

乱流モデルによる Buoyant Surface Jet の数値解析

岩佐 義朗・細田 尚・伊藤 邦展

NUMERICAL ANALYSIS OF BUOYANT SURFACE JETS BY MEANS OF TURBULENCE MODEL

By Yoshiaki IWASA, Takashi HOSODA and Kuninobu ITO

Synopsis

This paper deals with the numerical analysis of the two-dimensional buoyant surface jets. The fundamental equations used here are the k - ϵ model in which Launder's study concerning the turbulent structure of the stratified flows is involved.

The brief description about the mathematical form of ϵ -equation is given using the homogeneous shear flow turbulence formulated by Hinze. Then it is pointed out from the numerical results including the vertical distributions of hydraulic variables that the effects of buoyancy term in the ϵ -equation is quite sensitive for the stratification of water temperature observed in the previous experimental studies.

1. 緒 言

本研究は、乱流モデルにより二次元 Buoyant Surface Jet の水温成層化過程の再現を試みたものである。用いている基礎式は Launder の研究¹⁾を k - ϵ モデルに取り入れた Gibson・Launder の研究²⁾を基にしている。著者等の従来の解析によれば、水温の鉛直分布の流下方向への変化、すなわち、水温分布の成層化過程を十分に再現できなかった^{3),4)}。この理由として ϵ -方程式の浮力項を無視していたことがあげられる。

密度流での ϵ -方程式は、浮力項を考慮している場合とそうでない場合がある。そこで、Hinze⁵⁾が定式化している homogeneous shear flow turbulence に関する基礎式と、スペクトル形相似の仮定を用いた簡単な考察を行い、最も単純な表示で ϵ -方程式の浮力項を考慮する。次に、二次元 Buoyant Surface Jet の数値解析を行い、水温の成層化過程、流速・乱れエネルギー等の水理諸量の鉛直分布について検討する。

本研究では、 k - ϵ モデルとして乱れ Reynolds 数 (Re_T) が低い領域を含んだ k - ϵ モデル、すなわち Jones・Launder モデル⁶⁾を用いる。そこで、Buoyant Surface Jet の解析を行う前に、このモデルにより著者等が以前に行った^{7),8)} 周囲流体と同一の水温で放出される Surface Jet の計算を行い、水理量の鉛直分布、流下方向の減衰について示しておく。

2. Simple Jet の解析

2.1 基礎式

Jones・Launder モデルを用いた基礎式は次のようになる。用いている座標系と記号の説明は従来と同様の Fig.1 である。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

