

河床波の変形過程に関する研究

— 周期的流量変化に伴う砂堆の応答に関する実験 —

澤 井 健 二

TRANSFORMATION OF SAND WAVES

— EXPERIMENTS OF THE TIME RESPONSE OF DUNES
DUE TO PERIODIC CHANGE OF FLOW DISCHARGE —

By *Kenji SAWAI*

Synopsis

Time response of dunes due to periodic change of flow discharge was simulated through some flume experiments. Two kinds of hydrographs (triangular and sinusoidal) with several periods were used. As expected, dunes transformed with some time-lag for the change of flow discharge. Within some range of period, large loops were formed in the relation between flow discharge and wave height, wave length of dunes and flow depth. When the discharge varied very quickly, the scales of sand waves hardly changed. A sinusoidal discharge hydrograph seems to have a nearly equivalent role to the sand wave transformation as the triangular hydrograph with a considerably shorter period.

1. 緒 言

流量の変化に伴って河床形状がどのように変化するかを明らかにすることは、洪水時における流水抵抗や河床変動を予測する上で極めて重要な課題であり、従来多くの研究がなされてきた^{1)~8)}。その結果、河床波の変形にはかなりの時間を要するため、急激な流量変化に対しては時間遅れを伴って応答し、水深-流量関係にループの現われることなどが見出されている。また、それらの過程を定式化したモデルもいくつか提案されているが、これまでに提案されてきた河床波の変形過程の予測モデルは、主として流量を階段状に変化させた実験において見出された特徴を抽出して構成されたものであり、一般的な流量変化に適用できるかどうかは疑問である。ことに、流量減少時の砂堆の波長の変化機構や、Lower Regime から Upper Regime にまたがる場合の河床波の変形機構に対しては、不明の点が多く残されている。これには、そのような条件下における非定常移動床現象の観測の困難さや、実験条件の制御の困難さが大きな妨げになっていたように思われる。

そこで、本研究は、非定常条件下での河床波の変形過程に関する実験技術の改良を図るとともに、従来なし得なかった、周期的流量変化に伴う河床波の応答特性を実験的に解明しようとするものである。

2. 実験装置

河床波の変形過程に関する基礎研究では、非定常ではあるがほぼ等流条件を満たす場を想定することが多い。その適否は別として、それに即した実験条件を設定するには、上下流端の境界条件の影響を小さくして、できるだけ等流に近い状態を維持する必要がある。それには、水面勾配と河床勾配の制御が必要となる。

河床勾配の制御には、水路勾配そのものを変化させる方法と、洗掘・堆積量を調節する方法とがあるが、

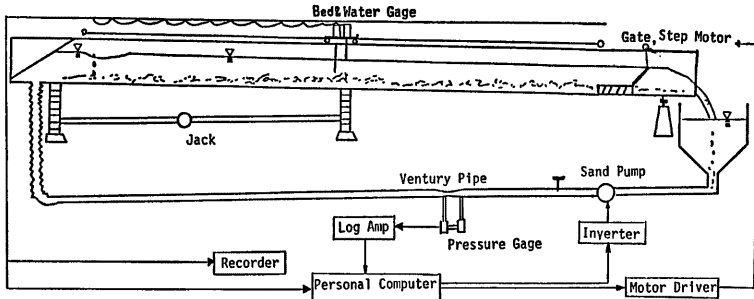


Fig. 1 Experimental equipment

両者の間には、水理的に見て大きな差異があるように思われる。ここでは、水路勾配そのものは変化させないものとすれば、下流への流出土砂量に等しい土砂を上流から与える必要がある。これには下流への流出土砂を捕捉・計量し、それと同量の土砂を別の給砂器から供給する方法と、下流へ流出した土砂をそのまま上流へフィードバックする方法とがあるが、水理条件の変化が複雑でかつ長時間にわたる実験では、後者の方法が有効である。本実験に用いた水路は、Fig. 1 に示すように下流端の水槽がホッパーになっており、サンドポンプを用いて水と土砂をともに循環させる構造になっている。この方式によると、ほとんど時間の遅れを伴うことなく、流出土砂を上流へフィードバックすることができるが、砂礫粒子ならびに循環装置そのものの摩擦による水の濁りや、河床材料の変化が生じる欠点がある。

