

## 有限振幅波動下における底面境界層の数値解析

浅野敏之・岩垣雄一

### NUMERICAL ANALYSIS OF BOTTOM BOUNDARY LAYERS BENEATH FINITE AMPLITUDE WATER WAVES

By Toshiyuki ASANO Yuichi IWAGAKI

#### Synopsis

Numerical analysis of both laminar and turbulent bottom boundary layers has been performed by applying the finite element method.

At first, numerical calculations for laminar bottom boundary layers have been carried out. The results show a close agreement with the non-linear theoretical solution deduced by Iwagaki et al. previously.

Next, near-bottom water particle velocities and resultant bottom shear stresses in turbulent boundary layers have been investigated. It is found that bottom friction factors estimated by the non-linear basic equation are up to five times as large as those calculated by existing formulas.

Finally, the numerical results and experimental data on near-bottom water particle velocities have been compared. An 'over-shooting' velocity profile which is found noticeably in experiments can be well represented by applying the present numerical method.

#### 1. ま え が き

波動底面境界層の特性を理解することは、沿岸海域における底質の移動機構を解明する上できわめて重要である。底質移動が顕著である砕波点付近の波浪は、非線形性が強く有限振幅波としての取り扱いを必要とする。有限振幅の波動の下では峰と谷の位相時で水粒子速度の大きさが異なり、この性質が底質移動を支配する決定的要素の一つとなっている。しかし、有限振幅波動の下での底面境界層内の水粒子速度場を議論した研究は、極めて少ないのが現状である。

岩垣・土屋<sup>1)</sup>は非線形項を含んだ層流境界層方程式のせつ動解を求め、非線形項が底面および側壁の摩擦応力等に及ぼす影響を検討した。ここでは境界層外縁における水粒子速度として単弦運動を仮定して、有限振幅の波動場での底面近傍の速度場を議論しているわけではないが、層流境界層については、この研究により一応解決されたと言える。

Bakker-van Doorn<sup>2,3)</sup>は波および波と流れの作用下での底面付近の水粒子速度を実測し、また非線形の乱流境界層方程式を波の有限振幅性を考慮して差分法により計算を行っているが、波の有限振幅性が水粒子速度や底面せん断応力にどのような影響を与えるかについて十分な考察を行っていない。Johns<sup>4,5)</sup>は乱流境界層方程式の高次近似解を、Launder-Spaldingの乱流輸送モデルに基づいて数値的に求めているが、外縁の水粒子速度には岩垣らと同様に単弦運動を仮定している。Trowbridge-Madsen<sup>6)</sup>は外縁流速に2倍周波数成分までを与え、渦動粘性の時間変動まで考慮した乱流境界層の2次近似解を導いた。しかしながら、解は複素ベッセル関数の複雑な多項式であり、水粒子速度の特性を直接示すような数式表現ではない。

以上のように、有限振幅波動下における底面境界層の理論解析は必ずしも成功しているとはいえないので、数値解析の最近の進歩を考慮し、著者らは底面境界層の計算に有限要素法による解析を応用する試みを始めた<sup>7)</sup>。本論文はこの主旨にもとづいて行った研究の成果である。

ここでは、まず最初に層流境界層に対して計算を行い、その計算結果を岩垣・土屋らの解析結果と比較検討することによって、計算手法の妥当性を調べる。次に乱流境界層に対する数値計算を行い、得られた結果から波の有限振幅性が底面せん断応力や摩擦係数に与える影響について考察する。さらに、著者ら<sup>6,9)</sup>や Bakker-van Doorn<sup>2,3)</sup>が行った実験結果と、ここで展開した数値計算結果を比較検討し、波動による底面乱流境界層内の速度場を明らかにする。

2. 有限要素法による層流境界層の非線型計算<sup>10),11)</sup>

2.1 基礎方程式とガラーキン法による定式化

非定常な非圧縮性流体に対する2次元の層流境界層方程式は、波の進行方向に  $x$  軸、底面から垂直上方に  $z$  軸をとり、それぞれの方向における速度成分を  $u$  および  $w$  とすれば、次式で与えられる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots(1)$$

ただし、 $t$ : 時間,  $p$ : 圧力,  $\nu$ : 動粘性係数,  $\rho$ : 流体の密度である。境界層近似により、右辺第1項の圧力項は、境界層外縁の水平方向水粒子速度  $u_p$  から次の運動方程式によって計算される。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial u_p}{\partial t} + u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} \dots\dots\dots(2)$$

さらに連続式と連立することにより、未知量  $u, w$  を求めることになる。

次に解析領域を有限個の三角形要素群に分割し、1つの要素内の  $u, w$  を節点での値  $u^n, w^n$  と形状関数  $\phi$  を用いて近似する。すなわち、

$$\begin{aligned} u &\simeq \phi^T u^n \dots\dots\dots(3) \\ w &\simeq \phi^T w^n \end{aligned}$$

ガラーキン法は近似関数を用いたことによる残差の最小化を、形状関数  $\phi$  との直交化により求めようとするものである。ただし、今回用いた形状関数  $\phi$  は、 $x$  と  $z$  についての1次式であり、2階以上の微係数を表現することができない。したがって、(1)式の右辺第2項は、部分積分により1階の微係数で構成される式に変形し、連続性を満足させる必要がある。上記の手続きにより(1)式は次式に変形される。

$$\begin{aligned} \delta u^n T \iint \phi \phi^T dx dz \frac{\partial u}{\partial t} + \delta u^n T \iint \phi \phi^T u^n \phi_{zT} u^n dx dz \\ + \delta u^n T \iint \phi \phi^T w^n \phi_{zT} u^n dx dz + \frac{1}{\rho} \iint \frac{\partial p}{\partial x} \phi^T \delta u^n dz dx \\ - \nu \delta u^n T \int_0^{l_z} \left[ \phi \phi_{zT} \right]_0^{l_z} dx u^n + \nu \delta u^n T \iint \phi_{zT} \phi_{zT} dz dx u^n = 0 \dots\dots\dots(5) \end{aligned}$$

