

## 琵琶湖流域水文データの基礎的分析

高棹 琢馬・宝 馨・清水 章

### A BASIC STUDY ON FREQUENCY ANALYSIS OF HYDROLOGIC DATA IN THE LAKE BIWA BASIN

By *Takuma TAKASAO, Kaoru TAKARA and Akira SHIMIZU*

#### Synopsis

Frequency of hydrologic data in the Lake Biwa basin is analyzed with a graphical fitting procedure which the authors improve (make more precise and more objective) using a computer system with a graphic display. The accuracy of the improved procedure is discussed in comparison with the solutions given by the maximum likelihood estimation method. Five probability distributions with two parameters are fitted to the data and the most suitable distribution for the variate concerned is selected by SLSC (Standard Least-Squares Criterion) which is proposed in this study. Systematic analyses reveal the regionality and seasonality of the variates.

#### 1. 緒 言

現在、琵琶湖総合開発事業が進行中であり、それにともなって瀬田川洗堰の操作方法を見直すなどの作業が行われつつある。琵琶湖流域における水文学の特性把握およびその予測は近畿地方の水管理において重要な課題の一つである。

筆者らは、琵琶湖流域の水文学データを収集するとともに、その統計解析により各種水文学の特性の把握、洪水・濁水の統計的予測といった点について基礎的な検討を行なっている<sup>1)</sup>。本研究もそれらの一貫として位置づけられるものであって、その目的とするところは、こうした検討により琵琶湖の水管理に有用な情報を導出することにある。

さて、対象とする水文学量がどのような確率分布にしたがって生起するかという、いわゆる頻度分析が水工計画あるいは水管理の基本となる。水文学がしたがう確率分布形およびそのあてはめの方法については、特に1940年代以後数々の研究がなされてきた。本研究では、使用頻度の高い2母数の1変数確率分布のあてはめについて考える。確率分布のあてはめの方法は図式推定法と解析的方法に分けられるが、この場合、確率紙を利用した図式推定法が簡便法としてよく用いられる。この方法は従来手作業的に取り扱われることが多く、プロットの正確さ、fair curve (平分線) の線引きの客観性、平分線の直線性の評価などにおいて不十分な点があった。こうした難点

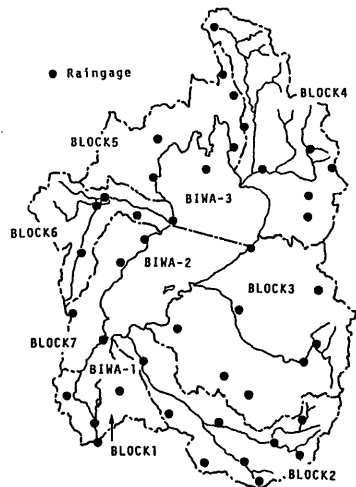


Fig. 1 The Lake Biwa basin (3,848 km<sup>2</sup> including the lake area 674 km<sup>2</sup>).

を排除するために、ここでは、コンピュータを援用してグラフィック・ディスプレイ画面上に確率紙を表現し、プロットの自動化・精密化を図るとともに最小二乗法により平分線を客観的に引けるようにした。さらに、直線性すなわち分布の適合性の評価規準を新たに提案した。これにより、種々のデータに対する種々の確率分布の適合性を一挙に解析できることとなった。このように精密化・客観化された図式推定法は、後で示すように、最尤推定法によって求められる解のよい近似を与える。

上記のような図式推定法を用いて、本研究ではさらに琵琶湖流域の降水量および琵琶湖への流入量について種々の確率分布の適合性を系統的に調べ、季節性・地域性による分布形の違いを明らかにしようとする。原データは、琵琶湖流域における43地点の降水観測所 (Fig. 1) の日単位の降水量、瀬田川洗堰流量、京都疏水 (第1・第2) および宇治発電所への取水量、鳥居川量水標および彦根水位観測所の水位、湖面蒸発量などである。これらより流域平均降水量 (算術平均) と琵琶湖流入量を算定し、頻度分析を行った。

## 2. 水文学の頻度分析

### 2.1 超過・非超過確率とリターンピリオド

ある水文学がどのような頻度で生起するかといった問題は、水工施設の設計や治水・利水の計画を行う上でその基礎となるものである。水文学がある確率分布に従う確率変量であるとすれば、その生起頻度は以下のような超過確率・非超過確率といった概念で表すことができる。

変量  $x$  の確率密度関数を  $f(x)$ 、累積分布関数を  $F(x)$  とすると、

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \dots\dots\dots(1)$$

であり、 $x$  が指定されたとき、 $F(x)$  を  $x$  の非超過確率、 $1-F(x)$  を超過確率という。変数が洪水流量のように大きいほど危険な場合は、超過確率が危険度の指標とされ、濁水流量のように小さいほど問題な場合は非超過確率がその指標とされる。

水文学のある値  $x_0$  が与えられたとき、

$$T = \frac{1}{n(1-F(x_0))} \dots\dots\dots(2)$$

は、水文学  $x=x_0$  に対応するリターンピリオドと呼ばれる。ここに、 $n$  は  $F(x)$  の推定に用いた水文学  $x$  の年間平均生起度数で  $x_0$  を「 $T$ 年確率水文学」と呼ぶ。(2)式は、変数が大きいときを問題とする場合のもので、小さいときが問題の場合は  $1-F(x_0)$  の代わりに  $F(x_0)$  としなければならない。

### 2.2 確率紙による確率分布モデルのあてはめ

問題とする水文学が従うであろうと推定される分布関数とデータの適合性検証、あるいはリターンピリオドの簡略推定のために、確率紙がしばしば用いられる。確率紙は、 $x$  と  $F(x)$  が直線関係になるように目盛られており、データを確率紙にプロットしたときに、それらのデータが直線上にほぼ並んでおれば、その確率紙に対応する確率分布を分布モデルとして採用しようと判定するのである。

確率紙による確率分布モデルのあてはめの手順は次のようである<sup>3)</sup>。

- [1] データの標本数が  $N$  のとき、このデータを値が小さい順に並べ替え、これに改めて番号を付けて、 $x_1, x_2, \dots, x_N$  とする。このような並べ替えを行ったものを順序統計量と呼ぶ。
- [2] 順序統計量を順次確率紙上にプロットする。その際、 $i$  番目の統計量  $x_i$  については  $x_i$  の値を横軸に、 $F(x_i)$  の値を縦軸にとる。
- [3] プロットされたデータに適合するような直線 (平分線と呼ばれる) を描く。この直線の位置・傾きから分布のパラメタを推定する。また、この直線によりリターンピリオドの推定を行う。これら一連の手順において次のようないくつかの問題が存在する。