一方、水面勾配の制御法は常流の場合と射流の場合とで異なるが、本実験においては、常流の場合に重きをおいて、水路下流端に堰を設けて水位を調節することにした。ただし、この堰は、流砂を透過させられるよう、底部にスリットを設け、堰板の角度を変えることによって水位を制御する構造になっている。また、堰のごく周辺では不等流区間が出現するのを避けられないため、堰の上流 50cm の区間には、平均河床高を天端とする床止めを設けて固定床とした。堰板の操作は、最初は 9m 間の水面勾配を目視で検出し、随時手動で上下させていたが、実験の後半では、水位計を積載した計測台車を約 1 分ごとに走らせてマイクロコンピュータで平均水面勾配を算出し、それと所期の水面勾配との偏差に比例したパルスを送るにより、自動化した。

次に流量の制御であるが、流砂を循環させる場合には、バルブの開度を小さくすると、砂れきがバルブの間隙に詰まり、流量が不安定になる恐れがある。そこで、本実験では、バルブの開度は大きめに固定しておき、1/4Hz の分解能をもつ周波数変換器を用いてポンプの回転数を変化させることによって流量を調節している。ただし、ポンプの回転数と流量との関係は負荷によって異なるため、実際の流量を頻繁に検出しながら設定流量と絶えず比較し、その偏差を周波数変換器への制御信号としてフィードバックさせている。流量の検出にはベンチュリー管と差圧計を用い、小流量での分解能を上げるために差圧計の電圧出力を対数アンプで変換した後、マイクロコンピュータで 8 ビットの処理を行っている。制御の時間間隔は 0.5 sec で、流量の変化周期が数十秒以上の場合には、少なくとも帰還水路内の流量は 2～3 秒以内の時間遅れで設定ハイドログラフに追随させることができる。ただし、流量の変化速度が大きい場合には、開水路部分での貯留効果のため、流量の対応が遅れ、等流条件からの逸脱も大きくなることは避けられない。

河床形状の測定には電気伝導度式サーボ河床計、水面計測には触針式サーボ水位計を用い、ほぼ水路中心線に沿って約 50cm/s の速度で走行させ、ペンレコーダに記録した。

なお、実験に用いた水路の諸元は、幅 50cm、深さ 50cm、長さ 21m で、下流端の約 2m を除いて移動

床とし、中央部 10 m の区間を測定区間とした。勾配は電動ジャッキにより約 0.001/min の速度で 0~1/30 の範囲に変化させることができる。流量の制御範囲は、自動の場合は 0~40 l/s、手動の場合は 0~100 l/s である。

3. 実験条件ならびに実験結果

3.1 実験条件

本実験では、流量の周期変化に伴う河床波の応答遅れが顕著に現われることの予想される、波高の大きな砂堆領域を対象として実験条件を設定した。用いた河床材料の粒度分布は Fig. 2 に示すとおりで、中央粒径 0.77 mm のほぼ均一砂である。勾配は 1/500 に設定し、流量を 20~40 l/s の範囲で連続的かつ周期的に変化させて、河床形状の変化が定常サイクルに達したとみなされる時点で河床形状と水面形状を計測し、平均波高、平均波長、水深の変化を求めた。流量波形は、時間とともに直線的に増加と減少をくり返す二等辺三角形形状のもの、正弦波状のもの二種を設定し、周期 T をそれぞれ約 10 min, 20 min, 40 min, 80 min, 160 min の 5 通り変化させている。また、比較のため、20 l/s から 40 l/s まで、2 l/s ビッチでかなり長時間定常流量を与えた場合の水深および河床形状も、あわせて測定した。各実験ケースにおける初期河床は、直前の実験ケースの最終河床をそのまま用い、敷きならしは行わなかった。

3.2 実験結果

(1) 定常流量の場合

Fig. 3 は、定常流量条件下での流量と水深、河床波の平均波長、平均波高の関係を示したものである。河床波の波長や波高の定義には若干のあいまいさが伴うが、ここでは 2 mm 程度以上の落差をもつ凹凸を個々の波とみなし、各波の峰から直下流の谷までの比高を個々の波の波高、隣り合う谷の間隔を個々の波の波長と定義している。全体的な傾向としては、流量の増加に伴って各量とも増加しているようであるが、詳細に見ると、かなり不規則な変化をしている。特に波長は、30 l/s 未満の範囲で流量の増加に伴って減少しているようにも読み取れる。また、 $Q=22$ l/s の場合には、 $Q=20$ l/s の場合に比べて波長が短く、波高が大きくなっており、単に河床波の形状だけでなく、抵抗特性もかなり複雑に変化しているようである。

これらのデータを得る際には、各流量に対して十分に発達した平衡状態の河床波が得られるよう、実験条件の制御に留意し、かなり長時間通水した後には計測を行ったつもりであるが、各流量に対して、測定台車を 10m の区間で 1 回だけ走らせて得たものであり、その流量に対する平均的な値を示しているか否かにはかなり疑問がある。現在の段階では、Fig. 3 に示す変化傾向が水理条件に固有の確定的なものか、種々の要因に