ここで積分は要素内での積分を示す。上式の第2項と第3項は  $u^n, w^n$  について非線形であり、Newton-Raphson 法を用いた線型化を行う必要がある。すなわち、

$$u = u' + \Delta u, \quad w = w' + \Delta w \dots\dots\dots(6)$$

として、 $\Delta u, \Delta w$  の2次以上の微小項を無視する。

また(5)式は、ある時間  $t$  において空間的に離散化された式であり、時間方向の離散化には以下の差分法を適用する。すなわち、時間きざみ  $\Delta t$  間での増分量  $du = u_t - u_0$  を heaviside 関数を内挿関数とした差分法より次式で表現する。

$$du = u_t - u_0 = \left\{ \theta \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_t + (1-\theta) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_0 \right\} \Delta t \dots\dots\dots(7)$$

時間差分における重み  $\theta$  の効果については、 $0 \leq \theta \leq 1$  であるが、 $\theta = 0.5$  の場合が最も安定した解が得られることがわかっている。したがって時間微分項  $\frac{\partial}{\partial t}$  を  $\cdot$  を付して表現すれば、

$$\dot{u}' + \Delta \dot{u}' = \frac{2}{\Delta t} (u'_t + \Delta u_t - u_0) - \dot{u}_0 \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここで添字 0 は時刻  $t - \Delta t$  での値であることを意味する。

次に節点未知数間の方程式を、全体マトリックス内のその節点未知数の占有する位置へ格納する必要がある。 $\Delta u_i, \Delta w_i$  は係数マトリックスの逆行列から求められる。本計算ではガウス消去法を用いた。

さて(8)式において、得られた  $\Delta u, \Delta w$  を  $u_i', w_i'$  に加え、これを新たに  $u_i', w_i'$  として同様の計算をくり返す。この Newton-Raphson 法のくり返し計算は 2, 3 回で十分であることが確認された。一つの時間ステップで  $u_i', w_i'$  が十分な精度で得られたならば、これを新たに  $u_0, w_0$  と置いて、次の新しい時間ステップに進むことになる。

2.2 計算条件

計算は水深が 50 cm で、周期 2.0 sec の波が伝播する場合を取り扱った。解析領域は水平方向には 1 波長分、鉛直方向には層流境界層理論から得られる境界層厚さ  $\delta_w = 2\pi/\sqrt{\sigma/2\nu}$  ( $\sigma$ : 角周波数) をとった。水平方向の分割数は 40、鉛直方向は 10 であり、全要素数は 800 となる。計算時間ステップは 1 周期の 1/64 であり、これより、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{L/40}{T/64} \geq c \dots\dots\dots(9)$$

となつて、Courant-Friedrichs-Lewy の条件を満足している。

2.3 計算結果

境界層内の水粒子速度を求めるためには、境界条件と初期条件を与える必要がある。層流境界層の高次解には岩垣・土屋<sup>1)</sup>の解析解があるが、こうした数値解析は解析解が容易に得られない場合こそ有用であることを考慮して、ここでは初期条件を任意に、あるいは低い精度の解析解で与えて、数値解が定常状態になったときにどの程度の精度を持つ解が得られるかを検討する。

Fig. 1 は底面における水粒子速度の振幅  $u_0$  と波速  $c$  の比  $u_0/c = 0.15$  の条件で計算を行ったもので、波形勾配は約 0.04 である。境界条件は、境界層外縁で岩垣らの質量輸送速度を含む第 2 次近似解で  $x \rightarrow \infty$  とした値を与え、初期条件として全内部節点に第 1 次近似解を与えた。Fig. 1 は波の 2 周期後の時間ステップにおける水粒子速度の鉛直分布の空間変化を示したもので、計算結果は岩垣らの第 2 次近似解と良く一致

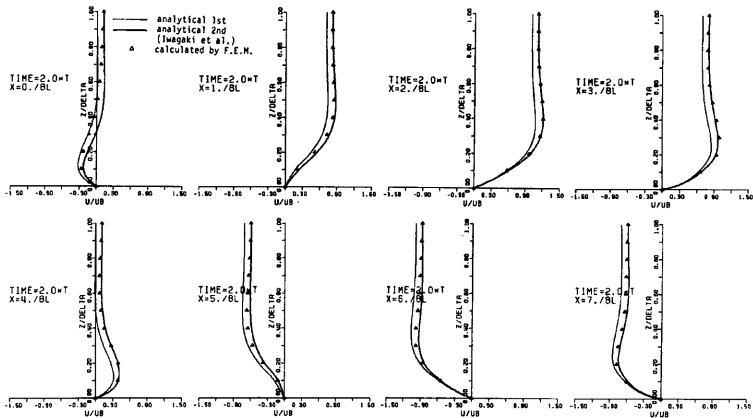


Fig. 1 Comparisons of calculated results with analytical solutions for laminar boundary layer (upper boundary condition; 2nd order approximate solution by Iwagaki et al., and initial condition; linear solution).

していることがわかる。ここには示していないが、波の1周期後の時間ステップにおける計算結果は、Fig. 1の結果と比べて、第2次近似解との一致の程度がわずかに悪くなっている。

