e1, e2, j-jj+1) &= -\hat{\beta}(e1, e2, j-jj+1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (31)
 \end{aligned}$$

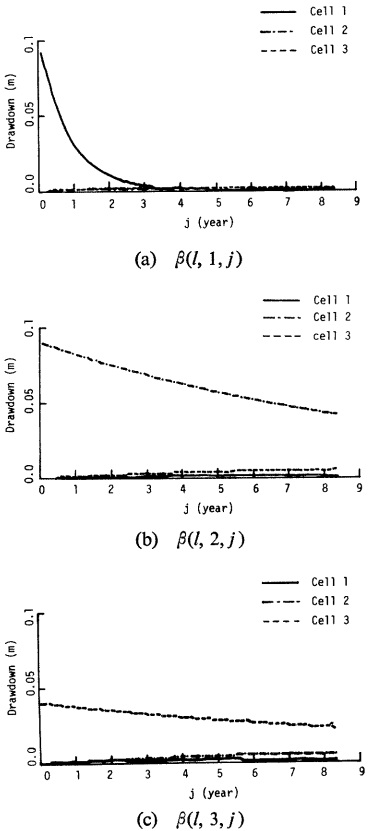
**Fig. 10** は 4. で同定した奈良盆地での  $\beta$ -関数である。セル 1 の井戸 (同図 (a)) では、セル 1 に対して 3 年程度の影響範囲があるが、他のセルに対してはほとんど影響が見られない。これは、井戸間の距離が大きく井戸の影響圏をはるかに越えているためであり、逆に遅延効果を伴って波及するようである。他の井戸の結果からも同様のことがいえる。また、単位揚水量を  $1.0 \times 10^6 \text{ m}^3$  から  $1.0 \times 10^7 \text{ m}^3$  に変化させたときも同じ曲線が得られており、ATF の重ね合わせが成立することがうかがえる。

**5.3 運用モデルへの適用**

本節では、**Fig. 11** に示すような 1 個のダムを有するダム一表流水システムと単一セルの地下水システムより成る代表的な流域水資源システムを考え、最適運用モデルの解法を議論しよう。運用目的には、各操作期間での費用一便益 ( $ZS_j(\bullet)$ ) の最小化を用いるとして、次のように定式化する。

目的関数：

$$\begin{aligned}
 & Z(X, V, Q, SD) \\
 & = \sum_{j=1}^j ZS_j(X(j), V(j), Q(j), SD(j)) \\
 & = \sum_{j=1}^j [A \cdot X^2(j) + B \cdot V^2(j)] \\
 & + P \cdot [H(0) + \sum_{jj=-TB}^j \beta(j-jj+1) \cdot (Q(jj) \\
 & - V(jj)) \cdot Q(0)] \longrightarrow \min \dots\dots (32)
 \end{aligned}$$



**Fig. 10 Algebraic Technological Function.**

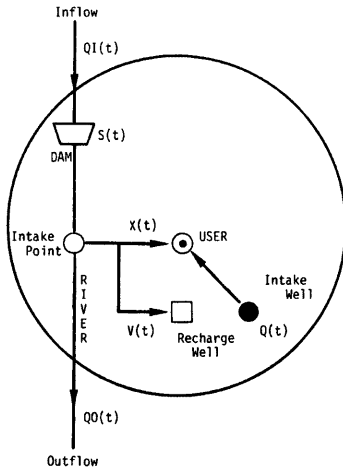


Fig. 11 Model basin.

Table 2 Information of input data.

Constraints			
$2.5 \times 10^7 \leq S(t) \leq 10.0 \times 10^7 \text{ (m}^3\text{)}$			
$0 \leq X(t) \leq 10.0 \times 10^6 \text{ (m}^3\text{/month)}$			
$0 \leq Q(t) \leq 5.0 \times 10^6 \text{ (m}^3\text{/month)}$			
$0 \leq V(t) \leq 1.5 \times 10^6 \text{ (m}^3\text{/month)}$			
$65.0 \leq H(t) \leq 70.0 \text{ (m)}$			
$2.5 \times 10^6 \leq X(t) + Q(t)$			
$S(0) = 7.5 \times 10^7 \text{ (m}^3\text{)}$			
$H(0) = 67.5 \text{ (m)}$			
Input data ( $\times 10^6 \text{ m}^3\text{/month}$ )			
t	QI (t)	t	QI (t)
1	2.5	7	5.0
2	2.5	8	1.0
3	2.5	9	5.0
4	3.0	10	3.0
5	3.0	11	2.5
6	6.0	12	2.5