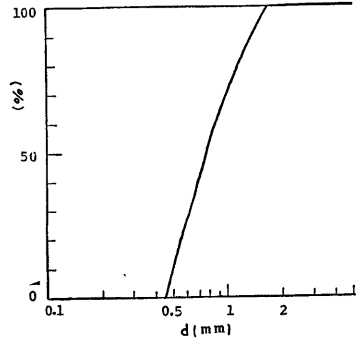


Fig. 2 Size distribution of used material

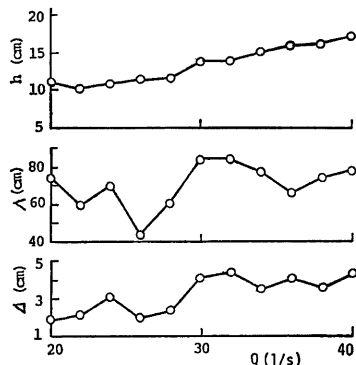


Fig. 3 Wave height, wave length and flow depth under steady flow conditions

起因する不確定なものかを判別することは困難である。もしもこれが不確定なものであるとするならば、その要因として、河床波そのものに固有の要素と、本実験に特有の要素とが考えられる。本実験に特有の要素としては、実験条件の制御法もさることながら、その計測方法さらにはデータの読み取り方法にも問題があるように思われ、それらを慎重に検討した上で、河床波そのものに固有の現象を抽出しなければならない。いずれにせよ、河床波は時間的にも空間的にもかなり不規則なものであり、平均値だけでなく、分散や確率分布、あるいは場合によっては変動の系列そのものに着目する必要があるようにも思われる。

(2) 三角波状に流量が変化する場合

Fig. 4 (a) は、種々の周期で流量を三角波状に変化させた場合の河床波の平均波長、平均波高ならびに水深の時間変化を示したものである。全体的には、流量の変化に対して河床波形状や水深がやや遅れて応答しているが、 $T=5040$ sec の場合のように、波長や波高のピークが流量ピークよりも早く現れている場合もあり、ここでもデータのばらつきの大いことがうかがわれる。周期の非常に短い $T=630$ sec の場合には、流量変化と河床波の波長や波高の変化とはむしろ位相が逆転しているようであるが、これは河床波の応答速度に比べて流量の変化速度が極端に大きい場合の特徴として注目される。しかしながら、この場合でも、水深の変化は流量の変化とほぼ同位相となっている。

Fig. 5 (a) は、この変化を、流量 Q を横軸にとって表現したもので、 $T=1260$ sec の場合以外はさほど大きなループは見られないが、 $T=1260$ sec の場合には反時計まわりのかなり大きなループが見られるのが特徴的である。

Fig. 6 (a) は、流量ハイドログラフの各位相 φ (増水期: $0\sim\pi$, 減水期: $\pi\sim 2\pi$) ごとの水深 h , 全位相を通じての水深の変化幅 $h_{max}-h_{min}$ ならびにループ幅の最大値 δh が周期の違いによってどのように変化しているかを示したものである。これによると、全位相を通じての水深の変化幅は流量の変化速度が大きいほど小さくなるが、ループ幅そのものは $T=1260$ sec で最大になっていることがわかる。**Fig. 6 (b)** および **(c)** は、砂堆の平均波長と平均波高について同様の整理を行ったものである。平均波長に関しては、そのループ幅だけでなく変化域そのものも流量の変化周期が長くなるにしたがって狭くなっていることが注目される。**Fig. 6 (d)** は、最大流量時の位相 ($\varphi=\pi$) を基準として、水深、平均波長および平均波高の最大値の現れる位相の遅れ $\delta\varphi$ が周期によってどのように変化するかを示したものである。 $\delta\varphi$ が負の場合は増水期、正の場合は減水期にそれらのピークが現れたことを示している。

(3) 正弦波状に流量が変化する場合

前項では流量が時間に伴って直線的に増減をくり返す三角波状流量波形の場合を対象としたが、実際の河川の洪水では、ピーク付近で流量の増加率が減ることが多い。そこで、より実的な流量波形に近づける意味で、正弦波状に流量を変化させ、三角波状に流量が変化した場合との比較を行った。**Fig. 4 (b)** は種々の周期で流量を正弦波状に変化させた場合の河床波の平均波長、平均波高ならびに水深の時間変化を示したものである。大局的には、三角波状の流量変化の場合と類似した変化傾向を示しているが、波長や波高の変化域が広がっており、位相のずれもより明確に現れている。これは、三角波状流量波形の場合にくらべて、最大および最小値近傍の流量の継続時間が長くなったことと、その中間での流量の変化速度が大きくなったことによるものであろう。