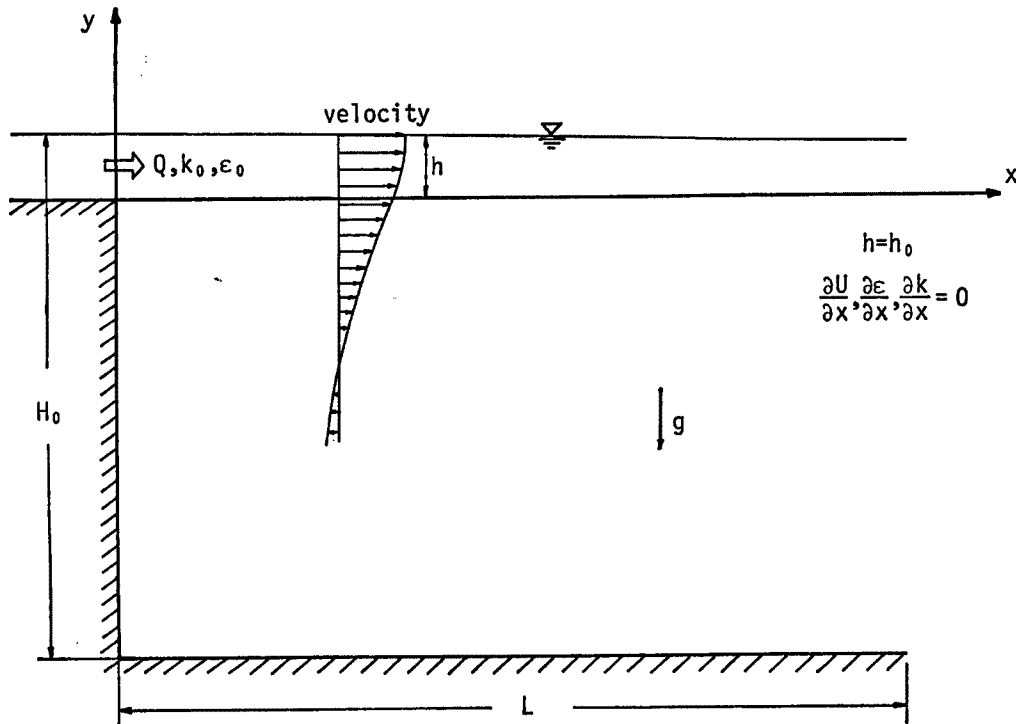


Fig.1 Definition sketch.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g \quad (3)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial \sqrt{k}}{\partial y} \right)^2 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} + 2\nu D \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 \quad (5)$$

上式に現われる $-\overline{u'^2}$, $-\overline{u'v'}$, D は次のように与えた。

$$\frac{-\overline{u'^2}}{k} = -0.94, \quad -\overline{u'v'} = D \frac{\partial U}{\partial y}, \quad D = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

ここに, U, V ; 時間平均流速ベクトルの x, y 方向成分, p ; 時間平均された圧力, u', v' ; 変動流速ベクトルの x, y 方向成分, k ; 乱れエネルギー, ϵ ; 乱れエネルギー散逸率, ρ ; 流体の密度, ν ; 動粘性係数である。また, $c_\mu, c_{\epsilon 2}$ は次に示す乱れ Reynolds 数 ($Re_T = k^2/\nu\epsilon$) の関数である。

$$c_\mu = c_{\mu\infty} \cdot f_\mu(Re_T) = c_{\mu\infty} \cdot \exp\left[-\frac{2.5}{1+Re_T/50}\right],$$

$$c_{\epsilon 2} = c_{\epsilon 2\infty} [1.0 - 0.3 \exp(-Re_T^2)]$$

上式で用いられている定数の値を Table 1 に示した。

Table 1 Model constant used in k - ϵ model

$c_{\mu\infty}$	$c_{\epsilon 1}$	$c_{\epsilon 2\infty}$	σ_k	σ_ϵ
0.09	1.44	1.92	1.0	1.3

2.2 計算条件

計算の条件は従来^{7),8)}と同様であり, 放出口で流量 $Q, k=k_0, \epsilon=\epsilon_0$ を与え, 計算上の下流端で水位一定, $U,$

k, ϵ については $\partial \cdot / \partial x = 0$ とした。また自由表面では, U, k, ϵ について簡単に $\partial \cdot / \partial y = 0$ とした。

路床での境界条件は次のようにする。 t, x, y に関するステップ数を各々 n, i, j で表す。路床に接する格子では $j=1$ とする。

(Fig. 2. 参照) $U_{i,1}^n$ が既知の時, 対数則

$$\frac{|U_{i,1}^n|}{|u_{*i}^n|} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{|u_{*i}^n| (4y/2)}{\nu} + A, \quad (\kappa=0.4, A=5.5)$$

より $|u_{*i}^n|$ を逆算する。 $|u_{*i}^n| (4y/2)/\nu$ が基準値 Re_* より大きければこの u_{*i}^n を用いる。ただし, u_{*i}^n は $U_{i,1}^n$ の正・負に応じて $u_{*i}^n = |u_{*i}^n|$ または $u_{*i}^n = -|u_{*i}^n|$ である。一方, $|u_{*i}^n| (4y/2)/\nu < Re_*$ のときには, 対数則を用いずに u_{*i}^n を次式で求め直す。

$$u_{*i}^n |u_{*i}^n| = \nu \frac{U_{i,1}^n - 0}{(4y/2)}$$

次に, $u_{*i+1/2}^n = (u_{*i+1}^n + u_{*i}^n)/2$ を用いて $|u_{*i+1/2}^n| (4y/2)/\nu > Re_*$ ならば $k_{i+1/2,1}^{n+1/2}, \epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2}$ を次式の wall function 法⁹⁾で求める。

$$k_{i+1/2,1}^{n+1/2} = \frac{(u_{*i+1/2}^n)^2}{\sqrt{c_{\mu\infty}}}, \quad \epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2} = \frac{|(u_{*i+1/2}^n)^3|}{\kappa (4y/2)}$$

