

複合流域における洪水流出の確率予測手法

高棹 琢馬・椎葉 充晴・宝 馨

A STOCHASTIC METHOD OF REAL-TIME FLOOD PREDICTION IN A BASIN WHICH CONSISTS OF SEVERAL SUB-BASINS

By *Takuma TAKASAO, Michiharu SHIIBA and Kaoru TAKARA*

Synopsis

The authors propose a stochastic method of real-time flood prediction in a basin which consists of several sub-basins. As a case study, they deal with the Fukuchiyama basin (1350 km²) which consists of five sub-basins; it is described as a stochastic state-space model based on the existing flood prediction model of the Yura river in Japan. To compensate both model error and observation error, continuous colored system noise and discrete white observation noise are incorporated in the model. It is recommended that the covariance matrices of these noises are correlated with the states.

The method presented here is useful in real-time prediction of flood runoff.

1. 序 論

本研究は、複合流域における洪水流出の実時間確率予測手法の検討を目的とするものである。ここでいう複合流域とは、複数の分割流域からなる比較的大きな流域であり、数百～数千 km² の流域を想定している。

さて、洪水流出の予測は、降雨予測と洪水流出モデルによって行われるが、一般には予測流量と観測流量とは異なる。この差は、モデルの不完全さと、降雨流量観測の誤差に起因する。したがって、流出モデルを決定論的に扱うより、それらの誤差を補償するノイズを導入して確率過程的 (stochastic) モデルを構成する方が合理的である。また、時々刻々得られる雨量・流量のデータを活用していくことも必要である。

このような観点に立って、筆者らは、流出システムを非線形連続時間状態推移-離散時間観測システムとして、確率過程的状態空間型流出モデル (stochastic state-space runoff model) で表現し、これを基本として洪水流出を実時間で確率的に予測してゆく方法を検討してきた^{1), 2), 3), 4)}。この方法は、Kalman のフィルタリング・予測理論を応用したものであるが、状態量・出力の予測値だけでなく、その予測誤差の共分散行列をも逐次的に求めることができる。流出予測の場合に限らず、“予測”を取扱う場合にはその確からしさを明らかにすることも重要である。

本研究は、筆者らの従来の研究を引き継ぐものであるが、以下に示すような諸点を新たに考慮した。

- (1) 従来はただか数百 km² 程度の面積のいわゆる単一流域を対象にしたのに対し、本研究では複数個の単一流域からなる複合流域として面積約 1350 km² の由良川福知山上流域を対象とする。
- (2) 流量観測については、従来は 1 観測点のみで毎時欠測なしに観測されるとしているのに対し、今回は複数の観測点において欠測を含む観測値が得られることを想定している。
- (3) 降雨予測については、現在、建設省等の現場業務でよく用いられる 3 時間移動平均法を用いる。ただし、降雨予測誤差の時空間相関をも考慮する。
- (4) 流出モデルとしては、由良川における現行の洪水流出モデル (貯留関数法の組み合わせで、4 流域 2 河道からなる) をベースとして、それを統合し状態空間モデルとする。

(5) 確率過程の状態空間モデルのモデル誤差を補償するシステムノイズは、従来は離散的な扱いをしてきたが、今回は連続的な有色性をもつノイズとする。

以上のような新たな試みを導入した予測手法を検討する。

次章以後の本論文の構成は次のようである。

2. では複合流域における洪水流出の実時間確率予測の一般的な手法を述べる。3. では由良川流域の現行洪水予測モデルを示しそれを状態空間表示する。4. では、その状態空間モデルにシステムノイズ・観測ノイズを導入することにより確率過程的に取扱い、2. の手法の具体的な適用の仕方を述べる。5. では、その適用例を示し考察する。6. で結論を述べる。

2. 複合流域における洪水流出予測の手法

2.1 複合流域の統合的モデル

数百 km² 以上の面積をもつ流域では、洪水到達時間が長いことや降雨の空間的分布を考慮する必要があることなどから、もはや単一の流出モデルで流出解析を行うことにはかなりの無理が生じる。したがって、そのような大きな流域では、複数のサブシステムに分割したのち、それらを統合して取扱われるのが普通である。

最も細かく分割すれば、個々の斜面系・河道系を考慮してゆくことになる。ここでは、 D 個の分割流域(面積数十km²~数百km²)と M 個の河道をサブシステムとして持つ流域を考えることにする。サブシステムに番号をつけ、1番目~ D 番目が分割流域、 $D+1$ 番目~ $D+M$ 番目が河道に相当するものとする。第 j 番目のサブシステムが S_j 個の状態量で表現されるとし ($j=1, 2, \dots, D+M$)、各サブシステムの状態ベクトルを x^j 、分割流域への入力(降雨)を r_i ($i=1, \dots, D$) とする。以後、行列転置記号を T と書くことにして、

$$\begin{aligned} x^j &= [x^j_1, \dots, x^j_{S_j}] \\ r &= [r_1, \dots, r_D]^T \end{aligned}$$

とし、さらに

$$x = [x^1, \dots, x^{D+M}]^T$$

と書くことにすれば、流域全体の状態の推移は、

$$\dot{x} = f(x, r, t), \quad t \geq t_0 \dots \dots \dots (2.1)$$

で表わせる。ここに、 f は一般に非線形のベクトル値関数で、 t は時間 (t_0 は初期時刻)、ドット ($\dot{}$) は時間微分 d/dt を表す。 x は列ベクトルで、次数

$$N_x = \sum_{j=1}^{D+M} S_j$$

をもつ。(2.1)式によって大規模な流域における状態の推移が統合的に表された。

流域内に流量観測点が J 個あり、観測時刻 t_k における流量は状態量の関数で表されるとすると、

$$y = g(x, t_k), \quad k=1, 2, \dots \text{ で } t_0 < t_1 < \dots \dots \dots (2.2)$$

ただし、 y は観測ベクトルで

$$y = [y_1, \dots, y_J]^T$$

ここに、 y_i は第 i 番目の観測点の流量を表し、 g は一般に非線形のベクトル値関数である。

結局、統合的モデルとして、(2.1)、(2.2)式からなる状態空間表現が可能である。

2.2 確率過程的状态空間モデル

(2.1)、(2.2)式の形の状態空間モデルを確率過程的に扱う。すなわち、モデル誤差・観測誤差を補うノイズを導入する。

筆者らの従来の方法では、システムノイズ・観測ノイズともに離散的に扱っており、(2.1)式を

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, r, t), \quad t_{k-1} \leq t < t_k \\ x(t_k) &= x(t_k^-) + w_{tk} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2.3)$$

(2.2)式を

$$y(t_k) = g(x(t_k), t_k) + v_{t_k} \dots\dots\dots (2.4)$$

としている。ここに、 w_{t_k} はシステムノイズ、 v_{t_k} は観測ノイズである。

本研究では、(2.3)式における離散的ノイズにかえて、以下のような N_p 次の連続的ノイズ p を導入する。すなわち、 $\dot{x} = f(x, r, t) + Gp, t \geq t_0 \dots\dots\dots (2.5)$

で、 G は $N_x \times N_p$ の定行列である。 p は、第 i 成分を p_i として ($i=1, \dots, N_p$)

$$\dot{p}_i(t) = -c_{p_i} p_i(t) + c_{p_i} \sqrt{q_i} w_i(t), t \geq t_0 \dots\dots\dots (2.6)$$