まず、[2]の確率紙へのプロットについては、手作業による確率紙へのプロットの煩雑さ・不正確さの問題とプロット・ボジションすなわち  $F(x_i)$  の値をどうとるかという問題がある。プロット・ボ

ジションに関してはこれまで多くの研究者により議論されてきており、その主なものは次の形式で与えられる。

$$F(x_i) = \frac{i - \alpha}{N + 1 - 2\alpha} \dots\dots\dots(3)$$

ここに、 $\alpha$  は  $0 \leq \alpha < 1$  なる定数で、その値により以下の諸公式として知られている。

- |              |    |                  |
|--------------|----|------------------|
| ① Weibull    | 公式 | $\alpha = 0$     |
| ② Hazen      | 公式 | $\alpha = 0.5$   |
| ③ Gringorten | 公式 | $\alpha = 0.44$  |
| ④ Blom       | 公式 | $\alpha = 0.375$ |
| ⑤ Cunnane    | 公式 | $\alpha = 0.4$   |
| ⑥ Adamowski  | 公式 | $\alpha = 0.25$  |

ある特定の分布に対して適切な公式が存在する。たとえば、一様分布には①、Gumbel 分布や指数分布には③、正規分布には④がそれぞれ偏倚の小さい公式であるとされている (Cunnane<sup>4)</sup> の検討、水理公式集<sup>5)</sup>)。

ところが、対象とする水文学量の分布が事前に判っていない場合には分布に依存しない公式 (distribution-free formula) のほうがよいわけで、そのような公式としてこれら多数提案されているもののうちどれを用いばよいかということが問題となる。従来からよく用いられるのが①と②であるが、①は近年批判にさらされている (たとえば、文献4)、⑥など)。Cunnane<sup>4)</sup> はそれを改善する意味で⑥を提案した。Adamowski<sup>7)</sup> は、(3)式で与えられるプロットイング・ポジションが0から1の間に一様に分布するので、プロットイング・ポジションの平均値と分散が一様分布のそれらに一致すべきだとして⑥を導いた。

次に、[3]の手順においては、平分線の線引きの方法が問題である。平分線を目視 (eye-fit) によって引く場合には、主観が入り不正確なものとなる。特に、計画上重要な両端部で大きなズレが生じる。

本研究では、グラフィック・ディスプレイ画面上に確率紙を実現し、それらの煩雑さ・不正確さを回避するとともに、最小二乗法により平分線の線引きの客観化を図る。

### 2.3 平分線の線引の客観化

確率紙は、横軸に変数  $x$ 、縦軸に  $F(x)$  を目盛ってある (注：これは日本で用いられている確率紙の場合であり、海外では横軸と縦軸が反対になっている)。  $x$  を規格化した変数 (標準変数, reduced variate) を  $s$ 、変数  $x$  の値を何らかの形に変換したものを  $z$  と記すと、

$$s = g(x) \dots\dots\dots(4)$$

$$z = h(x) \dots\dots\dots(5)$$

ここに、 $g, h$  は  $x$  の単調増加 (あるいは減少) 関数。

確率紙上で仮の横軸に  $z$ 、仮の縦軸に  $s$  をとると、 $z$  軸、 $s$  軸は普通目盛りとなり、その確率紙に対応する確率分布は直線

$$s = a + bz \dots\dots\dots(6)$$

で表されることになる。

順序統計量  $x_1, \dots, x_N$  が与えられたとき、それに対応する  $s, z$  を、 $s_i, z_i$  ( $i=1, \dots, N$ ) と記す。  $s$  の分布関数を  $F_s(s)$  と記すと、

$$F_s(s_i) = F(x_i) \dots\dots\dots(7)$$

よって、プロットイング・ポジション  $F(x_i)$  に対応する  $s_i$  は、

$$s_i = F_s^{-1}(F(x_i)) \dots\dots\dots(8)$$

によって与えられる。ただし、 $F_s^{-1}$  は  $F_s$  の逆関数。

さて、 $z-s$  平面上に、点  $(z_i, s_i)$  が  $N$  個プロットされているとき、それらにあてはめる直線は、最小二乗法によって求められる。すなわち、 $\varepsilon$  を誤差項として

$$s = a + bz + \varepsilon \dots\dots\dots(9)$$

とおき,

$$\xi^2 = \frac{1}{N} \sum \varepsilon^2 \rightarrow \min \dots\dots\dots(10)$$

として,  $a, b$  の推定値  $\hat{a}, \hat{b}$  を求める。こうして, 平分線

$$s = \hat{a} + \hat{b}x \dots\dots\dots(11)$$

が客観的に決定される(ただし, プロットィング・ポジション公式に依存する)。

**2.4 分布の適合性の評価規準**

ある水文量をいくつかの確率紙にプロットしたとき, そのうちのどの確率紙のプロットが最も直線性が高いかという問題, すなわち分布の適合性の評価の問題がある。この点に関しては従来かなり曖昧な取り扱いがなされてきたようである。つまり, 確率紙による頻度分析(確率評価)はあくまで簡略推定にすぎないとして, その適合・不適合を目視などの主観的判断によって行う場合がほとんどであった。

2.3のようにして決定される平分線の場合, (10)式で最小化された平均二乗誤差  $\xi_{min}^2$  がその適合度の指標となりうる。しかしながら, 分布形によって  $s$  のとりうる値の範囲が異なるので, 異なる分布形相互の適合度比較のためには,  $\xi_{min}^2$  を何らかの形で標準化してやる必要がある。そこで, 本研究では, 次式のような標準化された適合度の評価規準 *SLSC* (Standard Least-Squares Criterion for goodness of fit) を考えた。

$$SLSC = \frac{\sqrt{\xi_{min}^2}}{|s_{0.99} - s_{0.01}|} \dots\dots\dots(12)$$

ここに,  $s_{0.99}, s_{0.01}$  は, それぞれ非超過確率0.99, 0.01に対応する標準変量である。データの個数が100個程度以下であれば, プロット点は非超過確率が0.01と0.99の範囲にほとんど入るので, 確率紙上のその範囲の標準変量の縦距(12)式の分母)を標準化のために導入したのである。後で示されるように, *SLSC* は異なる分布形の適合度を比較するための客観的な評価規準として有用である。