$|u_{*i+1/2}^n| (4y/2)/\nu < Re_*$ ならば wall function 法でなく次式を用いる。

$$\begin{aligned} & \frac{k_{i+1/2,1}^{n+1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{k_{i+1/2,1}^{n-1/2} U_{i+1,1}^n - k_{i-1/2,1}^{n-1/2} U_{i,1}^n}{\Delta x} + \frac{k_{i+1/2,1}^{n-1/2} V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\ &= D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} \right)^2 + \frac{D_{i+1,1}^{n-1/2} (k_{i+3/2,1}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}) - D_{i,1}^{n-1/2} (k_{i+1/2,1}^{n-1/2} - k_{i-1/2,1}^{n-1/2})}{\sigma_* \Delta x^2} \\ &+ \frac{D_{i+1/2,3/2}^{n-1/2} \frac{k_{i+1/2,2}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y}}{\sigma_* \Delta y} + \nu \frac{\frac{k_{i+1/2,2}^{n-1/2} - k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y} - \frac{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y/2}}{\Delta y} + \nu \frac{k_{i+3/2,1}^{n-1/2} - 2k_{i+1/2,1}^{n-1/2} + k_{i-1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta x^2} \\ &- \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} - 2\nu \left(\frac{\sqrt{k_{i+1/2,2}^{n-1/2}} - \sqrt{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}}}{\Delta y} \right)^2 \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} U_{i+1,1}^n - \epsilon_{i-1/2,1}^{n-1/2} U_{i,1}^n}{\Delta x} + \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\ &= c_{*1} \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}} D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} \right)^2 - c_{*2} \frac{(\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2})^2}{k_{i+1/2,1}^{n-1/2}} \\ &+ \frac{D_{i+1,1}^{n-1/2} (\epsilon_{i+3/2,1}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}) - D_{i,1}^{n-1/2} (\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} - \epsilon_{i-1/2,1}^{n-1/2})}{\sigma_* \Delta x^2} + \nu \frac{\epsilon_{i+3/2,1}^{n-1/2} - 2\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2} + \epsilon_{i-1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta x^2} \\ &+ \frac{D_{i+1/2,3/2}^{n-1/2} \frac{\epsilon_{i+1/2,2}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y}}{\sigma_* \Delta y} + \nu \frac{\frac{\epsilon_{i+1/2,2}^{n-1/2} - \epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y} - \frac{\epsilon_{i+1/2,1}^{n-1/2}}{\Delta y/2}}{\Delta y} \\ &+ 2\nu D_{i+1/2,1}^{n-1/2} \left(\frac{\frac{U_{i+1/2,2}^n - U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y} - \frac{U_{i+1/2,1}^n}{\Delta y/2} \right)^2 \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

このように求められた $u_{*i}^n, k_{i+1/2,1}^{n+1/2}, \epsilon_{i+1/2,1}^{n+1/2}$ を用いて $U_{i,1}^{n+1}$ を次式で求める。

$$\begin{aligned} & \frac{U_{i,1}^{n+1} - U_{i,1}^n}{\Delta t} + \frac{U_{i+1,1}^n U_{i+1/2,1}^n - U_{i-1,1}^n U_{i-1/2,1}^n}{\Delta x} + \frac{U_{i,1}^n V_{i+1/2,2}^n}{\Delta y} \\ &= -\frac{1}{\rho_*} \frac{p_{i+1/2,1}^n - p_{i-1/2,1}^n}{\Delta x} - \frac{\overline{u^2}_{i+1/2,1} - \overline{u^2}_{i-1/2,1}}{\Delta x} + \nu \frac{U_{i+1,1}^n - 2U_{i,1}^n + U_{i-1,1}^n}{\Delta x^2} \\ &+ D_{i,3/2}^{n+1/2} \frac{U_{i,2}^n - U_{i,1}^n}{\Delta y^2} + \nu \frac{U_{i,2}^n - U_{i,1}^n}{\Delta y^2} - \frac{(u_* |u_*|)_i^n}{\Delta y} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

