代数的場の量子論におけるライヘンバッハの共通原因原理

北島　雄一郎

1. はじめに

ある学校で集団食中毒が発生したとしよう。この時、我々は偶然多くの人が同時に食中毒にかかったとは考えない。そのようなことはありそうにないからだ。通常は、その集団が食中毒にかかる前に食べていた食べ物を調べる。そして、その食べ物が何らかの病原菌を含んでいることを発見したならば､それを集団食中毒の共通原因であると考えるだろう。つまり我々は同時に起こることがありそうもない事象が同時に起こったとしたら、共通原因があるはずであると考える。こうした日常的な直観にもとづき Reichenbach (1956)は確率を用いて共通原因を厳密に定義した（p.159）。Reichenbach (1956)は、同時に起こることはありそうもない事象の共通原因だけではなく共通の結果もこの定義を満たすことはあるけれども共通の結果のみがこの定義を満足することはないと論じ、この議論に基づいて時間の向きを定義した（p.162）。

Reichenbach (1956)が共通原因を定義した動機は時間の向きを定義するというものであったが、Reichenbach (1956)による共通原因の定義は確率的に相関した二つの事象を説明する原理とみなすこともできる。量子力学では確率的に相関した事象が存在することが知られているが、Redei (1997)はこうした相関をライヘンバッハの共通原因を用いて説明しようとした。本稿ではそうした試みを紹介する。

本稿の構成を述べる。2 節ではライヘンバッハによる共通原因の定義とその具体例を述べる。3 節ではライヘンバッハによる共通原因に関してどのような問題があるかを述べる。4 節では量子力学における確率的な相関をライヘンバッハの共通原因を用いて説明しようとする Redei (1997)の試みを紹介する。5 節では、今後に残された課題を述べる。

2. ライヘンバッハによる共通原因の定義

例えば、1 の目が出る確率が 1/6 であるようなさいころを二つ振って、1 の目が同時に出る確率が 1/36 より大きければ、二つのさいころの間には何らかの相関があると考えるだろう。このような相関は一般的に次のように定義される。

定義1（確率的な相関）事象Aと事象Bの確率をそれぞれ $p(A)$ と $p(B)$ とする。

$$p(A \wedge B) > p(A)p(B) \tag{1}$$

のとき、事象Aと事象Bは確率的に相関しているという。

$p(A)$ と $p(B)$ がともに0でないとき、

$$p(A \wedge B) = p(A)p(B \mid A) = p(B)p(A \mid B)$$

である（例えば、内井, 1995, p.172を参照）から、明らかに事象Aと事象Bが確率的に相関していることは、

$$p(B \mid A) > p(B) \quad \text{かつ} \quad p(A \mid B) > p(A)$$

であることと同値である（Reichenbach, 1956, pp.158-159）。つまり、事象Aと事象Bが確率的に相関しているということは、事象Bのみが起こる確率より事象Aのもとで事象Bが起こる確率が高く、かつ事象Aのみが起こる確率より事象Bのもとで事象Aが起こる確率が高いということである。

我々は二つの事象に確率的な相関があれば何らかの共通の原因があると考え、その原因を用いてその相関を説明しようとするだろう。例えば、二つのさいころを振って1の目が出る確率が1/36より大きければ、何らかの仕掛け、つまり二つの事象の共通原因を探すだろう。例えば、さいころと机の下には磁石が隠されているのではないかと疑う。Reichenbach (1956)は共通原因を次のように定式化した（p.159）。

