

## 鋼柱の弾塑性座屈挙動に関する一実験

太田 克也・石井 淳一・中村 武  
野中泰二郎

### AN EXPERIMENTAL STUDY ON THE ELASTIC-PLASTIC BUCKLING BEHAVIOR OF STEEL COLUMNS

By *Katsuya OHTA, Junichi ISHII, Takeshi NAKAMURA and Taijiro NONAKA*

#### Synopsis

An experimental study is made of the flexural buckling of a steel column under central thrust. The primary objective is to obtain experimental data pertaining to a recently-proposed theory for the strength of a perfect column. This theory relates the buckling strength to the history of the axial displacement of one end relative to the other, which is accompanied by a monotonically increasing lateral deflection.

Eleven specimens of various slendernesses are tested with 35 mm × 35 mm cross section. Special care has been exercised to realize a condition close to that of a perfect column and to observe the deformation characteristics of the buckling behavior. A reasonable correlation is seen between the test results and the theoretical predictions, which are supposed to give an unconservative estimation of the buckling strength for actual columns with a variety of imperfections.

#### 1. はじめに

中心圧縮柱の曲げ座屈に関する古典理論は初期不整の無い完全な柱を対象とし、その耐力は Engesser-Shanley の接線係数理論<sup>1)</sup>で良く予測できるとされている。確かに、構成材料が滑らかな応力・歪曲線を示すものであれば、接線係数荷重は耐力の実測値とはほぼ一致するが、材料挙動が処女状態の構造用軟鋼の様に完全弾塑性型の応力・歪関係を示す場合、接線係数荷重は、細長い柱ではオイラーの弾性座屈荷重と一致し、太短い柱では単純圧縮の降伏軸力と一致する。中間の細長さを有する柱に対しても耐力がそれらのいずれかで与えられることになって、柱の耐力を細長比の関数として図示した、いわゆる座屈曲線は両者の境界、すなわち限界細長比で勾配が急変する不自然なものとなる。実際の構造物で重要な位置を占めるのはこの中間的な柱で、その圧縮耐力は上記のいずれよりも小さく、座屈曲線では圧縮降伏の直線とオイラー曲線とを滑らかに結ぶ「橋渡し曲線」で表されることが知られている。勿論、実際の柱では支持条件の曖昧さ、寸法誤差、材料の欠陥等によるばらつきがある他、元撓み、荷重の偏心、残留応力など初期不整を伴い、完全な柱は存在しない。従って、実用的には不整量を適当に考慮して耐力を算定するか、或は、近似的な「橋渡し曲線」を描くのが賢明な方法ではある。しかし、一方では完全な柱に対してもその変形特性に基づいて耐力を算定すれば滑らかな「橋渡し曲線」が描かれるという考察がなされていることに鑑み<sup>2)</sup>、完全に近い状態での鋼柱の実験を試み耐力と変形挙動を調べたのでここにその結果を報告し、併せてこの理論と比較検討する。実験の記述に先だち、理論の概略を次に示す。

2. 完全柱の理論的挙動

両端単純支持で長さ  $L$  の柱が準静的に変動する圧縮力  $P$  を受けて釣合状態にあるものとし、次の様な仮定を設ける。

- 1° 柱は、断面の寸法が長さ比べて十分小さく、長さ方向に一樣な一次元連続体と見做せる。
- 2° 撓みは一平面内でのみ生じ、剪断や捩れを無視できる。
- 3° 降伏限度以下ではヤング係数  $E$  の線型弾性で、曲げモーメント  $M$  と軸方向圧縮力  $P$  の作用のもとで、完全弾塑性挙動を示し、その降伏条件は

$$\frac{P}{N_0} + C \frac{M}{M_0} = 1 \dots\dots\dots(1)$$

で近似できる。ここに、 $C$  は 1 より小さい正の定数で、柱断面の形状と、関連する  $P$  の変動範囲より適当に定める。また、 $N_0$  は純圧縮に於ける降伏軸力、 $M_0$  は純曲げにおける極限曲げモーメントである。

- 4° 横方向撓みは、撓み曲線の勾配の平方が 1 に比べて無視できる程度に小さい。
- 5° 撓みは、圧縮力  $P$  が降伏軸力  $N_0$  あるいはオイラー荷重  $N_E = \pi^2 EI/L^2$  のいずれか小さい方の値に達した時に生じ、単調に増大する。ここに、 $I$  は断面の二次モーメントである。
- 6° 材料は十分な靱性を有し、局部的な不安定現象は生じない。

これらの仮定が成立すれば、変形状態は、柱の中央に対して対称で、中央撓み  $V$  が式

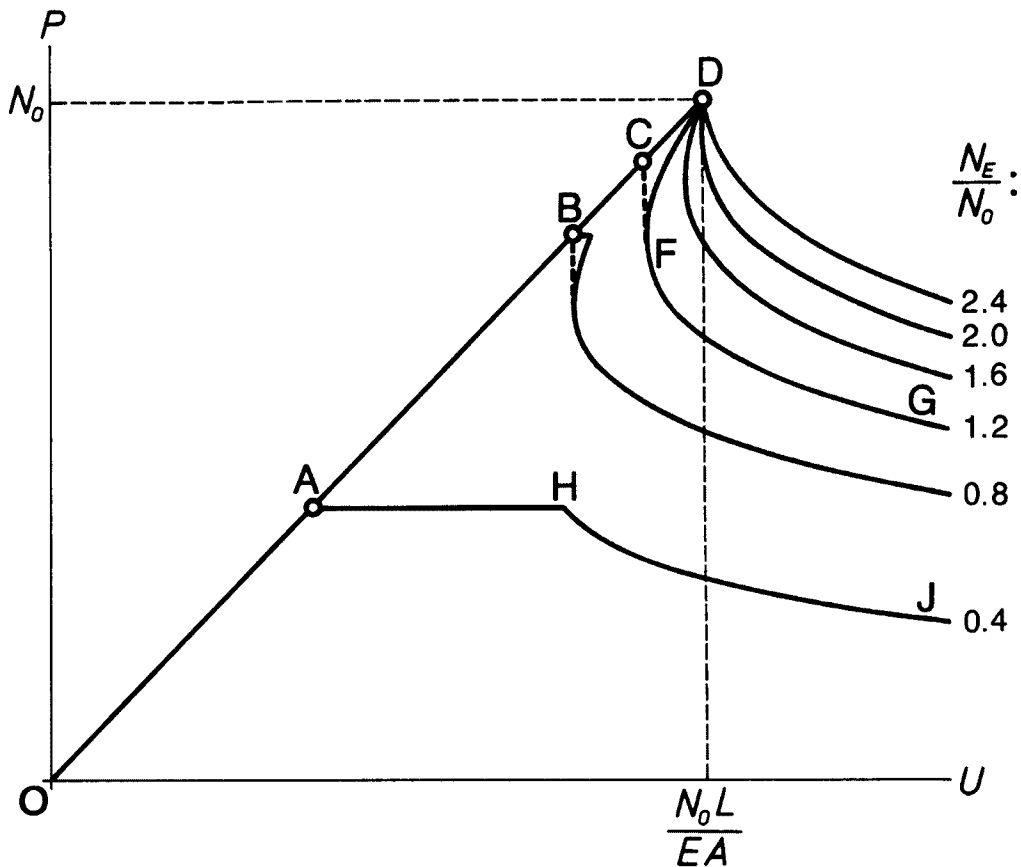


Fig. 1 Theoretical load-axial displacement relationship of columns with various slendernesses.