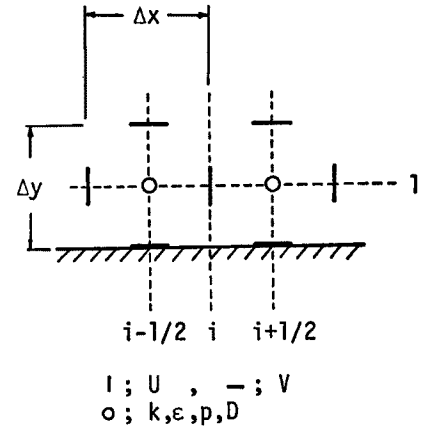


Fig. 2 Boundary conditions on the bottom wall.

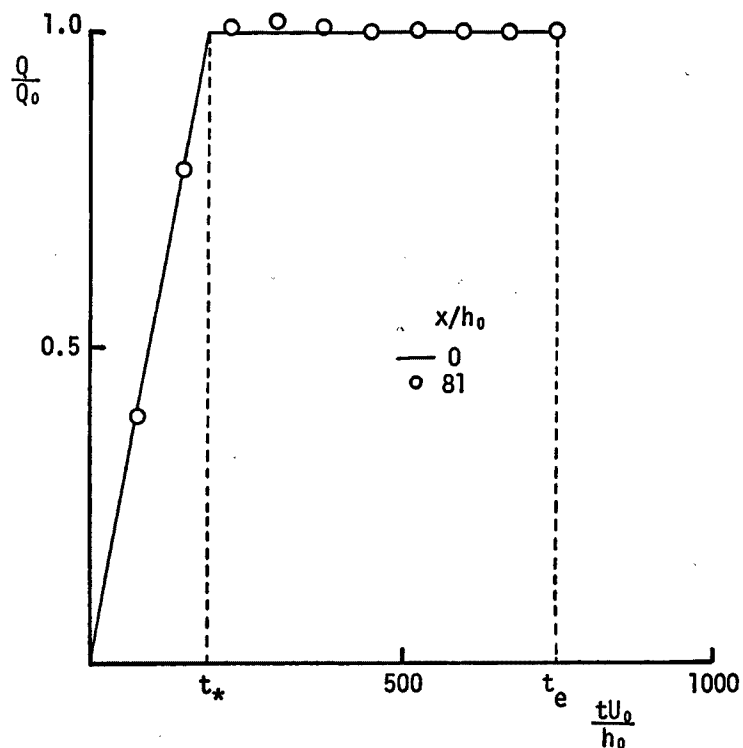


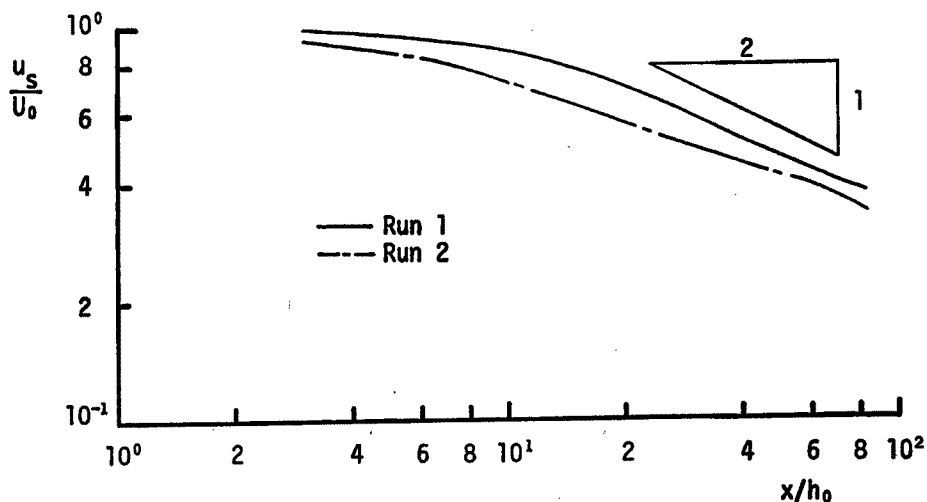
Fig. 3 Relation between discharge and time (Run1).