制約条件：

$$\left. \begin{aligned} 0 &\leq X(j) \leq X \text{ MAX} \\ 0 &\leq V(j) \leq V \text{ MAX} \\ 0 &\leq Q(j) \leq Q \text{ MAX} \\ S \text{ MIN} &\leq SD(j) \leq S \text{ MAX} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

(ii) 連続条件

$$X(j) + V(j) + QO(j) = SD(j-1) + QI(j) - SD(j) \dots\dots\dots (34)$$

(iii) その他

$$D \text{ MIN} \leq X(j) + Q(j) \dots\dots\dots (35)$$

$$H \text{ MIN} \leq H(0) + \sum_{jj=-\tau_B}^j \beta(j-jj+1) \cdot [Q(jj) - V(jj)] \leq H \text{ MAX} \dots\dots\dots (36)$$

ただし、 $SD(j)$  は第  $j$  期末のダム貯水量、 $QI(j)$  はダムへの流入量、 $QO(j)$  は流域下流端での河川流量であり、他の変数は前出と同じ意味をもち、番号を表わす添字を省略している。次にシステムの分割のために涵養量ならびに揚水量に擬似変数を導入し、それぞれ  $SV(i)$ 、 $SQ(i)$  とすると、ダム一表流水系の制御目的  $ZD$  は

$$ZD = A \cdot \left\{ \sum_{j=1}^j X(j)^2 \right\} - \sum_{j=1}^j (RV(j) \cdot SV(j) + RQ(j) \cdot SQ(j)) \longrightarrow \min \dots\dots\dots (37)$$

となる。ここに、 $RV(j)$ 、 $RQ(j)$  は涵養量と揚水量に対するラグランジュ乗数である。これに対して地下水系の制御目的  $ZG$  は

$$\begin{aligned} ZG = & B \cdot \left\{ \sum_{j=1}^j V(j)^2 \right\} + \sum_{j=1}^j [P\{H(0) + \sum_{jj=-\tau_B}^j \{\beta(j-jj+1) \cdot (Q(jj) - V(jj))\} \cdot Q(jj)] \\ & + \sum_{j=1}^j \{RV(j) \cdot V(j) + RQ(j) \cdot Q(j)\} \longrightarrow \min \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

となる。もちろん、式(33)~(36)の制約条件も各部分システムに対応して分かれて加わっている。以上が第1レベルで解かれるべき2つのサブシステムであり、第2レベルにおけるラグランジュ乗数の改善は次のようになる。

$$RV(j)^{k+1} = RV(j)^k + \Delta T * (V(j)^k - SV(j))^k \dots\dots\dots (39)$$

$$RQ(j)^{k+1} = RQ(j)^k + \Delta Q^*(Q(j)^k - SQ(j)^k) \dots\dots\dots (40)$$

Table 2 はこうした流域水資源システムの適用に用いた入力と定数である。ただし、 $QO(j)=0$  と設定した。また、運用範囲が12期間と短いので、ATFを次のような指数関数で近似した。

$$\beta(j) = 10 \cdot \exp\left\{\frac{1}{6} \ln(0.25) \cdot (t-1)\right\} \dots\dots\dots (41)$$

Table 3 Solution of management model.

ITERATION NO.=7						
T	X (T)	S (T)	V (T)	SV (T)	Q (T)	SQ (T)
1	1.150	75.000	0.001	0.0	2.468	1.350
2	2.222	75.000	1.286	0.0	2.253	0.278
3	1.165	73.943	1.032	1.057	1.551	1.335
4	0.0	71.722	1.473	2.221	3.362	2.500
5	0.0	70.000	2.246	2.222	0.861	2.500
6	1.721	70.000	1.337	0.500	2.106	0.779
7	0.0	71.278	1.550	2.221	3.598	2.500
8	2.221	73.778	0.920	0.0	2.386	0.279
9	0.0	70.057	1.160	2.221	2.190	2.500
10	1.386	71.721	1.639	0.836	1.491	1.114
11	0.0	70.000	0.0	2.221	2.196	2.500
12	2.222	69.999	1.009	0.0	1.399	0.278