$$\frac{P}{N_0} = \frac{1}{1 + C \frac{N_0 V}{M_0}} \dots\dots\dots(2)$$

を満足する値に達した時、中央に塑性ヒンジが発生すること、及び、その後の軸方向材端相対変位 $U$ は次式で与えられることが示されている<sup>2)</sup>。

$$U = \frac{PL}{EA} + \frac{2M_0}{CN_0} \frac{\sqrt{\frac{P}{EI}}}{\tan\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right)} V + L \left\{ \frac{\sqrt{\frac{P}{EI}} V}{2 \sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} \frac{L}{2}\right)} \right\}^2 \left\{ 1 + \frac{\sin\left(\sqrt{\frac{P}{EI}} L\right)}{\sqrt{\frac{P}{EI}} L} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

式(2)の $V$ を式(3)に代入すれば、撓みが生じ塑性変形が進行するときの荷重・軸方向変位関係が得られるわけで、**Fig. 1**は、それまでの線型弾性応答と上記の仮定に基づいてこのような関係を図示したものである。柱の細長さを表す比 $N_E/N_0$ を助変数として変化せしめ、1前後の値をいくつか与えている。例えば $N_E/N_0 = 1.2$ の柱の $P-U$ 関係はOABCD $F$ Gとなるが、塑性ヒンジが点 $D$ で発生した後、 $DF$ 間は荷重、変位共に減少する。しかし、このような現象は、荷重速度が大きいときのみ実現され、通常の準静的な荷重状態では相対変位が単調に増大する過程OABCF $G$ を辿るものと見做す。従ってそのときの最大荷重は点 $C$ の縦座標で与えられ、これがこの柱の座屈耐力に等しいと考えるものである。また、 $N_E/N_0 = 0.4$ の柱では線型弾性応答OAの分岐点 $A$ で $P = N_E$ となり、横撓みの増大に伴って、弾性過程 $AH$ の後、塑性変形曲線 $HJ$

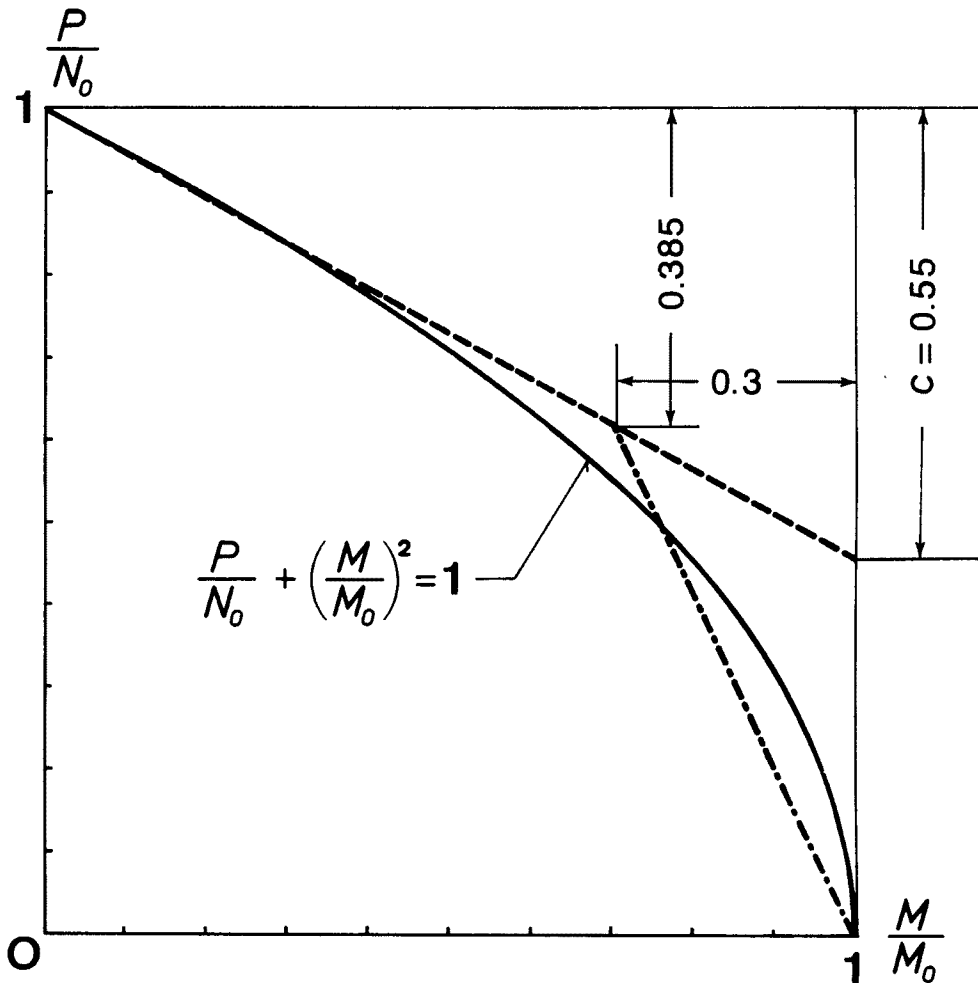


Fig. 2 Linearization of yield condition.

を辿り  $P$  が減少する。この AH 間は安定で  $P$  が幾分上昇するが、工学上重要な位置を占める鋼柱の寸法では、その上昇分は無視できる<sup>3)</sup>。この全過程 OAHJ で  $U$  は単調に増加するから、最大荷重  $N_E$  をこの柱の耐力と見做す。即ち、「 $P$  が  $N_0$  又は  $N_E$  に達したとき完全柱は横に撓み、その撓みが増大し続けるものと仮定して軸方向相対変位  $U$  を算定し、この  $U$  が単調に増加する過程で達せられる  $P$  の最大値が柱の静的な座屈耐力である」と考える<sup>2)</sup>。この様にして求めた座屈耐力  $P_c$  は、直線 OD 上に白丸で示した点の縦座標で与えられ、比  $N_E/N_0$  と伴に連続的に変化する。この比が小さい柱、換言すると細長い柱では  $P_c = P_E$  で、比が大きい、即ち太短い柱では  $P_c = N_0$  また中間の細長さではその中間の値を採ることとなって、滑らかな座屈曲線が得られる。