で表されるようなノイズとする³⁾。ただし、 p_i は互いに独立である。また、 c_{p_i}, q_i は正の固定した値であり、 $w_i(t)$ は互いに独立かつ分散1をもつ連続正規白色過程である。

$t_j \leq t < t_{j+1}$ の間の p_i の推移を考えよう。ただし、 $t_0 \leq t_{k-1} \leq t_j < t_{j+1} \leq t_k$ とする。 $p_i(t_j)$ は $w_i(t)$ とは独立であって

$$p_i(t_j) \sim N(0, q_i \cdot c_{p_i} / 2) \dots\dots\dots (2.7)$$

なる確率分布をもつとする。(2.6)式を t_j から t_{j+1} まで解いて ($t_j + dt = t_{j+1}$)、結局その間の p_i の推移は次式で与えられる。

$$p(t_{j+1}) = M p(t_j) + W(t_j) \dots\dots\dots (2.8)$$

ここに、 W は N_p 次列ベクトルでその第 i 成分は、

$$W_i(t_j) = c_{p_i} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \exp\{-c_{p_i}(t_{j+1} - \eta)\} \sqrt{q_i} w_i(\eta) d\eta \dots\dots\dots (2.9)$$

となる。また、

$$M = \begin{bmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_{N_p} \end{bmatrix}, \xi_i = \exp(-c_{p_i} \cdot dt) \dots\dots\dots (2.10)$$

で、このとき、

$$\begin{aligned} E\{W(t_j)\} &= 0 \\ E\{W(t_j)W^T(t_j)\} &= \left. \begin{aligned} &\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma_{N_p}^2 \end{bmatrix} = Q_{t_j} \\ &\sigma_i^2 = c_{p_i} \cdot q_i (1 - \xi_i^2) / 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11) \end{aligned}$$

となる。(2.6)式で表されるノイズは連続的な有色ノイズ (colored noise) である。

2.3 確率過程の流出予測における降雨の取扱い

流域内の状態の推移は(2.5)式で表わされるが、システム入力⁴⁾の降雨 r も実は観測誤差 (さらには面積雨量の推定誤差) をもつ不確定変量と考えるべきである。しかしながら、観測された降雨は誤差を含まないとして扱われる場合がほとんどである。これは、現状では降雨観測 (あるいは面積雨量推定) の誤差評価がむずかしいことと、入力降雨をそのように確率的に扱う流出解析法が、解析の煩雑さもあってか、あまり考慮されてこなかったことに起因している。

本研究でも観測降雨は誤差を含まないとする。というのは、流出予測には降雨予測が必要であるが、観測降雨を基準としてそれからの予測降雨の偏差を降雨予測の不確定性としてとり入れたいからである。したがって、本研究では観測降雨は誤差を含まず、予測降雨は何らかの誤差をもつ確率変量であるとして扱う。

さて、いま時刻 t_{k-1} にいるとして、時刻 t_k の流量を予測しようとする、 $t_{k-1} \sim t_k$ の間の降雨予測が必要である (ただし、後で述べるように、木村の貯留関数法の遅滞時間 T_l の概念を導入した流出モデルをベースとする場合はこの限りではなく、 T_l 以下のリードタイムの流量予測は観測降雨を用いて実行できる)。予測降雨を確率変量として扱うことに関して、単一流域の場合と異なり、複合流域の場合に面倒なことは、各分割流域における予測降雨どうしの相関を考慮せねばならないことである。さらに、 $t_{k+1}, \dots, t_{k+L-1}$ まで

の予測 ($L \geq 3$) を求めようとする、上で述べた予測降雨の空間的 (分割流域間の) 相関のみならず時間的相関も考慮する必要がある。

分割流域が D 個あって $L \cdot DT$ 時間先まで (DT は流量観測時間間隔, 一定値とする) の流出予測を行う場合には, $N_r = D \times L$ 個の予測降雨とその共分散が必要となるのである。第 i 流域の $j \cdot DT$ 時間先の予測降雨を r_i^j とすると, 第 i 流域の予測降雨ベクトルは

$$\hat{r}_i = [r_i^1, \dots, r_i^L]^T, \quad i = 1, \dots, D$$

となる。全分割流域を統合した予測降雨ベクトルを

$$\hat{r} = [\hat{r}_1^T, \dots, \hat{r}_D^T]^T$$

とし, その予測誤差の共分散行列を P_r と書くことにする。ここに, \hat{r} は N_r 次の列ベクトル, P_r は $N_r \times N_r$ 行列である。

(2.5)式における r は確定値として取扱ったが, 状態の推移を予測するときには将来の降雨 r は確率変数として扱うことになる。したがって, この場合(2.5)式を再構成して $N_{xpr} = N_x + N_p + N_r$ 個の確率変数をもつ確率常微分方程式とし,

$$\dot{x} = f(x, r, t) + Gp, \quad t_{k-1} \leq t < t_k \dots\dots\dots (2.12)$$

とする。

2.4 状態方程式の局所的な線形化・差分化による状態推移の予測

状態の推移式(2.12)は確率常微分方程式である。予測降雨を含めた N_{xpr} 個の状態量をもつ状態ベクトルを

$$X = [x^T \ p^T \ \hat{r}^T]^T$$

とすると, (2.12)は既知確定量 r は定数として,

$$\dot{X} = f^*(X, t) + \Gamma w, \quad t_{k-1} \leq t < t_k \dots\dots\dots (2.13)$$

と書き直すことができる。ここに, w は(2.6)式で与えられる $w_i (i=1, \dots, N_p)$ を成分としてもつ N_p 次ベクトル, Γ は係数行列で次式によって表される。

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ \cdots & & & & \\ c_{p1}\sqrt{q_1} & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & c_{pN_p}\sqrt{q_{N_p}} & \\ \cdots & & & & \\ 0 & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} N_x \text{ 次} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} N_p \text{ 次} \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} N_r \text{ 次} \end{matrix}$$

時刻 t_{k-1} において, 時刻 t_k における X の確率分布を求めること (すなわち, 状態の予測) を考える。

(2.23)式の f^* は一般に非線形関数であり, このときには状態ベクトル X の確率分布の推移を厳密に求めることは不可能である。そこで, X は近似的に正規分布に従うものとし, 関数 f を局所的に線形化・差分化することによって, X の平均値 \hat{X} と共分散 P_x の推移を求めてゆくことにする。

まず, (2.13)式を時刻 $t_j (t_{k-1} \leq t_j < t_k)$ で,

$$\dot{X} = AX + b \dots\dots\dots (2.14)$$

のように線形化する。そのうち, 適当な時間間隔 dt だけ積分して, 時刻 $t_{j+1} = t_j + dt (t_j < t_{j+1} < t_k)$ における X が,

$$X(t_{j+1}) = \Phi X(t_j) + d \dots\dots\dots (2.15)$$

の形で与えられるように差分化する。このようにして, t_{k-1} から t_k の間の状態の推移を求めてゆくことができる。

(2.13)式を(2.14)式のように線形化するには, t_j における X の平均値まわりに Taylor 展開して1次の微分項までとるか, 統計的線形化手法^{6), 7)} を用いればよい。