Table 2 Nondimensional parameters for numerical analysis

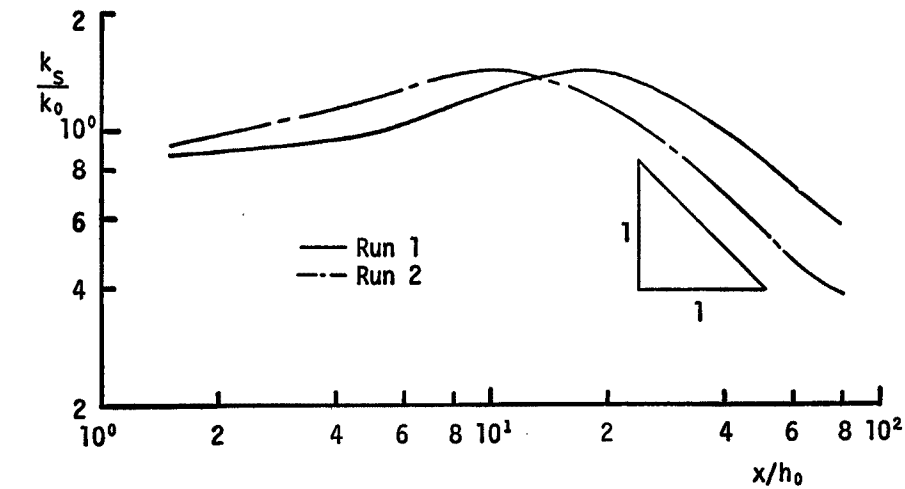
	α	β	Fr_0	Re
Run 1	0.001	0.02	0.3	940
Run 2	0.001	0.03	0.3	940

上式中 $U_{i+1/2,1}^n = (U_{i+1,1}^n + U_{i,1}^n)/2$, $D_{i,1}^{n-1/2} = (D_{i-1/2,1}^{n-1/2} + D_{i-1/2,1}^{n-1/2})/2$, $D_{i+1/2,2}^{n-1/2} = (D_{i+1/2,2}^{n-1/2} + D_{i+1/2,1}^{n-1/2})/2$ 。また, a, b, c は上流差分のパラメータ。基準値 Re_* は50とした。

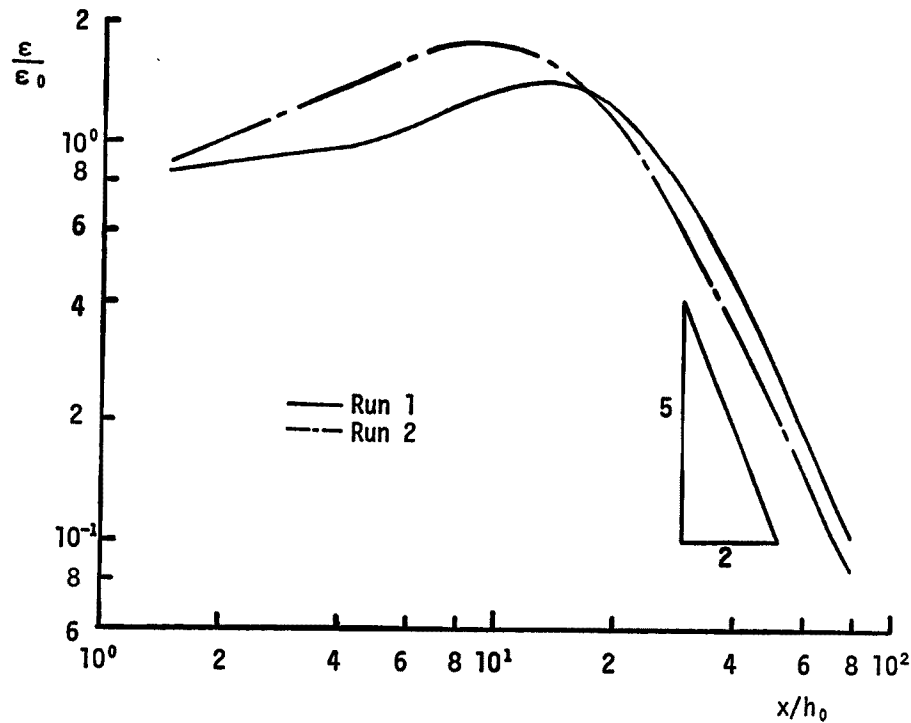
放出口での流量は Fig. 3 に示すような時間の関数とした。本研究では $t_*/t_e = 1/4$ である。計算のパラメータを無次元量