Fig. 17 の実線は、 $C=0.55$  としたときの無次元座屈曲線である。Fig. 2 の実線は実験に用いた長方形断面に対する全塑性条件で、上の  $C$  の値は、破線で示した様に、 $P/N_0$  が 1 に近い値を採るときの良い線型近似を与える。最大耐力到達後の変形解析のためには、これと、図の鎖線で示した、2本の直線から成る部分線型の降伏条件を仮定した。Fig. 20 の点線は、式(2)に基づく、荷重、横撓み関係を無次元座標で表したもので、同様に、Fig. 19 は式(2)、(3)の荷重・軸方向相対変位関係を示す。

### 3. 座 屈 実 験

前述した完全な柱の座屈耐力に関する理論的考察と比較するため、できるだけ完全に近い状態で柱の座屈実験を計画し、次の選択を行った。

- 1° 柱の材料はできるだけ完全弾塑性型に近い応力・歪関係を示すものとして熱間圧延軟鋼 (SS 41 相当品) とした。
- 2° 柱断面としては、断面形にみだれが少なく、断面変形や局部座屈の恐れのない中実正方形断面とした。
- 3° 元撓みのできるだけ小さい材が得られるようにある程度の太さを持ち機械的に真直度を矯正することが可能な寸法の材として 32 mm×32 mm の断面を選んだ。
- 4° 柱製作時の塑性加工や導入された残留応力などによる影響をできるだけ除去するために焼鈍を行った。焼鈍条件は、炉温上昇勾配 200°C/時間、最高温度 600°C 1時間保持、下降温度勾配 100°C/時間とした。但し、焼鈍を行ったのは材長の短い側 8本の試験体だけで長い側 3本の試験体は加熱による曲がりの発生を恐れ圧延状態のままとした。
- 5° 実験変数は、柱の細長さだけとした。細長比が30~200程度の範囲で、バランスよい細長比間隔で座屈実験が行えるよう合計11本の試験体を製作した。
- 6° 材端条件は、できるだけ理想的なピン支持状態が得られるよう、ナイフエッジ装置を用いた。

座屈実験に用いた試験体の形状・寸法を Fig. 3 に示す。材料  $L'$  を Table 1 に示すように変化させて、合計11体の試験体が製作された。試験体の実測寸法を Table 1 に示す。図及び表中の試験体の寸法を示す諸量は次の通りである。

$L'$  : 試験体の長さ。

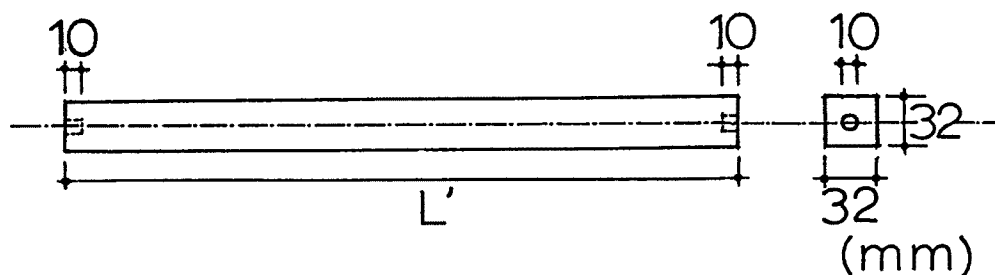


Fig. 3 Test specimen.

Table 1 Dimensions of specimens

	$L'$ (mm)	$B$ (mm)	$D$ (mm)	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$I$ (cm <sup>4</sup> )	$i$ (mm)
SR 1	1707.2	32.11	31.95	10.26	8.727	9.222
SR 2	1246.5	31.82	31.84	10.13	8.559	9.192
SR 3	968.8	31.92	31.90	10.18	8.635	9.210
SR 4	770.0	31.80	31.78	10.11	8.506	9.172
SR 5	677.2	31.85	31.88	10.15	8.600	9.205
SR 6	584.7	31.88	31.72	10.11	8.479	9.158
SR 7	493.5	31.65	31.65	10.02	8.362	9.137
SR 8	399.5	31.65	31.70	10.03	8.402	9.152
SR 9	308.8	31.62	31.72	10.03	8.410	9.157
SR 10	215.5	31.60	31.70	10.08	8.388	9.122
SR 11	122.1	31.82	31.85	10.13	8.567	9.196

$B$  : 座屈方向に直角な方向に測った試験体の幅。

$D$  : 座屈方向に測った試験体のせい。

$A$  : 断面積。

$I$  : 座屈軸に関する断面 2 次モーメント。

$i$  : 座屈軸に関する断面 2 次半径。

Table 2 Tension test results

	$B$ (mm)	$D$ (mm)	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$\sigma_y$ (t/cm <sup>2</sup> )	$E$ (t/cm <sup>2</sup> )	$\sigma_u$ (t/cm <sup>2</sup> )	$\epsilon_u$ (%)
No. 1	31.67	31.72	10.05	2.988	2060	4.781	36.6
No. 2*	31.80	31.98	10.17	2.994	2128	4.776	39.5
No. 3*	31.90	31.80	10.14	2.944	2164	4.775	38.1

\* Annealed

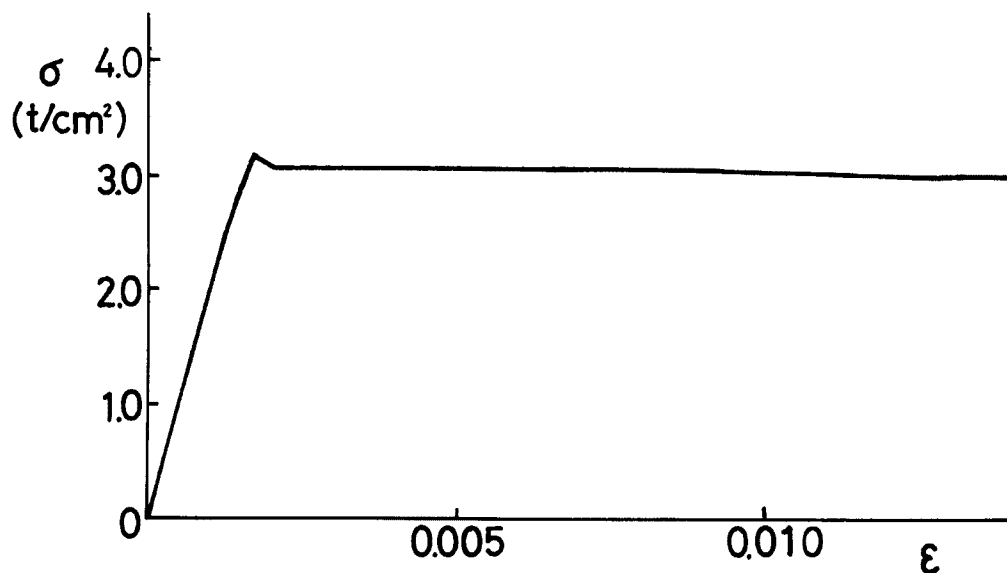


Fig. 4 Stub-column test result.