定義2（ライヘンバッハによる共通原因）事象Cは $0 < p(C) < 1$ でありかつ(2)式から(5)式を満足するとき、事象Cは事象Aと事象Bの共通原因という。

$$p(A \wedge B \mid C) = p(A \mid C)p(B \mid C) \tag{2}$$

$$p(A \wedge B \mid C^{\perp}) = p(A \mid C^{\perp})p(B \mid C^{\perp}) \tag{3}$$

$$p(A \mid C) > p(A \mid C^{\perp}) \tag{4}$$

$$p(B \mid C) > p(B \mid C^{\perp}) \tag{5}$$

ただし、$X^{\perp}$ は X の否定とする。

事象Aと事象Bに対して共通原因Cが存在すれば、事象Aと事象Bは必ず確率的に相関している（Reichenbach, 1956, pp.159-160）。なぜなら、$0 < p(C) < 1$ であるから、確率の性質から、

$$p(A) = p(A \mid C)p(C) + p(A \mid C^{\perp})p(C^{\perp})$$

$$p(B) = p(B \mid C)p(C) + p(B \mid C^{\perp})p(C^{\perp})$$

$$p(A \wedge B) = p(A \wedge B \mid C)p(C) + p(A \wedge B \mid C^{\perp})p(C^{\perp})$$
$$p(C^{\perp}) = 1 - p(C)$$

となり、(2)式と(3)式より

$$p(A \wedge B) - p(A)p(B) = p(C)(1 - p(C))(p(A \mid C) - p(A \mid C^{\perp}))(p(B \mid C) - p(B \mid C^{\perp}))$$

であり、(4)式と(5)式より

$$p(A \wedge B) > p(A)p(B)$$

となるからである。このことから、ライヘンバッハの共通原因が確率的な相関と密接に関連していることが分かるだろう。

ライヘンバッハの共通原因の具体例としては次のようなものがある（Salmon, 1984, pp.161-162）。

例 1 磁石が埋め込まれているさいころaとさいころbがあるとする。さいころaとさいころbを振るテーブルの下には強力な電磁石が内蔵されており電磁石のスイッチが入っているとき、さいころaとさいころbの目が 1 である確率は共に 1/2 であり、電磁石のスイッチが切れているとき、さいころaとさいころbの目が 1 である確率は共に 1/6 であるとする。また、電磁石のスイッチが入っている確率は 1/2 であり、電磁石のスイッチが入っていない確率は 1/2 であるとする。さいころaとさいころbを十分に離して、さいころaとさいころbは互いに影響を及ばさないようにして同時に振る。事象A、事象B、事象Cを

事象 A：さいころ a の目が 1 である。

事象 B：さいころ b の目が 1 である。

事象 C：電磁石のスイッチが入っている。

とする。このとき、

$$p(A) = p(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \qquad p(A \wedge B) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{36}$$

だから、$p(A \wedge B) > p(A)p(B)$ であり事象 A と事象 B は確率的に相関している。一方、さいころ a とさいころ b は互いに影響を及ぼすことはなくテーブルに内蔵された電磁石にのみ影響されるというのだから、

$$p(A \wedge B \mid C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \qquad p(A \mid C) = p(B \mid C) = \frac{1}{2}$$

$$p(A \wedge B \mid C^{\perp}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36} \qquad p(A \mid C^{\perp}) = p(B \mid C^{\perp}) = \frac{1}{6}$$

となる。事象 C は定義 2 を満たしているので、ライヘンバッハによれば事象 A と事象 B の共通原因となる。

この例をみると、定義 2 は共通原因をうまく表現しているようにみえる。

3. ライヘンバッハの共通原因に関する問題

ライヘンバッハの共通原因に関する問題として、少なくとも以下の三つの問題があると考えられる。

1. 確率的に相関した二つの事象の妥当な共通原因は必ず定義 2 を満足していなければならないのか？
2. 確率的に相関した二つの事象の妥当な共通原因は必ず定義 2 を満足しているとする。このとき、妥当な共通原因は定義 2 を満足していれば十分なのか？十分でないとしたらどのような条件を満足していなければならないのか？
3. 確率的に相関した二つの事象に対して定義 2 を満足するような事象は、常に存在するのか？

