

k - ϵ モデルによる水理解析に関する二、三の検討

細田 尚・岩佐 義朗・余越正一郎

APPLICATION OF k - ϵ MODEL TO HYDRAULIC ANALYSIS

By *Takashi* HOSODA, *Yoshiaki* IWASA and *Sho-ichiro* YOKOSI

Synopsis

This paper describes a basic application of the k - ϵ model, which is one of the most useful Reynolds stress closure models, to hydraulic analysis of open-channel flows. Mathematical derivation of the k - ϵ equations in the curvilinear orthogonal coordinates is first made and the hydrodynamic characteristics of k - ϵ model is then concerned.

The velocity distribution in open-channel flows and the surface jets are shown, using the numerical simulations and theoretical considerations, so that effectiveness of k - ϵ model will be verified.

1. 序 論

本研究は、 k - ϵ モデルの基本的特性を検討するとともに、水理解析への適用例を示したものである。

まず、 k - ϵ モデルの概要と一様乱流場での特性について考察する。次に、開水路流れの流速分布への適用例を示す。乱流モデルによる境界層乱流の解析は数多いが、その際に問題となるのは壁面近傍での境界条件の与え方である。通常、壁面近傍での乱れエネルギー生成率と散逸率を等しくおく方法と、粘性底層を考慮する方法とが用いられている。しかし、前者は、乱れエネルギーの生成率と散逸率の差が問題となるようなときには適当と考えられず、また後者は現段階では多くの不明の点を含んでいる。本研究では視点を変えて、水路床付近での k , ϵ の値 k_b , ϵ_b を与え、無次元水理パラメータ k_b/u_*^2 , $\epsilon_b h/u_*^3$ を導入し、対数速度分布に適合するようなパラメータの同定を行う。

さらに、 k - ϵ モデルを Surface Jet に適用する。そのさい、Turbulent Jet の相似領域において、 k - ϵ モデルを用いたときの流速・噴流幅・乱れエネルギー・エネルギー散逸率の減衰率を求め、流速・噴流幅に関しては、従来の実験結果と一致することを確かめた。そののちに、数値解析を行うことにより、水理量の分布形について検討したものである。

2. 直交曲線座標系での k - ϵ 方程式

Navier・Stokes の方程式は、直交曲線座標系で次のようになる¹⁾。

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \nabla_j v^i = F^i - \frac{1}{\rho} g^i j \nabla_j p + 2\nu \nabla_j e^{ij}, \quad e^{ij} = \frac{1}{2} g^{ij} g^{kl} (\nabla_k v_l + \nabla_l v_k) \dots\dots\dots(1)$$

ここに、 v^i ; 流速ベクトル \mathbf{v} の反変成分、 p ; 圧力、 g^{ij} ; 計量テンソルの反変成分、 ∇_j ; 共変微分、 F^i ; 外力を表わす。(以後、上付添字は反変成分、下付添字は共変成分を示す。)

(1) 式より Reynolds 方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \bar{v}^i}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j \bar{v}^i + \bar{v}_j \bar{v}^i \bar{v}^j = F^i - \frac{1}{\rho} g^i j \bar{v}_j \bar{\rho} + 2\nu \bar{v}_j \bar{e}^{ij} \dots\dots\dots(2)$$

ここに、一、時間平均を表わす。

(1) 式より (2) 式を引いて、変動流速に関して

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \bar{v}_j v^i + \bar{v}_j v^i v^j - \bar{v}_j v^i \bar{v}^j + \bar{v}_j v^i v^j = -\frac{1}{\rho} g^i j \bar{v}_j \bar{\rho}' + 2\nu \bar{v}_j e^{ij} \dots\dots\dots(3)$$

が得られ、上式に v_i' を乗じて上下の添字 i について 1~3 まで和をとり時間平均すれば、乱れエネルギー $k = \frac{1}{2} \bar{v}^i v_i'$ に関して

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j k = & -g_{ii} \bar{v}^i \bar{v}^j \bar{v}_j \bar{v}^i - \bar{v}_j \left[v^j \left(k' + \frac{\bar{\rho}'}{\rho} \right) \right] \\ & - 2\nu (g_{ij} \bar{v}_j \bar{v}^i e^{ij}) - g_{ii} \bar{v}^i \bar{v}_j e^{ij} + 2\nu g_{ij} \bar{v}_j \bar{v}^i e^{ij} \dots\dots\dots(4) \end{aligned}$$

が得られる。($v_i' = g_{ii} v_i'$ を用いた。) エネルギー散逸率は、

$$\varepsilon = \nu [g_{ij} \bar{v}_j \bar{v}^i e^{ij}] - g_{ii} \bar{v}^i \bar{v}_j e^{ij} = \nu [\bar{v}_j v^j v^i + g_{ij} g^j i \bar{v}_j \bar{v}^i v^i] \dots\dots\dots(5)$$

で定義され、 $\bar{v}_j v^j v^i = \bar{v}_j \bar{v}^j v^i$ であるから $\bar{v}_j v^j v^i \ll \bar{v}_j \bar{v}^j v^i$ と考えて、通常

$$\varepsilon \approx \nu g_{ij} g^j i \bar{v}_j \bar{v}^i v^i \dots\dots\dots(6)$$