(a) Surface velocity



(b) Turbulent kinetic energy



(c) Turbulent kinetic energy dissipation rate

Fig. 4 Attenuation of the hydraulic variables at the surface layer.

$$\alpha = \frac{\epsilon_0 h_0}{U_0^3}, \quad \beta = \frac{h_0}{U_0^2}, \quad Fr_0 = \frac{U_0}{\sqrt{g h_0}}, \quad Re = \frac{U_0 h_0}{\nu} \quad \left(U_0 = \frac{Q_0}{h_0} \right)$$

を導入して、Table 2 に示した。記号の説明は Fig. 1 に示した通りである。差分間隔は $\Delta x/h_0=3$, $\Delta y/h_0=0.5$, $\Delta t \cdot U_0/h_0=0.094$ とし、 $H_0/h_0=30$, $L/h_0=81$ とした。

2.3 計算結果の検討

まず下流端流量の経時変化を Fig. 3 に示している。著者等の以前の計算^{7),9)}でみられた様な振動は示さず、

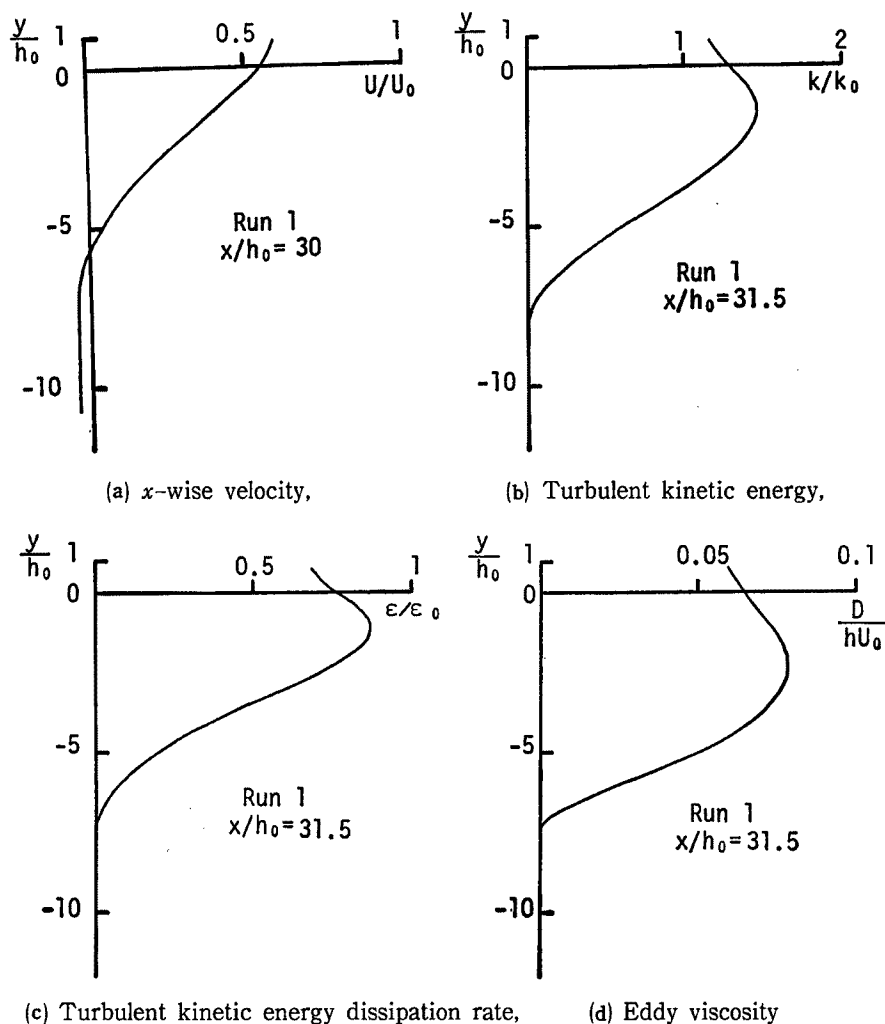


Fig. 5 Vertical distributions of hydraulic variables (Run 1).