Fig. 5 (b) は、この変化を、流量を横軸にとって表現したもので、 $T=660$ sec の場合には目立ったループは形成されていないが、 $T>1320$ sec の場合にはかなり明瞭なループが形成され、特に水深・流量関係のループは $T=5280$ sec において最大となっている。周期がさらに長くなればやがてはループが消滅するものと思われるが、本実験範囲ではそれを確認するまでには至らなかった。 $T=10560$ sec および 5280 sec の場合には、増水期に河床波の波長と波高が共に増大し、減水期にほぼ一定の波長を保ったままで波高のみが漸減し、最小流量から流量が再び増加し始めた直後に波長が急減している。ところが $T<2640$ sec の場合には、増水期に波高が減少し、減水期に波高が増大して、流量と波高が逆相関を示している。これは三角波状流量変化の $T=630$ sec の場合にも見られた傾向であるが、それが一層明確なものとしてとらえられた。

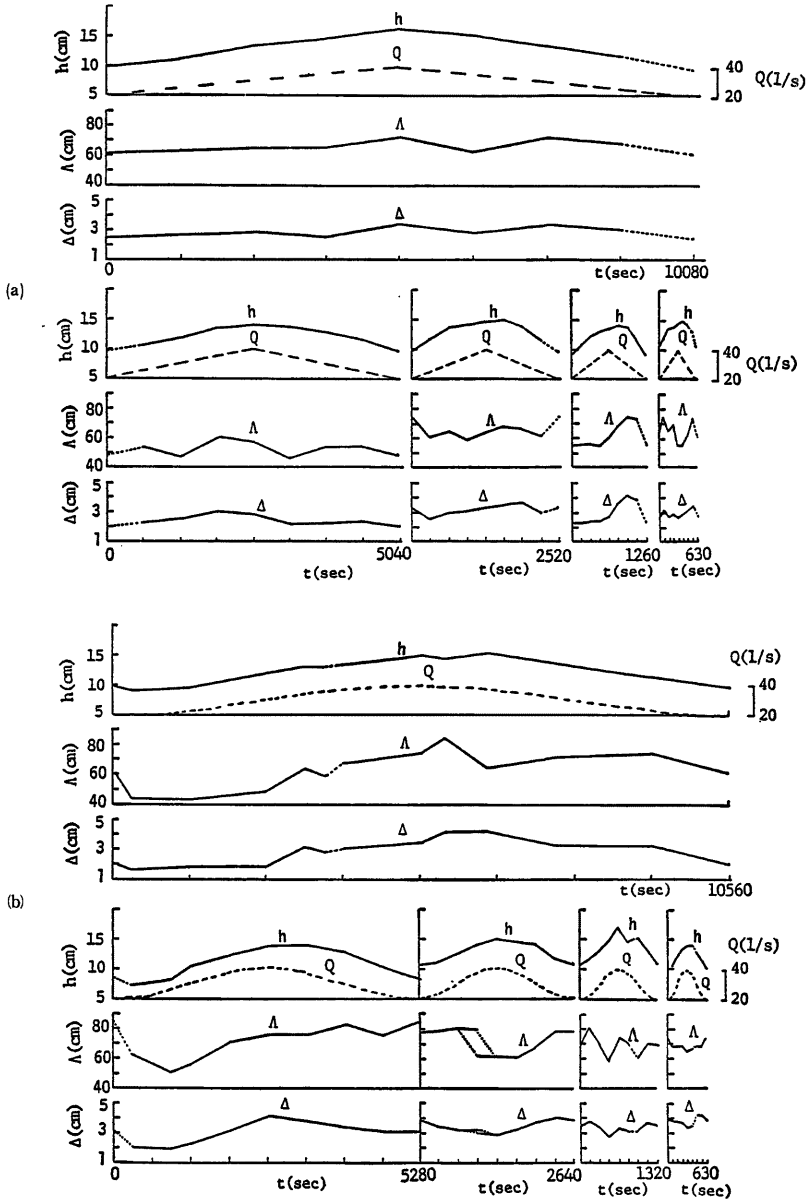


Fig. 4 Time response of dune height, dune length and mean flow depth.

(a) : under triangular hydrographs. (b) : under sinusoidal hydrographs.