Fig. 2はFig. 1と同じ計算条件で、内部節点の初期値をすべて0として計算を行ったものである。この

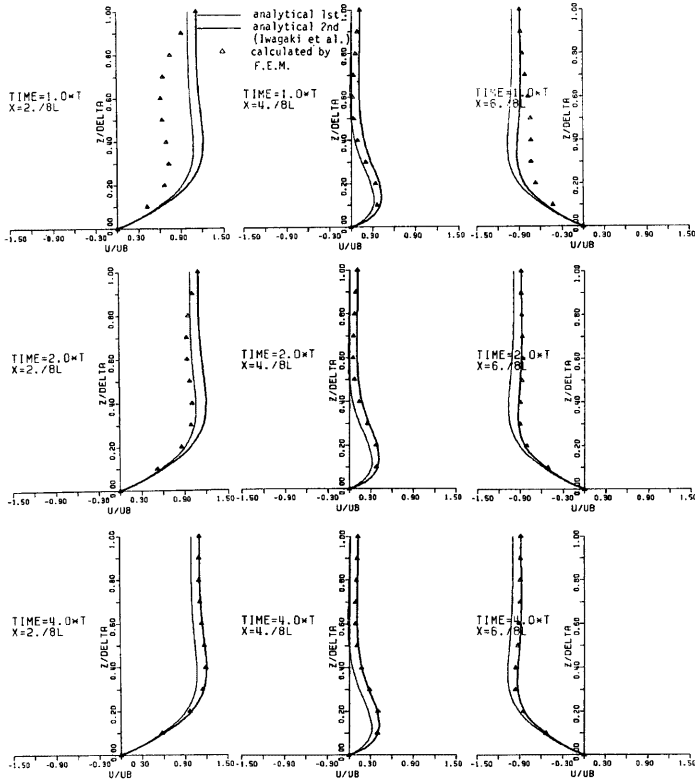


Fig. 2 Calculated results in which initial condition is given as  $u=0$ .

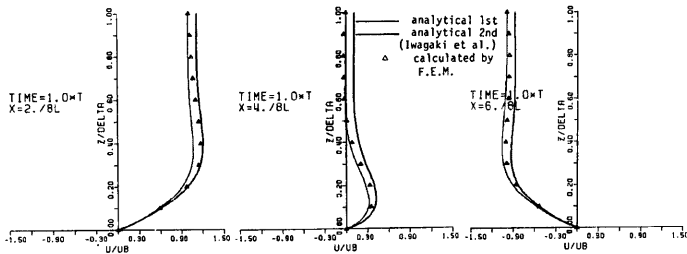


Fig. 3 Calculated results in which upper boundary condition is given by linear solution.

図からも、数値解が定常な解析解と一致するためには、ある程度の計算ステップが必要であることがわかる。しかし初期条件を解析解からかけ離れた値を与えた場合でも、4周期後の数値解は解析解と良く一致しており、このことは本計算の有用性を示すものである。

また境界層外縁での境界条件として第1次近似解を与えて計算した1周期後の結果が Fig. 3 である。上部の節点の数値解を第1次近似解で固定するため、上方の節点の数値解は第2次近似解へ近づかないが、底面付近の解は第2次近似解に近い値となっており、このことは基礎式中の非線形項の効果と考えられる。

### 3. 有限要素法による乱流境界層の非線形計算

#### 3.1 基礎方程式

流れが乱流状態になれば、粘性項は Reynolds 応力に支配されるので、(1)式右辺第2項は  $\frac{\partial}{\partial z}(-u'w')$  で置き換える必要がある。Prandtl の混合距離理論から、底面からの距離に比例する混合距離  $l = \kappa z$  ( $\kappa$  は Karman 定数)を仮定すると、粘性項は次式で表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\kappa z)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right\} \dots\dots\dots (10)$$

したがって、乱流境界層に関する基礎方程式は次式となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\kappa z)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(11)式は左辺の移流項および右辺の底面摩擦項が非線形となっている。

線形で乱流境界層方程式を取り扱う場合には  $\kappa z \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right|$  を摩擦速度  $u_*$  で置き直して、(10)式を

$$\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \kappa u_*^2 \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

と表現することが通例である。ただし波動の場合には  $\partial u / \partial z$  は位相とともに変化するので、 $u_*$  の定義には任意性が残る。 $\partial u / \partial z$  の最大値で  $u_*$  を定義すれば、 $\partial u / \partial z$  が最大となる位相時付近では水粒子運動が良く表現できるが、それ以外の位相では正確に表わすことができない。したがって、乱流境界層の非線形解を精度良く求めるためには、粘性項は(10)式で表現する必要がある。

さて、有限要素法による定式化を行うにあたって、2.で述べたように連続性を確保するために、 $z$  に関する2階微分を部分積分により1階微分のみで構成される形式に変形する必要がある。すなわち、(11)式の要素内での積分は、 $u$  に(3)式で示す近似を行えば次のように変形される。

$$\begin{aligned} & \iint \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\kappa z^*)^2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \text{sign} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} dz dx \\ &= \text{sign} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left\{ \int_0^{l/2} [(\kappa z^*)^2 (\phi^T z u^n)^2 \phi^T \delta u^n] dz \right. \\ & \quad \left. - \iint [(\kappa z^*)^2 (\phi_z^T u^n)^2 \phi_z^T \delta u^n] dz dx \right\} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし  $\text{sign}(\partial u / \partial z)$  は  $\partial u / \partial z$  の符号を意味し、計算を行う際には Newton-Raphson 法による近似の一つ前のステップにおける  $\partial u / \partial z$  の符号をとることにした。また混合距離  $\kappa z$  の  $z$  は底面からの距離をとる必要があり、一方、要素内の積分変数である  $z^*$  は、要素下端を始点とする鉛直距離であるが、両者の混同を避けるため前者の  $z$  を  $z^*$  で表現した。

#### 3.2 計算条件

計算は波形勾配が比較的大きい周期 4 sec, 水深 100 cm の場合 (CASE-1) と、波形勾配が比較的小さい周期 6 sec, 水深 250 cm の場合 (CASE-2) の2ケースについて行った。粗度高さ  $z_0$  は 0.2 cm と共通である。波高については与えられた水深に対して砕波しない範囲で、かつ Kamphuis<sup>(2)</sup> の領域区分で完全粗面乱流

領域に入る範囲について計算することにしたが、波の非線型性が境界層内水粒子速度に与える影響を調べるために、粗滑遷移領域にはいる波高が約 20 cm 以下の場合も、完全粗面乱流とみなして計算を行った。