**2.5 対象とする確率分布**

本研究では, 通常よく用いられる次の5つの確率分布形を対象とする。これらはすべて2つ母数をもつ。

1) 正規分布

確率密度関数  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$   
 累積分布関数  $F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt$   
 標準変量  $s = \frac{x-\mu}{\sigma}$

2) 対数正規分布

変換変数  $z = \log x \quad (x > 0)$   
 確率密度関数  $f(z) = \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(z-\lambda)^2}{2\zeta^2}\right\}$   
 累積分布関数  $F(z) = \frac{1}{\zeta\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z \exp\left\{-\frac{(t-\lambda)^2}{2\zeta^2}\right\} dt$   
 標準変量  $s = \frac{z-\lambda}{\zeta} = \frac{\log x - \lambda}{\zeta}$

3) 指数分布

確率密度関数  $f(x) = \rho \exp\{-\rho(x-c)\}$   
 累積分布関数  $F(x) = 1 - \exp\{-\rho(x-c)\}$   
 標準変量  $s = \rho(x-c)$

4) Gumbel 分布 (二重指数分布または最大値に関する第I種極値分布)

確率密度関数  $f(x) = \alpha \exp[-\alpha(x-u) - \exp\{-\alpha(x-u)\}] \dots\dots\dots(13)$

累積分布関数  $F(x) = \exp[-\exp\{-\alpha(x-u)\}] \dots\dots(14)$

標準変数  $s = \alpha(x-u)$

5) 対数 Gumbel 分布 (対数極値分布)

変換変数  $z = \log x \quad (x > 0)$

確率密度関数, 累積分布関数はそれぞれ(13), (14)と同じ形で  $f(z)$ ,  $F(z)$  で与えられる。

標準変数  $s = \alpha(z-u) = \alpha(\log x - u)$

これらの確率分布形に対する *SLSC* の分母  $|s_{0.99} - s_{0.01}|$  の値は,

**Table 1** のようになる。

Table 1 Values of the denominator of *SLSC* (Eq. 12).

Distribution	Value
Normal	4.66
Log-normal	4.66
Exponential	4.60
Gumbel	6.13
Log-Gumbel	6.13

Table 2 *SLSC* values for the yearly precipitation of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years).

Plot. F.	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Weibull	0.01951	0.02450	0.07528	0.04243	0.05599
Hazen	0.02240	0.02644	0.08882	0.05165	0.06516
Gringorten	0.02191	0.02629	0.08664	0.05011	0.06365
Blom	0.02144	0.02588	0.08451	0.04863	0.06219
Cunnane	0.02148	0.02569	0.08530	0.04918	0.06274
Adamowski	0.02060	0.02544	0.08096	0.04619	0.05978

Table 3 *SLSC* values for the annual maxima of m-day precipitation of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years).

Precipitation	Plot. F.	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
1-day (daily)	Weibull	0.05886	0.02294	0.02642	0.02134	0.02846
	Hazen	0.06093	0.02459	0.03673	0.02240	0.03724
	Gringorten	0.06039	0.02415	0.03489	0.02191	0.03573
	Blom	0.06020	0.02392	0.03316	0.02156	0.03428
	Cunnane	0.06054	0.02411	0.03380	0.02167	0.03482
	Adamowski	0.05946	0.02329	0.03041	0.02123	0.03195
2-day	Weibull	0.05404	0.02213	0.03254	0.01941	0.03577
	Hazen	0.05572	0.02482	0.04037	0.01829	0.04399
	Gringorten	0.05523	0.02427	0.03895	0.01820	0.04260
	Blom	0.05507	0.02383	0.03763	0.01823	0.04127
	Cunnane	0.05545	0.02405	0.03812	0.01820	0.04177
	Adamowski	0.05448	0.02298	0.03555	0.01850	0.03910
3-day	Weibull	0.04926	0.01468	0.03385	0.01548	0.03620
	Hazen	0.05189	0.01872	0.04638	0.02214	0.04589
	Gringorten	0.05123	0.01791	0.04425	0.02077	0.04426
	Blom	0.05099	0.01738	0.04221	0.01953	0.04270
	Cunnane	0.05131	0.01752	0.04296	0.01998	0.04328
	Adamowski	0.05006	0.01605	0.03889	0.01768	0.04013

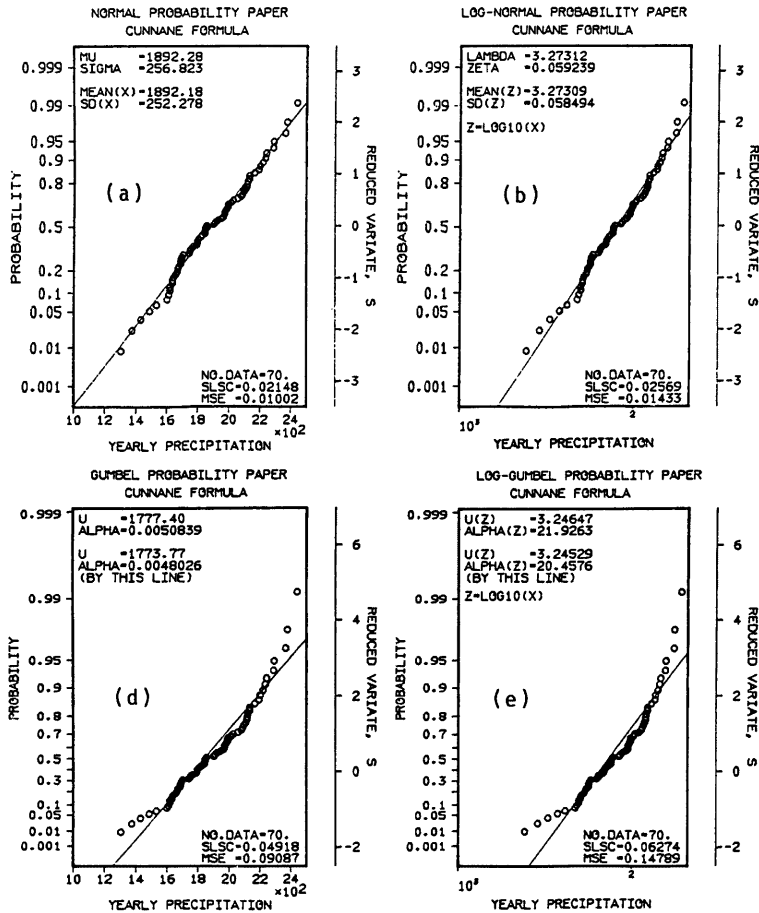


Fig. 2 Probability plotting of yearly precipitations (in mm) of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years), obtained by the Cunnane formula.  
 ((a) normal distribution ; (b) log-normal distribution ; (c) exponential distribution ;  
 (d) Gumbel distribution ; (e) log-Gumbel distribution)