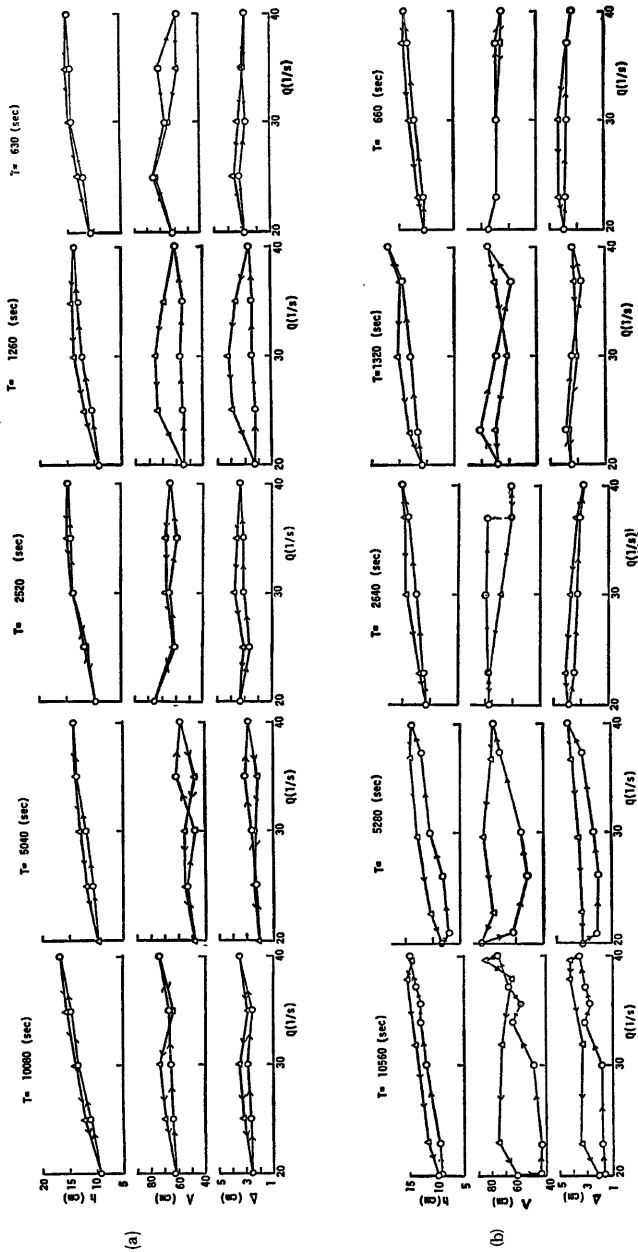


Fig. 5 Hysteresis of dune height, dune length and mean flow depth.