また, (2.14)式を(2.15)式のように差分化するには, 常微分方程式の種々の解法のうち, 例えば, e^{tA} に対する Padé 近似の2階陰陽混合公式⁸⁾ を用いた解法によればよい。それによると, (2.15)式の Φ, d は

$$\phi = \left[I - A \frac{\Delta t}{2} + A^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right]^{-1} \left[I + A \frac{\Delta t}{2} + A^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right]$$

$$d = \left[I - A \frac{\Delta t}{2} + A^2 \frac{\Delta t^2}{12} \right]^{-1} \cdot \Delta t b$$

与えられる。ここに、 I は単位行列である。

A , b をもう少し具体的に書くと、

$$A = \begin{bmatrix} A_x & A_p & A_r \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここに、 A_x, A_p, A_r はそれぞれ $N_x \times N_x, N_x \times N_p, N_x \times N_r$ なる次元の行列、 b_x は N_x 次列ベクトルで、 0 は適当な次元の零行列である。

ϕ, d は

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_x & \phi_p & \phi_r \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} \tilde{b}_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ここに、 ϕ_x, ϕ_p, ϕ_r はそれぞれ $N_x \times N_x, N_x \times N_p, N_x \times N_r$ の次元の行列、 \tilde{b}_x は差分化による N_x 次列ベクトルであり、 M は(2.10)式で与えられる。ただし、

$$\phi_x = A^* \left[I + \frac{\Delta t}{2} A_x + \frac{\Delta t^2}{12} A_x^2 \right]$$

$$\phi_p = A^* \cdot A_p \cdot \Delta t$$

$$\phi_r = A^* \cdot A_r \cdot \Delta t$$

$$\tilde{b}_x = A^* \cdot b_x \cdot \Delta t$$

$$A^* = \left[I - \frac{\Delta t}{2} A_x + \frac{\Delta t^2}{12} A_x^2 \right]^{-1}$$

である。

(2.9)式を考慮すると、(2.13)式は結局、

$$X(t_{j+1}) = \phi X_j + d + B W(t_j), \quad t_{k-1} \leq t_j < t_{j+1} < t_k \quad \dots (2.16)$$

で表される線形離散型の推移式となる。 B は $N_{sp} \times N_p$ 次の係数行列で

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} N_x \text{ 次} \\ (I \text{ は } N_p \times N_p \text{ の単位行列}) \\ N_r \text{ 次} \end{matrix}$$

である。(2.11)式より

$$\left. \begin{aligned} \hat{X}(t_{j+1}) &= E\{X(t_{j+1})\} = \phi \hat{X}(t_j) + d \\ P_{t_{j+1}} &= E\{(X(t_{j+1}) - \hat{X}(t_{j+1}))(X(t_{j+1}) - \hat{X}(t_{j+1}))^T\} \\ &= \phi P_{t_j} \phi^T + B Q_{t_j} B^T \end{aligned} \right\} \dots (2.17)$$

となる。

2.5 降雨・流量の観測による状態推定の修正

本節では、 N_x 個の状態量と N_p 個のノイズを含めた $N_{sp} = N_x + N_p$ の次元をもつ状態ベクトルを x と表すことにする。

時刻 t_{k-1} までの観測情報から、 t_{k-1} における状態の期待値 $\hat{x}(t_{k-1} | t_{k-1})$ と共分散行列 $P(t_{k-1} | t_{k-1})$ が求められているとする。時刻 t_k になって、時刻 t_{k-1} から時刻 t_k の間の D 個の分割流域における平均降雨強度が降雨観測値 $r_k = [r_1, \dots, r_D]^T$ として与えられ、 J 個の流量観測点において流量観測値 $y_k(t) = [y_1 \dots y_J]^T$ が与えられると、これらの情報をもとに状態の推定値を修正する。

まず、降雨観測値だけを用いて状態を推定し直す。すなわち、 $\hat{x}(t_{k-1} | t_{k-1}), P(t_{k-1} | t_{k-1})$ を初期値として、2.4の方法と同様にして(ただし、 \hat{r} が不要であるから X の次元を縮小し N_{sp} 次の状態ベクトル x に置

き換えて、 t_k における状態の期待値、共分散を求める。これを \tilde{x}_0, \tilde{P}_0 と表わす (添字 0 (ゼロ) の意味は後で明らかとなる)。

次に、 $y(t_k)$ を用いて、Kalman フィルター⁶⁾ による状態推定 (filtering) を行う。いま、 N_{xp} 次の状態ベクトルを考えているので、観測方程式(2.4)を

$$y(t_k) = g^*(x, t_k) + v(t_k)$$

と書き改める。 g^* は一般に非線形である。また、 $v(t_k)$ は $x(t_k)$ とは独立とされる場合が多いが、筆者らはこれが独立でない場合 (すなわち、 v と x とが相関をもつ場合) についても検討している^{3),7)}。この場合 v が状態量 x とノイズ e (x とは独立) との関数で表されると考える。この式を線形化して、

$$y(t_k) = Hx(t_k) + c + Ze(t_k) \dots\dots\dots (2.18)$$

ここに、

$$H = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_j \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_j \end{bmatrix}, \quad e(t_k) = \begin{bmatrix} e_1(t_k) \\ \vdots \\ e_s(t_k) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (2.19)$$

で、 H は $J \times N_{xp}$ 行列である。ただし、 $h_i (i=1, \dots, J)$ は N_{xp} 次の行ベクトルである。また、 c は線形化によって得られた定数項で J 次の列ベクトル、 $e(t_k)$ は時刻 t_k における x とは独立の平均値 0、共分散行列 R_k のノイズ (S 次列ベクトル)、 Z はその係数行列 ($J \times S$ 次) である。

J 個の観測流量に欠測を含む場合のことも考えて、個々の観測流量 $y_i(t_k) (i=1, \dots, J)$ ごとに状態推定を行う。事前 (流量観測値を用いる以前) の推定は \tilde{x}_0, \tilde{P}_0 であることに留意して、状態推定のアルゴリズムは以下のようになる。

① $i=1$ とする。

② Kalman ゲイン

$$K_i = \tilde{P}_{i-1} h_i^T [h_i \tilde{P}_{i-1} h_i^T + ZR_i Z^T]^{-1} \dots\dots\dots (2.20)$$

を求める。

③ $y_i(t_k)$ を用いて、第 i 回目の更新

$$\left. \begin{aligned} \tilde{x}_i &= \tilde{x}_{i-1} + K_i [y_i(t_k) - h_i \tilde{x}_{i-1}] \\ \tilde{P}_i &= [I - K_i h_i] \tilde{P}_{i-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.21)$$

を行う。ただし、 $y_i(t_k)$ が欠測の場合は、

$$\tilde{x}_i = \tilde{x}_{i-1}, \quad \tilde{P}_i = \tilde{P}_{i-1} \dots\dots\dots (2.22)$$

とする。

④ $i < J$ であれば、 $i=i+1$ として②へ戻る。

$i=J$ のとき

$$\left. \begin{aligned} \hat{x}(t_k | t_k) &= \tilde{x}_i \\ \hat{P}(t_k | t_k) &= \tilde{P}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

