

表面流，飽和・不飽和地中流相互干渉機構の分析モデル

高棹 琢馬・椎葉 充晴・張 昇平

A COUPLED RUNOFF MODEL OF SURFACE FLOW AND SUBSURFACE FLOW

By Takuma TAKASAO, Michiharu SHIBA and Shengping ZHANG

Synopsis

It has been recognized that surface flow and subsurface flow interact with one another in hillslope hydrologic processes. However, in most of runoff models, the interaction has been completely neglected or only conceptually taken into consideration. The aim of this paper is to combine a two-dimensional saturated-unsaturated subsurface flow model with a one-dimensional overland flow model to form a coupled model and to try to elucidate the hillslope hydrologic processes with it. The mathematic model is solved by the Galerkin Finite Element Method. It is very unique that surface flow and subsurface flow are treated as a simultaneous system. With the coupled model, we simulate the influences of soil hydraulic properties, rainflux and hillslope geometry to runoff characteristics. By the simulation, it becomes clear that return flow plays a great part in the interaction between surface flow and subsurface flow.

1. 概 要

本研究の目的は、表面流モデルおよび地中流モデルを結合して、表面流，地中飽和流および地中不飽和流を統合的に取り扱う数値シミュレーションモデルを構成し，これを用いて斜面系の流出機構を分析しようとするのである。

表面流については，薄層流として扱えるとして末石（1955）¹⁾は浅水流れの運動学的近似式（kinematic wave 式）を初めて山腹斜面の流出解析に適用した。同様の仮定を用いて，石原・高棹（1959）²⁾は，時間的に変化する横流入（時間の任意関数）のある kinematic wave モデルの解の構造を解析的に表現し，これを用いて表面流による降雨流出の基本的特性を明らかにした。こうして，kinematic wave モデルは山腹斜面の流れを解析する有力なモデルとなった。

しかしながら，のちに高棹ら自身が示したように（高棹・岸本〔1961〕³⁾，石原・高棹〔1962〕⁴⁾，石原藤次郎・石原安雄・高棹・頼〔1962〕⁵⁾，石原・高棹〔1964〕⁶⁾），山腹斜面の流れでは，透水性の高い表土層中を流れる中間流が地表に達して形成される表面流も存在する。石原・高棹らはこの場合，中間流と表面流を相互に連動する流れとして考えている。石原・高棹のこの中間流理論により，表面流と中間流との相互干渉が斜面流出過程に大きな影響を及ぼすことが実証された。さらに，高棹・池淵・椎葉（1977）⁷⁾は表面流と中間流を一体的に表わす基礎方程式を採用して，その解析手法を提案した。また，最近，高棹・椎葉（1981）⁸⁾は山腹斜面形状の効果を考慮して kinematic wave モデルを拡張した。

上述した中間流理論では，表面流と中間流は結合されているが，不飽和地中流はモデルの中に組み込まれていない。Sloan and Moore（1984）⁹⁾によれば，普通山腹斜面流出過程では不飽和地中流もかなり大きな影響を持っている。一方，水文地質学分野にたずさわる研究者は飽和地中流と不飽和地中流との結合を試みてきた。Freeze（1971）¹⁰⁾，Neuman（1973）¹¹⁾および赤井・大西・西垣（1977）¹²⁾は不飽和地中流モデルと飽和地中流モデルを一体化して，統合的に飽和・不飽和地中流を取り扱う地中流モデルを構成し，ほぼ完成した

と思われる。これにより地中水面についての扱いは、現在の段階では満足できる形となった。しかし、浸出点を求めるには、やはり反復計算が用いられ、表面流の影響が無視されている。

Smith and Woolhiser (1971)³⁹ は一次元鉛直飽和・不飽和流の計算により任意点での斜面浸透を求めて、運動的カスケード形の表面流モデルと地中流モデルとを組み合わせた。数学モデルは表面流の運動学的方程式と鉛直一次元形の地中流式を交互に反復して解くものである。浸透強度は地中流の解として求めたことから、ダルシー則的な考え方に基ついで得られたものであり、地中流と表面流との水理学的なかわり合いを十分に考慮していない。

そこでもっと完全な統合を図ろうとすれば、表面流と飽和・不飽和地中流を一体化した数学モデルを開発しなければならない。また、山腹斜面降雨流出のメカニズムを完全に解明するためにも、このような一体化した統合モデルの存在が不可欠であると考えられる。こうした観点から、本研究では、上述の研究成果をふまえて、表面流と飽和・不飽和地中流を統合した数学モデルを構成する。さらにこれを用いて山腹斜面降雨流出を解析する可能性を検討し、流出機構を分析することを試みる。

2. 数 字 モ デ ル

2.1 流れの領域

流れの領域として Fig. 1 に示した二次元鉛直断面内の領域 $ABCDEFGHA$ を設定する。この断面は表面流と地中流の河道への流下方向に平行な平面内にあると仮定する。領域全体は地表面 BH を共有境界とする表面流領域 $ABHA$ と地中流領域 $BCDEFGHB$ との二つの部分領域からなる。領域の基底部 $CDEF$ は透水性のよい地表面に近い土壌部をその下に横たわる透水性の低い土壌から区分する地質学的な境界であり、不透水性として取り扱える。すなわちこの境界面下で生じる流れがシステムに与える影響が無視できるとする。右方の境界 FG を通じてこの流域システムに入ってくる流れはないものとする。また、領域土壌層は不均質でかつ異方性を持つものとする。

2.2 地中流基礎方程式

飽和・不飽和状態にある多孔質媒体中の非定常流の連続方程式に運動方程式としての Darcy 則の式を代入して慣用形に変換すると次のような地中流基礎方程式が得られる²⁾。

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left[K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (h+x_2) \right] - \left(C + \frac{\omega}{\phi} S_s \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 x_1, x_2 はそれぞれ水平・鉛直方向の座標、 K_{ij} は透水係数テンソルの成分、 h は圧力水頭、 C は比水分容量 (specific moisture capacity)、 ω は体積含水量、 ϕ は間隙率、 S_s は比貯留率 (specific storage)、 t は時間である。

不飽和土壌中では、透水係数と含水量はともにいずれの土壌型についても圧力水頭 h の関数である。その関係曲線は土壌が湿潤しつつあるか、乾燥しつつあるかによって異なる、いわゆるヒステリシス (hysteresis) を示す。応用に際してのある場合にはヒステリシスは重要になりうる。しかし、Freeze (1971)⁴⁰ も述べているように山腹斜面水文学のシミュレーションではこのヒステリシスの二次的影響よりは現地の土壌の正確な水分特性曲線の形が不明であることの影響のほうがはるかに大きいであろう。それゆえに土壌の不飽和水分特性を表わすのに単調の曲線を用いるのが普通である。

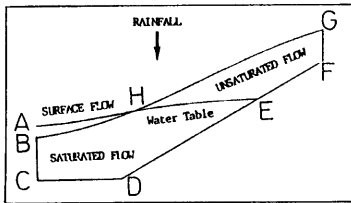


Fig. 1 Region of flow for a coupled model of surface flow and subsurface flow.