1.の問題に関して次のような例がある（Salmon, 1984, p.196）。

<u>例 2</u>　ある選挙に一朗と健司が出馬していて、どちらか一人が必ず当選するとする。二人はいずれも橋を建設することを公約としている。一朗が当選した場合、実際に橋を建設できる確率は 1/10 である。一方、健司が当選した場合、実際に橋を建設できる確率は 1/2 である。事象Cを一朗が当選するという事象、事象Eを橋が建設されるという事象とする。一朗が当選することは橋が建設されることの原因であるようにみえるが、$p(E \mid C) < p(E \mid C^{\perp})$ である。

この例は、事象Cが事象Eの原因であるとしても、$p(E \mid C) < p(E \mid C^{\perp})$ である可能性を示唆している。つまり、確率的に相関した二つの事象の共通原因は定義 2 の(4)式や(5)式は満足しなくてもいいのかもしれない。しかし、本稿ではこの問題は考えず、妥当な共通原因は定義 2 を満足していることを仮定する。このように仮定しても 2.や 3.の問題が残っている。

2.の問題に関しては次のような例がある（Salmon, 1984, p.168）。

例 3　大輔は普段朝 9 時に職場に到着する。しかし、他の職場にいる秀喜と共同で仕事をしている都合上、曜日は決まっていないが週一回だけ必ず秀喜に大輔の職場に来てもらい、朝 8 時から秀喜と打ち合わせをする。そのため打ち合わせの日、大輔は 7 時 30 分に職場に到着する。大輔は普段はコーヒーを飲まないが朝 7 時 30 分に職場に来る日は眠気覚ましのためにコーヒーを飲む。そのため大輔の秘書は大輔のために朝 7 時 20 分にはポットにコーヒーを用意しておき大輔がすぐにコーヒーを飲むことができるようにしている。事象A、事象B、事象Cを

事象 A：金曜日に秀喜が朝 8 時に大輔の職場に現れる。

事象 B：金曜日に大輔のために朝 7 時 20 分にポットにコーヒーが用意されている。

事象 C：金曜日に大輔が朝 7 時 30 分に職場に到着する。

とする。大輔は月曜日から金曜日に職場に行き秀喜と打ち合わせをする曜日はランダムに決定されるとすると、

$$p(A)=\frac{1}{5} \qquad p(B)=\frac{1}{5} \qquad p(A\wedge B)=\frac{1}{5}$$

であるから、$p(A\wedge B)>p(A)p(B)$ となり、事象 A と事象 B は確率的に相関している。

$$\begin{array}{lll} p(A\mid C)=1 & p(B\mid C)=1 & p(A\wedge B\mid C)=1 \\ p(A\mid C^{\perp})=0 & p(B\mid C^{\perp})=0 & p(A\wedge B\mid C^{\perp})=0 \\ p(C)=\frac{1}{5} & & \end{array}$$

だから、事象 C は定義 2 を満足している。したがってライヘンバッハによれば共通原因になる。しかし、事象 C は事象 A と事象 B の共通原因とはいえないだろう。大輔が朝 7 時 30 分に職場に到着したから、秀喜が大輔の職場に現れたわけでも、ポットにコーヒーが用意されていたわけでもない。おそらく大輔が前日に秀喜と秘書に連絡していたから、秀喜は朝 8 時に大輔の職場に現れたわけだし、コーヒーが用意されていたわけである。つまり、事象 A と事象 B の共通原因は「大輔が木曜日に秀喜と秘書に連絡をする」ということであろう。

この例から分かるように、ある事象が定義 2 を満足しているとしても、その事象を妥当な共通原因とみなすことはできない。つまり、妥当な共通原因は定義 2 に加えてどのような条件を満足しなければならないかを検討する必要がある。