として終了する。

3. 由良川流域における洪水流出モデルの状態空間表現

3.1 由良川流域の概要と現行洪水流出モデル^{9),10)}

由良川水系は近畿地方の北部に位置し、幹川由良川は若狭湾に注ぐ流域面積 1882 km²、流路延長 146 km の河川である (Fig. 1)。現在の由良川の計画高水流量は、昭和28年13号台風による洪水流量を対象に定められ、福知山基準地点における計画高水ピーク流量を 6500 m³/sec とし、上流にある大野ダムによる洪水調節によって計画高水流量を 5600 m³/sec としている。また、流域の年降水量は流域平均 1500~2300 mm 程度である。

由良川においては、流域平均雨量を用いて流出解析を行える集水面積は 300~400 km² が限度であるとし

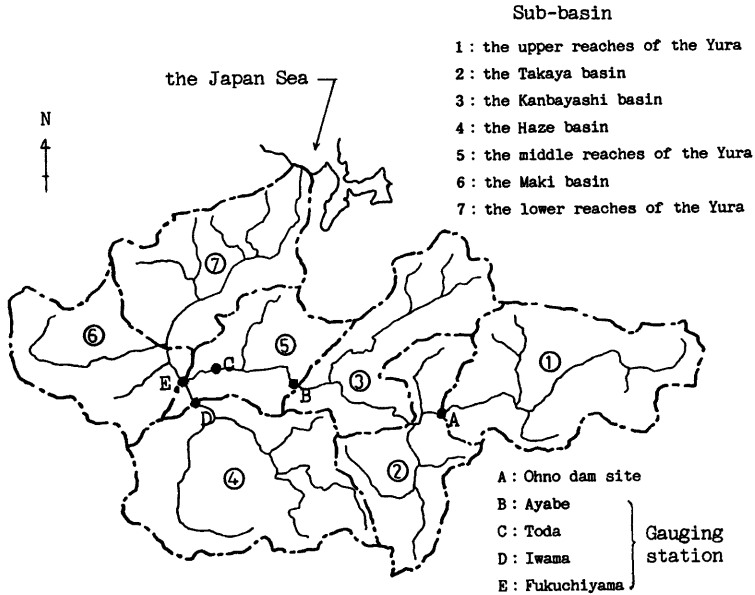


Fig. 1 The Yura River Basin (1882 km²).

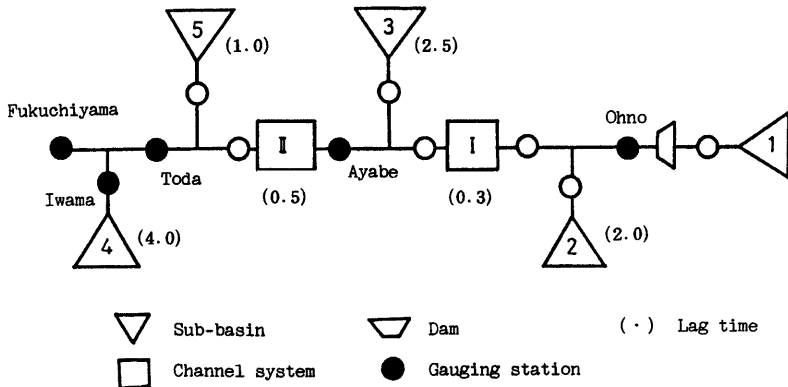


Fig. 2 Schematic Diagram of the Existing Flood Prediction Model of the Yura River.

て、福知山地点上流域 (1350 km²) を 5 流域 2 河道の 7 つのサブシステムからなるものとしている (Fig. 2)。

各サブシステムにおける流出計算は貯留関数法によって行われる。貯留関数法の基本式は、各流域では

$$\begin{cases} s = Kq^p & \dots\dots\dots (3.1) \\ \dot{s} = r_e - q & \dots\dots\dots (3.2) \end{cases}$$

河道では(3.2)式は、

$$\dot{s} = i_c - q \dots\dots\dots (3.3)$$

と表される。ここに、 s はサブシステム内の雨水貯留高 (mm), r_e は流域平均有効降雨強度 (mm/hr), q は基底流量 (由良川流域では 0 としている) をさし引いた流出高 (mm/hr), K と P は定数である。 i_c は河道への流入量 (m³/sec) をその河道より上流の集水面積 A で除し 3.6 をかけたもので、河道への流入高 (mm/hr) と呼んでおく。また、河道の雨水貯留高とはその河道内の貯留量を A で除したものであるとする。河道からの流出高という場合も、その河道からの流出量 (m³/sec) を A で除し 3.6 をかけたものである。

有効降雨強度は、

$$\left. \begin{aligned} r_e &= f_1 \cdot r & (R_e \leq R_{s0}) \\ r_e &= r & (R_e > R_{s0}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.4)$$

で求めることとしている。ここに、 r は観測降雨強度, R_e は累加雨量, R_{s0} は飽和雨量, f_1 は一次流出率である。

各サブシステムの定数は Table 1 のように求められている。ただし、現行モデルでは、大野ダム上流域の流出計算は行わず、毎時連絡される放流量を用いて河道 I への入力としている。

Table 1 Parameters of the Existing Flood Prediction Model of the Yura River.

Sub-system No.	Area (km ²)	K	P	Tl (hr)	Rsa (mm)
Sub-basin	1	350	—	—	—
	2	220	13	0.65	2.0
	3	240	30	0.65	2.5
	4	370	22	0.65	4.0
	5	170	20	0.65	1.0
Channel	I	—	9	0.6	0.3
	II	—	23	0.6	0.5

3.2 現行流出モデルの状態空間表現

大野ダム上流域を除くと、現行モデルは 4 個の分割流域と 2 個の河道とを持つことになる。貯留関数法においては各サブシステム内の雨水貯留高のみを状態量と考えればよいので、合計 6 個の状態量をもつ状態空間モデルとして現行モデルを統合することができる。

ただし、遅滞時間があるのでそのような統合化は多少面倒なものとなる。各サブシステムの状態の推移を考えるときに、福知山とそのサブシステムとの間に存在するいくつかのサブシステムの遅滞時間のふんだけ福知山の時刻からさかのぼった時刻 τ を定義する。そのようにして、第 j 番目のサブシステム内の状態 $x_j(\tau)$ の推移を $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ で扱うということは、福知山における $t_{k-1} \leq t < t_k$ の間の流量 $q(t)$ に関与する x_j の推移を扱うことに対応すると定義しよう。

サブシステム間の連絡関係と雨水の量的な連続関係とを考慮して、 $\tau_{k-1} \leq \tau < \tau_k$ における雨水貯留高の推移式を書くこととなる。

分割流域 ($i=2, \dots, 5$) において、

$$\dot{s}_i = r_{ei} - q_i = r_{ei} - (s_i/K_i)^{1/P} \dots\dots\dots (3.5)$$

ここに、 s_i は第 i 流域の雨水貯留高 (mm), r_i は第 i 流域の有効降雨強度 (mm/hr), q_i は第 i 流域からの流出高で K_i, P_i は定数である。

河道 I, II において、

$$\left. \begin{aligned} \dot{s}_I &= \frac{Q_1 + q_2 \cdot A_2 / 3.6}{A_I} \cdot 3.6 - q_I = \frac{3.6 Q_1}{A_I} + \frac{A_2}{A_I} \left(\frac{s_2}{K_2} \right)^{1/P_2} - \left(\frac{s_I}{K_I} \right)^{1/P_1} \\ \dot{s}_{II} &= \frac{q_I \cdot A_I + q_3 \cdot A_3}{A_{II}} - q_{II} = \frac{A_I}{A_{II}} \left(\frac{s_I}{K_I} \right)^{1/P_1} + \frac{A_3}{A_{II}} \left(\frac{s_3}{K_3} \right)^{1/P_3} - \left(\frac{s_{II}}{K_{II}} \right)^{1/P_{II}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.6)$$