ほぼ定常状態に達している。次に、ほぼ定常状態での表層流速、乱れエネルギー、エネルギー散逸率の流下方向への減衰過程を Fig. 4(a), (b), (c) に示した。また、Run 1 での x 方向の流速、乱れエネルギー、エネルギー散逸率、渦動粘性係数の鉛直分布を Fig. 5(a), (b), (c), (d) に示した。従来の計算結果とはほぼ同様である。

3. 密度流での ϵ - 方程式に関する検討

ϵ -方程式は時間平均流速、変動流速の成分を U_i, u'_i ($i=1, 2, 3$) と記せば次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} = & -2\nu \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2\nu \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} - 2\nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \\ & - 2 \left(\nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_k \partial x_j} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\overline{u'_j \epsilon'} + \frac{2\nu}{\rho_a} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial p'}{\partial x_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j^2} + 2\nu \frac{g_i}{\rho_a} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \dots \quad (9) \end{aligned}$$

ここに、総和の規約を用いている。最後の項が浮力項であり、従来考慮していない場合^{2), 10)}と考慮している場合^{11), 12), 13)}がある。本節では homogeneous shear flow turbulence に関する Hinze⁵⁾ の定式化を用いて、

ε-方程式の表示について簡単な考察を行う。

Fig. 6 に示すような流速と密度が x_2 の方向にのみ線形に変化する流れを考える。Hinze に従い、乱流構造の一様性を仮定したときの基礎式は次式となる。(ただし、Hinze が行っている全座標軸の反転による不変性は用いない。)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}(q, t) + \mathbf{P}(q, t) \frac{dU_1}{dx_2} \\ = \mathbf{F}(q, t) - 2\nu q^2 \mathbf{E}(q, t) - g \cdot \mathbf{G}(q, t) \quad \dots\dots(10) \end{aligned}$$

$\mathbf{E}(q, t)$, $\mathbf{P}(q, t)$, $\mathbf{F}(q, t)$, $\mathbf{G}(q, t)$ は次式で定義される。 q は波数ベクトル $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ の大きさ。

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(q, t) &= 2\pi q^2 [\mathbf{E}_{i,i}(q_1, q_2, q_3, t)]_{av}, \\ \mathbf{P}(q, t) &= 2\pi q^2 \left[(\mathbf{E}_{2,1})_{av} + (\mathbf{E}_{1,2})_{av} - \left(q_1 \frac{\partial \mathbf{E}_{i,i}}{\partial q_2} \right)_{av} \right] \frac{dU_1}{dx_2}, \\ \mathbf{F}(q, t) &= 2\pi q^2 [\mathbf{F}_{i,i}(q_1, q_2, q_3, t)]_{av}, \\ \mathbf{G}(q, t) &= 2\pi q^2 [(\mathbf{G}_{\rho,2})_{av} + (\mathbf{G}_{2,\rho})_{av}] \end{aligned}$$

$(\cdot)_{av}$ は $q = \text{const.}$ の球面での平均を表す。上式中、 $\mathbf{E}_{i,j}$, $\mathbf{F}_{i,j}$, $\mathbf{G}_{\rho,i}$, $\mathbf{G}_{i,\rho}$ の定義は次式で表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_{i,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_i \xi_i) dq_1 dq_2 dq_3, \\ \mathbf{F}_{i,j}(q_1, q_2, q_3, t) &= iq_k (-\mathbf{F}_{i,kj} + \mathbf{F}_{ikj}), \\ \mathbf{S}_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{ik,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_i \xi_i) dq_1 dq_2 dq_3, \\ \mathbf{S}_{i,kj}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}_{i,kj}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_i \xi_i) dq_1 dq_2 dq_3, \\ \mathbf{R}_{\rho,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{\rho,j}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_i \xi_i) dq_1 dq_2 dq_3, \\ \mathbf{R}_{j,\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_{j,\rho}(q_1, q_2, q_3, t) \exp(iq_i \xi_i) dq_1 dq_2 dq_3, \\ \mathbf{Q}_{i,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \overline{(u'_i)_A (u'_j)_B}, \\ \mathbf{S}_{ik,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \overline{(u'_i)_B (u'_j)_A (u'_k)_A}, \quad \mathbf{S}_{i,kj}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u'_i)_A (u'_k)_B (u'_j)_B}, \\ \mathbf{R}_{\rho,j}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) &= \overline{(u'_j)_B \frac{(\rho')_A}{\rho_a}}, \quad \mathbf{R}_{j,\rho}(\xi_1, \xi_2, \xi_3, t) = \overline{(u'_j)_A \frac{(\rho')_B}{\rho_a}} \end{aligned}$$