Neuman (1973)⁴¹ は透水係数について次の仮定をしている。

$$K_{ij} = K_{ij}^s K_r \dots\dots\dots (2)$$

K_{ij}^s は飽和透水係数テンソル成分である。 K_r は相対透水係数 (relative conductivity) と言い，飽和の場合 $K_r = 1$ ，不飽和の場合 $0 < K_r \leq 1$ で，含水量 ω の単調関数と考えている。

流れの基礎方程式(1)の初期条件は全領域での圧力水頭の分布であり普通次のように与える。

$$h(x_1, x_2, t)|_{t=0} = h_0(x_1, x_2) \dots\dots\dots (3)$$

h_0 は既知関数である。このとき初期分布は必ずしも任意に与えることができない，水文学的に意味があり，かつ数学的にも扱える条件でなければならない。よく考えられる初期条件は定常状態である。

不透水境界面 $CDEFG$ に沿って次の境界条件が成り立つ。

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(h + x_2) = 0 \dots\dots\dots (4)$$

\mathbf{n} は境界曲線の外向きの単位法線である。

境界 BC は全水頭の時間的分布が既知である Dirichlet Boundary Γ_1 として次の条件が与えられる。

$$h(x_1, x_2, t)|_{(x_1, x_2) \in \Gamma_1} = h_D(x_1, x_2, t) \dots\dots\dots (5)$$

h_D は通常観測値または予測値を用いる。また地表面 BHG にはそこを通過する（浸透または浸出する）流量 Q が与えられた Neumann Boundary Γ_2 として

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (h + x_2) \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i)|_{(x_1, x_2) \in \Gamma_2} = Q(x_1, x_2, t) \dots\dots\dots (6)$$

なる条件を与える。ただし，流量 Q は次のような値をとる：

$$Q = \begin{cases} R \cos \theta, & h < 0 \\ I \cos \theta, & h \geq 0 \end{cases} \dots\dots\dots (7)$$

ここに θ は地表面と x_1 とがなす角度， R および I はそれぞれ降雨強度および浸透（浸出）強度である。 R には観測値あるいは予測値を用いればよい。 I は圧力水頭 h とならぶもう一つの従属変数として取り扱い，これから導びく表面流基礎方程式と連立することによって求めることにする。その具体的な取り扱い方は本研究独自のものであり，それは数値解析のための定式化の過程で明らかにする。

2.3 表面流基礎方程式

表面流は斜面方向の一次元流れとする。

表面流基礎方程式は連続方程式と Navier-Stokes 式を Kinematic Wave 理論に基づいて近似し，さらに Manning 抵抗則を用いて簡略化したものである。

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cos^2 \theta + \frac{\partial}{\partial s} (U h \cos^2 \theta) = (R - I) \cos \theta \dots\dots\dots (8)$$

$$U = F \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) h^{2/3} + V_g \dots\dots\dots (9)$$

ただし

$$F \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right) = \frac{\alpha}{n_0} \sqrt{\left| \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial s} \cos^2 \theta \right|} \cos^4 \theta$$

$$\alpha = \begin{cases} 1, & \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial s} \cos^2 \theta \geq 0 \\ -1, & \sin \theta - \frac{\partial h}{\partial s} \cos^2 \theta < 0 \end{cases}$$

$$V_g = g_s \frac{\partial h}{\partial s} + g_T \frac{\partial h}{\partial T} + g_0$$

$$g_s = -\frac{1}{\phi} (K_{11}^s \cos^2 \theta + 2K_{12}^s \sin \theta \cos \theta + K_{22}^s \sin^2 \theta)$$

$$g_T = \frac{1}{\phi} [(K_{22}^s - K_{11}^s) \sin \theta \cos \theta + K_{12}^s (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)]$$

$$g_0 = \frac{1}{\varphi} (K_{12}^s \cos \theta + K_{22}^s \sin \theta)$$

ここに n_0 は地表面 Manning 粗度係数, s は斜面方向にそう曲線座標である。

表面流の境界条件と初期条件は次のように与える:

$$h(s, t)|_H = 0 \dots\dots\dots (10)$$

$$h(s, t)|_B = h_D(x_1, x_2, t)|_{(x_1, x_2) \in B} \dots\dots\dots (11)$$

$$h(s, t)|_{t=0} = h_0(x_1, x_2)|_{(x_1, x_2) \in BH} \dots\dots\dots (12)$$

もちろん以上の表面流の条件式は地中流のそれらと矛盾するものであってはならない。

式(8), (9)は h および $\partial h / \partial s$ に関して非線形であるため, その扱いが極めて難しく, また場合によっては数値計算が発散して解析ができなくなることもありうるので, 本研究ではその Newton 反復計算法に基づいて準線形化した形の式を使うことにする。

まず, ある s の区間 $[s_1, s_2]$ で θ は一定であるとし, h に対してこの区間である基準値 \bar{h} を考え, uh を次のように近似する。

$$\begin{aligned} uh &= uh \Big|_{h=\bar{h}, \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial s}} + \frac{\partial(uh)}{\partial h} \Big|_{h=\bar{h}, \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial s}} \cdot (h - \bar{h}) + \\ &\quad \frac{\partial(uh)}{\partial \left(\frac{\partial h}{\partial s} \right)} \Big|_{h=\bar{h}, \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \bar{h}}{\partial s}} \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial s} - \frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right) \\ &= \left[A(s) \frac{\partial h}{\partial s} + B(s)h + C(s) \right] / \cos^2 \theta + g_T h \frac{\partial h}{\partial T} \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} A(s) &= \left[\bar{h}^{5/3} F' \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right) + g_s \bar{h} \right] \cos^2 \theta \\ B(s) &= \left[\frac{5}{3} F \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right) \bar{h}^{2/3} + g_s \frac{\partial \bar{h}}{\partial s} + g_0 \right] \cos^2 \theta \\ C(s) &= \left[-\frac{2}{3} \bar{h}^{5/3} F \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right) - \bar{h}^{5/3} F' \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right) \frac{\partial \bar{h}}{\partial s} - g_s \bar{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial s} \right] \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$F(\partial \bar{h} / \partial s) = 0$ ならば $F'(\partial \bar{h} / \partial s)$ が無限大になるが, このとき許容誤差を考慮した上で選んだ十分に大きな値で近似する。こうして表面流基礎方程式は次のように書くことができる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} \cos^2 \theta + \frac{\partial}{\partial s} \left(A(s) \frac{\partial h}{\partial s} + B(s)h + C(s) + g_T h \frac{\partial h}{\partial T} \cos^2 \theta \right) = (R - I) \cos \theta \dots\dots\dots (14)$$

これを地中流基礎方程式と連立して斜面流出を求める数学モデルとする。

3. Galerkin 有限要素法による基礎方程式の定式化

3.1 要素分割と内挿関数

有限要素法は, 要素特性を見出すために用いられる方法によって四種類にわけられる。その中でも最も広く使われているのは変分法と重みつき残差法である。変分法より, 重みつき残差法のほうが少なくとも次の二つの点で有利である。一つは汎関数の存在しない問題や汎関数の見つかっていない問題にまで拡張できることと, もう一つは変分法でほとんど適用できない非線形問題にも有用なことである。このような理由より, 本研究では Galerkin 重みつき残差法を用いる。

有限要素法を適用するにあたり, その第一段階は領域全体を節点で相互に結合されたいくつかの要素に分割することである。最も広く使われている平面要素は直辺三角形要素であるが, それをいまの問題に簡単に適用できない。なぜならば, 表面流基礎方程式に斜面方向での微分 $\partial / \partial s$ が含まれているからである。 s は斜面方向にそう曲線座標であるため, 連続でなければならない。もし直辺三角形要素を使うとすれば, 節点

でその連続条件を満たすことができない、例えば、**Fig. 2** に示した A 点において、 $\partial/\partial s|_{e=i}$ と $\partial/\partial s|_{e=j}$ とは全く別方向での微分になってしまう。よって、これに対処するために地表面を C^1 級（一階微分まで連続）の滑らかな二次曲線で近似し、地表面を含む要素（以下表面要素と呼ぶ）を地表面と同じ二次曲線の辺を持つ曲辺三角形要素に、表面要素以外のすべての要素（以下内部要素と呼ぶ）を直辺三角形要素にする。

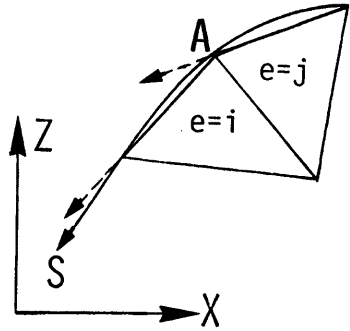


Fig. 2 Continuity of surface curvilinear coordinate.