と近似される。そこで、(3) 式に \bar{v}_k を作用させ、 $\nu g^{kk} \bar{v}_k v_i'$ を乗じて k, i について 1~3 まで和をとれば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j \varepsilon = & -2\nu (g^{kk} g_{ii} \bar{v}_k \bar{v}^i \bar{v}_k v^i + g^{ij} g_{kk} \bar{v}_j \bar{v}^k \bar{v}_i v^k) \bar{v}_j \bar{v}^i \\ & - \bar{v}_j \left[v^j \bar{v}^i \varepsilon' + 2\nu g^{kk} \bar{v}_k v^i \bar{v}_k \frac{\bar{\rho}'}{\rho} \right] - 2\nu g^{kk} g_{ii} \bar{v}_k \bar{v}^i \bar{v}_j \bar{v}^k \bar{v}_i v^j - 2\nu^2 g^{kk} g_{ij} g^j i (\bar{v}_j \bar{v}_k v^i)^2 \\ & - 2\nu g^{kk} g_{ii} \bar{v}_j \bar{v}_k v^i \bar{v}_j \bar{v}_i v^j + \nu g^{ij} \bar{v}_j \bar{v}_i \varepsilon \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

が得られる。

$k-\varepsilon$ モデルでは、渦動粘性係数 D を乱れ強さと乱れの空間的スケールの積として表わすとき、乱れ強さのスケールとして \sqrt{k} 、乱れの空間的スケールとして $\sqrt{k^3/\varepsilon}$ を考えて、 $D = c_\mu k^2/\varepsilon$ (c_μ ; 定数) とし、Reynolds 応力を次のように表わす。

$$-\bar{v}^i \bar{v}^j = 2D \bar{e}^{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} g^{ii} \dots\dots\dots(8)$$

さらに、 k, ε の方程式の各項を D を用いて表わして、 k, ε の基礎式として次式を用いる²⁾。

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j k = 2g_{ii} D \bar{e}^i j \bar{v}^i \bar{v}_j + \left(\frac{D}{\sigma_k} g^{ij} \bar{v}_j \bar{v}_i k \right) - \varepsilon \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \bar{v}^j \bar{v}_j \varepsilon = -c_{\varepsilon 1} \frac{g_{ii} \bar{v}^i \bar{v}^j}{k} \varepsilon \bar{v}_j \bar{v}^i + \bar{v}_j \left(\frac{D}{\sigma_\varepsilon} g^{ij} \bar{v}_j \varepsilon \right) - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \dots\dots\dots(10)$$

3. $k-\varepsilon$ モデルの基本的特性

一様乱流場では、 $k-\varepsilon$ モデルは

$$\frac{dk}{dt} = -\varepsilon, \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = -c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \dots\dots\dots(11)$$

と表わされる。この解は、初期条件 $t = t_0$ で $k = k_0, \varepsilon = \varepsilon_0$ を用いて

$$k = k_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{1}{c_{\varepsilon 2} + 1}}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{-\frac{c_{\varepsilon 2}}{c_{\varepsilon 2} + 1}} \dots\dots\dots(12)$$

である。これより $c_{\varepsilon 2} > 1$ が必要である。一方、Kármán・Howarth 方程式に、Kolmogoroff と Kármán の相

似仮説を適用すれば

$$k = k_a \left(\frac{f}{f_a} \right)^{\frac{-2\sigma+1}{\sigma+3}}, \quad \varepsilon = \varepsilon_a \left(\frac{f}{f_a} \right)^{\frac{-3\sigma-5}{\sigma+3}} \dots\dots\dots (13)$$

が得られる³⁾。ここに、σ は不変量 $\Lambda = \bar{u}^2 \int_0^\infty r^\sigma f(r) dr$ のパラメータである。(f; 二重速度縦相関, $\bar{u}^2 = \frac{2}{3} k$)

(12), (13) 式のべきの比較より

$$c_{\varepsilon 2} = \frac{3\sigma+5}{2\sigma+2} \dots\dots\dots (14)$$

となる。Loitsiansky, Birkhoff の積分の不変を要請するとき、それぞれ σ=4, 2 であり、それに対応して

Loitsiansky	σ=4	→	c _{ε2} =1.7
Birkhoff	σ=2	→	c _{ε2} =1.83

となり、c_{ε2} の値が推定される。本研究では、Rodi⁴⁾ に従い 1.92 を用いる。

4. 開水路流れの流速分布への適用

4.1 解析法

基礎式は次のようになる。座標系と記号の説明を Fig. 1 に示す。

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\bar{u}'v' \frac{\partial U}{\partial y} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_\mu}{\sigma_k} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -c_{\varepsilon 1} \varepsilon \frac{\bar{u}'v'}{k} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{c_{\varepsilon 2} \varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (16)$$

開水路流れの等流では、路床近傍を除いて $-\bar{u}'v' = g \sin \theta (h-y)$ と表わされることから、上式と

$$c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = g \sin \theta (h-y) \dots\dots\dots (17)$$

を連立して、流速分布を求めることができる。

解析上問題となるのは境界条件の与え方で、自由表面では $\partial/\partial y|_{y=h} = 0$ とおくことができるが、水路床近傍でのものが問題となる。通常、壁面近傍での乱れエネルギー生成率と散逸率とを等しくおく方法と、粘性底層を考慮する方法が用いられている⁵⁾。しかし、前者は乱れエネルギーの生成率と散逸率の差が問題となるようなときには適当でない。また、後者は現段階では多くの不明点を含んでいると思われる。そこで、本研究では視点を変えて、水路床付近での k, ε の値 k_b, ε_b を与え、無次元水理パラメータ k_b/u_*², ε_bh/u_*³ を導入し、対数速度分布に適合するようなパラメータを同定する。

境界条件を Fig. 2 に示す。自由表面上では、 $\partial/\partial y|_{y=h} = 0$ とし、路床近傍の y=δ では $U=U_b, \varepsilon=\varepsilon_b, k=$