この問題を考えるとき、少なくとも定義 2 を満足している事象が存在しなければならない。そこで、3.の問題が生じる。日常的な世界では確率的な相関した二つの事象に対しては常に定義 2 を満たす事象は存在しているようにみえる。例えば、例 3 においては「大輔が秀喜と秘書に連絡する」という事象が定義 2 を満足する事象であった。もちろん、こうした直観が正しいかどうかは自明ではない。Gyenis & Redei (2004)はブール代数の枠組みで、任意の確率的な相関に対してライヘンバッハの共通原因が存在するかどうかを数学的に厳密に考察している。そして、彼らは原子元をもたないブール代数においては確率的に相関した二つの事象に対して常に定義 2 を満たす事象が存在するということを示した（Gyenis & Redei, 2004, Proposition 7）。

一方、量子力学では日常的な世界とは違って、確率的に相関した二つの事象に対して共通原因は一見存在しないようにみえる。なぜなら、量子力学においてはベルの不等式が破れていることは実験的に示されているが、ベルの不等式は定義 2 の(2)式に対応した条件を仮定したうえで導かれているからだ。ライヘンバッハの定義に対応する条件を仮定した上で導かれた不等式は量子力学の世界では破れているのだから、量子力学においてはライヘンバッハの共通原因は存在しないようにみえる。このような直観的な議論に対する反論は、Hofer-Szabo, Redei & Szabo (1999)において為されている。彼らは、ライヘンバッハの定義に対応する条件がライヘンバッハの定義とは正確には違うということを指摘した上で、ベルの不等式が破れていることと量子力学において確率的に相関した二つの事象に対してライヘンバッハの共通原因が存在することは両立しうると論じた（pp. 387-388）。

さらに、量子力学と特殊相対性理論を数学的に厳密に統合しようとする理論である代数的場の量子論においてライヘンバッハの共通原因が存在するかどうかという問題は Redei & Summers (2002)や Svozil, Redei & Summers (2005)が考察している。次の節では、代数的場の量子論においてライヘンバッハの共通原因が存在するかどうかという問題に関して現在まで得られている結果を紹介する。

4. 代数的場の量子論における共通原因

この節では、3 節で述べたライヘンバッハの共通原因に関する三つの問題のうち「確率的に相関した二つの事象に対して定義 2 を満足するような事象は存在するのか」という三番目の問題の代数的場の量子論における研究を紹介する。

4.1 代数的場の量子論

通常の非相対論的量子力学ではヒルベルト空間上の自己共役作用素によって観測可能量

を表すが、この観測がいつどこで行われたかについては明確ではない。それに対して代数的場の量子論では、いつどこで観測が行われたかについても考慮し、さらに特殊相対性理論も考慮に入れた上で理論を構築している。具体的には次のように定式化されている。

ミンコフスキー空間Mの有界な開集合Vにフォンノイマン代数$N(V)$を対応させる。$\{N(V) \mid V \subset M\}$は局所代数のネットとよばれる。$N(V)$に含まれる射影作用素が$V$における観測命題をあらわす。そして、ある状態$\phi$のもとでの観測命題$A$の確率$\phi(A)$が計算される。さらに、局所代数のネットには物理的に妥当な条件を課する。どのような条件を課するかに関してはいくつかの立場があるが、本稿では(1)単調性、(2)微視的因果律、(3)相対論的共変性、(4)真空状態の存在とその一意性、(5)弱加法性、(6)ミンコフスキー空間における任意の有界な開集合Vに対して$N(V)$が可分なヒルベルト空間上のⅢ型のフォンノイマン代数であること、(7)原始的因果律(primitive causality)という条件を考える。以下では、局所代数のネットはこれらの条件を満足しているとする。