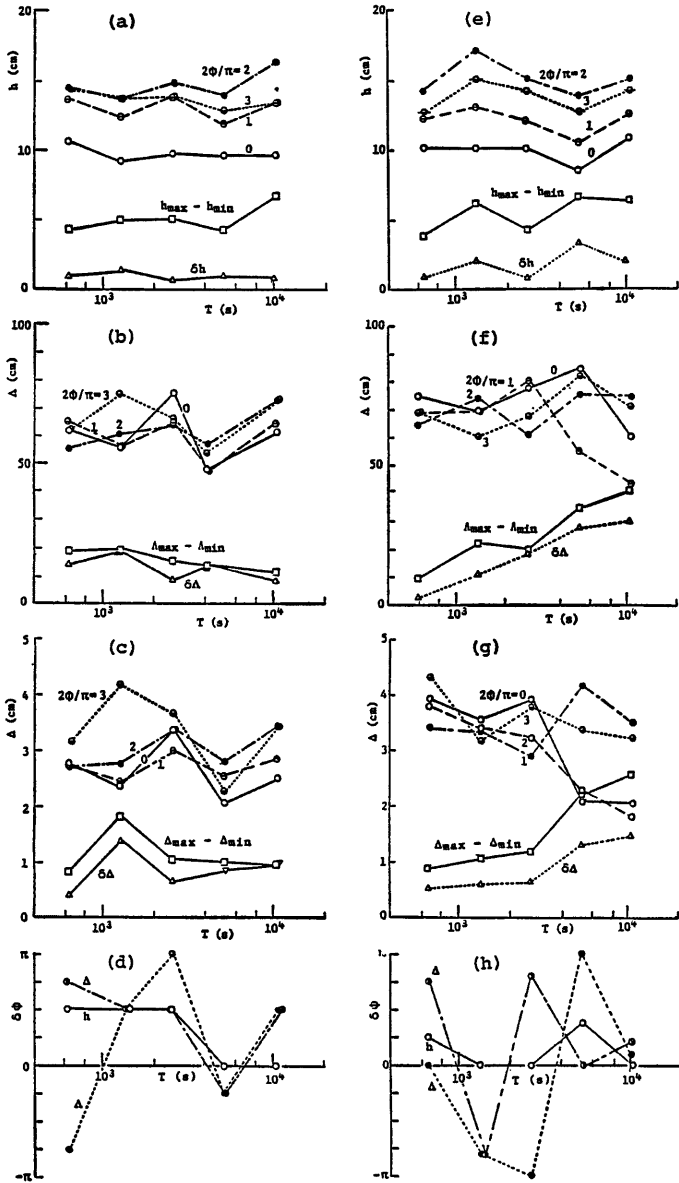


Fig. 6 Range and phase lag of dune height, dune length and flow depth.
 (a)~(d) : under triangular hydrographs. (e)~(h) : under sinusoidal hydrographs.

また、波長のループに時計まわりの部分が見られるのも注目されるが、現象の再現性や測定精度の面からこれを確定的なものと判断するのは早計のように思われる。

Fig. 6 (e)~(h) は、流量の各位相ごとならびに全位相を通じての諸量の変化を、三角波状流量変化の場合と同様に整理したものである。

(4) 流量波形による河床波の応答特性の相異

前項に示した正弦波状流量変化時の河床波の応答特性を前々項に示した三角波状流量変化時のものと比較すると、ループの大きさから見て、三角波状流量波形の $T=1260 \text{ sec}$ のものが正弦波状流量波形の $T=5280 \text{ sec}$ あたりのものに比較的類似しているように思われる。しかしながら、この2つの実験ケースにおいても、三角波状流量変化の場合は増水期に河床形状があまり変化せず減水期に変化が顕著になるのに対し、正弦波状流量変化の場合には減水期の変化が緩慢で増水期に顕著な変化が見られるという相異がある。

また、三角波状流量変化の場合には、 $T=1260 \text{ sec}$ でループが最大となり、 $T>2520 \text{ sec}$ ではループが小さくなって周期による応答特性の差が顕著でなくなるのに対し、正弦波状流量変化の場合には $T=5280 \text{ sec}$ でループが最大となり、 $T=10560 \text{ sec}$ に至ってもきわめて大きなループが形成されている。さらに、三角波状流量変化の場合には $T=630 \text{ sec}$ においてのみ流量と河床波のスケールが逆相関を示すのに対し、正弦波状流量変化の場合には、 $T<2640 \text{ sec}$ の3つの実験ケースにおいてその傾向が現れている。

以上の結果から判断すると、流量が正弦波状に変化する場合には、それよりもかなり短い周期で流量が三角波状に変化する場合に類似した河床波の応答が現れていることになる。これは、河床波の変形過程には、流量の変化周期よりむしろ変化速度が支配的な影響を及ぼしているためではないかと考えられる。そこで、同一振幅で同一最大変化速度をもつ三角波と正弦波を比較すると、その周期の比は $1:\pi/2$ となるが、上に述べた三角波の場合と正弦波の場合の周期の対応のずれはもっと顕著なものである。これは、単に流量の変化速度だけでなく、どのような流量がどの程度の時間継続しているかという波形そのものがかなり大きな影響をもっていることの現れである。また、一周期を通じての平均的な河床波形状に着目すると、三角波状流量変化の場合には周期による顕著な差異が見られないが、正弦波状流量変化の場合には、周期が短くなるにしたがって河床波の平均波高が増加しているようである。このような一周期を通じての平均波高を生じさせるような定常流量を支配流量と考えるならば、同じ正弦波状流量波形のもとでも、周期によって支配流量が異なることになる。

4. 従来の予測式による検討

従来、河床波の変形過程を平均波長 (d) - 平均波高 (d) 平面上で追跡すると、水理条件ごとにひとつのとり易い波高と波長の関係を表す直線があり、その右下の領域では河床波の分裂が卓越し、左上の領域では埋め戻しが卓越して、いずれも急速にその直線に近づいた後、その直線に沿って指数関数的に速度を緩めながら平衡状態に漸近することが見出されている⁵⁾。芦田・中川・加藤⁷⁾は、それを次のように定式化している。

1) $\delta < \delta_c$ の場合

$$\frac{dA}{dt} = -A \frac{A^3}{l} (1 - \beta\delta) \dots\dots\dots(1) \quad \frac{dA}{dt} = -A \frac{A^2 d}{l} (1 - \beta\delta) \dots\dots\dots(2)$$

2) $\delta = \delta_c$ の場合

$$\frac{dA}{dt} = -A \frac{A^3}{l} (1 - \beta\delta) + f \frac{q_s}{1 - \lambda} \frac{1}{d} \dots\dots\dots(3) \quad \frac{dA}{dt} = -A \frac{A^2 d}{l} (1 - \beta\delta) + f \frac{q_s}{1 - \lambda} \frac{1}{A} \dots\dots\dots(4)$$