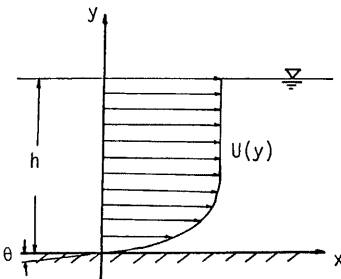


Fig. 1 Definition sketch

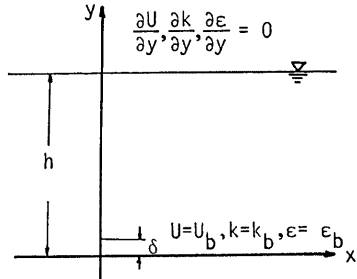


Fig. 2 Boundary condition

k_b を与える。ただし, U_b としては対数則の値を与え, ε_b, k_b をパラメータとして取り扱う。

滑面において, 対数則¹⁰⁾ は

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{u_* y}{\nu} + A_s \dots\dots\dots(18)$$

で与えられる。(18)式は変形して

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln Re \frac{u_*}{\bar{U}} + \ln \frac{y}{h} + A_s \kappa \right) \dots\dots\dots(18')$$

と表わせる。ここに, \bar{U} ; 水深平均流速, $Re = h\bar{U}/\nu$ 。

一方, Reynolds 数と \bar{U}/u_* は, (18)式を用いた抵抗則

$$\frac{\bar{U}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \left(\ln Re \frac{u_*}{\bar{U}} - 1 \right) + A_s \dots\dots\dots(19)$$

で一義的に関係づけられる。そこで, \bar{U}/u_* をパラメータとして与えて, (19)式より \bar{U}/u_* に対応する Re を求め, それらを(18')式に代入することにより境界条件としての $y=\delta$ での流速 U_b/u_* が与えられる。

解析結果を述べる前に, 次のような無次元変数を用いて基礎式を無次元化する。

$$t' = \frac{t u_*}{h}, \quad y' = \frac{y}{h}, \quad k' = \frac{k}{k_b}, \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_b}$$

このとき, (15), (16)式は次のように表わせる。

$$\frac{\partial k'}{\partial t'} = \frac{(1-y')^2}{c_\mu} \frac{\varepsilon'}{k'^2} \frac{\beta}{\alpha^3} - \varepsilon' \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{c_\mu}{\sigma_k} \frac{k'^2}{\varepsilon'} \frac{\partial k'}{\partial y'} \right) \frac{\alpha^2}{\beta} \dots\dots\dots(20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon'}{\partial t'} = \frac{c_{\varepsilon 1}(1-y')^2}{c_\mu} \frac{\varepsilon'}{k'^3} \frac{\beta}{\alpha^3} - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon'^2}{k'} \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{c_\mu}{\sigma_\varepsilon} \frac{k'^2}{\varepsilon'} \frac{\partial \varepsilon'}{\partial y'} \right) \frac{\alpha^2}{\beta} \dots\dots\dots(21)$$

ここに, α, β は無次元パラメータで

$$\alpha = \frac{k_b}{u_*^2}, \quad \beta = \frac{\varepsilon_b h}{u_*^3}$$

以後, 無次元変数の'をとる。

計算法としては, (20), (21)式を差分化し, 適当な初期条件を与えて定常になるまで収束計算を繰り返すという手法を用いる。初期条件としては $k, \varepsilon = 1$ を与えた。また, 用いた定数は, $c_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.3, \sigma_\varepsilon = 1.0, c_\mu = 0.07, 0.09, k = 0.4, A_s = 2.2$ である。また, $DY = 0.02, DT = 0.001, \delta/h = 0.02$ とした。

4.2 解析結果

(1) 定常化過程

定常化過程を明確にするために, $y=1.0$ での k, ε の時間的变化を示したのが Fig. 3 である。 k, ε もも初期に急激に減少を始め, $t=1$ 程度で徐々に増加を始め, $t=4$ 程度でほぼ定常状態に達することがわかる。

次に, k, ε の分布形の時間発展過程を Fig. 4, Fig. 5 に示した。分布形全体としての収束過程が明確にみられる。

(2) 流速分布

定常状態での k, ε を用いて求められた流速分布を示す。 $\alpha=4, \beta=80, 100$ のとき, $c_\mu=0.07, 0.09$ として解析を行った。(Fig. 6 (a), (b)) 図中, 実線は対数則であり, α, β の違いによって若干の差がみられるものの, ほぼ対数則に適合していると考えられる。