ここに、 s_i, s_{11} はそれぞれの河道における雨水貯留高 (mm/hr), q_i, q_{11} は河道からの流出高 (mm/hr), Q_1 は大野ダム放流量 (m³/sec), K_1, K_{11}, P_1, P_{11} は定数である。 A_i は第 i 流域の面積 (km²) で、特に A_1, A_{11} はその河道より上流の流域の面積を全て加えたものである。

観測流量は、綾部・戸田・岩間・福知山の4地点で得られ、

$$\left. \begin{aligned} Q_{AYA} &= \frac{1}{3.6}(q_3 \cdot A_3 + q_1 \cdot A_1) = \frac{A_3}{3.6} \left(\frac{s_3}{K_3} \right)^{1/P_3} + \frac{A_1}{3.6} \left(\frac{s_1}{K_1} \right)^{1/P_1} \\ Q_{TOD} &= \frac{1}{3.6}(q_5 \cdot A_5 + q_{11} \cdot A_{11}) = \frac{A_5}{3.6} \left(\frac{s_5}{K_5} \right)^{1/P_5} + \frac{A_{11}}{3.6} \left(\frac{s_{11}}{K_{11}} \right)^{1/P_{11}} \\ Q_{IWA} &= \frac{1}{3.6} q_4 \cdot A_4 = \frac{A_4}{3.6} \left(\frac{s_4}{K_4} \right)^{1/P_4} \\ Q_{FUK} &= Q_{TOD} + Q_{IWA} = \frac{A_4}{3.6} \left(\frac{s_4}{K_4} \right)^{1/P_4} + \frac{A_5}{3.6} \left(\frac{s_5}{K_5} \right)^{1/P_5} + \frac{A_{11}}{3.6} \left(\frac{s_{11}}{K_{11}} \right)^{1/P_{11}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.7)$$

となる。ここに、 $Q_{AYA}, Q_{TOD}, Q_{IWA}, Q_{FUK}$ はそれぞれ綾部、戸田、岩間、福知山の流量を表す。

以後、簡単のために τ を t と読みかえる。また、雨水貯留高 s を x と表示して、 s_2, \dots, s_5 を x_1, \dots, x_4 に、 s_1, s_{11} を x_5, x_6 にそれぞれ置き直し、 $Q_{AYA}, Q_{TOD}, Q_{IWA}, Q_{FUK}$ も y_1, \dots, y_4 と置き直して記述する。

現行の洪水流出モデルは、(3.5) と (3.6) 式、(3.7) 式によって、(2.1), (2.2) 式のような決定論的狀態空間モデルに統合することができた。

4. 由良川流域における洪水流出の確率予測手法

本章では、由良川福知山上流域における現行の流出モデルを確率過程的に取扱ひ、2. で展開した流出予測手法の適用法を述べる。

4.1 降雨予測・大野ダム放流量の予測

福知山上流域を対象とした狀態空間モデル(3.5)～(3.7)式の入力は、 $r_{e2}, r_{e3}, r_{e4}, r_{e5}, Q_1$ である。第 j 番目のサブシステムと福知山地点との間の遅滞時間による時間ずれを T_j とすると、予測時間 (リードタイム) L が T_j より小さい時は、その第 j サブシステムへの入力予測は不要である。しかし、 $L > T_j$ となれば入力予測が必要となる。

Fig. 3 は、 T_j と L と流出予測計算に必要な降雨データの関係を示している。たとえば、福知山の3時間先までの流量予測を行うには、和知残流域では過去3時間の観測降雨と今後1時間先までの予測降雨が必要

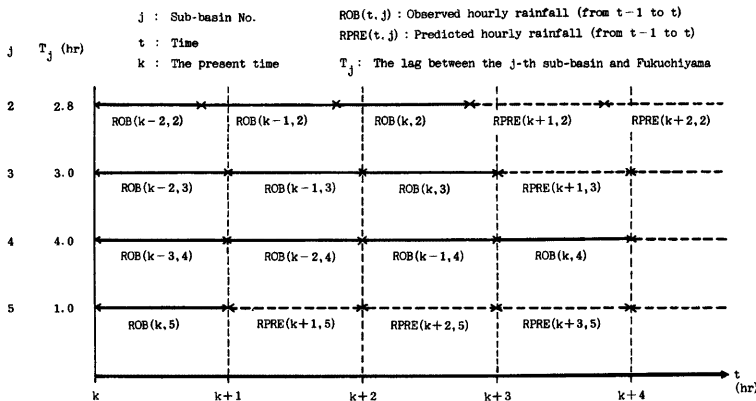


Fig. 3 Relation between the Time Lag and the Rainfall.

であることを示している。

2. で触れたように、流出予測を確率過程的に取扱う際には、予測量としての入力は、その予測誤差の予測量間の時間的・空間的相関を共分散の形で与えなければならない。時刻 k において予測された第 j 流域の i 時間先の予測降雨を $RPRE(k+i, j)$ とすると、Fig. 3 より、3時間先の流量予測の場合には、予測降雨として $RPRE(k+1, 5)$, $RPRE(k+2, 5)$, $RPRE(k+1, 2)$ が必要であり、それらの予測誤差の共分散を与えなければならないのである。4時間先の流量予測の場合には、さらに $RPRE(k+1, 3)$, $RPRE(k+3, 5)$, $RPRE(k+2, 2)$ を加えて合計6個の予測降雨の共分散を与える。リードタイムが4時間より大きくなると、土師川(岩間上流)流域の降雨予測も必要となるので、予測降雨の次元はさらに増大する。したがって、福知山の流量予測はとりあえず4時間先まで行うこととする。

降雨予測の方法は、建設省の洪水予報業務においてよく用いられている前3時間移動平均法によることにした。この方法は単純な時系列予測であるが、従来の流出予測において特別な不都合を生じなかったこと、またその計算が簡便であることなどから多用されてきたものである。ここで、前3時間移動平均予測とは、現時点から過去3時間の時間雨量系列の平均値を降雨予測値とし、それが今後 L^* 時間持続するとする予測法である。現時点を k 、観測された時間雨量系列を $\dots, r_{k-2}, r_{k-1}, r_k$ とし、予測降雨を $\hat{r}_{k+l} (l=1, \dots, L^*)$ とすると、

$$\hat{r}_{k+l} = (r_{k-1} + r_{k-1} + r_k) / 3 \dots \dots \dots (4.1)$$

である (ただし、 $L \leq L^*$)。

由良川流域の各分割流域平均時間雨量を上の方法で予測したときの予測誤差を、分割流域ごと・リードタイムごとに求めて、予測誤差相互の共分散を求めた。対象とした降雨記録は、昭和37年から昭和50年の間に由良川で生じた25出水時のもので、建設省近畿地方建設局福知山工事事務所と関日本水道コンサルタントが整理したもの¹⁰⁾ である。求めた降雨予測誤差の共分散を Table 2 に示す。

Table 2 Covariance Matrix of the Rainfall Prediction Error.