3) $\delta > \delta_c$ の場合

$$\frac{dA}{dt} = 0 \dots\dots\dots(5) \quad \frac{dA}{dt} = -f \frac{q_s}{(1 - \lambda)(1 - \beta\delta)} \frac{1}{A} \dots\dots\dots(6)$$

ここに、 δ は波形勾配 ($=d/A$)、 A は河床波の分裂頻度、 l は step length ($=100d$)、 β は剥離域長と波高

の比 (=5), q_B は単位幅流砂量, λ は空隙率 (=0.35), f, f_s は河床波の分布性状から定まる係数で, 波長および波高が変動係数 0.4 の正規分布で近似される時, $f=0.296, f_s=2.55$ である。

式 (3), (4) における右辺の第一項は分裂による波長の減少, 第二項は追いつき合体による波長の増加を表しており, 平衡状態ではそれらが釣り合うことから, 次式が得られる。

$$A = f \frac{q_B}{1-\lambda} \frac{l}{A_s l_s^2 (1-\beta \delta_s)} \dots\dots\dots (7)$$

ここに, 添字 e は平衡状態を表す。

ところが, このモデルでは $\delta > \delta_e$ の場合を除くと, $dA/dl = \delta$ であることから, 波形勾配が変化しないことになる。これは, $\delta < \delta_e$ の場合, 分裂とともに増幅が生じていることを考慮していないためであると考えられる。そこで, ここでは, 実験から見出された特徴に基づいて, 式 (2) を次式で置き換えることにする。

$$\frac{dA}{dt} = 0 \dots\dots\dots (8)$$

以上の定式化に基づいて, 前章に述べた実験条件における河床波の変形過程のシミュレーションを試みた。ただし, 流砂量式には芦田・道上式⁹⁾, 砂堆の平衡形状と抵抗則には Yalin の式^{10), 11)} を用いた。

$$A_s = 2\pi h_s \dots\dots\dots (9) \quad \delta_s = 0.0127 \left(\frac{\tau_{*s}}{\tau_{*c}} - 1 \right) \exp \left(- \left(\frac{\tau_{*s}}{\tau_{*c}} - 1 \right) / 12.84 \right) \dots\dots\dots (10)$$

$$\frac{q_B}{\sqrt{sgd^3}} = 17\tau_{*s}^{1.5} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{\tau_{*c}}{\tau}} \right) \dots\dots\dots (11) \quad \frac{u}{u_{*c}} = 6.0 + 5.75 \log \frac{h}{d(1+2\tau_{*s})} \dots\dots\dots (12)$$

$$c_{r0} = c_{r0}(1 - \delta \cot \phi) + \frac{l}{h} \delta^2 \dots\dots\dots (13) \quad c_{r0} = 2 / \left(6.0 + 5.75 \log \frac{h}{d} \right)^2 \dots\dots\dots (14)$$

諸量の計算においては, 各時刻における流量と河床波形状から上記の抵抗則を満たす水深を収束計算によって求めた後, 時間ピッチ 10 sec の前進差分によって次の時刻の河床波形状を求めている。ただし, $|\delta - \delta_e| < 0.001$ の場合には式 (3), (4) を適用することにした。初期条件はいずれも $l=50$ cm, $A=1$ cm とした。

Fig. 7 は, 各流量条件に対する河床波の波長・波高ならびに水深の応答を示したものである。初期条件の影響は比較的早く消失するので, 図には定常サイクルのみを示している。周期が長い場合には, 流量の増減とはほぼ同位相で河床波の波長・波高が変化し, ループも小さいが, $T=2520$ sec あるいは 2640 sec の場合には, 増水期に波長が漸減し, 減水期前半に波長・波高が増大して大きなループが形成されている。周期がさらに短くなると河床波はほとんど応答しなくなり, 水深の変化範囲も小さくなっている。また, 周期が短くなるほど波長・波高・水深の値そのものも小さくなっている。

これを Fig. 5 に示した実験結果と比較すると, ある程度の対応が見られるものの, 次のような差異があ

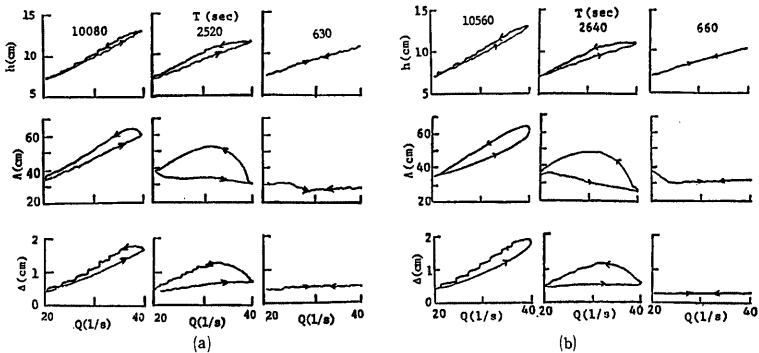


Fig. 7 Simulated hysteresis of dune height, dune length and mean flow depth.
(a) : for triangular hydrographs. (b) : for sinusoidal hydrographs.