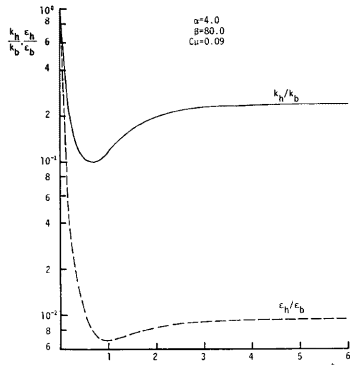


Fig. 3 Convergence of k, ε

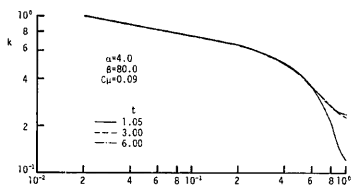


Fig. 4 Convergence of k distribution

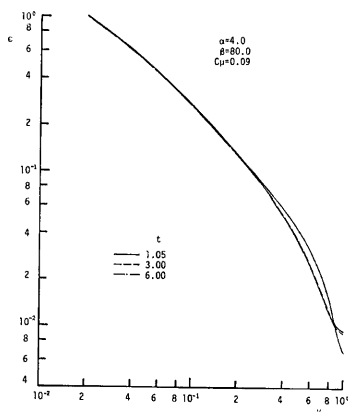
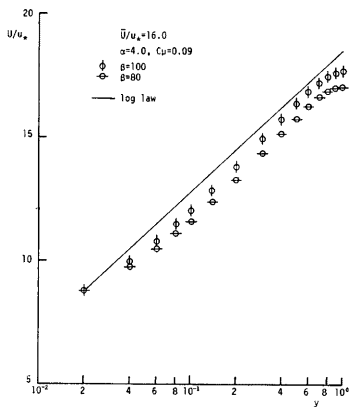
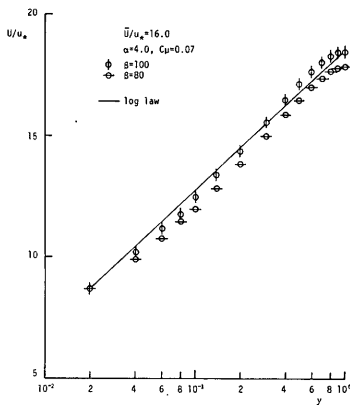


Fig. 5 Convergence of ϵ distribution



(a)



(b)

Fig. 6 Velocity distribution

(3) k, ϵ の分布形

$\alpha=4, \beta=80, c_\mu=0.07$ のときの k, ϵ の分布形を示した (Fig. 7(a), (b)). k は $y>0.4$ ではほぼ -1 乗で減少している。 ϵ については、柗津⁷⁾と浅野⁸⁾の提案する式

$$\text{柗津} \quad \frac{\epsilon h}{u_*^3} = 3(1-y)^{3/2}/y$$

$$\begin{aligned} \text{浅野} \quad \frac{\epsilon h}{u_*^3} &= 1.1 y^{-1} \quad (0.1 < y < 0.6) \\ &= 0.63 y^{-2} \quad (0.6 < y < 0.9) \end{aligned}$$

も示してある。計算値の方が実験値よりもやや大きめの値を示しているが、両者はほぼ適合していると考えられる。

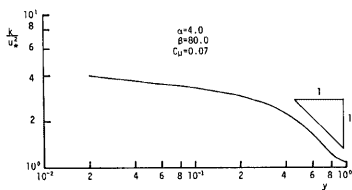
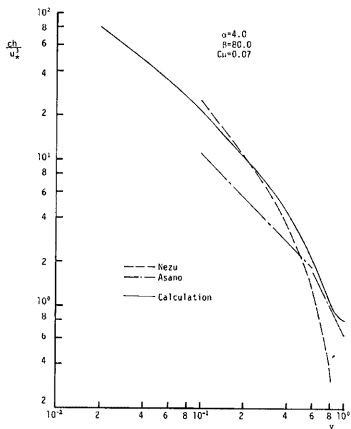


Fig. 7 (a) k distribution

(b) ϵ distribution



(b)

5. Surface Jet への適用

5.1 k - ϵ モデルによる Turbulent Jet の特性

数値解析を行う前に、相似領域での k - ϵ モデルの定性的特性を示す。

(1) 二次元 Jet⁹⁾

連続式、Reynolds 方程式、 k - ϵ 方程式に静水圧分布の仮定を行い、流れの方向の変化のスケールが、流れに直角な方向の変化に比べて十分大きいとして Ordering Analysis を行えば、基礎式は次のようになる。座標系を Fig. 8 に示す。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(22)$$

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial -\overline{u'v'}}{\partial y} \dots\dots\dots(23)$$

$$-\overline{u'v'} = D \frac{\partial U}{\partial y} \dots\dots\dots(24)$$

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \epsilon \dots\dots\dots(25)$$

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \dots\dots\dots(26)$$

分布形が自己相似のとき

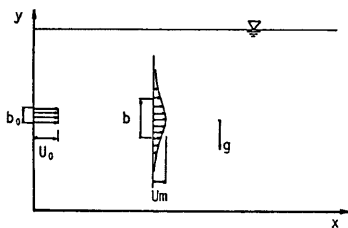


Fig. 8 Definition sketch

$$U = U_m f(\eta), \quad k = k_m g(\eta), \quad \epsilon = \epsilon_m h(\eta), \quad (\eta = y/b)$$

$$U_m \propto U_0 \xi^p, \quad b \propto b_0 \xi^q, \quad k_m \propto k_0 \xi^r, \quad \epsilon_m \propto \epsilon_0 \xi^s$$

$$(\xi = x/b_0)$$

とおけば、次元的考察により

$$2p + q = 0, \quad p + 2q + s - 2r = 1$$

$$p + r - s = 1, \quad p - q + r - s = 0 \dots\dots\dots(27)$$

が得られ、 U_m, b, k_m, ϵ_m の減衰のべきが次のようになる。

$$U_m \propto x^{-1/2}, \quad b \propto x^1$$

$$k_m \propto x^{-1}, \quad \epsilon_m \propto x^{-5/2} \dots\dots\dots(28)$$

上式は、 U_m, b について、実験的に確かめられている値に一致し、 $k-\epsilon$ モデルの有効性が示される。また、乱れエネルギー、エネルギー散逸率の減衰率も得られた。さらに、渦動粘性係数で定義した Reynolds 数 Re_D

$$Re_D = \frac{U_m b}{c_\mu \frac{k_m^2}{\epsilon_m}}$$

の減衰のべきを(28)式より求めれば0となり、 Re_D は一定となる。 D を一定とした層流 Jet のときに、Reynolds 数が流下とともに無限大となることと対照的である。