### 3. 図式推定法による頻度分析の精度

#### 3.1 図式推定法による適合度の評価

1912年から1981年の70年間の年降水量(全流域平均)の系列に対して図式推定法を適用した。各分布,各プロット・ポジション公式を用いた場合の *SLSC* 値を **Table 2** に示した。**Fig. 2** にプロットを示す。実線は,最小二乗法で求めた平分線である。*SLSC* が0.02程度であれば,プロットがほぼ直線上に並んでいると言える。全流域平均の年降水量は正規分布に従うと見てよい(**Fig. 2(a)**, *SLSC* = 0.02148)。対数正

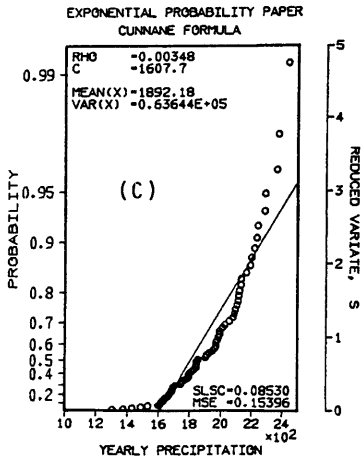


Fig. 2 (Continued)

$$1/\alpha = \sum x_i / N - \sum x_i \exp(-\alpha x_i) / \sum \exp(-\alpha x_i)$$

$$u = -(1/\alpha) \ln \{ \sum \exp(-\alpha x_i) / N \}$$

という陰形式で与えられる<sup>11)</sup>で数値的に解くことになる。ここでは対数尤度を目的関数として直接探索法(格子点法)によって  $\alpha, u$  を求める。対数 Gumbel 分布の場合も同様。

### 3.3 図式推定法と最尤法の比較

1912年から1981年の70年間の年最大  $m$  日降水量 ( $m=1, 2, 3$ ) を用いて、図式推定法の精度を最尤法との対比により検討してみよう。

**Table 3** に年最大  $m$  日降水量についての  $SLSC$  値を示した。 $m=1, 2, 3$  のどの場合も Gumbel 分布の  $SLSC$  が 0.02 程度の値をとり、理論通り極値に有効な分布形であると言える。対数正規分布もかなり適合するようである。**Table 4** には、正規分布、対数正規分布、Gumbel 分布、対数 Gumbel 分布に最尤法を適用した場合の最大対数尤度を示した。対数正規分布と Gumbel 分布は他の二つの分布よりも大きな最大対数尤度の値を示しており適合度が優れていることがわかる。 $SLSC$  による **Table 3** の結果も同様の傾向を示している。さて、詳しく見ると  $SLSC$  の値は、 $m=1, 2$  のときは Gumbel 分布が、 $m=3$  のときは対数正規分布が最小となる。一方、最大対数尤度は、 $m=1$  のときは Gumbel 分布、 $m=2, 3$  のときは対数正規分布がいちばん大きな値をとる。2日降水量の場合には、 $SLSC$  による結果と対数尤度によるそれとが異なる。しかしながら、 $SLSC$  についても対数尤度についても、対数正規分布と Gumbel 分布はともに近い値をとっており、どちらの分布の適合度も同程度とみることができる。

確率水文量の観点からももう少し検討してみよう。対数正規分布、Gumbel 分布の場合のリターンピリオド 50, 100, 200 年に相当する確率  $m$  日降水量を図式推定法および最尤法について

規分布 (**Fig. 2** (b)),  $SLSC=0.02569$ ) もかなり適合度はよいが、正規分布と比べると平分線の両端部に適合度が劣る。 $SLSC$  が 0.04 以上になると、適合度がかなり悪くなる。

### 3.2 最尤法による確率分布モデルのあてはめ

所与のデータに確率分布モデルをあてはめるのに、図式推定法ではなくいわゆる解析的な方法を用いることがある。これはデータ数が多い(数十個以上)場合に有効で、積率法と最尤法がある。さて、確率分布モデルのあてはめの良否の評価規準としてこれまでに提案されているものに Kullback-Leibler 情報量<sup>9)</sup> や赤池の情報量規準(AIC)<sup>9)</sup> があり、今の場合、対数尤度をそれらの代用とすることができる<sup>10)</sup>。ここでは最尤法を用いて異なる分布形のあてはめを行い、共通の尺度(対数尤度)でそれらの適合度を比較することにする。正規分布、対数正規分布の定数の最尤推定値は、標本あるいはその対数変換量の平均値と標準偏差という形で陽に与えられる。Gumbel 分布の場合は、

Table 4 Maximum log-likelihood for the annual maxima of m-day precipitation.

Precipitation	Normal	Log-normal	Gumbel	Log-Gumbel
1-day (daily)	-342.86	-334.59	-334.38*	-335.56
2-day	-364.45	-357.36*	-357.54	-359.05
3-day	-373.30	-366.85*	-367.03	-369.37

\* denotes the maximum value for the variate.

Table 5 Estimated values of annual maxima of m-day precipitation for particular return periods (in mm).