ところが、言うまでもなく、このように同一の領域に二種類の要素を用いることは問題の複雑化を意味しており、多くの入力データと膨大な計算時間を必要とすることになる。そこで、厳密解との誤差を必要に応じて設定した許容誤差以下に押えることが

できれば、その近似解を解と考える、という数値解析の特徴をふまえた上で、曲辺三角形要素のかわりに、あえて直辺三角形要素を表面要素に用いることが可能かどうかを定常問題の解析によって検討してみることにする。このため、次に二通りの要素による定常問題の定式化手順を示す。

そのまゝに要素内における場の変数の挙動を定義する内挿関数を決めなければならない。内挿関数は適合条件 (compatibility requirement) と完全性の条件 (completeness requirement) という二つの必要条件に見合うように選ばれる必要がある。この二つの条件を考慮して、本モデルでは内挿関数に C^0 級連続性を持つ線形関数を用いればよいことがわかる。直辺三角形要素の場合は内挿関数が簡単に作れるが、曲辺三角形要素の場合は、要素形状を記述する関数 (C^1 級連続二次関数) より場の変数を近似する内挿関数 (C^0 級連続線形関数) が低次であるため、曲辺三角形要素を Superparametric element として扱うことになる、内挿関数を簡単に求めるために自然座標系を使う。こうすれば、直辺三角形要素と曲辺三角形要素のいずれの場合でも圧力水頭 h は次のような近似式で表わすことができる。

$$h^e = \sum_{k=1}^3 h_k^e \phi_k^e \dots\dots\dots(15)$$

h^e は e 番目要素内での圧力水頭、 h_k^e はその要素の三つの節点での圧力水頭、 ϕ_k^e は内挿関数である。内挿関数についての詳しい内容は Appendix に示す。

3.2 定常流基礎方程式の定式化

与えられた Dirichlet 境界条件を満たす全領域 D での圧力水頭 h の近似を次のように一般的な表示とする

$$h = \sum_{K=1}^N h_K \phi_K \dots\dots\dots(16)$$

ただし

$$\phi_K = \begin{cases} \phi_k^e, & \text{節点 } K \text{ を含む要素} \\ 0, & \text{節点 } K \text{ を含まない要素} \end{cases} \dots\dots\dots(17)$$

K は全体座標での節点番号、 k は部分座標での節点 K の番号、 N は節点総数である。

流れの基礎方程式の時間微分項を 0 とおけばそれが定常問題の基礎方程式となる。まず、定常問題の地中流基礎方程式に Galerkin 基準を適用する。

$$\iint_D \left[\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{K=1}^N h_K \phi_K + x_2 \right) \right\} \right] \phi_n dx_1 dx_2 = 0$$

$$n = 1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(18)$$

これを Green 定理により部分積分を行うと

$$\iint_{D} \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^2 K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{K=1}^N h_K \phi_K \right) + K_{i2} \right] dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} \phi_n \sum_{i=1}^2 \left[\sum_{j=1}^2 K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{K=1}^N h_K \phi_K \right) + K_{i2} \right] \cos(\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i) d\Omega = 0 \quad n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(19)$$

が得られる。 Ω は地中流領域の境界である。上式の二つの積分をそれぞれ I_1 と I_2 とおく。また、各要素で飽和状態の透水係数 K_{ij}^e は一定であるとし、相対透水係数 K_r の値は要素内の節点値の平均を用いるものとする。すなわち

$$K_r^e = \sum_{i=1}^3 K_{i'} \phi_{i'} \dots\dots\dots(20)$$

$K_{i'}$ は要素 e の三つの節点での相対透水係数である、式(20)を用いて I_1 が求められる。

$$I_1 = \sum_{K=1}^N A_{nK} h_K + F_n' \dots\dots\dots(21)$$

ただし

$$A_{nK} = \sum_e \frac{\bar{K}_r^e}{4\Delta^e} [K_{11}^e b_n \phi_K + K_{12}^e (b_n c_K + b_K c_n) + K_{22}^e c_n c_K]$$

$$F_n' = \sum_e \frac{\bar{K}_r^e}{2} (K_{12}^e b_n + K_{22}^e c_n)$$

$$\bar{K}_r = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 K_{i'}$$

b_n, c_n, b_K, c_K は節点座標により定まる値、 Δ^e は要素の面積である。

続いて I_2 を求めよう。まず境界条件に注意すると、不透水境界では、被積分関数が0であるため、 $I_2=0$ となり、また、Dirichlet 境界では、圧力水頭が既知であるため、 I_2 を求める必要がない、結局、地表面境界についてのみ I_2 を求めればよい。ここで Neumann 境界条件の式(6)、(7)を I_2 に代入すると (Fig. 1 を参照)。

$$I_2 = - \int_{GH} \phi_n R \cos \theta ds - \int_{HB} \phi_n I \cos \theta ds \dots\dots\dots(22)$$

地表面を通過する流量 I が未知であるため、上式第二項の積分を求めることができないが、とりあえずそのままとしておく。次に表面流基礎方程式を定式化する。地中流と同じように、表面流基礎方程式に Galerkin 基準を適用すると、

$$- \int_{HB} I \phi_n \cos \theta ds = \int_{HB} \frac{\partial}{\partial s} [uh \cos^2 \theta] \phi_n ds - \int_{HB} R \phi_n \cos \theta ds \dots\dots\dots(23)$$

上式の右辺の第一項は簡単に求められる、まず部分積分し、 $h|_H=0$ と $h|_B$ が Dirichlet 境界条件として与えられていることを考慮する。そして uh に式(13)の準線形式を使って積分ができる。このようにして式(23)が次のようにまとめられる：

$$- \int_{HB} \phi_n I \cos \theta ds = \sum_{K=1}^N E_{nK} h_K + F_n^0 - \int_{HB} R \phi_n \cos \theta ds \dots\dots\dots(24)$$

E_{nK}, F_n^0 は圧力水頭の基準値 \bar{h} の関数である、 \bar{h} に h と同様の内挿関数を用いる。

式(22)と式(24)とをたせば浸透強度 I を含む積分が消えて、次のような式になる。

$$I_2 = \sum_{K=1}^N E_{nK} h_K + F_n^0 - R_n \dots\dots\dots(25)$$

ただし、

$$R_n = \sum_e \frac{1}{2} (r_n' / n) \cos \theta$$

l_n は表面直線要素の長さであり， r_n はその要素での平均降雨強度である。

I_1 と I_2 を式(19)に代入すると次のような連立方程式が得られる：

$$\sum_{K=1}^N (A_{nK} + E_{nK}) h_K = R_n - F_n^0 - F_n' \quad n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(26)$$