(2) Round Jet

2章で求めた基礎式に、 $g_{xx}=1, g_{rr}=1, g_{\theta\theta}=r^2$ を代入し、 $\partial/\partial\theta=0$ と静水圧分布の仮定を行い、さらに、流れ方向の変化のスケールが半径方向の変化のスケールに比べて十分大きいとして Ordering Analysis を行えば、次のようになる。座標系を Fig. 9 に示す。

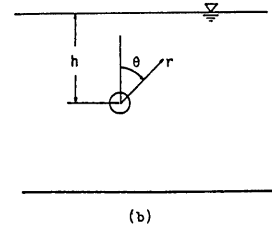
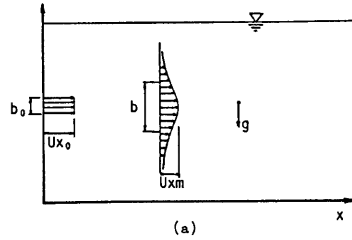


Fig. 9 Definition sketch

$$\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rU_r) = 0 \quad \dots\dots\dots(29)$$

$$U_x \frac{\partial U_x}{\partial x} + U_r \frac{\partial U_r}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r D \frac{\partial U_x}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$U_x \frac{\partial k}{\partial x} + U_r \frac{\partial k}{\partial r} = D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - \epsilon + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots(31)$$

$$U_x \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + U_r \frac{\partial \epsilon}{\partial r} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U_x}{\partial r} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial r} \right) \quad \dots\dots\dots(32)$$

分布形が自己相似のとき

$$U_x = U_m f(\eta), \quad k = k_m g(\eta), \quad \epsilon = \epsilon_m h(\eta), \quad (\eta = r/b)$$

$$U_m \propto \xi^b, \quad b \propto \xi^a, \quad k_m \propto \xi^r, \quad \epsilon_m \propto \xi^s \quad (\xi = x/b_0)$$

とおけば、次元考察により

$$p+q=0, \quad p+2q-2r+s=1$$

$$p-2q+r-s=-1, \quad p+r-s=1 \quad \dots\dots\dots(33)$$

が得られ、その結果

$$U_m \propto x^{-1}, \quad b \propto x^1$$

$$k_m \propto x^{-2}, \quad \epsilon_m \propto x^{-4} \quad \dots\dots\dots(34)$$

となる。

二次元 Jet のばあいとあわせて Table 1 に示した。

5.2 Surface Jet の数値解析

本節では、 $k-\epsilon$ モデルを用いて Surface Jet の数値解析を行い、表層流速、乱れエネルギー、エネルギー散逸率の減衰について前節の結果と比較検討するとともに、特性量の鉛直方向の分布形について検討する。

(1) 対象領域と境界条件

対象とする領域と座標系、ならびに境界条件を Fig. 10

Table 1 Attenuation rate of hydraulic variables

	slot	round
U_m	-1/2	-1
b	1	1
k_m	-1	-2
ϵ_m	-5/2	-4
Re_D	0	0

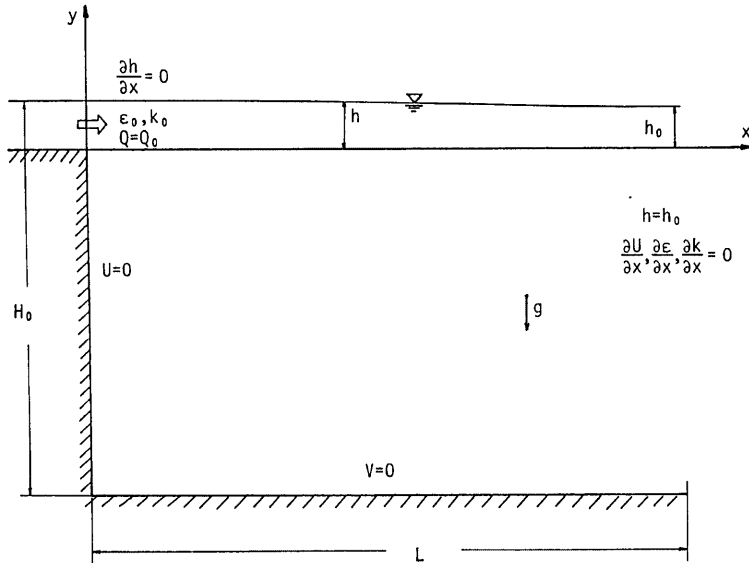


Fig. 10 Definition sketch and boundary condition

に示す。境界条件としては、出口の流量 Q_0 を一定とし、水位のこう配が $\partial h / \partial x |_{x=0} = 0$ とする。また、下流端は、放出口より十分離れているとして水位を一定とし、流速 U 、乱れエネルギー k 、エネルギー散逸率 ϵ のこう配を $\partial U / \partial x, \partial k / \partial x, \partial \epsilon / \partial x |_{x=L} = 0$ とする。

(2) 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

次のような無次元変数を導入する。

$$U' = \frac{U}{U_0}, \quad V' = \frac{V}{U_0}, \quad k' = \frac{k}{k_0}, \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \quad p' = \frac{p}{\rho g h_0}$$

$$x' = \frac{x}{h_0}, \quad y' = \frac{y}{h_0}, \quad t' = \frac{t U_0}{h_0}$$

ここに、 U, V ; x, y 方向の流速、 p ; 圧力、 U_0, h_0 ; 初期の放出流速と水深、 k_0, ϵ_0 ; 放出口での乱れエネルギー、エネルギー散逸率。

上記の無次元量を用いて基礎式を無次元化すれば、次のようになる。(以後、無次元変数の'をとる。)