(i, j)*	(1, 2)	(2, 2)	(1, 3)	(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)
(1, 2)	13.8	10.5	10.6	6.0	4.8	3.7
(2, 2)	10.5	17.9	8.4	7.0	8.9	7.3
(1, 3)	10.6	8.4	14.9	8.8	6.1	5.2
(1, 5)	6.0	7.0	8.8	13.5	9.9	7.6
(2, 5)	4.8	8.9	6.1	9.9	18.1	13.7
(3, 5)	3.7	7.3	5.2	7.6	13.7	20.5

* (i, j) denotes i-hour-ahead prediction of the rainfall in the j-th sub-basin

同様に、大野ダムの放流量も予測値およびその予測誤差の分散も与えなければならない。放流量の予測は、大野ダム上流域の降雨予測および流出モデルによる流出予測 (すなわちダムへの流入量予測) を行った上で、ダムの操作法に基づいて行うことになる。したがって、大野ダム上流域の降雨予測と他流域の降雨予測との相関を通じて、放流量予測誤差と他流域の降雨予測誤差の共分散も考慮する必要がある。しかし、3. で見たように現行モデルがダム上流域の流出モデルを考慮していないこと、ダムの操作までモデルに組み込むのは多少複雑になることなどの理由で、本研究では、放流量を完全に予測できるものとして、確定量として与えることにする。

4.2 由良川流域の統合モデルの確率過程的扱いと状態の推定・予測

確率過程的流出モデルの状態方程式は(2.12)式で表され、本研究の対象となる由良川福知山上流域では、その関数 f は(3.5), (3.6)式で与えられる。

前節で述べたように、リードタイムが1時間をこえれば降雨の予測が必要となる。このとき、将来の降雨 r を確率変数として扱い、(2.12)式を統計的線形化して(2.14)式、さらに差分化して(2.16)式に相当する

式を得る。推定値（期待値・共分散行列）の推移は(2.17)式で求められることになる。

一方、リードタイムが1時間以内のときは降雨の予測が不要である。このときは、2.5で述べた降雨観測値を用いた状態推定と同様に N_{x_p} 次の次元に縮小すればよい。

観測方程式は一般に(2.8)式で表されるが、関数 g は(3.7)式のものである。

さてここで、戸田、岩間と福知山との間に遅滞時間がないことを考慮すると、時刻 t_k に観測した戸田、岩間の流量は、福知山で時刻 t_k に観測した流量と同時である。ところが、綾部と福知山との間には河道 II が存在するので、その遅滞時間0.5時間を考慮すると、時刻 t_k に観測した綾部の流量は、0.5時間先の福知山流量に關与する流量の観測値であると考えなければならない。

このことは、2.5で述べたような流量観測による状態推定の手順が若干複雑になることを意味する。つまり、2.5の③において第3回目の更新が終われば（すなわち戸田・岩間・福知山の3つの観測流量を用いた時点で）、 \bar{x}_3, \bar{p}_3 を出発値として、 $t_k \leq t < t_k + 0.5$ の間の状態の推移を求め、 $t = t_k + 0.5$ の解を新たに \bar{x}_3, \bar{p}_3 とする。そののち、綾部の流量を用いて(2.20)、(2.21)式より \bar{x}_4, \bar{p}_4 を得る。この推定値を出発値として $t_k + 0.5 \leq t \leq t_{k+1}$ の間の状態の推移を求めることによって、1時間先の予測が行われることになる。もちろん、綾部の流量が欠測のときは、 \bar{x}_4, \bar{p}_4 を得る手順は省かれる。

4.3 ノイズの統計量について

確率過程の状態空間モデルと Kalman フィルター理論とを結合して状態の推定・予測を行おうとする場合に最も問題なのは、ノイズの統計量（特に共分散の大きさ）をいかに評価するかということである。というのは、Kalman フィルターのアルゴリズムにおいて、1ステップ先の状態予測誤差共分散を求めるときにシステムノイズの共分散行列が、Kalman ゲイン行列を計算するとき観測ノイズの共分散行列が、それぞれ各時点において与えられていなければならないからである。

本研究では、ノイズの取扱いを次の2通りとする。

- a) ノイズの統計量が全洪水期間中一定とする。
- b) ノイズの統計量が状態量に依存し時間的に変化するとする。

前者はノイズの統計的性質が不変（すなわち、定常的なノイズ）であると考えているのに対し、後者は非定常的なノイズを考慮することになる。

まず、観測ノイズについて考える。観測ノイズは(2.18)式の $Ze(t_k)$ である。(2.18)、(2.19)において、 $S = K$ とする。a) の場合は $Z = I$ (単位行列)、 $e(t_k)$ の共分散行列 $R_k = R$ (一定) とする。b) の場合は、ここでは

$$Z = \begin{bmatrix} h_1 x + c_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & h_k x + c_k \end{bmatrix}$$

とし、 $R_k = R$ (一定) とする。このようにすると、

$$y_i(t_k) = (h_i x(t_k) + c_i)(1 + e_i(t_k)), \quad i = 1, \dots, J$$

となり、これは乗算的観測ノイズ³⁾である。 $R = \alpha^2 I$ (I は単位行列で、 $\alpha > 0$) とすると、第 i 観測流量には全期間通じて $\alpha \times 100$ 程度の観測ノイズを含んでいると考えることになる。

次に、システムノイズについて考える。システムノイズは(2.16)式の $BW(t_j)$ である。 $W(t_j)$ の共分散行列 Q_{t_j} は(2.11)式で与えられる。a) の場合、 c_{pi}, q_i を全期間中一定とする。b) の場合、ここでは、(2.11)の第3式右辺の $c_{pi} \cdot q_i$ のかわりに $\beta \cdot X_i(t_j)$ とおくことにする ($\beta > 0$)。すなわち、 $W_i(t_j)$ の分散が $X_i(t_j)$ に比例するとする。 c_{ri} は全期間一定とすれば、 $q_i = \beta X_i(t_j) / c_{pi}$ となり、これは q_i が時間的に変化する（ただし、 $t_j \leq t < t_{j+1}$ の間で一定）と考えることになる。

結局、a) はノイズの統計量が全期間一定な加算的ノイズであり、b) はノイズの統計量が各時点の状態量に依存して時間的に変化する、観測ノイズについては乗算的に取扱うこととなる。

4.4 確率予測の手順

由良川流域における洪水流出の確率予測の手順は以下のようになる。

- ① 状態量の初期推定値・初期共分散を与える。
- ② 時刻 k に雨量・流量を観測する。
- ③ 大野ダムの放流量を予測する。
- ④ 時刻 k の戸田・岩間・福知山の観測流量を用いて、フィルタリング（状態の推定）を行う。
- ⑤ 0.5時間先までの状態推移の予測計算をする。
- ⑥ 時刻 k の綾部の観測流量と⑤で得た値とを用いてフィルタリングを行う。
- ⑦ 0.5から1.0時間先までの状態推移の予測計算をする。
- ⑧ 次のステップに備えて1時間先の状態量の予測値および共分散行列を記憶しておく。
- ⑨ リードタイムが1時間をこえると降雨予測が必要となるので、降雨の予測値とその共分散行列を与える。
- ⑩ 予測降雨を状態量に組み込み、状態推移の予測計算を行う。
- ⑪ 4観測点における将来の各時点の流量予測値とその分散（標準偏差）を出力する。
- ⑫ さらなる洪水の危険が去ったと判断し、洪水予測の必要がなくなった時点で終了する。さもなければ、 $k=k+1$ として②へ戻る。