これで直辺三角形要素分割による定常流問題の定式化が完了した。次に曲辺三角形要素を境界要素とする場合を見てみよう。原則的にはすべての要素が直辺三角形の場合と同じであり，内部要素での積分も全然変わらない，しかし，表面要素が Superparametric element であるため，その積分を陽に表わすことができない。そこで，Gauss 数値積分で求めることにした。表面流についても同じである。ただ数値積分するとき $\cos \theta$ が表面曲線座標の関数であることに注意する必要がある。このようにすれば最終的に式(26)と全く同じ形の非線形連立方程式にまとめることができる。

境界条件が導入されたあとの式(26)をクラウト法で解く。対象としている問題が非線形であるため，解の精度をよくする目的で，あらかじめ設定したある許容誤差に達するまで繰り返し計算を行うことが必要である。各過程においては

$$h^{(m)} = \epsilon h^{(m-1)} + (1-\epsilon) h^{(0)}, \quad 0 < \epsilon \leq 1 \dots\dots\dots(27)$$

ただし， m は繰り返し計算回数を表わし， $h^{(0)}$ は最初に与えられた基準値 \bar{h} である。また，基準値 \bar{h} は逐次に更新されていく。

3.3 地表面を直線要素で近似する可能性

表面形が異なる三つの領域と三種類の計算条件とを組み合わせ，九つのケースについてそれぞれ二通りの計算を行い，得られた結果を比較することによって，直線要素による地表面近似の可能性を検討した。Fig. 3 にその中の一ケースの圧力水頭と流速ベクトルを示している。図からわかるように二通りの計算の結果にはほとんど差異が見られない。また地表面を曲辺三角形要素で正確に表わす場合と，直線三角形要素で近似する場合の圧力水頭および流量の差の最大値を縦軸に，表面曲線の最大曲率を横軸にとって比較したものは Fig. 4 である。流量にしても圧力水頭にしても，その差は地表面最大曲率の増大につれて大きくなる

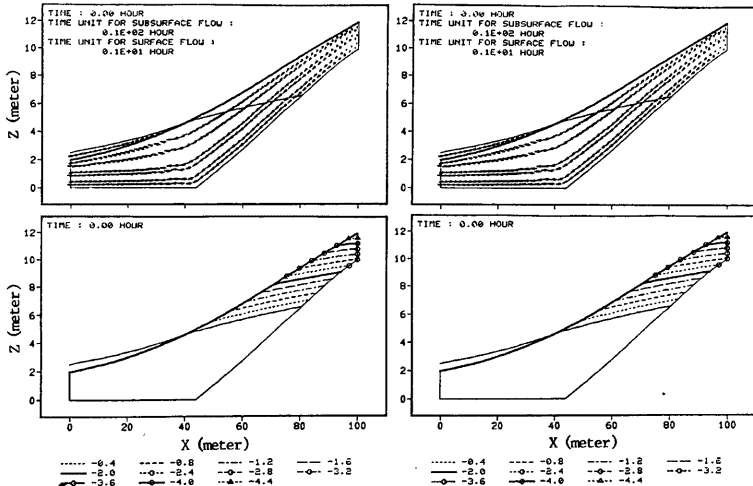


Fig. 3 Velocity vector and pressure head. At left: ordinary triangle element. At right: superparametric element.

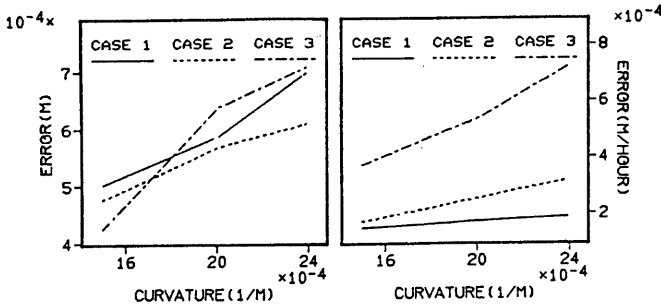


Fig. 4 The maximal pressure head error and flow quantity error.

ものの、いずれのケースでもかなり小さい値にとどまっている。降雨強度を 8 mm/hr ととって計算したため流量の最大相対誤差が 9% 以下になる。とくに注意すべきことは、圧力水頭の最大誤差が設定された許容誤差 10^{-3} m を下回っていることである。つまり、いまの条件のもとで直線要素で地表面を近似することによる誤差は有限要素法の近似誤差より大きくはない。このような結果より、次のことが言える：地表面が滑らかで、勾配には急激な変化がない限り（例えば、本研究で用いた C^1 級連続性を持つ二次曲線で近似的に表わせる地表面）、直線要素で地表面を近似することによる誤差は数値解析そのものによる誤差より小さくてほとんど無視できる。以下、全地中領域に直線三角形要素を用いて、非定常流問題を定式化する。

3.4 非定常流問題の定式化

定常流問題と比べて、非定常流問題はその基礎方程式に時間微分項が現れるだけのちがいである。よって、定常流問題を定式化して得られた連立方程式(26)に時間微分項を付加えればよい。まず、Galerkin 基準を地中流基礎方程式(1)に適用すると、次式が得られる。

$$\iint_D \left[\sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ K_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{K=1}^N h_K \phi_K + x_2 \right) \right\} \right] \phi_n dx_1 dx_2 - \iint_D \left(C + \frac{\omega}{\varphi} S_s \right) \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_{K=1}^N h_K \phi_K \right) \phi_n dx_1 dx_2 = 0 \quad n=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(28)$$

上式左辺第一項は式(18)の左辺と全く同じであり、3.2ですすでに求められている。ここで第二項を I_3 とおき、その離散化の手順を示そう。

まず、Neuman (1973)³⁾ によれば、非線形性に対処するための反復計算の収束性を高めるために、時間微分について、次の近似をしたほうがよい：

$$\frac{\partial h_n}{\partial t} \equiv \frac{\iint_D \left(C + \frac{\omega}{\varphi} S_s \right) \frac{\partial h}{\partial t} \phi_n dx_1 dx_2}{\iint_D \left(C + \frac{\omega}{\varphi} S_s \right) \phi_n dx_1 dx_2} \dots\dots\dots(29)$$

また、各要素内で比貯留率 S_s は一定であると仮定し、相対透水係数と同じように、比水分容量 C と含水率 ω の値も要素内の節点値の平均値を用いるものとする。すなわち

$$C^e = \sum_{i=1}^3 C_i^e \phi_i^e \dots\dots\dots(30)$$

$$\omega^e = \sum_{i=1}^3 \omega_i^e \phi_i^e$$

これらの関係を用いて、時間微分項の積分 I_3 が求められる。

$$I_3 = \sum_{K=1}^N R_{nK} \frac{\partial h_K}{\partial t} \dots\dots\dots(31)$$

ただし

$$R_{nK} = \begin{cases} 0, & n \neq K \\ -\sum_{\epsilon} \frac{A_{\epsilon}}{12} \sum_{l=1}^3 \tau(C_l^{\epsilon} + \frac{s_s^{\epsilon}}{\varphi} \omega_l^{\epsilon}), & n = K \end{cases}$$

$$\tau = \begin{cases} 2, & l = n \\ 1, & l \neq n \end{cases}$$

一方，表面流基礎方程式にも Galerkin 基準を適用すると，

$$-\int_{HB} \phi_n I \cos \theta ds = \int_{HB} \phi_n \frac{\partial h}{\partial t} \cos^2 \theta ds + \int_{HB} [u h \cos^2 \theta] \phi_n ds - \int_{HB} \phi_n R \cos \theta ds \tag{32}$$