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{Fr_0^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$p = \frac{h}{h_0} - y \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\beta}{\alpha} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta} \epsilon + \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (38)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\beta}{\alpha} c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{\alpha}{\beta} c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k}$$

$$+ \frac{\beta^2}{\alpha} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 α, β, Fr_0 は、次のように定義される無次元パラメータである。

$$\alpha = \frac{\varepsilon_0 h_0}{U_0^3}, \quad \beta = \frac{k_0}{U_0^2}, \quad Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{g h_0}} \text{ (Froude 数)}$$

(3) 解析法

基礎式をコントロール・ボリューム、コントロール・サーフェスで積分した後、離散化を行う。差分スキームは、岩佐・松尾・俞¹⁰が貯水池の解析に用いた explicit 法を用いる。ただし、表層の連続式の計算には、Peregrine¹¹が Undular Bore の数値解析に用いたものと類似の次のような方法を用いた。まず、

$$\frac{h_{i+1/2}^* - h_{i+1/2}^{n+1/2}}{DT} + \frac{h_{i+1/2}^* + h_{i+1/2}^{n+1/2}}{2} \cdot \frac{U_{s,i+1}^n - U_{s,i}^n}{DX} + U_{s,i}^n \cdot \frac{h_{i+3/2}^{n+1/2} - h_{i-1/2}^{n+1/2}}{2DX} = V_{s,i+1/2}^n \dots\dots\dots(40-a)$$

によって $h_{i+1/2}^*$ を求め、その値を用いて $(n+1)$ step の流速 U^{n+1}, V^{n+1} を求める。さらに、これを用いて、 $(n+3/2)$ step の水位 $h_{i+1/2}^{n+3/2}$ を次式で求めた。

$$\frac{h_{i+1/2}^{n+3/2} - h_{i+1/2}^{n+1/2}}{DX} + h_{i+1/2}^{n+1/2} \frac{U_{s,i+1}^{n+1} - U_{s,i}^{n+1} + U_{s,i+1}^n - U_{s,i}^n}{2DX} + \frac{U_{s,i+1}^{n+1} + U_{s,i}^{n+1} + U_{s,i+1}^n + U_{s,i}^n}{4} \cdot \frac{h_{i+3/2}^{n+1/2} - h_{i-1/2}^{n+1/2}}{2DX} = \frac{V_{s,i+1/2}^{n+1} + V_{s,i+1/2}^n}{2} \dots\dots\dots(40-b)$$

ここに、 s は表層を表す。また、水流量は Fig. 11 のように定義されている。

計算に当っては、 $DX=3.0, DY=0.5$ とした。また、定数の値は、 $c_\mu=0.09, c_{\epsilon 1}=1.44, c_{\epsilon 2}=1.92, \alpha_k=1.3, \alpha_\epsilon=1.0$ を用いている。

(1)で述べた境界条件により、流れが定常状態に漸近するまで時間発展を行った。

(4) 結果と考察

数値解析の水理諸量を Table 2 に示した。Run 1, 2 は同一の水理パラメータで領域の深さを変えたばかりである。Run 2~5 は同じ領域で無次元パラメータ α, β を変えたばかりである。

まず Run 1 を例にとって流れの定常化過程を検討する。Fig. 12 は $x=12, 54$ での表層流速の時間変化を示したものである。時間が十分経過してもなお若干の振動がみられるが、ほぼ定常状態とみなすことができる。Fig. 13 は $x=12, 54$ での流量の時間変化を示したものである。 x の位置にかかわらず、出口の流量 1.0 を平均値とする振動を示している。よって、定常状態の水流量として振動の一周期の平均を用いる。

次に、領域の大きさの違いによる流れの違いを検討す

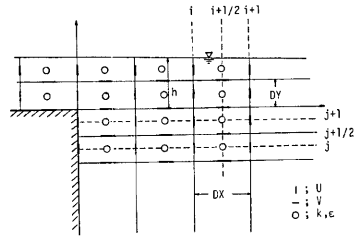
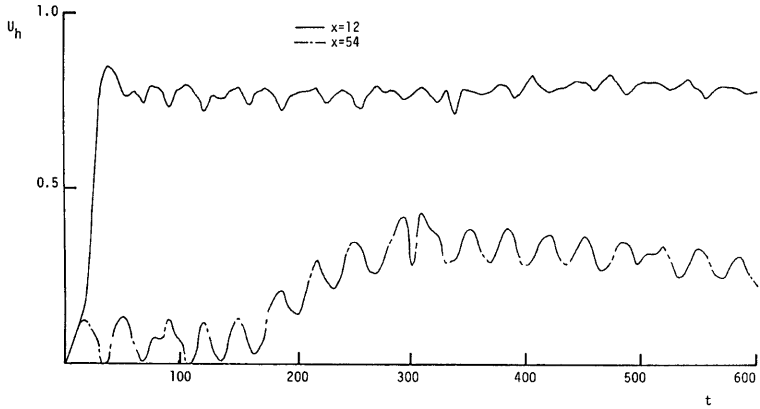


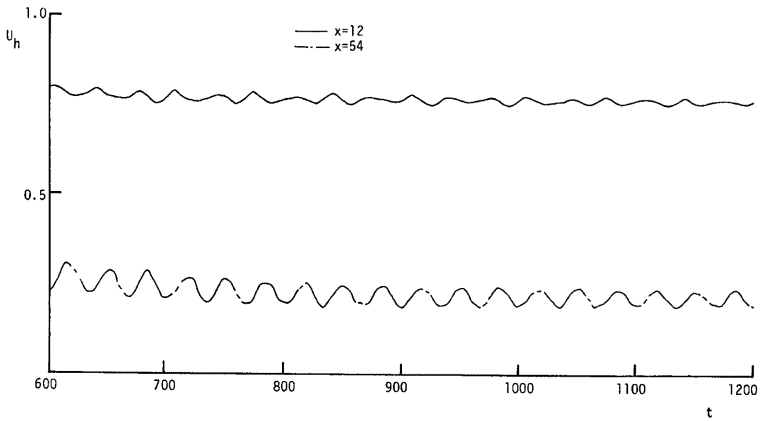
Fig. 11 Arrangement of hydraulic variables