Precipitation	Estimation method	Log-normal			Gumbel		
		Return period (years)			Return period (years)		
		50	100	200	50	100	200
1-day (daily)	Weibull	179.2	197.6	215.7	184.6	203.9	223.0
	Hazen	173.8	190.8	207.5	178.8	196.9	215.0
	Gringorten	174.5	191.7	208.6	179.6	197.9	216.1
	Blom	175.2	192.6	209.6	180.5	198.9	217.2
	Cunnane	175.0	192.4	209.3	180.1	198.5	216.8
	Adamowski	176.7	194.5	211.9	181.9	200.6	219.3
	MLE	172.7	189.5	205.9	170.9	187.5	204.1
2-day	Weibull	245.1	271.5	297.4	248.5	274.7	300.7
	Hazen	237.5	261.9	285.8	240.5	265.1	289.6
	Gringorten	238.5	263.2	287.4	241.6	266.4	291.2
	Blom	239.5	264.4	288.8	242.8	267.8	292.7
	Cunnane	239.2	264.1	288.4	242.4	267.3	292.1
	Adamowski	241.6	267.0	292.0	244.8	270.2	295.6
	MLE	236.0	260.0	282.2	233.2	256.4	279.6
3-day	Weibull	279.4	309.5	339.3	281.9	311.5	341.0
	Hazen	270.7	298.7	326.1	273.3	301.3	329.2
	Gringorten	271.8	300.1	327.8	274.5	302.7	330.8
	Blom	272.9	301.5	329.5	275.7	304.1	332.5
	Cunnane	272.6	301.1	329.0	275.3	303.6	331.8
	Adamowski	275.3	304.5	333.1	277.9	306.8	335.5
	MLE	269.6	297.3	324.4	267.2	294.0	320.8

求めて **Table 5** に示した。まず、この表より100年確率では日降水量が 190 mm 程度、二日降水量が 260 mm 程度、三日降水量が 300mm 程度であることなどがわかる。図式推定法と最尤法との比較では前者の方が大きい値を与える。対数正規分布と Gumbel 分布が同程度の適合度評価を与えられたとき、求められる確率水文学量は、Gumbel 分布（図式推定法）の場合が最も大きく、以下、対数正規分布（図式推定法）、対数正規分布（最尤法）、Gumbel 分布（最尤法）の順に小さくなってゆく。対数正規分布においては、図式推定法と最尤法との求められる確率水文学量の値の差が、Gumbel 分布の場合よりも小さい。6つのプロット・ポジション公式を比べると、Weibull 公式は、従来からいわれているように、安全側の確率水文学量を与える。また、対数正規分布と Gumbel 分布どちらに対しても Hazen 公式が最尤法に最も近い確率水文学量を与える。

**Fig. 3, 4** にプロットを示した。実線は最小二乗法で求めた平分線、破線は最尤法により求めた分布直線である。**Fig. 3** では、6つのプロット・ポジション公式の両極とも言える Weibull 公式（上段の図）Hazen 公式とを比べた。特に Gumbel 分布の場合、**Table 5** に示されるとおり、Weibull 公式を用いた図式推定法の解が最尤法のそれとかなり異なることがわかる。他の4つの公式によるプロットは、この両者の中間的なものとなる。**Fig. 4** には二日降水量、三日降水量の Hazen 公式によるプロットを示す。



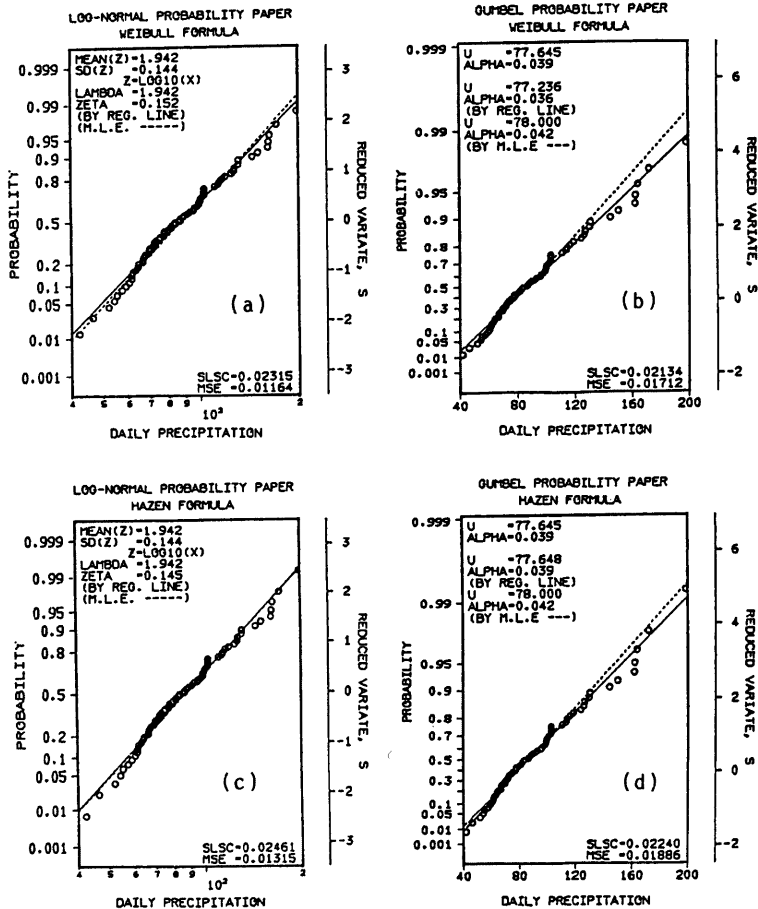


Fig. 3 Probability plotting of annual maxima of daily precipitations (in mm) of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years), obtained by the Weibull formula ((a) log-normal distribution; (b) Gumbel distribution) and the Hazen formula ((c) log-normal distribution; (d) Gumbel distribution).

#### 4. 降水量および流入量の確率分布

琵琶湖流域を10個の部分流域 (BLOCK 1~7, BIWA-1~3, 流域分割は Fig. 1 を見よ) に分け、各部分流域の面積平均降水量を算術平均法により算出した。湖面降水量の算出には周辺の観測所の値を用いた。流域全体あるいは各部分流域の年・月降水量について関式推定法を適用し、 $SLSC$  を求めた。それぞれ最小の  $SLSC$  を与える分布形を見出し Table 6 に整理した。この表から、降水量の季節性・地域性を調べる。また、4.2では流入量についても同様の検討を行う。Table 6において、\*印は  $0.03 \leq SLSC < 0.04$  であること、すなわち適合度がかならずも十分でないことを示しており、\*\*印は  $0.04 \leq SLSC$  であること、す