る。まず、波長・波高・水深とも、計算値は全体的に実験値よりもかなり小さい。次に、実験によると、流量の減少期には波長がほとんど変化せず、増水期に入った直後に波の分裂が生じているが、計算では減水期後半に波長が減少している。また、実験では、周期を変化させても諸量の変域の上限値があまり変わらないのに対して、計算ではむしろ下限値の変化が少ない。さらに、実験では三角波状流量変化の場合と正弦波状流量変化の場合とでかなり顕著な差異が認められたが、計算ではほとんど差異が認められない。

5. 結 論

以上、三角波状ならびに正弦波状に流量が周期的に変化する場合の河床波の変形過程について、実験的な考察を行い、いくつかの興味ある知見を得た。

実験装置および方法については、かなりの改善がなされたが、なおかつ、現象の再現性、精度の面で変動が大きく、河床波の変形過程を決定論的に表現することの困難さが改めて浮き彫りにされた。しかしながら大局的には、従来から指摘されているように、河床波の変形にはかなりの時間を要し、流量の変化周期が極端に短い場合には河床波スケールの時間変化は流量変化と逆位相になるが、変化域のものは狭くなること、流量の変化周期がある範囲にある時、履歴効果が強く現れて、流量と波長・波高あるいは水深の関係にループが生じることなどが確認された。また、流量の変化範囲や変化周期だけでなく、波形そのものによっても河床波スケールの変域さえ変化することが明らかにされた。

一方、従来提案されている河床波の変形過程の追跡モデルのひとつに若干の修正を加えて、本実験条件に適用してみたところ、ある程度の対応はみられるものの、不十分な点が多々見られた。今後、さらに多くのデータを詳細に検討し、モデルの改良をはかっていきたい。また、本研究では、流砂量に関する検討を行わなかったが、河床波の変形機構を考える上で流砂量の果たす役割は大きく、その自動計測・自動制御を含めて研究を進めていきたい。

なお、本研究は、文部省科学研究費補助金一般研究B(代表者：芦田和男教授)ならびに自然災害特別研究(1)(代表者：岸力教授)の補助を得て行ったものである。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Jensen, P. D.: Dune Formation under Non Steady Conditions, Proc. 15th Cong. IAHR, 1973, pp. 173-179.
- 2) Fredsoe, J.: Unsteady Flow in Straight Alluvial Streams. Modification of Individual Dunes, J. Fluid Mech., Vol. 91, Part 3, 1979, pp. 497-515.
- 3) 芦田和男・澤井健二：河床波の変形過程に関する実験的研究，京大防災研年報，第23号B-2，1980，pp. 457-473.
- 4) Fredsoe, J.: Unsteady Flow in Straight Alluvial Streams. Part 2. Transition from Dunes to Plane Bed, J. Fluid Mech., Vol. 102, 1981, pp. 431-453.
- 5) 芦田和男・澤井健二・加藤均：河床波の変形過程に関する実験的研究(2)，京大防災研年報，第24号B-2，1981，pp. 283-295.
- 6) 中川博次・辻本哲郎：Lower Regimeにおける非定常移動床流れの抵抗と遅れ性状，第25回水理講演会論文集，1981，pp. 1-7.
- 7) 芦田和男・中川一・加藤均：流量変化に伴う河床波の応答に関する研究，京大防災研年報，第25号B-2，1982，pp. 473-491.
- 8) 中川博次・辻本哲郎・竹東正孝：河床波を伴う非定常流れの特性，第27回水理講演会論文集，1983，pp. 665-671.
- 9) 芦田和男・道上正規：移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究，土木学会論文報告集，第206号，1972，pp. 59-69.
- 10) Yalin, M. S. and E. Karahan : Steepness of Sedimentary Dunes, Proc. ASCE, HY4, 1979, pp. 381-392.
- 11) Yalin, M. S. : On the Average Velocity of Flow over a Movable Bed, La Houille Blanche, No. 1, 1964, pp. 45-53.