定義 1 を参考にして代数的場の量子論における確率的な相関を次のように定義しよう。

<u>定義 3</u>（代数的場の量子論における確率的な相関）V_1とV_2を空間的に離れたミンコフスキー空間上の有界な開集合とし、ϕを$N(V_1 \cup V_2)$上の状態とする。ある射影作用素$A \in N(V_1), B \in N(V_2)$が存在して、

$$\phi(A \wedge B) > \phi(A)\phi(B)$$

であるとき、状態ϕはV_1とV_2において確率的に相関しているという。

$\phi(A)$は状態ϕにおける射影作用素Aによって表される観測命題の確率であるから、この定義は代数的場の量子論における確率的な相関を表していると考えられる。

代数的場の量子論では、確率的に相関した状態が数多く存在していることが知られている。こうした確率的な相関は、ライヘンバッハの共通原因を用いて説明することができるのだろうか？この問題に関連した結果を次の節で紹介する。

4.2 フォンノイマン代数上の共通原因

定義 2 における(2)式は次のように書き直すことができる。

$$\frac{p(A \wedge B \wedge C)}{p(C)} = \frac{p(A \wedge C)}{p(C)} \frac{p(B \wedge C)}{p(C)}$$

この変形を参考にして Redei (1997)はライヘンバッハの共通原因をフォンノイマン代数上で次のように定式化した。

<u>定義4</u>（フォンノイマン代数上の共通原因）ϕ をフォンノイマン代数 N 上の状態とする。N に属する射影作用素 A, B が存在し

$$\phi(A \wedge B) > \phi(A)\phi(B) \tag{6}$$

とする。射影作用素 $C \in N$ は、A, B の両方と可換であり、$0 < \phi(C) < 1$ かつ(7)式から(10)式を満たすとき、A と B の共通原因であるという。

$$\frac{\phi(A \wedge B \wedge C)}{\phi(C)} = \frac{\phi(A \wedge C)}{\phi(C)} \frac{\phi(B \wedge C)}{\phi(C)} \tag{7}$$

$$\frac{\phi(\mathrm{A} \wedge \mathrm{B} \wedge \mathrm{C}^{\perp})}{\phi(\mathrm{C}^{\perp})} = \frac{\phi(\mathrm{A} \wedge \mathrm{C}^{\perp})}{\phi(\mathrm{C}^{\perp})} \frac{\phi(\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}^{\perp})}{\phi(\mathrm{C}^{\perp})} \tag{8}$$

$$\frac{\phi(A \wedge C)}{\phi(C)} > \frac{\phi(A \wedge C^{\perp})}{\phi(C^{\perp})} \tag{9}$$

$$\frac{\phi(B \wedge C)}{\phi(C)} > \frac{\phi(B \wedge C^{\perp})}{\phi(C^{\perp})} \tag{10}$$

3 節の例 2 で述べたように事象 A と事象 B が確率的に相関しているとき、事象 C が事象 A と B に影響を及ぼすことができないような場合でも事象 C がライヘンバッハの共通原因となってしまう場合がある。つまり、ライヘンバッハの共通原因を考える際、定義 2 で述べた式の他に、事象 C が事象 A と事象 B に影響を及ぼすことができるかどうかも考慮する必要がある。そこで定義 4 に加えて次のような定義を考える（Redei & Summers, 2002, Definition 4 , Definition 5）。

<u>定義5</u>（代数的場の量子論におけるライヘンバッハの共通原因原理）V_1 と V_2 を空間的に離れたミンコフスキー空間 M の有界な開集合とする。$BLC(V_1)$ を V_1 の後方光円錐から V_1 を取り除いたもの、$BLC(V_2)$ を V_2 の後方光円錐から V_2 を取り除いたものとする。ϕ を局所代数 $\bigcup_{V \subset M} N(V)$ 上の状態とする。$A \in N(V_1), B \in N(V_2)$ なる射影作用素 A, B が存在して

$$\phi(A \wedge B) > \phi(A)\phi(B)$$

とする。

1. $$V \subseteq BLC(V_1) \cup BLC(V_2)$$

であるようなミンコフスキー空間の有界な開集合 V と射影作用素 $C \in N(V)$ が存在

してCがA,Bの共通原因であるとき、ϕは弱いライヘンバッハの共通原因原理をみたすという。

2. $$V \subseteq BLC(V_1) \cap BLC(V_2)$$
であるようなミンコフスキー空間の有界な開集合Vと射影作用素$C \in N(V)$が存在してCがA,Bの共通原因であるとき、ϕは強いライヘンバッハの共通原因原理をみたすという。