Table 3 は反復回数7回で収束したとした場合の制御解であり、Fig. 12 はラグランジュ関数の動きを示したものである。ラグランジュ関数は大きく振動しているものの、全体の傾向として増加していくのがわかる。また、表より明らかなように原変数と擬似変数間の相互均衡原理が十分に満たされていない。この原因には、解が鞍点近傍にあり、しかも解曲面が平面に近いことや擬似変数が多くて収束しにくいことがあげられよう。制御解において、実涵養量・揚水量を原変数と擬似変数の平均値とするならば、河川表流水の増加に呼応するように河川からの取水量が増加しているといえる。揚水量も取水量に相対する動きを示し、利用水量の補充を行うと同時に、涵養量は取水量と揚水量の中間的な動きをする傾向がある。こうした運用パターンを多数算出することによって、河川流量の変化に対する地下水の涵養・揚水指針が抽出され、実用的な流域水資源の運用計画が得られよう。

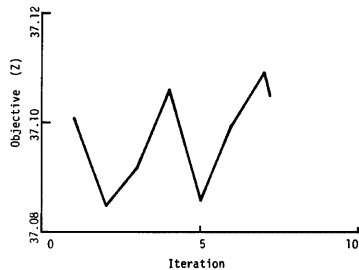


Fig. 12 Convergence process of Lagrange function (management model).

## 6. 結 語

本研究は、流域水資源の効率的な活用を達成するために、多層最適化手法に基づく地下水パラメータの同定法ならびに地下水と河川表流水との有機的運用法を明らかにしたものである。ここで、得られた成果を要約すると以下ようになる。

(i) モデルパラメータ同定法の確立

3次元 Multicell Model による地下水システムモデルの構成とそのパラメータ同定法を確立し、最適化理論に裏付けられたパラメータ値の同定を可能にした。

(ii) 最適運用政策の定式化

3次元 Multicell Model の応答をもとに線形応答関数を抽出し、流域水資源システムの運用モデルを最適化問題として構成した。

(iii) 多層最適化手法の有効性の確認

簡略化された流域ではあるが、パラメータ同定および最適運用モデルを例示し、多層最適化手法の有効性を明らかにした。と同時に、適用より本手法の限界に関しても定性的評価を得た。このことは、地下水モデルに限らず、本手法を分布型モデルのパラメータ同定に拡張する場合の有効性および限界性を示唆している。一方、今後の課題としては次の事項が挙げられる。

(iv) 詳細な地下水モデルの導入

大規模流域の第1次分割として3分割でのモデル構成を行ったが、多層最適化手法が有利とされる20以上の分割に対して適用し、その特性を求める必要がある。さらに降雨涵養率の決定変数化、水田涵養量の精密化、河川境界条件の詳細なモデル化など、地下水の物理現象をより正確に組み入れることも重要である。これは、他の地下水モデルの導入とともに検討すべきであろう。

(v) ラグランジュ乗数改善法の決定

ラグランジュ関数の変動をもとに、ラグランジュ乗数の改善幅のもつ意味を明らかにしたが、常に最適解に到達するには、ラグランジュ関数に対する各パラメータの感度分析を行い、改善幅の設定に一定法則を見出すことが必要である。

以上のような諸問題の解決とともに、多数の流域への適用を通じて本研究の有効性が確認され、将来、多変数最適化手法によるパラメータ同定・最適運用政策の理念が生かされることを期待したい。

#### 参 考 文 献

- 1) 池淵周一・嶋田善多：濁水の地域的特性とその要因構造分析，京大防災研究所年報；25号 B-2，1982，pp. 297-315.
- 2) Wismer, D. A.: Optimization Method for Large-scale Systems with Applications, McGraw-Hill, 1971, pp. 1-45.
- 3) Haines, Y. Y.: Hierarchical Analyses of Water Resources Systems, McGraw-Hill, 1977, pp. 59-88.
- 4) 関根泰次：数理計画法，岩波書店，1981，pp. 177-193.
- 5) 紫崎達雄 編：地下水益の管理〔理論と実際〕，東海大学出版会，1976，pp. 77-130.
- 6) 建設省河川局：奈良盆地水管理計画調査報告書，1978.
- 7) Dreizin, Y. C.: Applications of the Superposition Approach to the Modeling and Management of Ground and Surface Water Resources, Systems Eng. Dept., Case Western Reserve Univ., 1975, pp. 30-109.