Table 2 Hydraulic parameters in numerical simulations

	Fr_0	α	β	H_0/h_0	L/h_0
Run 1	0.391	1.33×10^{-3}	0.015	15	84
Run 2	0.391	1.33×10^{-3}	0.015	30	84
Run 3	0.391	1.33×10^{-3}	0.020	30	84
Run 4	0.391	1.33×10^{-3}	0.025	30	84
Run 5	0.391	6.65×10^{-4}	0.020	30	84



(a)



(b)

Fig. 12 (a), (b) Relation between surface velocity and time

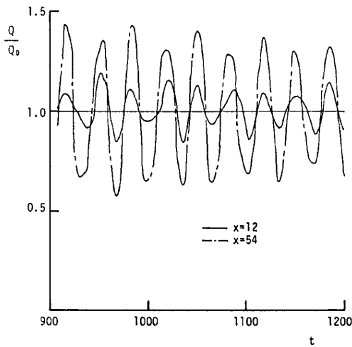


Fig. 13 Relation between discharge and time

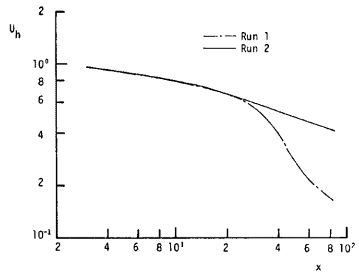
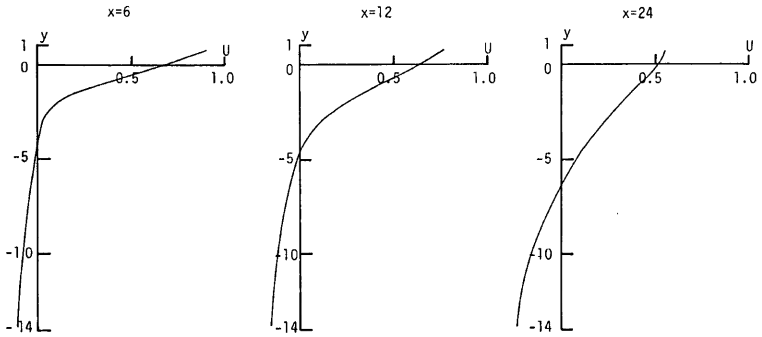
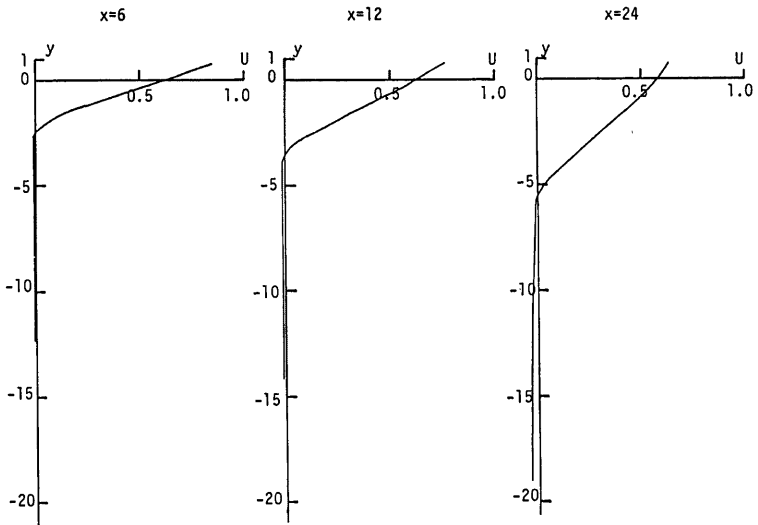


Fig. 14 Attenuation of surface velocity



Run 1
(a)



Run 2
(b)

Fig. 15 (a), (b) Velocity distribution

るために、Run 1, 2 の定常状態での表層流速の減衰と、流速の鉛直分布を Fig. 14, Fig. 15 (a), (b) に示した。Fig. 14 より、両者は放出口の近くでは一致しているが、 x が増加するにつれて、水深の小さい Run 1 の方は大きく減衰するようになる。これは、Fig. 15 (a), (b) の鉛直分布をみてわかるように、水深の小さい Run 1 では大きな内部循環が存在しているためと考えられる。

次に、Run 2~5 について、表層の流速、乱れエネルギー、エネルギー散逸率の減衰過程を示した。(Fig. 16, 17, 18)

Fig. 16 の表層流速の減衰の図には、実験式¹²⁾

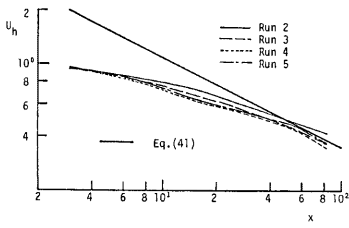


Fig. 16 Attenuation of surface velocity

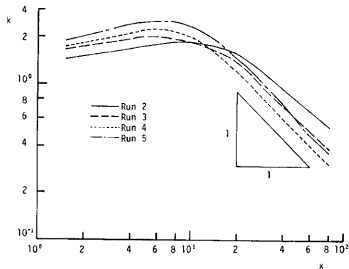


Fig. 17 Attenuation of surface turbulent kinetic energy

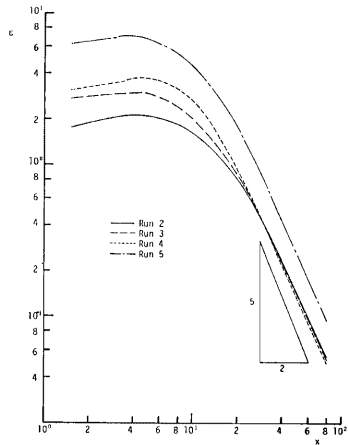


Fig. 18 Attenuation of surface energy dissipation rate

$$\frac{U}{U_0} = 2.41 \left(\frac{2h_0}{x} \right)^{-1/2} \dots\dots\dots(41)$$

も示してある。ただし、上式は便宜上、次元量で示した。この図より、計算値は無次元パラメータ α, β の値にほとんど影響を受けないで、 x の増加とともに実験値に漸近していくのがわかる。