解析領域は水平方向に一波長分、鉛直方向には  $z_0$  から境界層厚  $\delta_w$  までをとった。 $\delta_w$  の算定は著者ら<sup>8)</sup>の方法によった。水平方向、鉛直方向の要素分割数はそれぞれ40, 10で層流の場合の解析と同様であるが、底面付近の水粒子速度の特性を詳細に調べるために、メッシュを底面近くで細かくとった。計算時間ステップは1周期の1/64である。

計算にあたっての境界条件・初期条件は次のように定めた。境界条件は境界層外縁において、その高さにおける Stokes 波の第2次近似解を与えた。2.3で示したように層流境界層では内部節点の初期条件として0を与えた場合にも妥当な結果が得られた。しかし乱流境界層においては粘性項の計算に  $\partial u/\partial z$  の符号が必要であり、あまりかけ離れた初期値を与えると解が発散することがわかった。そこで初期値としては、著者ら<sup>8)</sup>による乱流境界層の線型解を、境界層外縁において Stokes 波の第2次近似解と一致するよう、各位相ごとに補正したものを用いた。

### 3.3 計算結果

Fig. 4 は CASE-1 の場合について境界層内の水粒子速度分布の空間的变化を示したものである。図中細線は線型解であり、太線は本解析法によって求めた非線型解である。底面における速度勾配は非線型解の方が大きくなっており、これは線型の乱流境界層方程式では底面せん断応力を過小に評価することを意味しており、海岸水理学上重要な知見であると思われる。

Fig. 5 は CASE-1 の計算条件から、波高  $H$  を変化させた時の、 $x=L/2$  における水粒子速度の時間波形を示したものである。境界層外縁での境界条件に Stokes 波の第2次近似解を与えたため、内部の水粒子速度の波形にも谷位相付近で2次波峰が見られる場合がある。一方、峰の位相では、底面に近づくほど位相の前進を示すことがわかる。

Fig. 6 は最も底面に近い節点 ( $z=0.4$  cm) における水粒子速度の時間波形が、波高によってどのように変化するかを示したものである。本解析においては解析領域の下端は粗度高さ  $z=z_0$  をとっており、ここで水粒子速度は0となるから、Fig. 6 に示す最も底面に近い節点での水粒子速度の変動は、底面せん断応力の変動に近いものとなる。なお、図中には波の位相を示すための正弦波形を記入した。

図から波高の増加につれて、すなわち非線型性の増大とともに、底面近くの水粒子速度の時間波形の位相

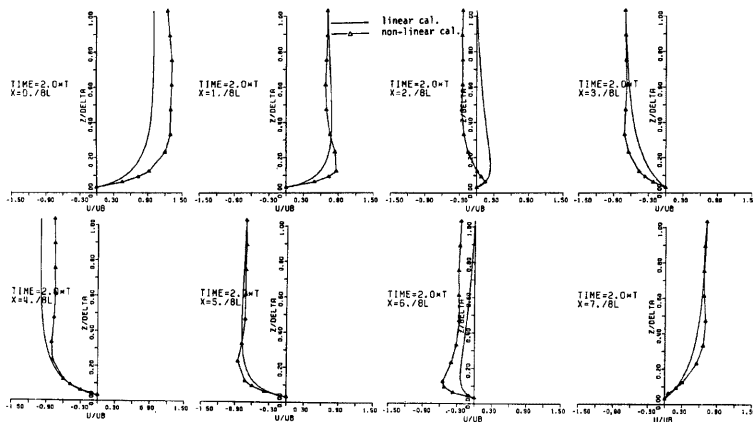


Fig. 4 Calculated results of velocity profiles in turbulent boundary layer (CASE-1).

の先行が、若干ではあるが減少していることがわかる。一方、岩垣・土屋ら<sup>1)</sup>の層流境界層に対する解析では、非線型性が増大すると波峰部の位相の先行が大きくなることを示している。この相違は岩垣・土屋らの計算では境界層外縁で微小振幅波による流速波形を与えているのに対し、本計算では Stokes 波の第 2 次近似解を与えていることが、一つの理由として考えられる。

次に底面せん断応力  $\tau$  について検討する。 $\tau$  を求めるためには、(11)式に示したように、底面での水粒子速度の  $x$  方向勾配  $\partial u/\partial z|_{z=z_0}$  を計算する必要がある。しかし本解析では、水粒子速度を各節点において離散的にしか求めることができない。そこでここでは、多項式による補間法の 1 種である、スプライン関数を用いて、底面における  $\partial u/\partial z|_{z=z_0}$  の値を求め、底面せん断応力  $\tau$  を計算した。

また、摩擦係数は次の二つの定義式に基づいて算定した。まず最大底面せん断応力と境界層外縁での微小振幅波から求めた水粒子速度振幅  $\hat{u}_p$  を使って摩擦係数  $f_w$  を次式で定義した。

$$\tau_{max}/\rho = \frac{1}{2} f_w \hat{u}_p^2 \dots\dots\dots(15)$$

本計算においては境界層外縁速度として Stokes 波の第 2 次近似解を与えている。したがって摩擦係数を定義するにあたって、Stokes 波理論の第 2 次近似解から算定した波の峰位相における水粒子速度  $u_{p,2nd}$  を用いることも一つの方法である。すなわち、

$$\tau_{max}/\rho = \frac{1}{2} f_w^+ \hat{u}_{p,2nd}^2 \dots\dots\dots(16)$$

で第 2 の摩擦係数  $f_w^+$  を定義する。

CASE-1, CASE-2 の計算条件に対して、波高  $H$  を変化した場合の摩擦係数  $f_w, f_w^+$  の計算結果を Table 1 に示す。表中には与えられた計算条件から算出された波形勾配  $H/L$  と  $\hat{u}_p/\sigma_0$  の値を示した。 $\hat{u}_p/\sigma_0$  は、境界層外縁における水粒子軌道振幅  $A_m(=\hat{u}_p/\sigma)$  と定常流における Nikuradse の相当粗度に対応する  $k_s(=30\sigma_0)$  との比  $A_m/k_s$  の 30 倍に相当する。また著者らによる線型の乱流境界層方程式から得られた摩擦係数  $f_w, linear$  の値も記入した。Table 1 の結果から次のことがわかる。