状態ϕがライヘンバッハの強い共通原因原理をみたしているとき、共通原因CはV_1とV_2の後方光円錐の共通部分に属しているから、A,Bに影響を及ぼすことができる。しかし、ライヘンバッハの弱い共通原因原理しかみたしていないとき、共通原因CはAもしくはBのどちらか一方にしか影響を及ぼすことができないかもしれない。なぜなら、この場合共通原因CはV_1とV_2の後方光円錐のいずれか一方にしか属していない可能性があるからである。つまり、ϕが弱いライヘンバッハの共通原因原理をみたすだけではV_1とV_2の確率的な相関を説明する原理としては不十分である。しかし、現時点では、代数的場の量子論において弱いライヘンバッハの共通原因原理が満たされるということしか分かっていない。

命題6（Redei & Summers, 2002, Proposition 3）V_1とV_2は空間的に離れたミンコフスキー空間Mの有界な開集合とする。ϕは$\bigcup_{V \subset M} N(V)$上の忠実な正規状態であり、$V_1$と$V_2$において確率的に相関しているとする。このとき、$\phi$は弱いライヘンバッハの共通原因原理をみたす。

証明は6.付録で述べる。

この命題から忠実な正規状態において確率的に相関した二つの事象に対して少なくとも一つの共通原因が存在することが分かる。さらにKitajima (2007)のProposition 3.10より、そのような共通原因は非可算無限個存在することも分かる。またKitajima (2007)のProposition 3.9よりこの命題は忠実な正規状態だけでなく任意の正規状態において成立することも分かる。しかし、命題7におけるϕがライヘンバッハの強い共通原因原理を満たすかどうかは現時点では分かっていない。

5. まとめ

本稿では、ライヘンバッハの共通原因を用いて代数的場の量子論における確率的な相関を説明しようとする試みを紹介した。この試みに対して残された課題には数学的な側面と哲学的な側面があると思われる（cf. Redei, 1999, sec. 6, Redei & Summers, 2002, sec. 4）。

数学的な課題は、代数的場の量子論においてライヘンバッハの弱い共通原因原理と同様に強い共通原因原理も満たされているかどうかという問題である。命題 7 で述べたように弱い共通原因原理は満たされているということが証明されているものの 3 節で述べたようにこの原理は確率的な相関を説明するには不十分である。もし強い共通原因原理は常に満たされないということが証明されたとしたならば、Redei (1997)によって提案されたライヘンバッハの共通原因そのものの妥当性を吟味する必要が強まるだろう。

哲学的な課題は、代数的場の量子論において原因とは何かという問題である。2 節でも述べたように日常的な例でも、定義 2 を満足していても妥当な共通原因とはみなせないような事象が存在する。代数的場の量子論において強い共通原因原理が満足することが分かったとしても、それが妥当な共通原因であるかどうかは明らかではない。こうした問題を考えるためにも代数的場の量子論において 2 節で述べた 2.の問題も考えていく必要があるだろう。

以上見てきたように、ライヘンバッハの共通原因原理は物理、数学、哲学の境界領域に属する興味深い問題であると思われる。

6. 付録：命題 7 の証明

補題 8（Redei & Summers, 2002, Lemma 3）ϕ をフォンノイマン代数 N 上の忠実な正規状態とする。N は互いに可換である部分代数 N_1 と N_2 を含み、N_1 と N_2 はシュリーダー性質を満たすとする。シュリーダー性質とは任意の 0 でない作用素 $X_1 \in N_1, X_2 \in N_2$ に対して $X_1 X_2$ が 0 でないことである。$A \in N_1, B \in N_2$ を

$$\phi(A \wedge B) > \phi(A)\phi(B) \tag{11}$$

なる射影作用素とする。このとき $1-\phi(A \wedge B) > 0$ であり、射影作用素 $C \in N$ が

$$C < A \wedge B \tag{12}$$

$$\phi(C) = \frac{\phi(A \wedge B) - \phi(A)\phi(B)}{1-\phi(A \vee B)} \tag{13}$$