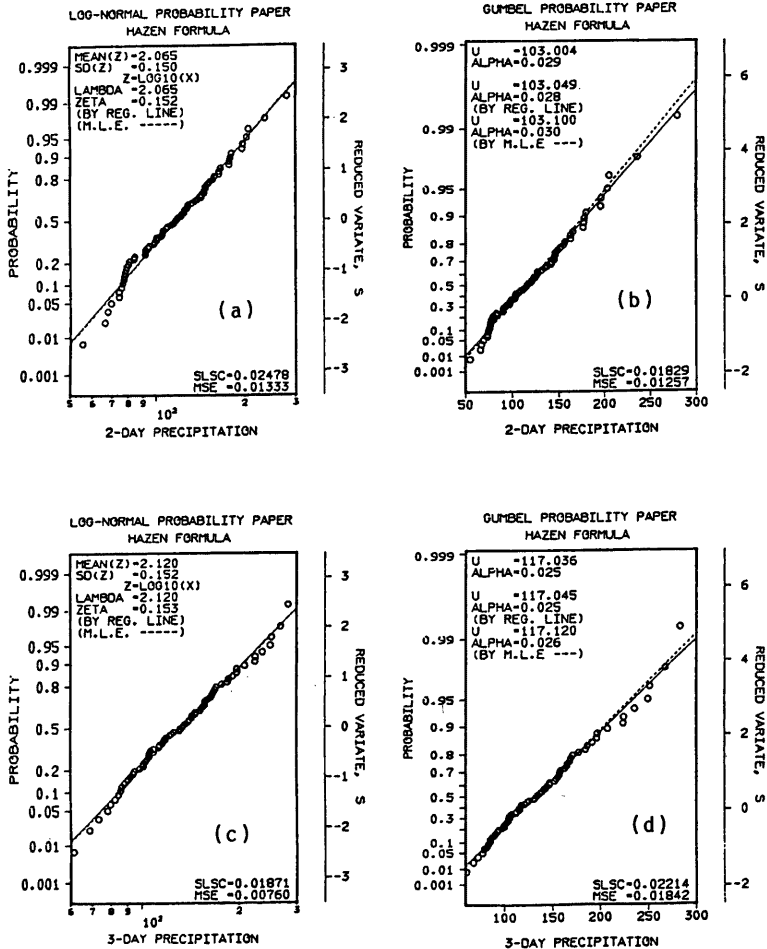


Fig. 4 Probability plotting of annual maxima of 2- and 3-day precipitations (in mm) of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years), obtained by the Hazen formula. (a) log-normal distribution and (b) Gumbel distribution for 2-day precipitation ; (c) log-normal distribution and (d) Gumbel distribution for 3-day precipitation)

なわち適合度が悪く他の分布形のあてはめを考慮しなければならないことを示している。

#### 4.1 降水量の季節性・地域性について

##### (1) 流域全体の降水量の季節性

琵琶湖流域全体の月降水量について各分布の *SLSC* を求めた。Hazen 公式を用いた場合の *SLSC* を **Table 7** に示す。*SLSC* が最も小さくなる分布形が **Table 6** の下から2段目に示されている。1, 3月の月降水量は正規分布, 2, 12月は対数正規分布に従い, その他の月降水量は Gumbel 分布に従うとしてよ

Table 6 The most suitable probability distributions for the areal precipitations and the inflows.

	Basins	Yearly	Jan	Feb	Mar	Apr	May	Jun	Jul	Aug	Sep	Oct	Nov	Dec
Areal precipitation	BLOCK 1	N	G	G*	N	G	G	G	N*	G	G	G	N	N
	BLOCK 2	N	G	LN	N	G	G	G	G	G	LN*	LN	G	N
	BLOCK 3	N	N	LN	N	LN	G	G	G	G	G	LN	G	LN
	BLOCK 4	LN	E	LN**	LN	LN	G	N*	G*	G	G	G	LN	LN
	BLOCK 5	LN	LN	N	G	G	G	G	G	G	G	LN*	N	LN
	BLOCK 6	LN	N	G	N*	G	N*	LN	G	E*	LN	LN	G	G*
	BLOCK 7	N	G	LN**	G	LN	LN	LN	G*	LN	G*	G	N	G
	BIWA-1	N*	G	G	N	G	G	G	N*	G	G*	G	N	N
	BIWA-2	LN	G*	LN	G*	G*	LN	G*	G*	G	G	G	N*	G
	BIWA-3	LN	N	N	G	G	G	G*	G	G	G	G	N	G
Whole basin	N	N	LN	N	G	G	G	G*	G	G	G	G*	LN	
Inflow	N	N*	LN**	N	LN	LN**	E*	G	G*	G*	LN*	N	N**	

N : Normal, LN : Log-normal, E : Exponential, G : Gumbel ;  
 \* indicates  $0.03 \leq SLSC < 0.04$ , \*\* indicates  $0.04 \leq SLSC$

い。ただし，7，11月は少し適合度が悪い（それぞれ  $SLSC=0.03247, 0.03172$ ；Table 7）。冬季とそれ以外とで従う分布形が異なる。

(2) 年降水量の地域性

BLOCK 1, 2, 3, 7, BIWA-1 の年降水量は正規分布に，BLOCK 4, 5, 6, BIWA-2, 3 は対数正規分布に従う。つまりこれは琵琶湖流域が，降水量の従う分布形の相違によって，南北に二分されることを示している。湖北と湖南で年降水量の特性が明らかに異なるようである。

(3) 月降水量

Gumbel 分布が適合する場合は半分以上を占め，そのほとんどの場合において  $SLSC$  は 0.02前後の値を示しており，かなり適合度はよいと言える。BLOCK 4 と BLOCK 7 の2月は最小の  $SLSC$  が0.04以上 (\*\*印)の値を示し適合度がかなり悪かった。他の分布形のあてはめを試みる必要がある。\*印 ( $0.03 \leq SLSC < 0.04$ ) も散見される。これらについても他の分布形のあてはめを試みるほうが望ましいが妥協できなくな

Table 7 SLSC values for the monthly precipitation obtained by the Hazen formula.