上式右辺第二項，第三項は式(23)の右辺と全く同じであり，3.2ですべてに求められている。次に第一項を I_3^s とおき，その積分を求めよう。まず，地中流に用いられた式(29)に相当する近似を表面流にも適用する。すなわち

$$\frac{\partial h_n}{\partial t} \equiv \int_{HB} \phi_n \frac{\partial h}{\partial t} \cos^2 \theta ds / \int_{HB} \phi_n \cos^2 \theta ds \tag{33}$$

こうして I_3^s の積分が簡単に離散化できる：

$$I_3^s = \sum_{K=1}^N T_{nK} \frac{\partial h_K}{\partial t} \tag{34}$$

ただし

$$T_{nK} = \begin{cases} \sum_{\epsilon} \frac{1}{2} I_n \cos^2 \theta & , n = K \text{ and } K \in HB \\ 0 & , \text{ otherwise} \end{cases}$$

式(22)と式(32)とをたせば浸透強度 I を含む項が消え，次式が得られる。

$$I_2 = \sum_{K=1}^N T_{nK} \frac{\partial h_K}{\partial t} + \sum_{K=1}^N E_{nK} h_K + F_n^0 - R_n \tag{35}$$

I_1, I_2 および I_3 を式(28)に代入して，次の連立方程式が求められる。

$$\sum_{K=1}^N (A_{nK} + E_{nK}) h_K + \sum_{K=1}^N (R_{nK} + T_{nK}) \frac{\partial h_K}{\partial t} = R_n - F_n^0 - F_n' \quad n=1, 2, \dots, N \tag{36}$$

これで非定常流問題を有限要素法で離散化したわけである。次に時間微分項の扱い方を示す。その説明を簡単にするため，式(36)を次のように書き直す：

$$[D]h + [G] \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} \right\} = \{F\} \tag{37}$$

ただし，

$$D_{nK} = A_{nK} + E_{nK}, \quad G_{nK} = T_{nK} + R_{nK}, \quad F_n = R_n - F_n^0 - F_n'$$

時間微分の扱いについてさまざまな方法が提案されているが，本研究では，最もよく使われている中央差分スキームを使用する。漸化式は

$$[D^{T+1/2}] \left\{ \frac{h^{T+1} + h^T}{2} \right\} + [G^{T+1/2}] \left\{ \frac{h^{T+1} - h^T}{\Delta t} \right\} = \{F^{T+1/2}\} \tag{38}$$

ここに T はある時間段階を表わし， $t = t^T, \Delta t^T = t^{T+1} - t^T$ である。各時間区間において：

$$h^{T+1/2} = h^T + \frac{\Delta t^T}{2} (h^T - h^{T-1}) \tag{39}$$

で圧力水頭の第一次近似を与える。式(38)に境界条件を導入し，クラウト法で解いて h^{T+1} を求める。問題の非線形法に対処するため，反復計算するが，その過程において式(27)で圧力水頭の値を更新する。

4. 流出に影響を及ぼす要因と流出過程

前節まで、表面流と地中流を統合した斜面流出モデルとそれを解く手順を示した。本節では、この数値シミュレーションモデルを用いて、試みた各種の計算結果から、山腹斜面における降雨流出現象およびその特性を検討する。入力としての透水係数、粗度係数、水分保持特性曲線、比貯留係数、傾域および降雨パターン、初期条件などのパラメーターと条件を変動させて、いろいろなケースをシミュレートした。その結果として、表面流出 (Fig. 1 の AB からの流出)、地中流出 (Fig. 1 の BC からの流出) 地表および地中の水面の位置、圧力水頭、表面流および地中流の流速、含水量分布、浸出点の位置および地表面における浸透量などを得た。これらのデータをもとにして、まず降雨流出に影響を及ぼす諸要因について考察した⁴⁾。その一例として、ここで飽和透水係数についてその考察結果を紹介する。

飽和透水係数は、山腹斜面流出にかなりのウェイトを占める地中流を支配するパラメーターとして、流出に大きな影響を持つ。まず定常流の場合を見てみよう。Fig. 5 は 8 mm/hr の降雨が透水係数と粗度係数の変化により、表面流出と地中流出とにどのような割合で分配されて流出するのかを示した図である。入力条件に用いられた水分特性曲線は Fig. 6 の Type B である。Fig. 5 から読みとれることを次のように要約できる。

表面流出と地中流出への配分は透水係数と粗度係数の組み合わせによって決まる。一般的に透水係数の増加に応じて地中流出が増加する。しかし、粗度係数が小さくなるにつれて、地中流出の増加傾向が小さくなり、降雨が表面から流出するようになる。

これは次のように考えられる。粗度係数が小さいほど表面の流れに対する抵抗が小さいため、降雨は地中流として流出するより復帰流として地表に浸出して流出しているようである。粗度係数が大きくなるにつれ、復帰流が抑制されて表面流出が減少する。また一方、透水係数が増加するにつれて、地中流が流れやすくなり、表面流の減少する部分だけ地中流が増加する。要するに、「流れやすい方をより多く流れる。」

Fig. 7 には、非定常流の場合のいろいろなケースのハイドログラフを示している。左と右の両列の透水係数がそれぞれ 1 mm/hr と 100 m/hr である。また上から下へ粗度係数が 0.01, 0.1 および 0.1 m⁻¹ hr と

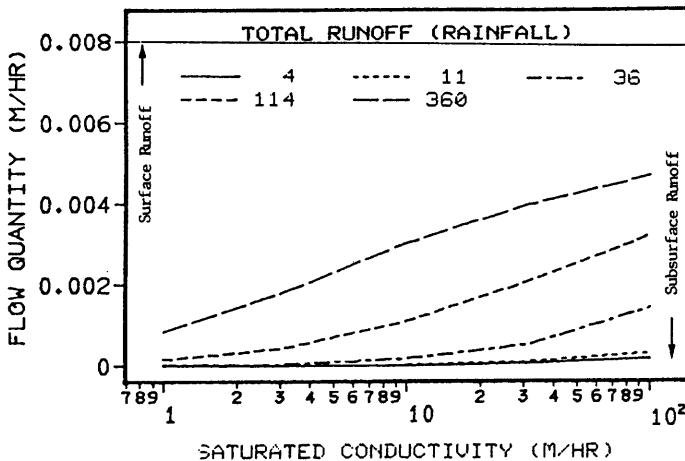


Fig. 5 Surface runoff and subsurface runoff change with saturated conductivity and roughness for steady flow.

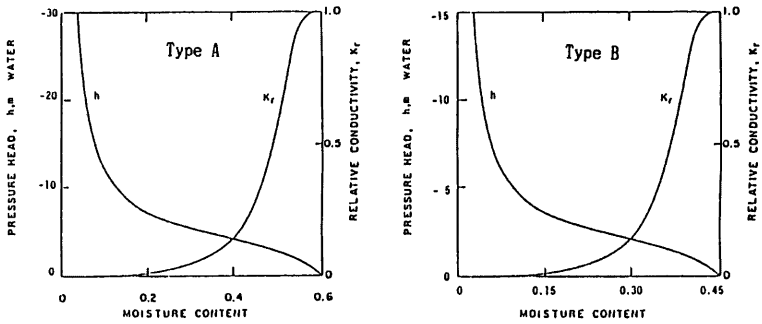


Fig. 6 Functional relationships between relative conductivity, moisture content and pressure head.