Fig. 17 は乱れエネルギーの減衰を示したもので、放出口付近では乱れ強さが増大するが、 x の増加とともに、5.1(1)で得られた減衰のべき-1乗で減少していくのがわかる。

Fig. 18 はエネルギー散逸率の減衰を示したもので、乱れエネルギーと同様に放出口付近で増大し、 x の増加とともに 5.1(1)で得られた減衰のべき-5/2乗で減少していく。

次に、Run 2 について、乱れエネルギー、エネルギー散逸率の鉛直分布を示した。(Fig. 19, 20) 両者ともに、水表面下でいったん極大値をとってから減少していく。

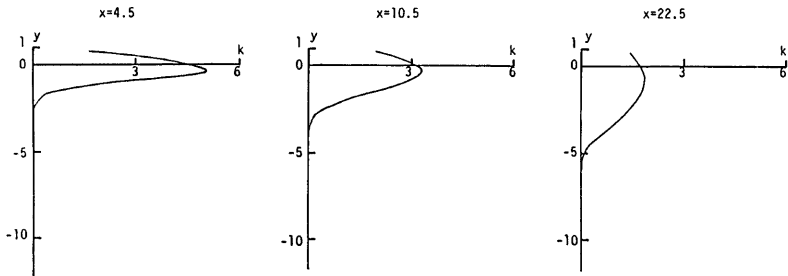


Fig. 19 Distribution of turbulent kinetic energy

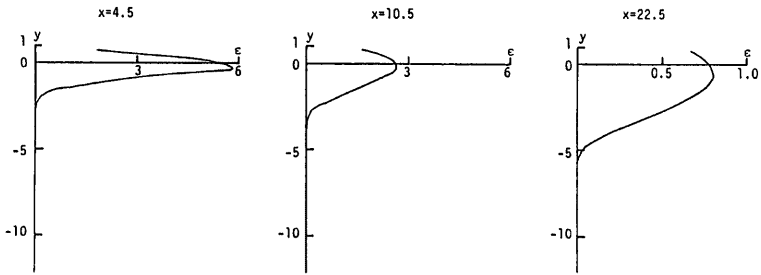


Fig. 20 Distribution of energy dissipation rate

6. 結 論

本研究は、 $k-\varepsilon$ モデルの基本的特性を検討するとともに、水理解析への二、三の適用例を示したもので、得られた結果をまとめると次のようになる。

- ① 2., 3. では、直角座標系での $k-\varepsilon$ モデルの基礎式の誘導過程を示すとともに、一様乱流場での $k-\varepsilon$ モデルの特性を検討した。
- ② 4. では、開水路流速分布への適用例を示した。とくに、水路床近傍での境界条件の扱いを考慮した数値解析を行い、水理量の分布形について検討した。
- ③ 5. では、Simple Jet に $k-\varepsilon$ モデルを適用するときに、その有効性を示すため、相似領域での水理量の減衰率を求め、さらに、応用例として Surface Jet の数値解析を行なうことによって、水理量の分布形を検討した。

今後さらに、より高次の乱流モデルによる解析を検討するとともに、物質輸送、熱輸送への乱流モデルの水理学的な適用について検討して行きたい。

最後に、本研究を行うにあたって協力をおしなされた、大久保清久氏（日本道路公団）、末松孝司氏（東急建設）、松井健一氏（京都大学大学院）に心から感謝します。

参 考 文 献

- 1) セドフ, L. I. : 大橋義夫訳 (1979), 連続体力学1, 森北出版
- 2) Hanjalic, K. and B. E. Launder: A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 52, 1972.
- 3) Rotta, von J. C. : Turbulent Strömungen, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.
- 4) Kollmann, W. : Prediction Method for Turbulent Flows, Hemisphere Publishing Cooperation, 1979.
- 5) Launder, B. E. and D. B. Spalding: The numerical computation of turbulent flows, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 3, 1974.
- 6) 岩佐義朗: 水理学, 朝倉土木工学講座3, 朝倉書店, 1969.
- 7) 柁津家久: 開水路流の乱流構造に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1977.
- 8) 浅野富夫: 開水路流れにおける乱れの時空間構造に関する研究, 京都大学学位論文, 1980.
- 9) 松井健一, 岩佐義朗, 細田 尚: $k-\varepsilon$ モデルにおける二次元 jet の特性, 第38回土木学会年次学術講演会, 1983.

- 10) 岩佐義朗, 松尾直規, 兪 朝夫: 貯水池水理の数値解析法とその適用について, 京大防災研究所年報, 第22 B-2, 1979.
- 11) Peregrine, D. H.: Calculation of the development of an undular bore, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 25, 1966.
- 12) Fisher, H. B., J. Imberger, C. Y. Koh, E. J. List and N. H. Brooks: *Mixing in Inland and Coastal Waters*, Academic Press, 1979.