まず最初に、摩擦係数  $f_w$  の結果は、CASE-1, CASE-2 とともに  $f_w, linear$  より常に大きい結果となった。

次に波高が大きくなると、線型解の摩擦係数は CASE-1, CASE-2 とともに減少しているのに対し、非線型計算の結果である  $f_w$  は、いったん減少したのち増加することがわかる。一方、 $f_w^+$  に関しては CASE-1 については  $f_w, linear$  より大きいとその差は  $f_w$  と  $f_w, linear$  の差より小さい。しかしこの場合でも  $H=80$  cm では  $f_w, linear$  の 2 倍以上の値となっている。CASE-2 に対しては波高の増加とともに  $f_w^+$  と  $f_w, linear$  の差は小さくなる事がわかる。

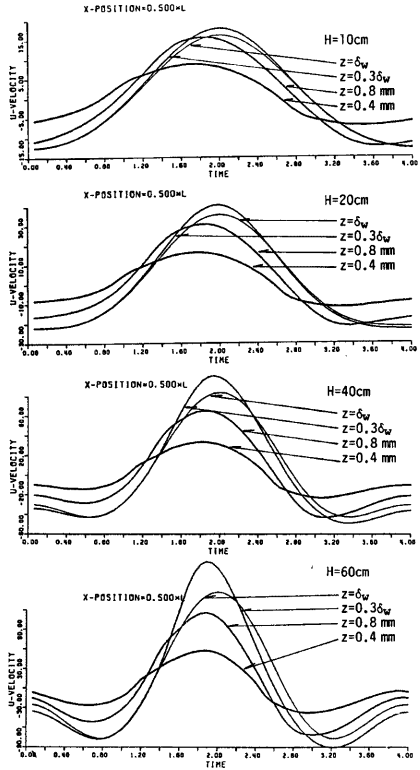


Fig. 5 Time variations of water particle velocities (CASE-1).

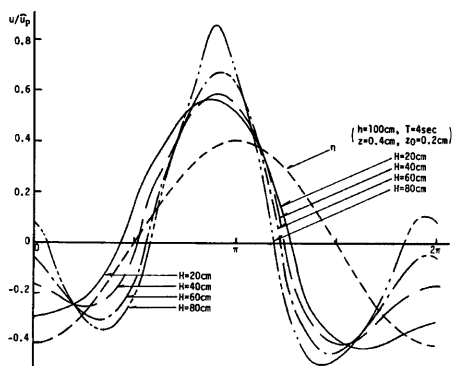


Fig. 6 Effect of wave height on time variations of near-bed water particle velocities (CASE-1).

また CASE-1 と CASE-2 で同じ波高の計算結果を比較すると、 $f_w$  の値は  $H=10$  cm の場合を除いて CASE-1 の方が CASE-2 より大きく、その差は波高の増加とともに大きくなり、 $H=80$  cm の場合には CASE-1 の  $f_w$  は CASE-2 の  $f_w$  の 5 倍近い値に達している。波高が同じであればパラメーター  $\hat{u}_p/\sigma z_0$  の値はほぼ等しく、 $H/L$  の値は CASE-1 が CASE-2 の 2.4 倍となっている。したがって、両者の  $f_w$  の結果の差は波の非線形性によるものと考えられる。一方、 $f_w^+$  についても波高  $H$  が 20 cm より小さい場合には CASE-2 の方が大きい、波高が増大するにつれて CASE-1 が CASE-2 より大きくなり、 $H=80$  cm の場合には 2.3 倍程度の値と

なっている。

次に本計算で得られた摩擦係数の値を従来の乱流境界層に対する摩擦係数の算定公式<sup>12,13,14)</sup> から得られる値と比較検討した結果を以下に示す。

Fig. 7 は Table 1 の計算結果を横軸に  $\hat{u}_p/\sigma z_0$  をとって示したものである。従来、完全粗面乱流では摩擦係数は  $\hat{u}_p/\sigma z_0$  のみに依存すると考えられており、これらの算定公式でも  $\hat{u}_p/\sigma z_0$  のみを与えれば  $f_w$  を計算することができる。本計算による  $f_w$  の結果と比較すると、 $\hat{u}_p/\sigma z_0$  が小さい範囲では、波高が小さい計算ケースに相当するため、本計算の  $f_w$  は、従来の算定公式による値よりやや小さい結果となるが、波高の増大とともに本計算結果は CASE-1, CASE-2 の両ケースとも従来の算定公式による  $f_w$  より大きくなり、本計算の範囲では最大で 5 倍以上にも達することがわかる。一方、 $f_w^+$  については CASE-2 では従来の算定公式による値と近い値を与えるが、CASE-1 では、波高が大きい場合にかなり大きな値を与えることがわかる。

従来の算定公式のうち、梶浦<sup>12)</sup>の理論は境界層内の渦動粘性係数の鉛直分布については 3 層に区分した取扱いは行っているが、基礎式はあくまでも線型の取扱いであって、波の非線形性については考慮できないものである。また Jonsson<sup>14)</sup>

Table 1 Friction factors  $f_w$  and  $f_w^+$

CASE-1  $h=100\text{cm}, T=4\text{sec}, z_0=0.2\text{cm}$

H (cm)	H/L $\times 10^{-2}$	$\hat{u}_p/\sigma z_0$	non-linear cal.		linear cal.
			$f_w$	$f_w^+$	$f_w, \text{linear}$
10	0.83	45.6	0.216	0.172	0.133
20	1.67	91.2	0.180	0.117	0.092
30	2.50	136.1	0.177	0.096	0.074
40	3.33	182.4	0.186	0.085	0.064
50	4.17	228.1	0.204	0.080	0.057
60	5.00	273.7	0.239	0.081	0.052
70	5.84	319.3	0.300	0.089	0.048
80	6.67	364.9	0.390	0.102	0.045