を満足すると(7)式から(10)式も満足する。

証明　射影作用素 $A \in N_1, B \in N_2$ が(11)式を満足しているとき $1-\phi(A \wedge B) > 0$ であることを示す。$1-\phi(A \wedge B) = 0$ であると仮定しよう。$I = A \vee B + A^{\perp} \wedge B^{\perp}$ だから

$$\phi(A^{\perp} \wedge B^{\perp}) = 0 \tag{14}$$

となる。一方、(11)式より、$\phi(A^{\perp} \wedge B^{\perp}) > \phi(A^{\perp})\phi(B^{\perp})$ であるから、(14)式と矛盾。よって、$1-\phi(A \wedge B) > 0$ である。

$B \geq A \wedge B$ だから、$\phi(B) \geq \phi(A \wedge B)$ である。$\phi(B) = \phi(A \wedge B)$ とすると、ϕ は忠実であるから、$B = A \wedge B$ となる。つまり、$B \leq A$ であるから、$BA^{\perp} = B \wedge A^{\perp} = 0$ である。これは N_1 と N_2 がシュリーダー性質を満たすことに反する。よって $\phi(B) > \phi(A \wedge B)$ である。

$$\begin{aligned}\phi(A)\phi(B) &= (\phi(A) - \phi(A \wedge B))\phi(B) + \phi(A \wedge B)\phi(B) \\ &> (\phi(A) - \phi(A \wedge B))\phi(A \wedge B) + \phi(A \wedge B)\phi(B) \\ &= (\phi(A) + \phi(B) - \phi(A \wedge B))\phi(A \wedge B) = \phi(A \vee B)\phi(A \wedge B)\end{aligned}$$

であることから、

$$\frac{\phi(A \wedge B) - \phi(A)\phi(B)}{1-\phi(A \vee B)} < \phi(A \wedge B)$$

となる。よって、(13)式の右辺は $\phi(A \wedge B)$ より小さいので、(12)式と(13)式は両立する。

(12)式が成立するとき、明らかに(7)式、(9)式、(10)式は成立する。(13)式より

$$\phi(C)(1-\phi(A) - \phi(B) + \phi(A \wedge B)) = \phi(A \wedge B) - \phi(A)\phi(B)$$

となる。両辺に $\phi(C)^2$ を加えて整理すると

$$\phi(C^{\perp})(\phi(A \wedge B) - \phi(C)) = (\phi(A) - \phi(C))(\phi(B) - \phi(C))$$

となるので

$$\frac{\phi(A \wedge B) - \phi(C)}{\phi(C^{\perp})} = \frac{\phi(A) - \phi(C)}{\phi(C^{\perp})}\frac{\phi(B) - \phi(C)}{\phi(C^{\perp})}$$

となる。$A \wedge B \geq C$ だから、この式より(8)式が導かれる。 Q.E.D.

補題9（Redei & Summers, 2002, Lemma 4） N を可分なヒルベルト空間 H 上のIII型のフォンノイマン代数とする。ϕ を N 上の忠実な正規状態とする。N の任意の 0 でない射影作用素 A と $0 < r < \phi(A)$ なる任意の実数 r に対して N に属する射影作用素 P が存在して $P < A$ かつ $\phi(P) = r$ となる。