5. 適用と考察

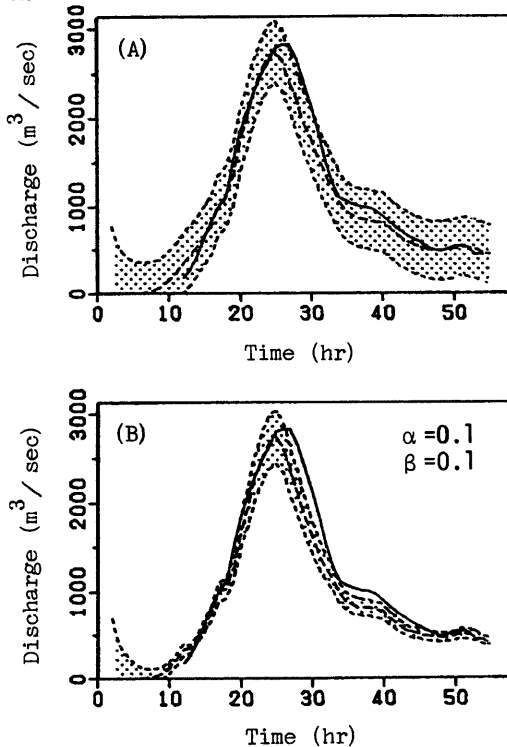


Fig. 4 One-hour-ahead Prediction at Fukuchiyama (the flood on the 14th of Sep. in 1956.)

これまで展開してきたモデルと手法を既往の洪水時における雨量・流量データに適用した。

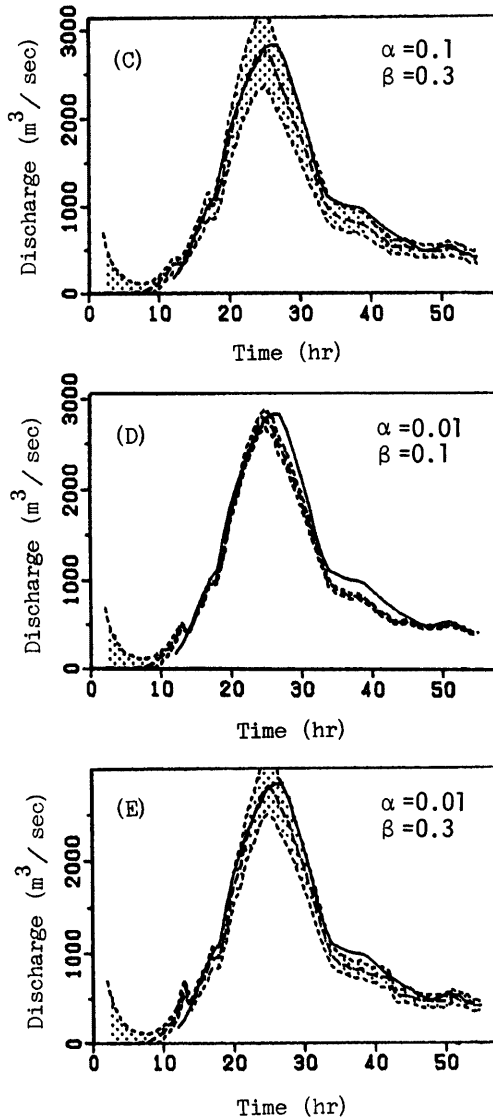


Fig. 5 One-hour-ahead Prediction at Fukuchiyama (the flood on the 14th of Sep. in 1965).

初期条件はすべての適用例において以下のように与えた。各分割流域の初期貯留高は 0.0mm/hr とし、河道 I, II のそれはダムからの初期放流量と同一の流量が定常的に流れているものとして、それから逆算した値とした。ノイズの初期値はすべて 0.0 とした。これら初期状態の推定誤差共分散行列は、対角成分以外はすべて 0.0 とし、貯留高については $(10.0\text{mm})^2$ 、ノイズについては $c_{p_i} \cdot q_i / 2$ とした。

計算時間間隔 $\Delta t = 0.1\text{hr}$ とした。流量観測時間間隔は $\Delta T = 1.0\text{hr}$ である。

5.1 ノイズの統計的性質について

4.3 で述べた a), b) 2通りの異なる形式のノイズについて比較検討した。Fig. 4 は昭和40年9月14日の洪水の福知山地点における1時間先予測の例である。図中、 1σ error corridor とある部分は、予測値の $\pm 1\sigma$ の誤差範囲を示している。

a) の場合 (Fig. 4 (A)) のノイズの分散は、既往5洪水のピーク時の観測流量およびそれから逆算した各状態量の平均値の10%の値を全期間一定として与えた。ただし、システムノイズの分散の値は $c_{p_i} = 10.0$ ($i = 1, \dots, 6$) とし、 q_i で調整した。

b) の場合 (Fig. 4 (B)) は、観測流量および状態量の10%程度の誤差を想定して4.3で述べたように $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.1$ とした。

両者を比較すると、予測値のものに顕著な差はないが、a) の場合は低水部の予測誤差 1σ の幅が大きく評価されてしまっている。低水時は誤差が相対的に小さいと考えてよいので Fig. 4 (A) の結果は合理的でない。Fig. 4 (B) のように、低水部では相対的に予測誤差が小さく、ピーク付近では予測誤差が大きく評価される方が合理的であると言える。

本節での議論から、以後は、ノイズの統計量 (分散) は状態量に依存し時変的であるとする。

5.2 ノイズの分散の大きさと予測結果

4.3 で述べたように、観測ノイズ・システムノイズの分散の大きさは、 α , β の値で定めることにしている。 α , β の値を試算的に変えて、予測がどのような挙動を示すか見てみよう。

Fig. 5 は Fig. 4 と同じ出水の福知山における1時間先予測の例である。ピーク直後の観測値と予測値との差と予測誤差 1σ の幅に注目する。(B) (Fig. 4) と (C) (Fig. 5) は、観測誤差は同程度 ($\alpha = 0.1$) とし、モデル誤差は (C) の方がより大きい ((B) $\beta = 0.1$, (C) $\beta = 0.3$) としたものである。両者の予測結果を比べてみると、 β の値の大きい方が、予測精度が悪い (すなわち、 1σ の幅が大きい) と評価される。ところが、予測値そのものは (C) の方がより観測値に近づく。つまり、システムノイズに比して、観測ノイズが相対的な意味で小さいので、毎時の観測値をより重視しているのであり、Kalman フィルターの性質をよく表わしていると言える。このように観測ノイズ・システムノイズの絶対的な大きさのみならず、それらの相対的な大きさに予測が依存するという事に留意しなければならない。

(C) の場合の観測ノイズをさらに小さくすると ($\alpha = 0.01$, Fig. 5 (E)), さらに予測値は観測値に接近し、観測ノイズが小さいぶんだけ 1σ の幅もせまくなっている。(B) と (D) の結果を比較しても同様のことが言える。

また、12時間目ぐらいで初めて観測値が得られているが、その時の予測の修正の仕方を見ると、(B), (C) に比して (D), (E) の方が急激に修正している。これは観測ノイズを小さく見積もった場合の Kalman フィルターの特徴を表わしている。