CASE-2  $h=250\text{cm}, T=6\text{sec}, z_0=0.2\text{cm}$

H (cm)	H/L $\times 10^{-2}$	$\hat{u}_p/\sigma z_0$	non-linear cal.		linear cal.
			$f_w$	$f_w^+$	$f_w, \text{linear}$
10	0.35	42.8	0.238	0.219	0.138
20	0.71	85.7	0.153	0.130	0.095
40	1.41	171.3	0.105	0.077	0.066
60	2.12	257.0	0.089	0.057	0.054
80	2.83	342.7	0.081	0.045	0.047
100	3.53	428.4	0.078	0.039	0.042
120	4.24	514.1	0.080	0.035	0.038
160	5.65	685.5	0.090	0.032	0.033
200	7.06	856.9	0.109	0.032	0.030



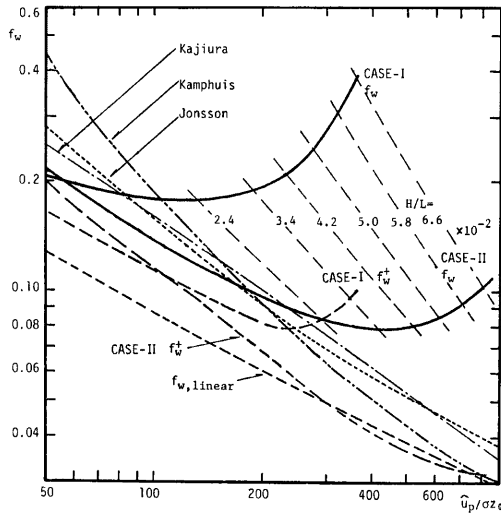


Fig. 7 Comparisons of calculated results of friction factor with those by existing formulas.

は水粒子速度の鉛直分布から、Kamphuis<sup>12)</sup> は shear plate で直接底面摩擦力を測定することにより、実験的に摩擦係数を求め、その算定公式を提案しているが、実験ケースが少ないために波の非線形性の効果については十分に考慮できなかったと考えられる。著者らの線形解は従来の摩擦係数の算定公式から得られる値よりかなり小さいが、これは底面からの距離に比例する渦動粘性係数を仮定したためと考えられる。

以上の比較検討から非線形性の大きな計算ケースでは、従来の公式や線型の境界層方程式から計算される摩擦係数より、場合によっては数倍大きな値を与えることが判明した。ここでの非線形性とは、境界層方程式中の粘性項(10)式および移流慣性項の非線形性に基づくもののみならず、外縁流速として与えられた流速波形の非線形性をも意味するものである。 $f_w^+$ の結果には最後の非線形性の効果は一部除去されている。

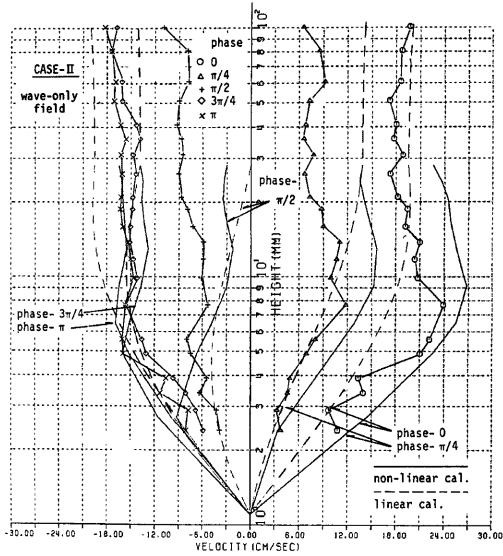
従来、波動乱流境界層における摩擦係数  $f_w$  は、完全粗面乱流においては Reynolds 数とは無関係となり、水粒子の軌道振幅  $A_m$  と粗度高さ  $k_b$  の比  $A_m/k_b$  だけで支配されると考えられていたが、本解析結果から波の非線形性によっても  $f_w$  の値は大きく変化することが明らかになった。すなわち、波形勾配  $H/L$  も摩擦係数  $f_w$  の支配パラメーターとなることがわかった。

柿沼ら<sup>13)</sup>はわが国のいくつかの海岸で波浪観測を行い、有義波から海底摩擦係数を算定するとともに、同時に音響測深器により、海底地形を測定した。その結果、海底摩擦係数の観測結果は、従来の算定公式が与える値より5～25倍も大きいことを報告した。現地の波は不規則であり、波高減衰を生じさせる別の機構も存在するが、波の非線形性の増大とともに底面摩擦力が増加するという、ここで明らかになった性質も現地の底面摩擦係数の増大を説明する一つの要因であろう。

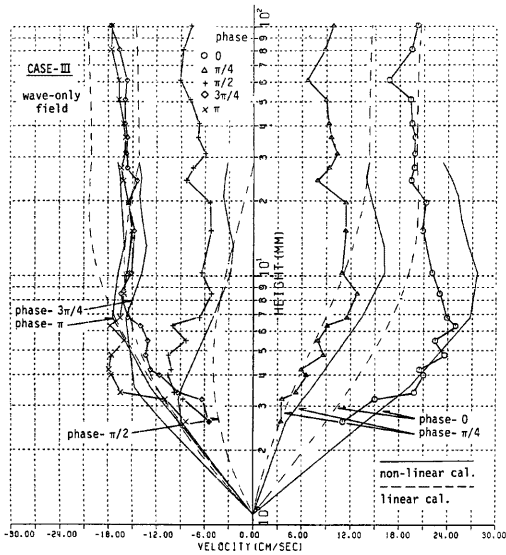
#### 4. 実験結果との比較検討

ここでは著者ら<sup>8,9)</sup> および Bakker ら<sup>2,3)</sup> が、レーザー・ドップラー流速計を用いて底面近傍の水粒子速度を実測した結果と、本計算結果との比較検討を行う。

著者らと Bakker らの実験諸元を Table 2 に示す。どちらの実験も底面を乱流状態とするために、水槽底部には 2 mm × 2 mm の断面を持つ角柱を 15 mm 間隔に並べた棧粗度を敷設している。



(a)



(b)

Fig. 8 Comparisons between calculated results and authors' experimental results<sup>8,9)</sup>.