試験体の両端面は、機械仕上げにより平滑に仕上げられた。両端断面の中心には、材端装置とのずれを防ぐためのピンをそう入するために直径 10 mm、深さ 10 mm の穴を設けた。試験体の名称は、SR1, SR2, …, SR11 と長いものから順に名付けてある。

材の応力・歪関係を調べるための引張試験及び短柱圧縮試験用の試験体を座屈実験用試験体と同一の材から製作した。引張試験用の試験体の材長は 500 mm、短柱圧縮試験用のそれは 100 mm とし、各々 3 本製作した。3 本のうち 2 本は座屈実験用試験体と同時に焼鈍した。

引張試験結果を **Table 2** に、短柱圧縮試験結果の例を **Fig. 4** に示す。以後の実験結果の整理に用いる降伏応力度は、引張試験により得られた値の平均値  $\sigma_y = 2.975 \text{ t/cm}^2$  とした。

試験体の加力は、100 トン長柱圧縮試験機によった。**Fig. 5** に実験方法の概要を示す。図に示すように材端のナイフエッジ装置によって、試験体端部での回転の中心は、材端面より外側へ  $l = 90 \text{ mm}$  離れた点となる。このため試験体の両端の回転中心間の距離は  $L' = L + 2 \cdot l$  となる。一方、材端のナイフエッジ装置は試験体に比して剛である。このような装置を用いて行った試験体の細長比を評価するための近似解析を次のように行った。即ち、両端に長さ  $l$  の剛な部分を持ち、中間部分の長さが  $L'$  の柱と等しい弾性座屈耐力をもつ、中間部分と同じ断面をもつ柱の長さ  $L$  を Rayleigh-Ritz の方法によって求めこれを有効長とし、断面 2 次半径で除して細長比  $\lambda$  を計算した。**Table 3** に試験体の材長に関する量、細長比を示す。同時に同表中に、正規化細長比  $\bar{\lambda} = \sqrt{N_0/N_E}$  及び後に示す座屈実験より得られた座屈耐力（試験体が示した最大耐力を採った）を示す。

試験体のひずみ及び変位の測定は、箔ひずみゲージ及びひずみゲージを用いた変位計によった。ひずみ測定用ゲージは、試験体の材長中央位置及び両側の材端から 100 mm の位置（材長が 500 mm 以下の 2 本は 80 mm、310 mm 以下の 3 本は 50 mm の位置）の外側 4 面に貼付した。軸方向変形はナイフエッジ装置の耐圧盤の間の距離の変化とみなし、これを上、下端のナイフエッジ装置にそれぞれピンとローラーで鉛直に支持された測定用骨組の柱に固定した変位計によって測定した。水平たわみは、測定用骨組の柱に取付けたたわみ測定棒に変位計をセットして測った。たわみの測定位置は、ナイフエッジ間を 4 等分する位置（材長が 750 mm を越える 4 本では 6 等分する位置）とした。実験の状況を **Photo 1** に示す。

本試験体への載荷に先立って、予備載荷を行い、できるだけ中心圧縮に近い状態を得るよう試みた。予備載荷では、約 1 トンの圧縮力の下で各断面 4 枚で測定したひずみ値ができるだけ均等になるよう、また、発生する水平たわみができるだけ小さくなるように、ナイフエッジ装置の耐圧盤を微動装置により移動調整を行う。この操作を数回繰返して、中心載荷に近い状態を得た。

予備載荷による中心合せを行った後の本載荷では、最初の段階において予想座屈耐力を 25~30 等分する程度の荷重ステップで、圧縮載荷できるように、長柱試験機を制御した。各荷重段階でのひずみ、変位の測定は、荷重を一定に保ちながら迅速に行うように心懸けた。荷重が予想座屈耐力に近づき、横たわみが生じるきざしがあらわれて以後は、載荷ステップを適宜細かくした。横たわみが大きくなり始めて以後は、試験体の耐力は、ほぼ平衡を保つか、減少を開始する。この段階では、試験機の油送りを極めて小さくして、変形制御載荷を試みた。変計が安定したところで計測を行い、次の変形ステップへ進んだ。中央断面のたわみが材長の約 1/10 となったところで除荷し実験を終了した。

実験により得られた、各試験体の圧縮力・軸方向縮み関係及び圧縮力・中央たわみ関係を **Fig. 6~Fig. 16** に示す。各図の(a)図が前者、(b)図が後者である。(a)図の軸方向縮みの測定の際に、測定用骨組の取付け部及びナイフエッジ圧盤間隙の機械的な遊びなどが原因で十分な精度で測定ができなかったのは残念である。圧縮力、横たわみの測定は十分な精度で行われた。また、試験体の軸方向縮みに関しては、ひずみゲージによる測定によって座屈前には、試験体は弾性的に挙動しているのが確認されている (**Fig. 18** 参照)。

**Fig. 17** に、実験より得られた試験体の最大耐力 ( $P_c/N_0$ ) と細長比 ( $\sqrt{N_0/N_E}$ ) の関係を前述の理論値と比較しながら座屈曲線の形で示す。図中、実線が理論値、○印が実験値である。

Table 3 Effective slenderness ratio and buckling strength.

	$L'$ (mm)	$l$ (mm)	$L''$ (mm)	$L$ (mm)	$\lambda$	$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{N_0}{N_E}}$	$P_c(t)$
SR 1	1707.2	90.0	1887.2	1878.6	203.7	2.488	5.9
SR 2	1246.5	90.0	1426.5	1415.1	154.0	1.881	9.0
SR 3	968.8	90.0	1148.8	1134.6	123.0	1.505	14.5
SR 4	770.0	90.0	950.0	932.8	101.7	1.202	21.0
SR 5	677.2	90.0	857.2	838.0	91.1	1.076	24.3
SR 6	584.7	90.0	764.7	743.2	81.2	0.959	27.5
SR 7	493.5	90.0	673.5	649.0	71.0	0.840	27.6
SR 8	399.5	90.0	579.5	550.8	60.2	0.735	27.8
SR 9	308.8	90.0	488.8	454.4	49.6	0.606	28.3
SR 10	215.5	90.0	395.5	352.2	42.1	0.503	28.2
SR 11	122.1	90.0	302.1	242.6	28.7	0.343	28.5