証明　N に属する射影作用素の集合を $P(N)$ とする。集合 S を

$$S := \{X \in P(N) \mid X < A \text{ かつ } \phi(X) \leq r\}$$

と定義する。S は $P(N)$ の通常の順序関係によって順序づけられているとする。S' を S の全順序部分集合とする。$P(N)$ は完備束だから S' の最小上界 Z は存在する。Z は S' の最小上界であり A は S' の上界だから、$Z \leq A$ である。Z はネット S' が強収束したものであり ϕ は正規状態であるから $\phi(Z) \leq r$ である。よって $\phi(Z) < \phi(A)$ であり、ϕ は忠実だから、$Z < A$ である。したがって S の任意の全順序部分集合が S に極大元をもつので Zorn の補題より S は極大元 P をもつ。

$\phi(P) = r$ であることを示す。そのため $\phi(P) < r$ と仮定する。$Q := A \wedge P^{\perp} \in P(N)$ と

おく。$P < A$ だから $Q \neq 0$ である。N はⅢ型であり H は可分であるから、可算無限個の互いに直交し、かつ同値であるような射影作用素 $Q_i \in P(N)$ が存在し、$Q = \vee_{i=1}^{\infty} Q_i$ である。よって

$$\phi(Q) = \sum_{i=1}^{\infty} \phi(Q_i)$$

であり、任意の自然数 i に対して $\phi(Q_i) > 0$ だから

$$\phi(Q_i) \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$$

である。よって、ある自然数 k が存在して $\phi(Q_k) < r - \phi(P)$ となるので

$$r > \phi(P) + \phi(Q_k) = \phi(P + Q_k)$$

である。また

$$P < P + Q_k < A$$

だから、これは P が S において極大であることに反する。 Q.E.D

<u>命題 7 の証明</u>　V_1 と V_2 は有界だから、有界な時空領域 V が存在して、

$$V \subseteq BLC(V_1) \cup BLC(V_2)$$

かつ $V^{\perp\perp}$ は $V_1 \cup V_2$ を含む。単調性と原始的因果律より

$$A, B \in N(V_1 \cup V_2) \subseteq N(V^{\perp\perp}) = N(V)$$

である。補題 8 より $1 - \phi(A \wedge B) > 0$ であり

$$r := \frac{\phi(A \wedge B) - \phi(A)\phi(B)}{1 - \phi(A \vee B)}$$

とおくと、$0 < r < \phi(A \wedge B)$ である。補題 9 より、ある射影作用素 $C \in N(V)$ が存在して $\phi(C) = r$ かつ $C < A \wedge B$ である。補題 8 より C は(7)式から(10)式を満足する。 Q.E.D.

文献

Gyenis, B. & Redei, M. (2004). 'When Can Statistical Theories be Causally Closed?', *Foundations of Physics*, 34, 1285-1303.
Redei, M. (1997). 'Reichenbach's Common Cause Principle & Quantum Field Theory', *Foundations of Physics*, 27, 1309-1321.
Hofer-Szabo, G., Redei, M. & Szabo, L. E. (1999). 'On Reichenbach's Common Cause Principle and Reichenbach's Notion of Common Cause', *British Journal for the Philosophy of Science*, 50, 377-399.
Kitajima, Y. (2007). 'Reichenbach's Common Causes in an Atomless and Complete Orthomodular Lattice', *International Journal of Theoretical Physics*, to appear.
Redei, M. & Summers, S. J. (2002). 'Local Primitive Causality and the Common Cause Principle in Quantum Field Theory', *Foundations of Physics*, 32, 335-355.
Reichenbach, H. (1956). *The Direction of Time*, New York, Dover..
Salmon, W. C. (1984). *Scientific Explanation and the Causal Structure of the World*, New Jersey, Princeton University Press.
Svozil, K., Redei, M. and Summers, S. J. (2005). 'Remarks on Causality in Relativistic Quantum Field Theory', *International Journal of Theoretical Physics*, 44, 1029-1039.
内井惣七 (1995).『科学哲学入門』, 京都, 世界思想社.

〔日本学術振興会特別研究員 PD（京都大学）〕