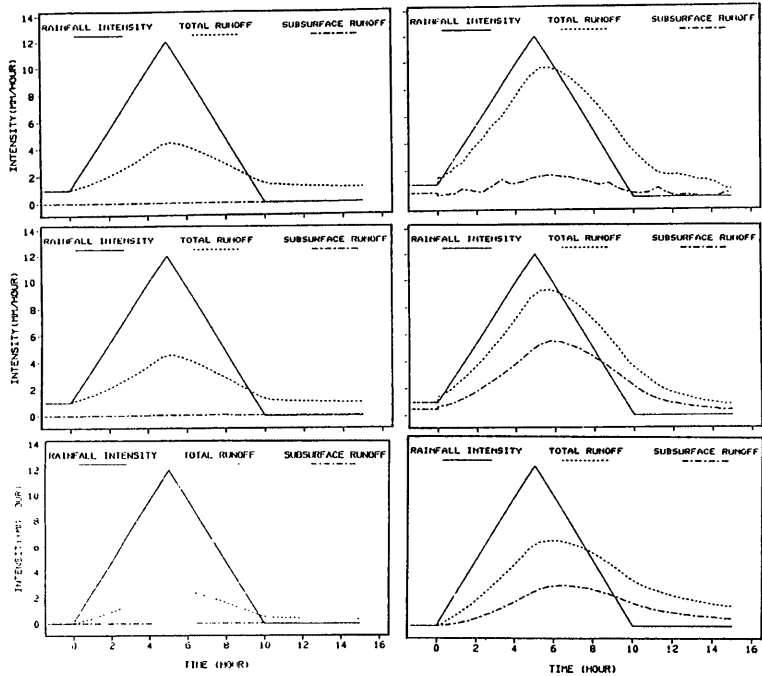


Fig. 7 The changing hydrographs for unsteady flow.

変わっていく。水分特性曲線は，上の四ケースは Fig. 6 の Type A，下の二ケースは Type B である。初期条件はみんな定常状態である。流出量の変化を見ると，粗度係数の大小・初期降雨の有無にかかわらず，透水係数が 1 m/hr の場合，雨水の地中からの流出がほとんど認められない。しかし，透水係数が100倍になった場合には，地中流流出が現れ，その増加に伴い，総流出量も透水係数が 1 m/hr のそれを上回って]

いる。地表流出量と地中流出量とを比較すると、透水係数の増加に対して、地中流出量が一樣に増加しているが、表面流出量を見ると、上の二ケースでは大幅に増加しているものの、下の四ケースはほぼ横ばい状態である。これは粗度係数が大きくて、復帰流が抑制されるからであると考えられる。また、透水係数が小さい場合には、地中流出が少なく、表面流が総流出に占める割合が大きいため、降雨のピークから総流出のピーク流量の遅れ時間が短い。透水係数が大きくなるに従い、地中流出が総流出に占める割合が高くなり、総流出のピーク流量の遅れ時間も長くなる。

石原・高棹 (1962)⁴⁾ は山降斜面の表層土壌構造について、A層（活性層）の存在を指摘している。このA層の中では、木の根や虫の穴などによって水みちができ、非等方性を示す。この土壌構造による非等方性が流出に与える影響を考察するため、飽和透水係数の異方性でシミュレートしてみた。Fig. 8 には三ケースのハイドログラフを示しているが、上から下へ飽和透水係数が $K_x = K_z = 50 \text{ m/hr}$, $K_x = 50 \text{ m/hr} \cdot K_z = 1 \text{ m/hr}$ および $K_x = 1 \text{ m/hr} \cdot K_z = 50 \text{ m/hr}$ と変わっていく。Fig. 8 からわかるように、上から下へと表面流出と地中流出ともに減少していく。また、15時間後の流出率も順に0.77, 0.58および0.24と減っていく。異方性が降雨流出に与える影響が極めて大きいことがわかる。また、圧力水頭と流速の分布から、鉛直より水平方向の透水係数が小さい場合には降雨の浸透が速いが、側方浸透流がほとんどなく、

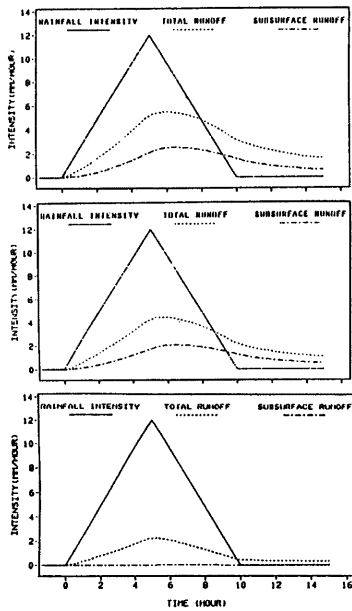


Fig. 8 The hydrographs of hillslope with anisotropic soil.

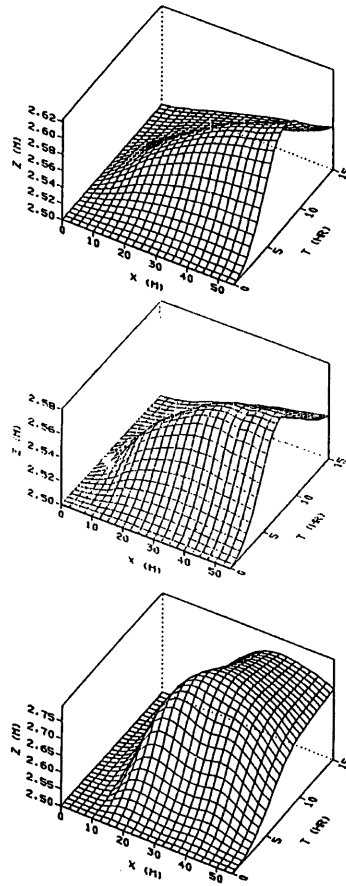


Fig. 9 The changing watertable of hillslope with anisotropic soil.

水分が領域の下方に滞留していることが推定される。これは地中水面の大きな上昇 (Fig. 9) によっても裏付けられる。

山腹斜面土壌構造の特徴として異方性のほかに、もう一つが指摘されている。それは成層性である。本研究では、透水係数の異なる二層の土壌を持つ斜面における流出現象を考える、比較には二つのケースをシミュレートした。Fig. 10 にそのハイドログラフを示している。上のケースは上層の透水係数 (50 m/hr) が下層の50倍であり、下のケースはその逆である。総流出量では、上層の透水係数が大きいほうが小さい場合をやや上回っている、表面流出と地中流出の配分を見ると、上層の透水係数が大きい場合表面流出が多く、下層の透水係数が大きい場合地中流出が多い、ということがほぼ全計算時間において言えるようである。また下層の透水係数が大きい場合、流量のピークが判然としておらず、流出量

も長期間にわたって高流量を示している。これは流速分布 Fig. 11 に見られるように難透水層である上層を透過したのちに下層からおもに流出しているからであろう。また地中流が復帰流として表面に浸出することも妨げられるために、地中流出は長時間にわたって安定して続くと考えられる。

以上、飽和透水係数が流出にどのように影響するかについての数値実験結果を紹介したが、それを要約すれば次のようである。透水係数が大きくなるにつれて、降雨流出は全体的に速くなるが、粗度係数が大きい場合、降雨が復帰流として表面に浸出するよりも、地中流として流出するため、表面流が抑制される。また、斜面構造と土壌の異方性も流出に大きく、かつ複雑な影響を持つ。透水係数のほかにさまざまなパラメータ

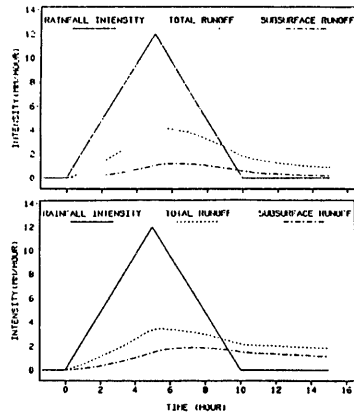


Fig. 10 The hydrographs of two-layer hillslope.