一方、数値計算の方は実験と同じ水深と波の諸元を用い、計算メッシュの分割にあたっては、実験における測点の高さと一部が一致するようにした。

Fig. 8 は著者らの実験結果と、本数値計算結果との比較を示したものである。参考のために著者らが示した乱流境界層の線形解も図中に破線で示した。

図から非線形性を考慮した本数値解が線形解より、実験値を良く説明することがわかる。特に、波の峰位相で、底面から境界層外縁に近づく途中で流速分布が大きくふくらみ、外縁速度より大きくなるという over-shooting 現象が実験結果には見られるが、非線形解の流速分布にもこの over-shooting 現象が顕著に現れることがわかる。この現象は線形の乱流境界層方程式では、渦動粘性係数の鉛直分布や時間変動性を考慮しても表現できなかったことを考えると、波の非線形性によって生じる現象と思われる。Fig. 9 は Bakker らの結果に対して同様の比較を行ったものであるが、この場合にも非線形性を考慮した本解析結果は、実験結果を良く説明することがわかる。

次に基礎方程式中のどの項が over-shooting 現象に寄与しているかを調べるために、(10)式と同じ非線形の底面摩擦項を用いるが、左辺の移流慣性項を無視するとともに、境界層外縁における水粒子速度、圧力を微小振幅波で与えて計算を行った。すなわち、境界層方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (\kappa z)^2 \frac{\partial u}{\partial z} \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \right\} \dots\dots\dots (17)$$

として、粘性項の非線形性が流速分布に与える影響を調べることになる。CASE-III の実験条件に対して、上述の計算を行った結果が Fig. 10 である。Fig. 8(b) と比較すると Fig. 10 では波の有限振幅性を考慮し

Table 2 Experimental conditions

	H (cm)	T (sec)	h (cm)
Authos CASE-II	7.99	1.67	30
Authors CASE-III	8.22	1.67	30
Bakker-van Doorn	12.0	2.00	30

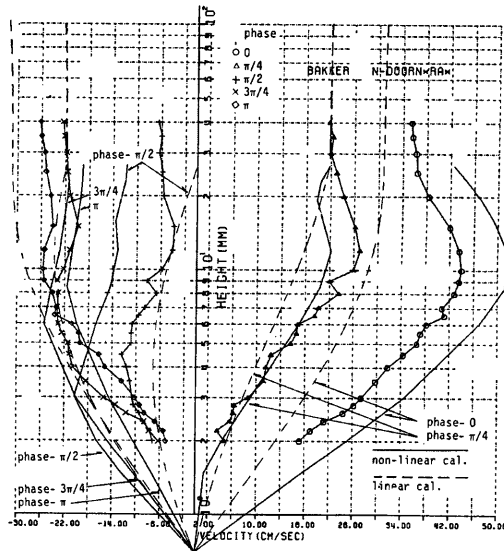


Fig. 9 Comparisons between calculated results and Bakker-van Doorn's experimental results<sup>2,3)</sup>.

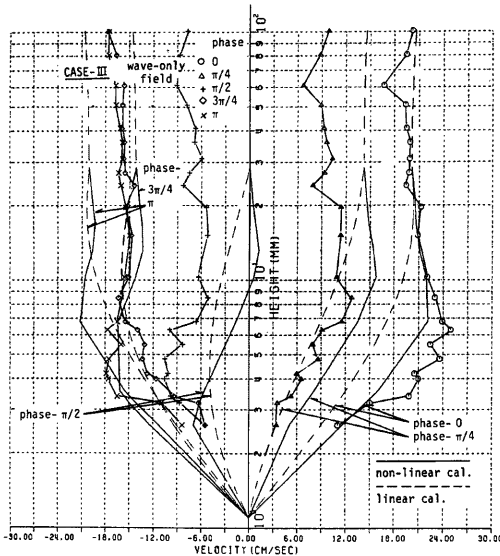


Fig. 10 Comparisons between calculated results based on Eq. (17) and authors' experimental results.

ていないために谷位相で計算値が実測値より大きくなるが、位相0付近の実測値の over-shooting をある程度表現していることがわかる。しかし Fig. 8(b) に比べてふくらみは少し小さくなっている。以上より over-shooting 現象は、粘性項の非線形性と移流慣性項の両者が同程度寄与し、運動量が  $x$  軸負方向に移送されることにより生じるものと考えられる。

Fig. 11 は同じ鉛直座標位置における実験値と計算値の時間波形を比較したものであるが、波の峰位相付近では非線形解の方が実験値を良く説明するが、波の谷位相から  $7/4\pi$  付近では、むしろ線形解の方が実験値と良く一致するようである。このように波の非線形性を考慮しても全ての位相にわたっては必ずしも実験値を完全に説明することはできない。これは波動による境界層内の水粒子運動を、(10)式のような混合距離理論ですべて説明しようとすることに限界があると考えられる。しかしながら、工学的には1周期を通じて最大のせん断応力の評価が特に重要であり、この位相での流速分布は十分表現できることがわかった。

### 5. 結 論

本研究は波動の有限振幅性および境界層方程式中の非線形性の両者を考慮して、底面境界層内の水粒子速度場を有限要素法により解析するとともに、水粒子速度の実測結果の詳細な検討から、底面近傍の水粒子速度場に及ぼす非線形性の効果を調べたものである。本研究で得られた主要な結論を列挙すると次のとおりである。

- 1) 有限要素法による数値解析法を層流境界層に適用し、その解析結果を岩垣・土屋らの第2次近似の解析解と比較したところ、境界層内の流速分布は極めて近い値を与えることが確認できた。また乱流境界層に対しても本解析法の適用が可能であることがわかった。
- 2) 非線形の乱流境界層方程式に基づく本解析結果は、線形の境界層方程式から得られる結果と比べて、底