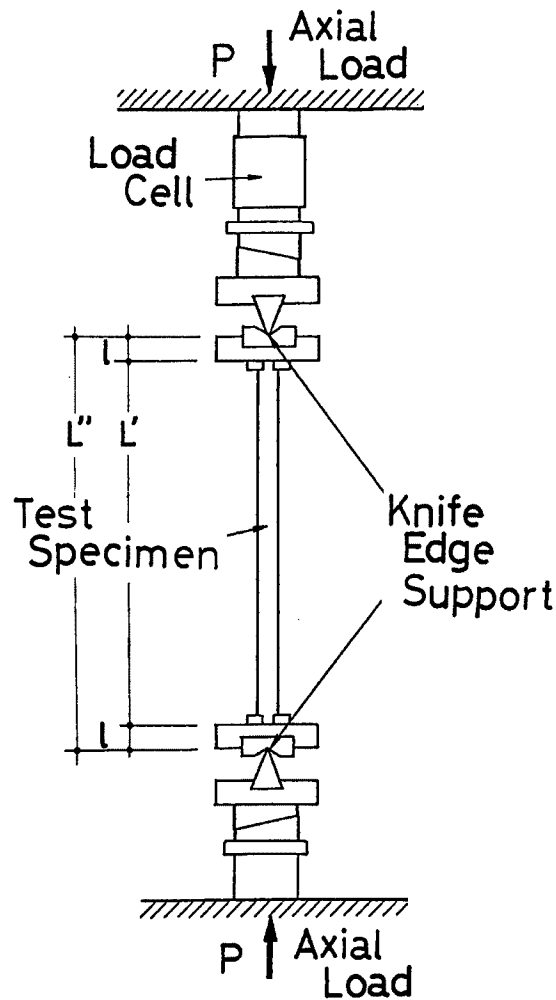


Fig. 5 Test set-up.

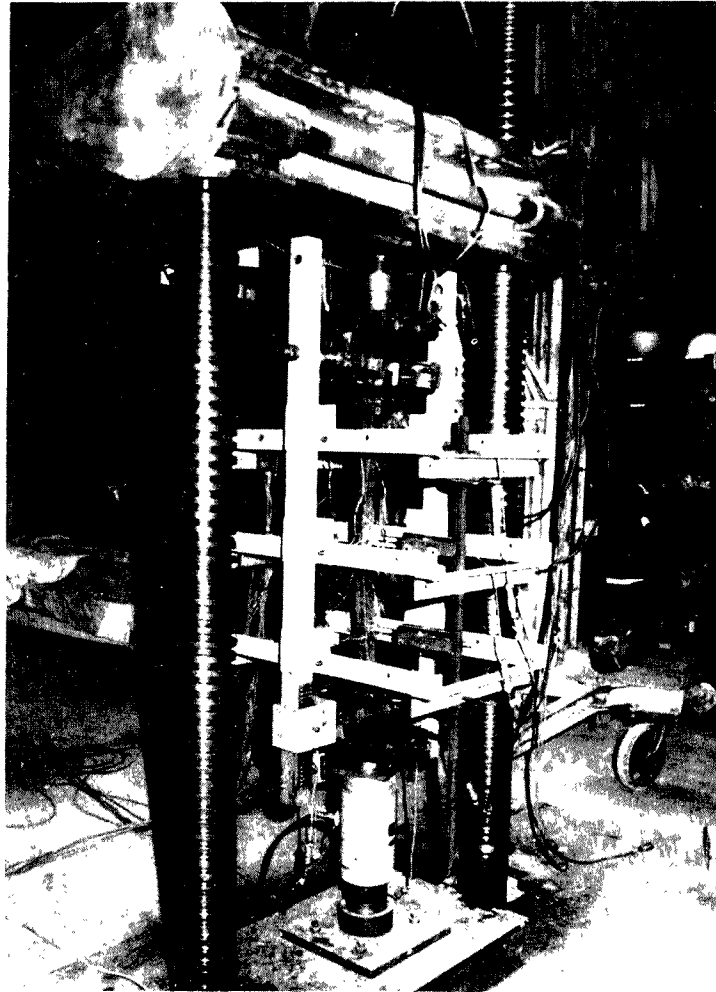


Photo 1. Test set-up.

**Fig. 18** は、SR3 に対する圧縮力と軸方向縮みの関係である。図中、破線で示される変位計で測定した軸方向縮みは、前述の測定用骨組及びナイフエッジの圧盤間隙などの遊びにより、精度が良くない。一方、鎖線で示すひずみゲージの測定値に材長を乗じて計算した等価縮み量は、最大耐力に到る前は、点線で示される理論値とほぼ一致している。これより試験体自身は正常に挙動しているのがわかる。変位計で測定された軸方向縮みの測定値とひずみゲージによる測定値との差は、最大耐力時に最大となり、最大耐力後は「そのままの値を保つ」挙動と「試験体の耐力低下に伴って弾性的に回復し小さくなる」挙動を両極端として、一般的には、この間の値をとるものと考察できる。本図では前者の挙動、即ち「差は耐力低下後も最大耐力時の差を保つ」と仮定した実験値の補正を行って、理論値との比較を試みた。図中、実線が補正後の実験曲線である。

**Fig. 19** は、上述の補正を行って得た、実験による圧縮力・軸方向縮みの座屈後挙動と理論値を比較したものである。点線が理論値、実線が実験値である。理論曲線は精度よく実験挙動を表しているのが認められる。

**Fig. 20** は、圧縮力・中央たわみの関係を比較したものである。点線で示した理論値は実線で示した実験値を極めて精度よく予測しているのが観察できる。



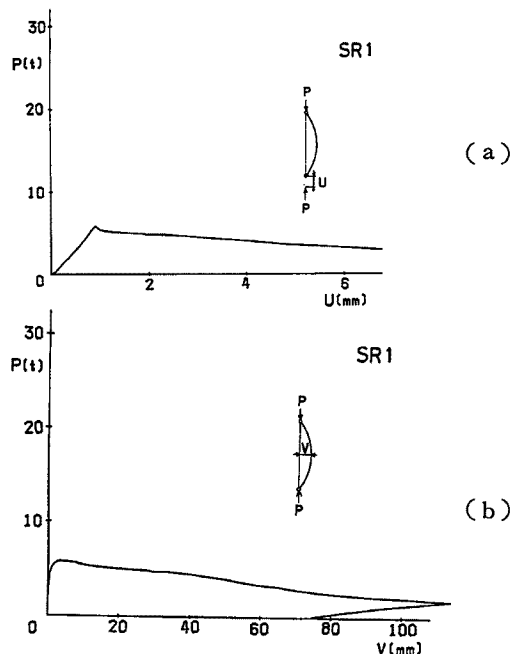


Fig. 6 Experimental results of SR 1.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