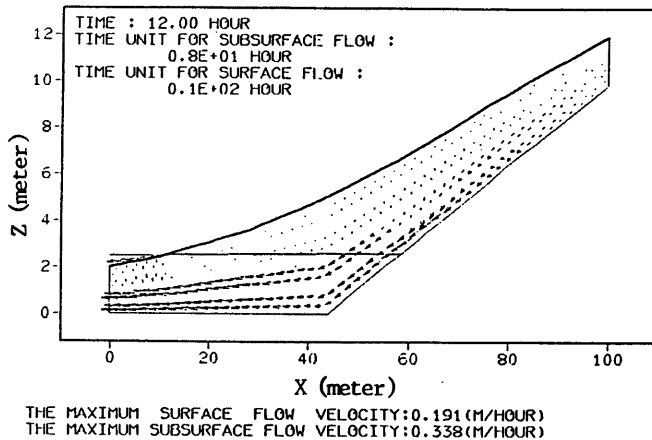


Fig. 11 The velocity distribution of two-layer hillslope. The conductivity of lower layer (50mm/hr) is 50 times as great as the one of upper layer.

一または条件(例えば、粗度係数、水分保持性曲線、降雨パターン、先行湿潤状態)についても、流出に与える影響を、数値シミュレーションをして検討した。これらの結果から、本統合モデルの合理性と有効性が実証された。さらに、不飽和帯の含水量の変化、表面流と地中流の流速分布、水面形の変化、浸出点の移動および表面流と地中流との相互干渉などを分析することは、浸透のメカニズムと斜面流出の過程を解明するには大きく役立つものと期待できる。以下、表面流と地中流との相互干渉について簡単に考えてみよう。

表面流と地中流との相互干渉ははやくから認識されているが、これについての研究がまだ不十分であるように思われる。この相互干渉をシミュレートするために、従来より多くの手法が提案されているが、それらを大きくわけて二通りあると思われる。まず、外部関数で浸透を表わして表面流と地中流の解析を別々に行なうか、あるいは一方からの結果を他方の入力条件とする方法である。このような手法では地表面における表面流と地中流との水理学的なかわりについての考慮が不十分である。また表面流と地中流との相互干渉を単に浸透強度によって表現している点にも問題がある。一方高柳らは、表面流と中間流は連動する流れとして飽和表面流の発生機構を明らかにした^{4,5,6)}。本研究では、表面流、不飽和地中流、飽和地中流を連立系として取り扱うことにより、斜面に沿う復帰流の生成のようすを定量的に観察することができるようになった。

Fig. 12には三角形降雨の場合、表面流出および総流出の中に復帰流が占める割合の時間的変化を示している。上のケースは1mm/hrの先行降雨がある場合、下のケースは初期条件は静止状態の場合である。Fig. 12から復帰流は表面流と地中流をつなぐものとして実に複雑に変化する様子がよくわかる。また、Fig. 13に定常流の場合、斜面に沿う復帰流強度の分布の例をいくつか示している。全体の特徴として、粗度係数が小さいとき、表面流の水面形の変化が急激であり、復帰流は浸出点の近くに集中する、粗度係数が大きくなるにつれて、表面流の水面形が滑らかになり、復帰流の分布も極端な集中がなくなり、分散するようになる。しかし流量には大きな変化がないようである。一方、飽和透水係数も復帰流強度の分布に強い影響を及ぼす。透水係数が大きければ大きいほど、浸出点が低くなり、その近くで復帰流の強度

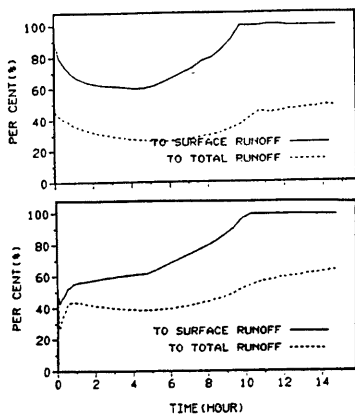


Fig. 12 The changing return flow in comparison with surface runoff and total runoff.

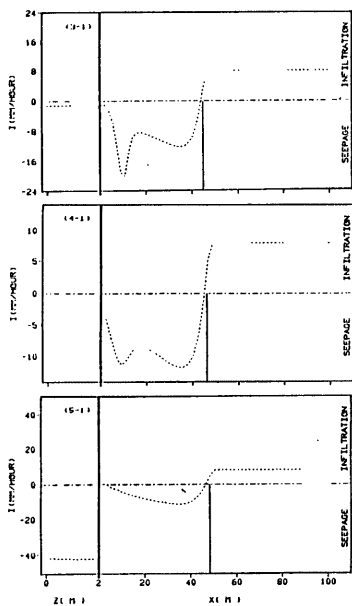


Fig. 13 The distribution of return flow for steady flow.

が大きくなる。しかし、透水係数が大きくなれば、地中流に対する抵抗が小さくなり、地中流出が増える。その分だけ復帰流が減少しなければならない。

Fig. 14 には非定常流の場合復帰流分布の時間的変化の一例を示している。これは定常流の場合と同様に解釈できるが、粗度係数と透水係数ともにかなり大きい場合、降雨がやんでから浸出点の近くで、地中流への浸透がおきることがある。これは表面の抵抗が大きくなり、表面流は地中流より後退が遅れているためであると考えられる。

以上、表面流と地中流との相互干渉を考察するいくつかの例を紹介したが、これを流速の分布・不飽和帯含水量の変化、地中水面および表面流水面の変化と浸出点の移動などをあわせて総合的に検討すれば、斜面流出過程の一つ模式図が浮かびあがってくる。

石原・高棹のいう活性層が存在する斜面流域では、降雨強度は一般的に浸透能を超過せず、Horton 表面流が発生することはほとんどない。降雨の初期には、降雨が鉛直に浸透するが、降雨が続くにつれて、しだいに基底部にある不透水層あるいは難透水層の上に水が集中し、それはやがて斜面方向にそって下流へ流れていく。この側方浸透流は降雨函養によりますます発達する。そのため、鉛直浸透流は上流域および地表面の近くに限られるようになる。またこの側方浸透流は地中水位を上昇させ、その結果、浸出点も上昇し、表面流域が広がる。普通地中の多孔質媒体と比べて、地表面のほうが流れに対する抵抗が小さいため、浸透流が復帰流として地表面に浸出する。この復帰流と飽和水面への直接降雨とともに下流へと流出して表面流出となり、また地表に浸出しない側方浸透流は地中流となる。

ある斜面における総流出の中に表面流出と地中流出がそれぞれ占める割合およびハイドログラフの漸増・逓減の特徴は粗度係数と透水係数の組み合わせによってほぼ決定される。また、斜面形、斜面構造、土壌特性、先行湿潤状態などの要因も降雨流出に対して無視できない影響を持つ。

5. 結 論

本研究では、表面流と地中流とを統合的に取り扱うことを目的として、飽和・不飽和流モデルと Kinematic Wave 理論に基づく表面流モデルとを結合して、斜面降雨流出を解析する一つの統合モデルを構成し、Galerkin 有限要素法を用いて数学モデルの解法を展開した。全体を連立系として取り扱うことによって、表面流とのかかわりあいをごとらかに偏ることなく表現し、地表面を通過する流量の変化の様子を観察できるようになった。

普通の三角形要素と Superparametric element としての曲線要素を用いて比較してみた結果から、直線要素で地表面を近似する可能性が実証され、数値計算が大きく簡素化された。これで本モデルの実用性が一段と高まった。

以上の統合モデルは、表面流と地中流を連立系として扱うことと、不飽和流を考慮することにより、斜面流出過程をより客観的にとらえることができるようになった。ここでは、斜面流出機構を分析する一例を示したが、場の条件などが自由に変えられるので、流出過程をもっと詳しく分析することができる。このような分析は、さらに浸透のメカニズムおよび斜面流出機構のより深い理解につながるかと期待できる。

この統合モデルを実流域の流出解析に適用するには、計算量を一層減らし、領域に関するデータ不足などの問題を克服しなければならないが、今後の課題としてその研究が期待される。

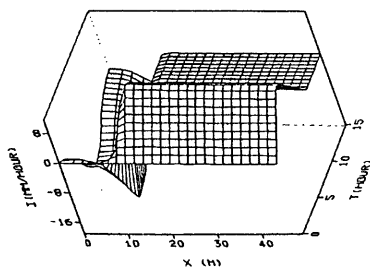


Fig. 14 The changing distribution of return flow for unsteady flow.