Month	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Jan	0.01575	0.04093	0.08709	0.04817	0.08149
Feb	0.04172	0.02023	0.05960	0.02828	0.05240
Mar	0.02720	0.03215	0.04878	0.03103	0.06978
Apr	0.04582	0.02936	0.05886	0.02818	0.06075
May	0.03707	0.02620	0.05845	0.02256	0.06685
Jun	0.03921	0.03146	0.05728	0.02838	0.07276
Jul	0.03917	0.04149	0.06418	0.03247	0.08239
Aug	0.05348	0.04098	0.04112	0.01685	0.07625
Sep	0.04568	0.03077	0.05392	0.02462	0.07156
Oct	0.05462	0.02016	0.04193	0.01863	0.05875
Nov	0.03232	0.04240	0.06695	0.03172	0.07843
Dec	0.03621	0.02651	0.06380	0.02775	0.06433

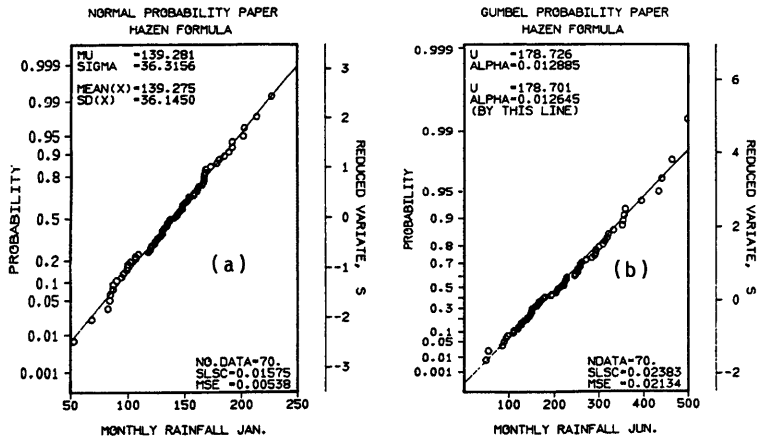


Fig. 5 Probability plotting of monthly precipitations (in mm) of the Lake Biwa basin, for the period 1912-1981 (70 years), obtained by the Hazen formula.  
 (a) normal distribution for the precipitations in January; (b) Gumbel distribution for the precipitations in June)

い (プロット点が直線上に並んでいるとみなせない) 程度の適合度である。Fig. 5 に1月と6月の月降水量のプロットを示した。これらは適合度のよい例である。

結局、全流域・各部分流域において、各月の降雨量の分布はそれぞれ異なり、同一の分布形を画一的に適用できないことを示唆している。

4.2 流入量について

年流入量・月流入量に対する SLSC を Table 8 に示す。3, 4, 7, 11月は適合度がよいが、最小の SLSC を与える分布はそれぞれ正規, 対数正規, Gumbel, 正規というふう異なる。2, 5, 12月の適合度は悪く ( $0.04 \leq SLSC$ ), 他の分布形を考慮する必要がある。1, 6, 8, 9, 10月もあまりよくない。要

Table 8 SLSC values for the monthly and yearly inflow obtained by the Hazen formula.

Month	Normal	Log-normal	Exponential	Gumbel	Log-Gumbel
Jan	0.03239	0.05274	0.08943	0.05287	0.08682
Feb	0.08187	0.04382	0.05219	0.04915	0.04619
Mar	0.02647	0.03185	0.06930	0.03169	0.06949
Apr	0.04920	0.02195	0.05469	0.02711	0.04853
May	0.12015	0.06487	0.09801	0.09707	0.08438
Jun	0.08945	0.03482	0.03281	0.04743	0.05627
Jul	0.03757	0.04542	0.05804	0.02414	0.08313
Aug	0.07582	0.04093	0.04009	0.03839	0.07549
Sep	0.05751	0.03380	0.05102	0.03292	0.06331
Oct	0.07780	0.03117	0.03943	0.03970	0.06102
Nov	0.02324	0.05083	0.08231	0.04451	0.08863
Dec	0.04239	0.09014	0.11725	0.08023	0.12102
Yearly	0.03167	0.03578	0.07142	0.03643	0.06543

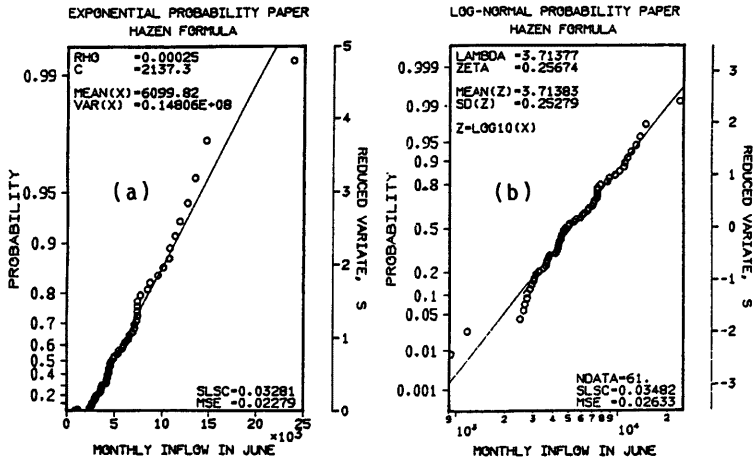


Fig. 6 Probability plotting of montly inflows (in  $m^3$ ) of the Lake Biwa basin, for the period 1914-1974 (61 years), obtained by the Hazen formula.  
 (a) exponential distribution and (b) log-normal distribution for the inflows in June)

するに月によって適合する分布がかなり異なるようである。

Fig. 6 に、6月の流入量のプロットを示す。SLSC はわずかに指数分布の方が小さいが、超過確率の小さい部分での適合度は対数正規分布の方がよい。指数分布を取り扱う際には、超過確率の大きい部分でプロット点が密集するので注意を要する。このように、同程度の SLSC 値をもつ分布が他にあれば、そちらの方も検討する必要がある。

## 5. SLSC を用いた確率分布モデルのあてはめ

### 5.1 適合性の指標としての SLSC の有用性

SLSC 以外の評価規準、たとえば最大対数尤度などは異なる分布形相互の比較(相対評価)のために有力な規準となりうる。しかしながら、最大対数尤度の値だけでは単独の分布の適合度の評価(絶対評価)はできない。また、最尤法は計算上多少煩雑である。一方、SLSC は、異なる分布形に対する適合度の統一的規準として有用であるばかりでなく、絶対評価のための指標としても用いることができる。計算も簡便である。絶対的な適合度の評価値としては、 $SLSC \approx 0.02$  と考えてよい。これまでに示してきたいくつかの図からもわかるように、この程度の値であれば十分に満足すべき適合性が得られている。0.02の値の解釈は、プロット点の平分線からの偏差が、平均して確率紙の縦軸の長さの2%程度に収まっていることを示している。

### 5.2 確率分布モデルのあてはめの全体的な手順

以上の考察から、確率分布モデルのあてはめの全体的な手順として以下のような手順を推奨することができる。

- Step 1: 確率分布形をいくつか選定する。
- Step 2: プロットング・ポジション公式として Hazen 公式を適用し、それぞれの分布について母数の推定を行う。
- Step 3: (12)式により SLSC を求める。
- Step 4:  $SLSC \approx 0.02$  となる分布を選ぶ。このような分布が見つからない場合には Step 1 に戻る。