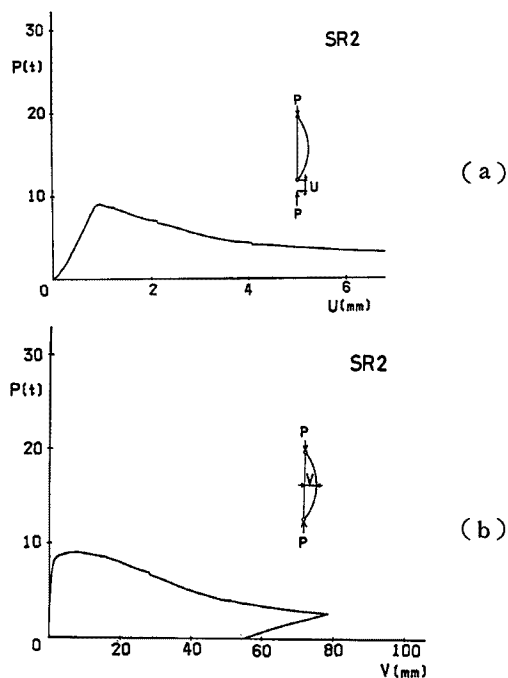


Fig. 7 Experimental results of SR 2.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

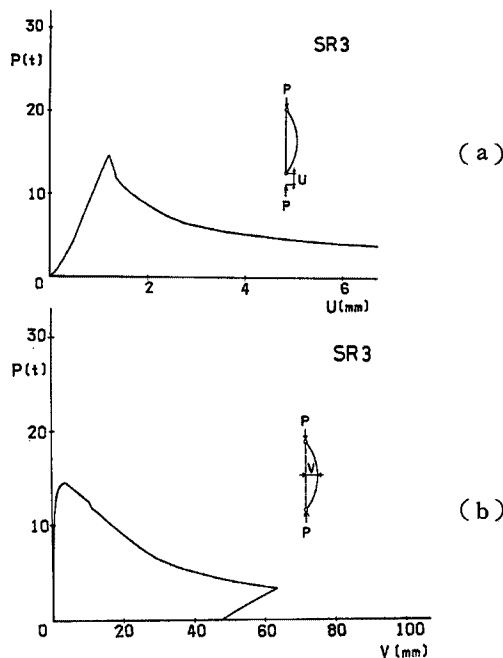


Fig. 8 Experimental results of SR 3.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

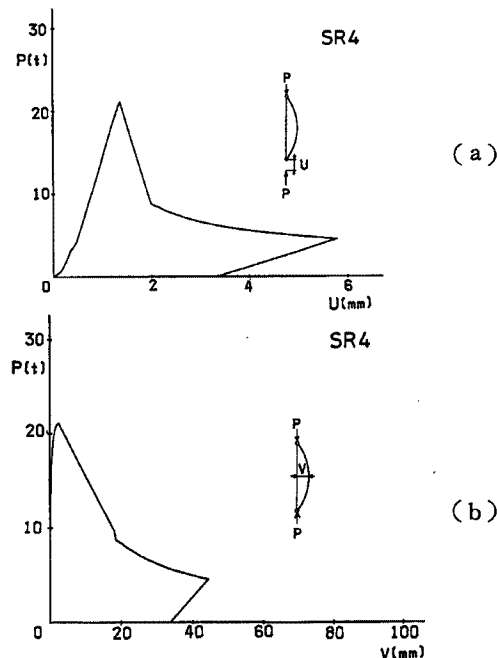


Fig. 9 Experimental results of SR 4.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

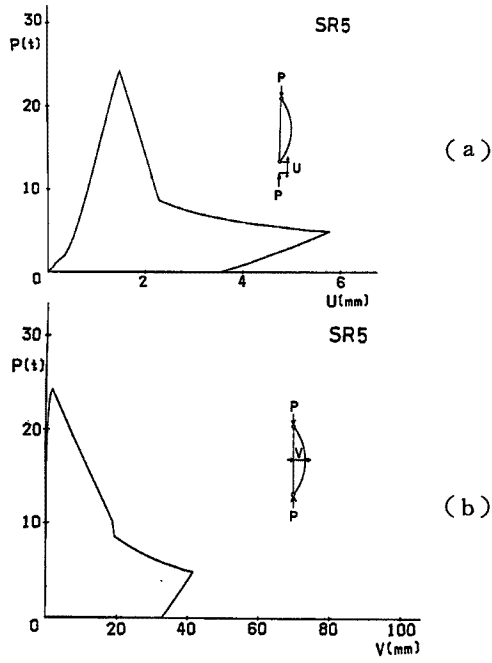


Fig. 10 Experimental results of SR 5.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

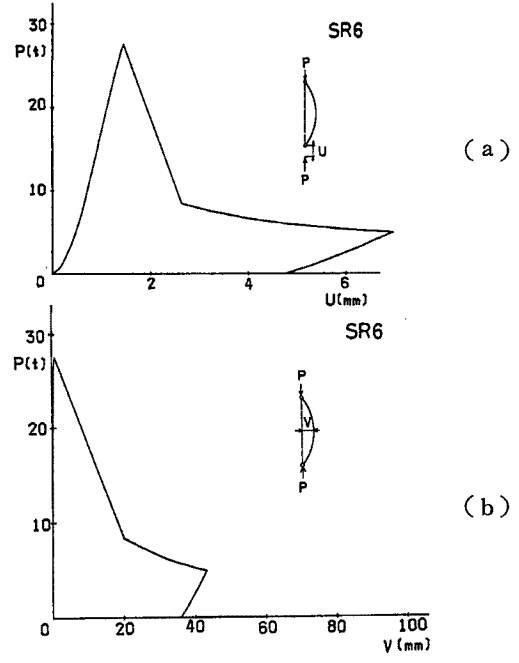


Fig. 11 Experimental results of SR 6.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

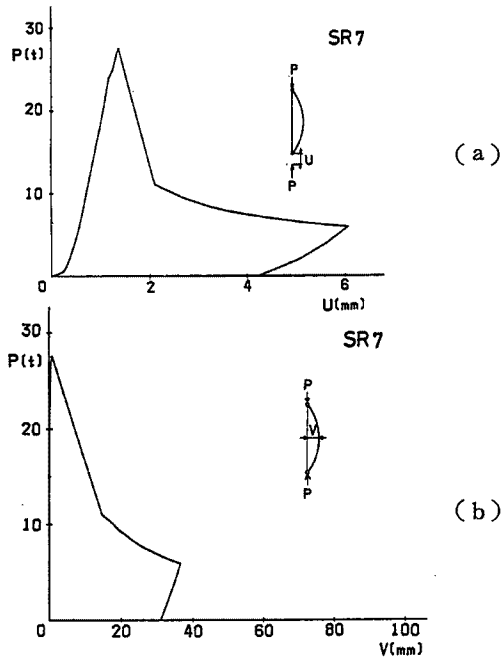


Fig. 12 Experimental results of SR 7.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