Appendix

内挿関数

地表面曲線 (C^1 級連続性を持つ) の方程式が次のように与えられるとする:

$$z_i(x) = z_i + \alpha_i(x-x_i) + \beta_i(x-x_i)^2, \quad x_i \geq x \geq x_{i+1}, \quad i=1, 2, n-1 \dots (40)$$

α_i および β_i は定常であり, 次の条件が満足される。

$$\begin{aligned} z_i(x_{i+1}) &= z_{i+1}(x_{i+1}) \\ z_i'(x_{i+1}) &= z_{i+1}'(x_{i+1}) \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, n-2 \dots (41)$$

内挿関数を簡単に求めるために, まず Fig. 15 に示したように $X-Z$ 座標系を自然座標系 $\xi-\eta$ に変換する。その変換関係は次式で与えられる。

$$\xi = P\bar{Q}/L, \quad \eta = QS/OS \dots (42)$$

ただし, L は曲辺の長さである。

こうして自然座標系においては曲辺三角形要素は直角三角形となる。したがって直辺三角形要素の場合と同じように場の変数 h を多項式で近似できる。

$$h^e(\xi, \eta) = \alpha_1^e + \alpha_2^e \xi + \alpha_3^e \eta \dots (43)$$

定数 α_1^e, α_2^e および α_3^e は式(43)を各節点で計算することにより, 求めることができる。それを上式に代入して, さらに整理すれば:

$$h^e(\xi, \eta) = \sum_{k=1}^3 h_k^e \phi_k^e \dots (44)$$

ϕ_k^e は内挿関数であり, 次のように定義されている:

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^e &= 1 - \xi - \eta & 0 \leq \xi \leq 1 - \eta \\ \phi_2^e &= \xi & 0 \leq \eta \leq 1 \\ \phi_3^e &= \eta \end{aligned} \right\} \dots (45)$$

明らかに式(44)の内挿関数を使えば直辺三角形要素との境界で適合条件が満足される。

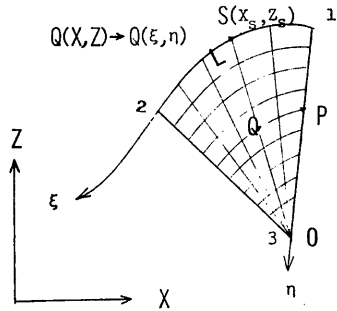
最後に座標変換関係をまとめて記しておく。

$$\left. \begin{aligned} L\xi &= s_i(x_s)(1-\eta) \\ x &= (1-\eta)x_s + \eta x_3 \\ z &= (1-\eta)z_s + \eta z_3 \\ z_s &= z_1 + \alpha_i(x_s - x_1) + \beta_i(x_s - x_1)^2 \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

$$\text{Jacobian Matrix } J = \frac{\partial(x, z)}{\partial(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{vmatrix} \dots (47)$$

ただし:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= L/s_i'(x_s) \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} &= Lr_i(x_s)/s_i'(x_s) \end{aligned} \right\}$$



(a)

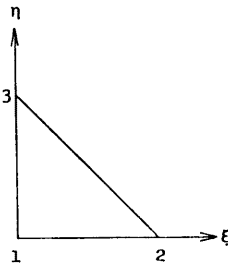


Fig. 15 Change from rectilinear coordinate system to natural coordinate system.

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \eta} &= x_3 - x_s + s_i(x_s)/s_i'(x_s) \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} &= z_3 - z_s + r_i(x_s)s_i(x_s)/s_i'(x_s) \\ s_i(x) &= \int_{x_1}^x ds, \quad x_2 \leq x \leq x_1 \\ r_i(x_s) &= dz_s/dx_s = \alpha_i + 2\beta_i(x_s - x_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

また、挿入関数に関する微分は次のように求められる：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial x} &= \frac{1}{J} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \end{array} \right| \\ \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial z} &= \frac{1}{J} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial \phi_{k^e}}{\partial \eta} \end{array} \right| \end{aligned} \right\} k=1, 2, 3 \dots\dots\dots(49)$$

参 考 文 献

- 1) 末石富太郎(1955)：特性曲線法による出水解析について——雨水の流出現象に関する水理学的研究(第2報)——, 土木学会論文集, 第29号, pp. 74-87.
- 2) 石原藤次郎・高棹琢馬(1959)：単位図法とその適用に関する基礎的研究, 土木学会論文集, 第60号別刷.
- 3) 高棹琢馬・岸本卓男(1961)：雨水流出の実験的研究, 京大防災年報, 第4号, pp. 132-154.
- 4) 石原藤次郎・高棹琢馬(1962)：中間流出現象とそれが流出過程におよぼす影響について, 土木学会論文集, 第79号, pp. 15-21.
- 5) 石原藤次郎・石原安雄・高棹琢馬・頼 千元(1962)：由良川の出水特性に関する研究, 京大防災研究所年報, 第5号A, pp. 147-173.
- 6) 石原藤次郎・高棹琢馬(1964)：洪水流出過程の変換系について, 京大防災研究所年報, 第7号, pp. 265-279.
- 7) 高棹琢馬・池淵周一・椎葉充晴(1977)：河道網構造を考慮した河川流域の出水解析法に関する研究, 京大防災年報, 第20号B-2, pp. 185-199.
- 8) 高棹琢馬・椎葉充晴(1981)：Kinematic wave 法への集水効果の導入, 京大防災年報, 第24号B-2, pp. 159-170.
- 9) Sloan, P. G. and I. D. Moore (1984)： Modeling Subsurface Stormflow on Steeply Sloping Forested Watersheds, WRR, Vol. 20, No. 12, pp. 1815-1822.
- 10) Freeze, R. A. (1971)： Three-dimensional, Transient, Saturated-Unsaturated Flow in a Groundwater Basin, WRR, Vol. 7, No. 2, pp. 347-366.
- 11) Neuman, S. P. (1973)： Saturated-Unsaturated Seepage by Finite Elements, Proc. ASCE, Vol. 99, HY 12, pp. 2233-2250.
- 12) 赤井浩一・大西有三・西垣 誠(1977)：有限要素法による飽和-不飽和浸透流の解析, 土木学会論文報告集, No. 264, pp. 87-96.
- 13) Smith, R. E. and D. A. Woolhiser (1971)： Mathematical simulation of infiltrating watersheds, Colorado State University Hydrology Paper, No. 47.
- 14) 張 昇平(1985)：有限要素法による山腹斜面の流出解析, 京都大学修士論文.