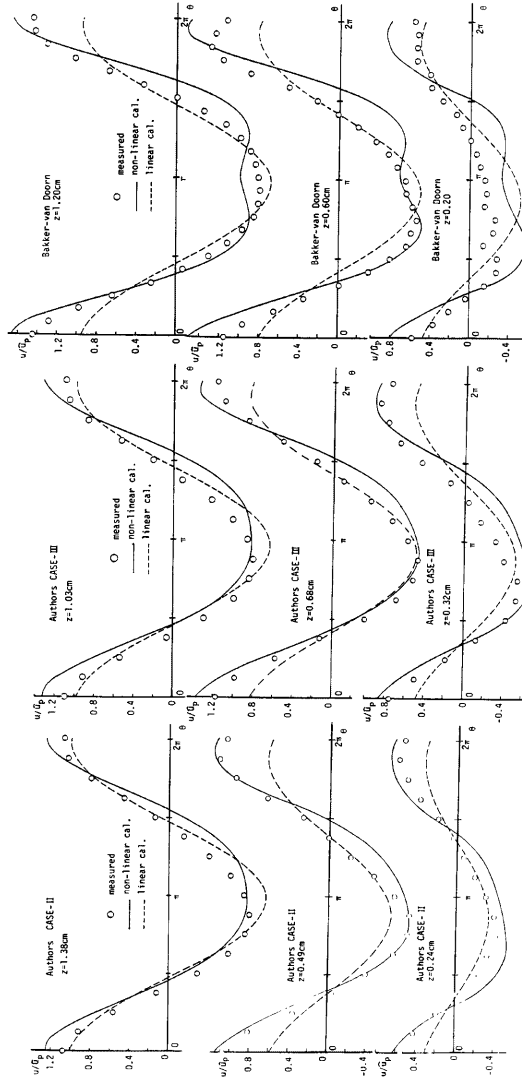


Fig. 11 Comparisons between calculated results and experimental ones on time variations of water particle velocities.

面での水粒子速度の鉛直勾配が大きくなり、その結果、底面せん断応力も増加することがわかった。

これを摩擦係数の形で評価すると、その定義の方法によっても結果は異なるが、波形勾配が大きい場合には線形の境界層方程式や、従来の摩擦係数の算定式から計算される値より、数倍も大きい値となることがわかった。したがって、波動乱流境界層における摩擦係数は、これまでに明らかにされている支配パラメータに加えて、波の非線形性を意味する波形勾配によっても変化することが見出された。

- 3) 著者らや Bakker らが行った底面近傍の水粒子速度の実測結果と、本解析結果とを比較したところ、非線形性を考慮した本解析結果は、線形の乱流境界層方程式から得られる結果より、実験結果を良く説明することがわかった。また線形解では説明できなかった実験結果に見られる over-shooting 現象が、非線形性を考慮した本計算結果で表現できることがわかった。

最後に、有限要素法解析を行うにあたって、熊本大学工学部の滝川清講師より貴重な教示・助言を頂いたことに対して感謝の意を表するとともに、プログラムの作成等にあたって当時京都大学学生の沢路陽一(大学院)および大前博(学部)両氏の助力を得たことを記して、ここに謝意を表する。

#### 参 考 文 献

- 1) 岩垣雄一・土屋義人・坂井順行・陳 活雄：海底摩擦による波高減衰機構に関する研究，京都大学防災研究所年報第9号，1966，pp. 647-665.
- 2) Bakker, W. T. and Th. van Doorn: Near bottom velocities in waves with a current, Delft Hydraulic Laboratory, Publication No. 208, 1980, p. 25.
- 3) van Doorn, Th: Experimental investigation of near-bottom velocities in water waves without and with a current, Delft Hydraulic Lab., Rept. No. M1423, Part 1, 1981, p. 66.
- 4) Johns, B: Residual flow and boundary shear stress in the turbulent bottom layer beneath waves, J. of Phy. Oceanography, 1977, pp. 733-738.
- 5) Johns, B.: Turbulence modelling beneath waves over beaches, Physical Oceanography of Coastal and Shelf Seas, Chapt. 3, Elsevier, 1983, pp. 111-133, p. 470.
- 6) Trowbridge, J. and O. S. Madsen: Turbulent wave boundary layers, 2. Second-order theory and mass transport, J. Geo. Res., Vol. 89, No. C5, 1984, pp. 7999-8007.
- 7) 岩垣雄一・浅野敏之・沢路陽一・大前 博：有限要素法による底面波動境界層の解析，土木学会関西支部年次学術講演会論文集，1984，pp. 69-70.
- 8) 浅野敏之・岡本 浩・岩垣雄一：波と流れの共存場における底面乱流境界層に関する研究，第30回海岸工学講演会論文集，1983，pp. 84-88.
- 9) 岩垣雄一・浅野敏之・岡本 浩：波と流れの共存場における底面近傍の水粒子速度の特性について，京都大学防災研究所年報，第26号，B-2，1983，pp. 543-558.
- 10) 滝川 清・田淵幹修：有限要素法による波動解析について(第1報)，第25回海岸工学講演会論文集，1978，pp. 28-32.
- 11) Conner, J. J. and C. A. Brebbia: Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newtes-Butterworth, 1976, p. 310.
- 12) Kamphuis, J. W.: Friction factor under oscillatory waves, Proc. of A.S.C.E., No, WW2, 1975, pp. 135-144.
- 13) Kajiuura, K.: A model of bottom boundary layer in water waves, Bull. Earthquake Res. Inst., Vol. 46, 1968, pp. 75-123.
- 14) Jonsson, I. G.: Wave boundary layers and friction factors, Proc. of 10th I.C.C.E., 1968, pp. 127-148.

- 15) 柿沼忠男・伊福 誠：中予海岸における波浪変形の観測(2)，——海底摩擦係数と粗度——，第26回海岸工学講演会論文集，1979，pp. 124-128.
- 16) 浅野敏之・五道仁実・岩垣雄一：波動による底面乱流境界層の渦動粘性モデル，第16回乱流シンポジウム講演論文集，1984，pp. 203-207.