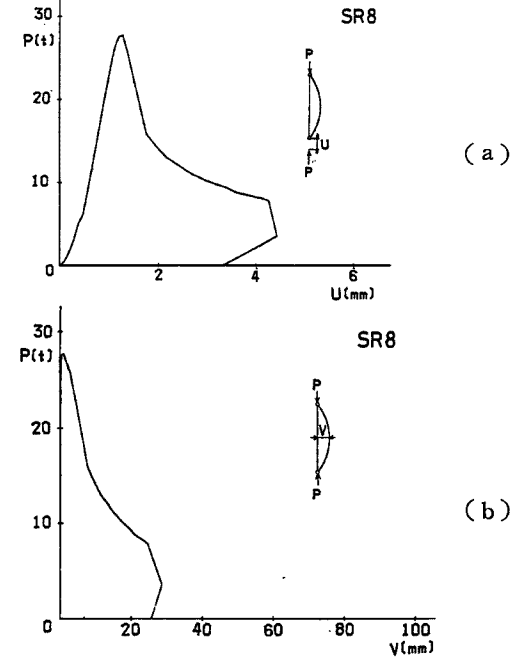
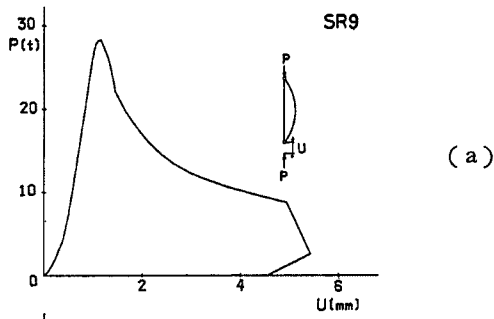
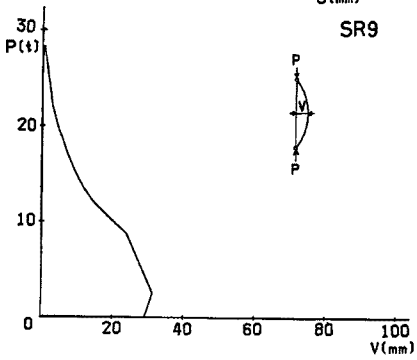


Fig. 13 Experimental results of SR 8.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

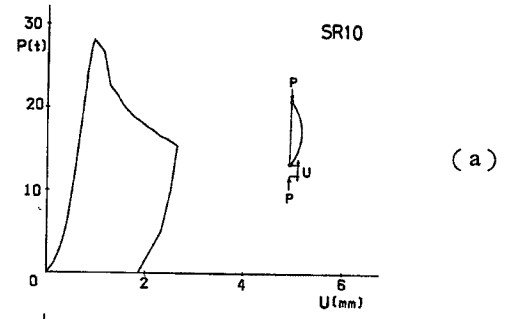


(a)

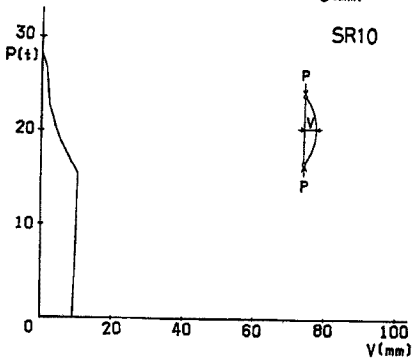


(b)

Fig. 14 Experimental results of SR 9.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

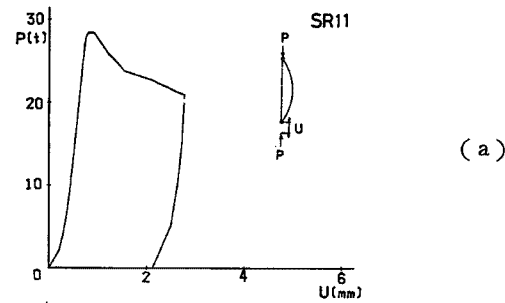


(a)

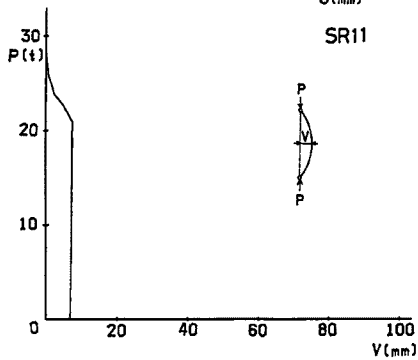


(b)

Fig. 15 Experimental results of SR 10.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.



(a)



(b)

Fig. 16 Experimental results of SR 11.  
 (a) Axial load-axial displacement relationship.  
 (b) Axial load-lateral deflection relationship.

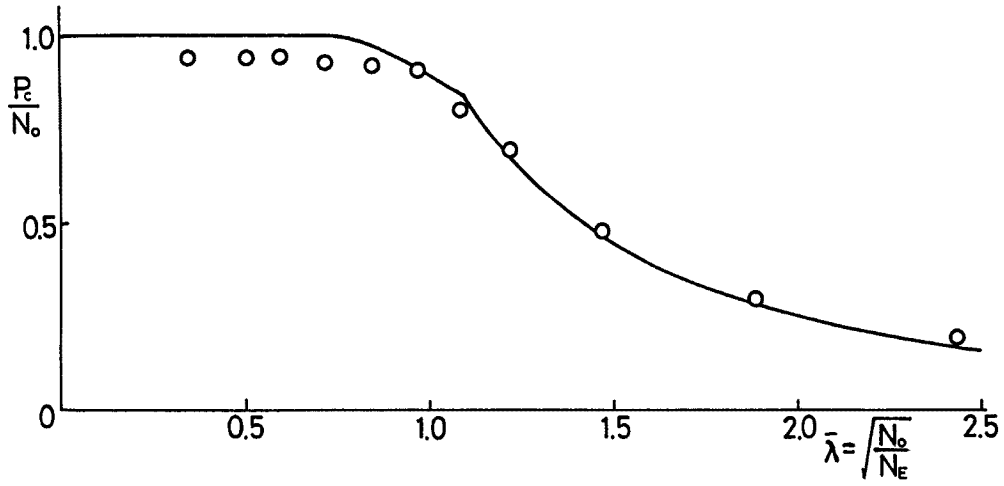


Fig. 17 Column-curve and experimental buckling strength.