Fig. 4, 5 の結果を見ると、ピーク直後の予測がすべての場合において下回っている。これは、もとの決定的モデル (現行流出モデル) が、この洪水のピーク直後の流出現象を十分に記述できていないことを示している。

観測誤差の大きさは流量観測所ごとに本来異なる。また、(D), (E) のように1%程度の観測誤差というのは、数百 km^2 以上の複合流域の観測所としては少し高精度すぎると言える。モデル誤差も、現状では1~2割は見えておく必要がある。このようなことから、 $\alpha = 0.05 \sim 0.1$, $\beta = 0.1 \sim 0.2$ 程度の大きさとするのが妥当であると思われる。

5.3 リードタイムと予測精度について

Fig. 6 は、昭和40年9月18日の洪水の1時間以上先の予測を、基準地点である綾部 (A) と福知山 (B) に

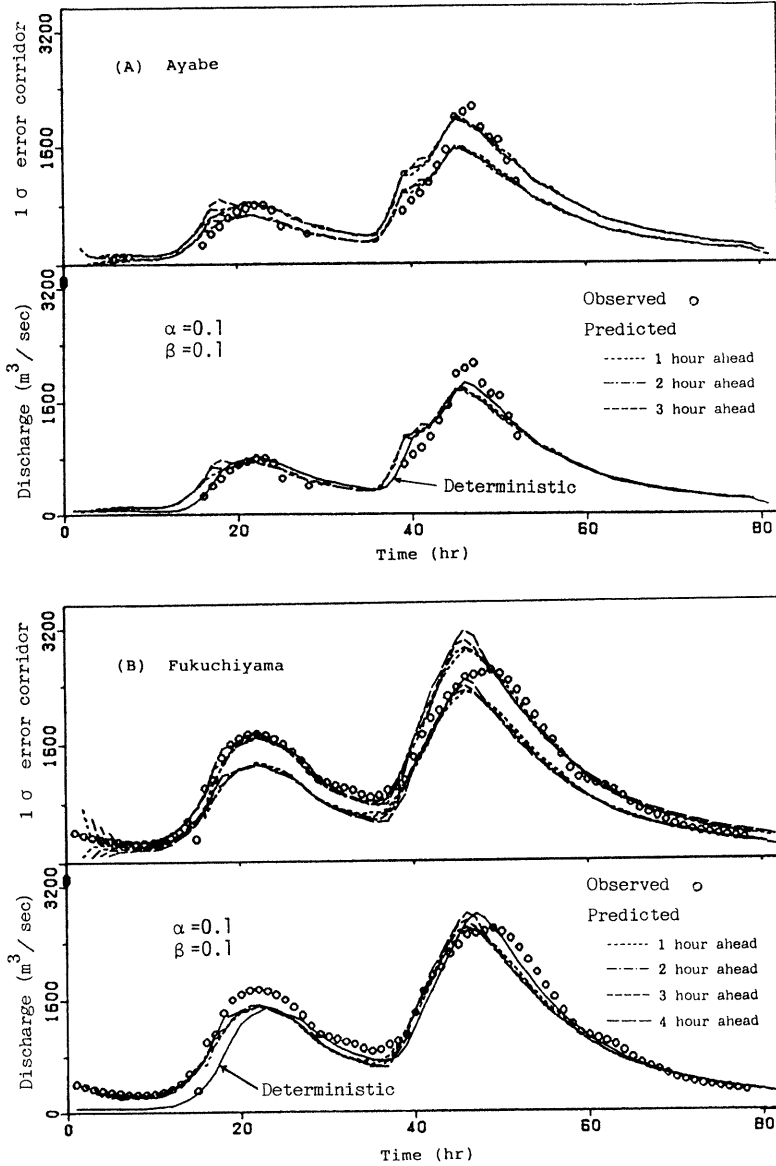


Fig. 6 Prediction at Ayabe and at Fukuchiyama (the flood on the 18th of Sep. in 1965).

について示したものである。それぞれ上段に予測誤差 1σ の幅を、下段には観測値・予測値と決定論的 Off-line 予測（毎時の観測流量を利用しない）を示した。

リードタイムが長くなるほど 1σ の幅は当然大きくなる。Fig. 6 (B) の下段の第1ピーク以前を見ると、毎時の観測流量を用いる On-line 予測は、決定論的 Off-line 予測を直ちに修正していることがわかる（どちらも同一の初期条件を与えた）。ピーク付近では、低水位に比して観測誤差が相対的に大きいために、あまり観測値に追従しない結果となっている。すなわち、 $\alpha=0.1$ としているので観測値には10%内外の誤差が含まれていると考えており、1時間先の予測でも予測残差が観測値の10%程度であれば一応よしとしなければならない。Fig. 6 の3～4時間先の予測は比較的適合度はよいと言える。

Fig. 4～Fig. 6 の結果を見て、1時間先の予測残差に持続性があるという点から考えると、これらの予測は決して最適なものとは言えないのであって、モデル同定の不十分さを明示している。

現行流出モデルを改善するとともに、雨量・流量の観測精度を向上させることが重要である。また、数時間先の流出予測精度を上げるためには、それらに加えて精度のよい降雨予測が必要である。

6. 結 論

複数の分割流域からなる流域における洪水流出予測の一般的手法を展開し、由良川福知山上流域に適用した。筆者らの示した方法は、洪水流出の実時間確率予測手法として有用である。

比較的短期間に状態量・出力の大きさが急激に変動する洪水流出のような現象を確率過程の状態空間モデルで表現するとき、付加されるノイズはその状態量・出力に依存すると考えた方が合理的である。

最後に、本研究を進めるにあたって、貴重なデータ・資料を提供していただいた建設省近畿地方建設局福知山工事事務所ならびに㈱日本水道コンサルタントに心より謝意を表する次第である。また、数値計算や図の作成に助力してくれた京都大学大学院学生富沢直樹君にも謝意を述べたい。

参 考 文 献

- 1) 高棹琢馬・椎葉充晴：流出システムのフィルタリングと予測，第16回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集，昭54. 9，pp. 133-136.
- 2) 高棹琢馬・椎葉充晴：状態空間法による流出予測——kinematic wave 法を中心として——，京大防災研究所年報，第23号 B-2，昭55. 4，pp. 211-226.
- 3) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨：貯留モデルによる実時間流出予測に関する基礎的研究，京大防災研究所年報，第25号 B-2，昭57. 4，pp. 245-267.
- 4) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨：洪水流出の確率予測におけるモデルと手法，第19回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集，昭57. 11，pp. 63-66.
- 5) Jazwinski, A. H.: *Stochastic Process and Filtering Theory*, Academic Press, 1970, pp. 121-126.
- 6) Gelb, A. (ed.): *Applied Optimal Estimation*, M. I. T. Press, 1974.
- 7) 高棹琢馬・椎葉充晴・宝 馨：集中型流出モデルの構成と流出予測手法，京大防災研究所年報，第25号 B-2，昭57. 4，pp. 221-243.
- 8) 戸川隼人：微分方程式の数値計算——有限要素法と差分法——，オーム社，昭48，p. 47.
- 9) 由良川洪水予報連絡会：由良川洪水史，昭56. 4.
- 10) 建設省近畿地方建設局福知山工事事務所・(株)日本水道コンサルタント：昭和56年度由良川洪水流出モデル検討業務報告書，昭57. 3.