**Step 5:**  $SLSC \approx 0.02$  となる分布が複数個ある場合には、それらに対して解析的方法によるあてはめを行い、その結果を参考にして最もよい分布を選択する。

**【注意】** 変数  $x$  (あるいはその変換変量  $z$ ) とその標準変量  $s$  とが(6)式のような線形関係で表せない確率分布モデルや母数が3個以上ある確率分布モデルに対してもこの手順は適用できる。その場合、**Step 2** では非線形最小二乗法を用い、最小化された二乗誤差(10式を見よ)を(12)式に代入して  $SLSC$  が求められる。結局、本研究で示した確率分布モデルのあてはめの方法は、「標準変量最小二乗法」(あるいは「 $SLSC$  法」)とも呼ぶべきものである。この方法は、確率紙の存在する確率分布モデルに対しては、図式推定法の規範的取り扱いにほかならない。

**Step 5** において、最小の  $SLSC$  を与える分布が、他の評価規準(たとえば、最大対数尤度など)でも最良と判定されればその分布を採択すればよい。最小の  $SLSC$  を与える分布(仮にA分布と呼んでおく)と他の評価規準で最良と判定される分布(仮にB分布と呼ぶ)とが一致しない場合には、他の評価規準で判定したときにA分布とB分布の差が著しければB分布を採用する。この差が著しくなく、 $SLSC$  値の差の方が著しい場合にはA分布を採択する。どちらの評価基準でもあまり差のない場合は、A、Bどちらを採択してもよい(要するに、どちらの評価規準に重きをおくか解析者の判断に委ねるしか仕方がない;あるいは、確率水文学を調べるなどさらに別の評価が必要となる)。

**【例】** (3.3の年最大二日降水量のような場合)対数正規分布とGumbel分布が**Step 5**に残ってくる。対数尤度の値に有意な差がなく  $SLSC$  の差が顕著だと見ると、Gumbel分布を採択することになる。一方、対数尤度の値が重要だと見ると、対数正規分布を採択しなければならない。

## 6. 結 論

確率紙を利用した水文学の頻度分析(確率分布のあてはめ)の精度とその評価について、琵琶湖流域のデータを用いて検討した。得られた成果は以下のとおりである。

- [1] コンピュータを援用してグラフィック・ディスプレイ画面上に確率紙を実現し、データのプロットおよび平分線の線引きを精密化・自動化した。これにより種々のデータの分析が容易にできるようになった。
- [2] 6種のプロット・ポジション公式を比較した結果、ここでの適用例ではHazen公式がつねに最尤法の解に近い解を与えることがわかった。さらに適用例を増やして検討する必要があるが、図式推定法の場合、Hazen公式を用いるのがよい。
- [3] 図式推定法と最尤法との比較では、図式推定法が計画上安全側の解を与える。両者の解の差は分布形ごとに異なるので注意しなければならない。たとえば、対数正規分布とGumbel分布がデータに対して同程度の適合度を示したとき、対数正規分布に図式推定法と最尤法を適用した場合の確率水文学の値の差は、Gumbel分布の場合よりも小さい。対数正規分布の場合、図式推定法は最尤法のよい近似を与える。
- [4] 適合度の評価規準( $SLSC$ )を提案した。この評価規準は、算定が簡単で、異なる分布形相互の適合度の比較(相対評価)だけでなく、絶対評価にも用いることができる。 $SLSC \approx 0.02$ であれば十分な適合性を示しているといえる。 $SLSC > 0.03$ であれば、他の分布形へのあてはめを試みた方がよい。本研究では、2母数の確率分布で、 $z$  と  $s$  が線形関係となるような場合への適用を示したが、5.2でも記したように、母数の個数が増えても、また  $z$  と  $s$  がうまく線形関係に表せない場合にも、母数を最小二乗法により fitting する限りにおいては直ちに  $SLSC$  を適用することができる。
- [5] 本研究で提示した手法により、琵琶湖流域の降水量データおよび琵琶湖への流入量データが従う分布形を調べ、その地域性・季節性を明らかにした。また、地域ごと・季節ごとにしたがう分布が異なることがわかった。このことは、同じ範疇に属する水文学(たとえば、月降水量)であっても同一の分布を画一的に適用できないことを示唆している。**Table 6** に示したように、ここで検討した5種の分布では十分な適合の得られなかったものもあり、それらについては別の分布を考慮しなければならない。

本研究を進めるにあたり、建設省近畿地方建設局琵琶湖工事事務所ならびに（財）大阪地域計画研究所・福西道昭氏には、データの収集に多大な便宜を図っていただいた。ここに記して感謝の意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) 高棹琢馬・宝 馨・Barriga, J. A.・清水 章：琵琶湖の水位変動予測モデルについて—水位変動と降水量の相関・回帰分析—, 土木学会関西支部年次学術講演会, II-1, 1986.
- 2) 高棹琢馬・宝 馨・清水 章・Barriga, J. A.：琵琶湖流域の渇水持続特性について, 土木学会関西支部年次学術講演会, II-2, 1986.
- 3) たとえば, 亀田弘行・池淵周一・春名 攻：確率・統計解析, 新体系土木工学2, 土木学会編, 技報堂, 1981, pp. 88-93.
- 4) Cunnane, C.: Unbiased Plotting Positions—A Review, *J. Hydrology*, 37, 1978, pp. 205-222.
- 5) 土木学会：水理公式集, 1985, pp. 131-132.
- 6) 菊地原英和：風速の再現期間計算法の比較考察—二重指数分布の当てはめにおける問題点—, 天気, Vol. 18, No. 1, 1971, pp. 21-34.
- 7) Adamowski, K.: Plotting Formula for Flood Frequency, *Water Resources Bulletin*, AWRA, Vol. 17, No. 2, 1981, pp. 197-202.
- 8) Kullback, S.: *Information Theory and Statistics*, Wiley & Sons, New York, 1959.
- 9) Akaike, H.: A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Trans. Autom. Contr.*, AC-19, 1974, pp. 716-723.
- 10) 坂元慶行・石黒真木夫・北川源四郎：情報量統計学, 共立出版, 1983, pp. 27-64.
- 11) Kimball, B. F.: Sufficient Estimation Functions. In *Statistics of Extremes* by E. J. Gumbel, Columbia University Press, 1960, p. 229.