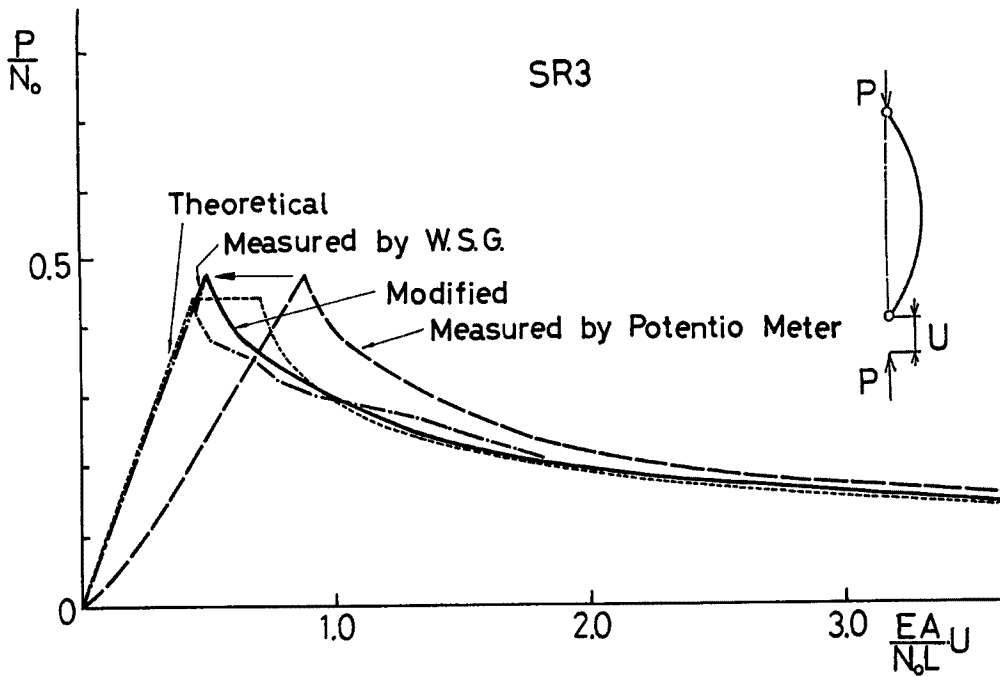


Fig. 18 Tuning of measured axial displacement.

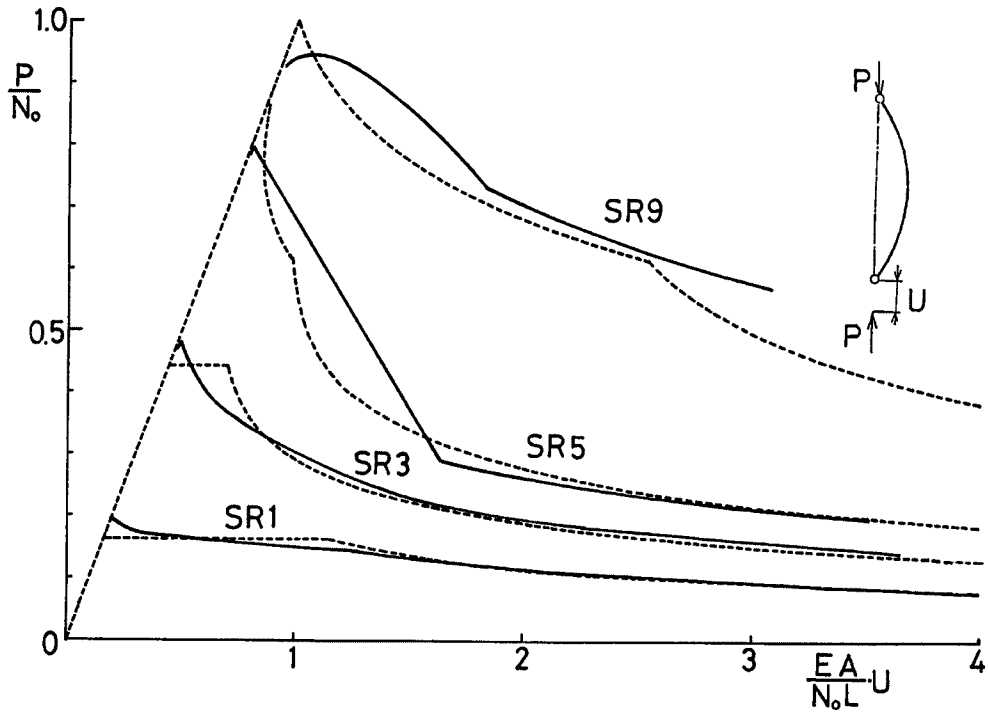


Fig. 19 Comparison between theory and experiment in load-axial displacement relationship.

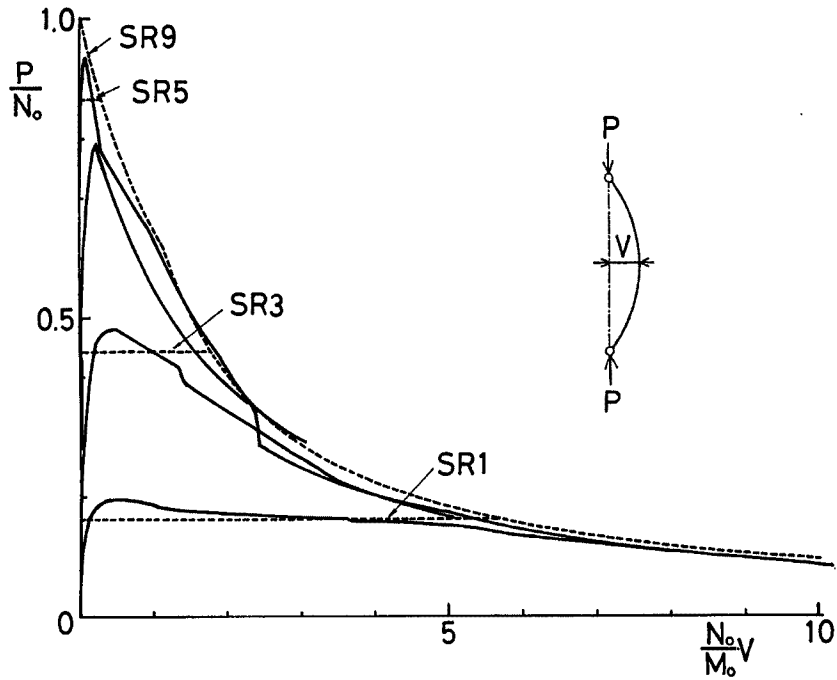


Fig. 20 Comparison between theory and experiment in load-lateral deflection relationship.

#### 4. ま と め

完全弾塑性材料から成る完全な柱の座屈荷重を、「材端相対変位が単調にそして準静的に増加するときの最大耐力である」と見做す理論の妥当性を検討する為に、出来る限り、完全弾塑性に近く、初期不整の少ない柱を実現する様、鋼正方形断面柱の座屈実験を遂行した結果、この理論は、これらの条件をほぼ満たす現実的な柱の圧縮耐力を良く予測すると共に、弾塑性座屈の変形挙動を記述する第一近似としても有効であることがわかった。

#### 参 考 文 献

- 1) Shanley, F. R.: Inelastic Column Theory, J. Aeronautical Sciences, Vol. 14, No. 5, May, 1947, pp. 261-268.
- 2) Nonaka, T.: Buckling Strength of Perfectly Plastic Perfect Column, 発表予定.
- 3) Nonaka, T.: An Analysis for Large Deformation of an Elastic-Plastic Bar under Repeated Axial Loading-II Correlation with Small Deformation Theory, Int. J. Mech. Sci., Vol. 19, 1977, pp. 631-638.