ここに、A, B は相関をとる点の位置であり、 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ は A と B の位置ベクトルの差 $\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A$ を表す。

(10)式を 0 から無限大まで積分すれば

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{u'_1 u'_2} \frac{dU_1}{dx_2} = -\epsilon - g \frac{\overline{\rho' u'_2}}{\rho_a} \quad \dots\dots(11)$$

となる。

次に空間的な長さのスケール

$$L = \frac{1}{k} \int_0^{\infty} \frac{\mathbf{E}(q)}{q} dq \quad \dots\dots(12)$$

を定義し、 L が $k^{3/2}/\epsilon$ に比例すると考える。 $\mathbf{E}' = \mathbf{E}/kL$, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}/k^{3/2}$, $\mathbf{P}' = \mathbf{P}/\overline{u'_1 u'_2} L$, $\mathbf{G}' = \mathbf{G}/(\overline{\rho' u'_2} L/\rho_a)$ が $q' = qL$ で普遍関数表示で示されると仮定する。(10)式に $1/q$ を乗じ 0 から無限大まで積分した後、(11)式を用いて整理すれば次式を得る。

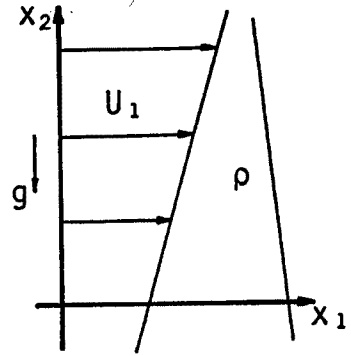


Fig. 6 Definition sketch.

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} = \left(\frac{5}{2} - c_1 \right) (-\overline{u'_1 u'_2}) \frac{\epsilon}{k} \frac{dU_1}{dx_2} - \left(c_2 + \frac{5}{2} \right) \frac{\epsilon^2}{k} + \frac{c_3}{Re_\tau} - \left(\frac{5}{2} - c_4 \right) g \frac{\epsilon}{k} \frac{\overline{\rho' u'_2}}{\rho_a} \dots (13)$$

ここに, c_1, c_2, c_3, c_4 は定数である。(13)式中, 右辺第3項は, Re_τ が十分大きいとき無視される。最後の項が浮力項である。これらの表示は, 異なる長さのスケールを用いれば当然異なってくるが, (13)式が現在用いられている最も簡単な表示であり, 本研究でもこの表示を用いる。

4. 二次元 Buoyant Surface Jet の数値解析

4.1 基礎式

本章では, Launder の成層流の乱流構造に関する研究¹⁾ を $k-\epsilon$ モデルに取り入れた Gibson・Launder の研究²⁾ を基に, 二次元 Buoyant Surface Jet の数値解析を行う。その際, ϵ -方程式の浮力項 (3. の表示を用いる)。

$$-2\nu \frac{g}{\rho_a} \frac{\partial \rho'}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u'_2}}{\partial x_k} = -c_{\epsilon_3} g \frac{\epsilon}{k} \frac{\overline{\rho' u'_2}}{\rho_a}$$

の係数 c_{ϵ_3} をパラメータとする。 $c_{\epsilon_3}=0$ はこの項を考慮しない場合であり, 著者等の以前の計算³⁾ では, 水温分布に関する実験結果を再現できなかった。

基礎式は次式のようになる。ただし, 用いる座標系, 記号の説明は Fig. 1 と同様の Fig. 7 である。

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \dots (14)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{u'v'}) + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right) \dots (15)$$

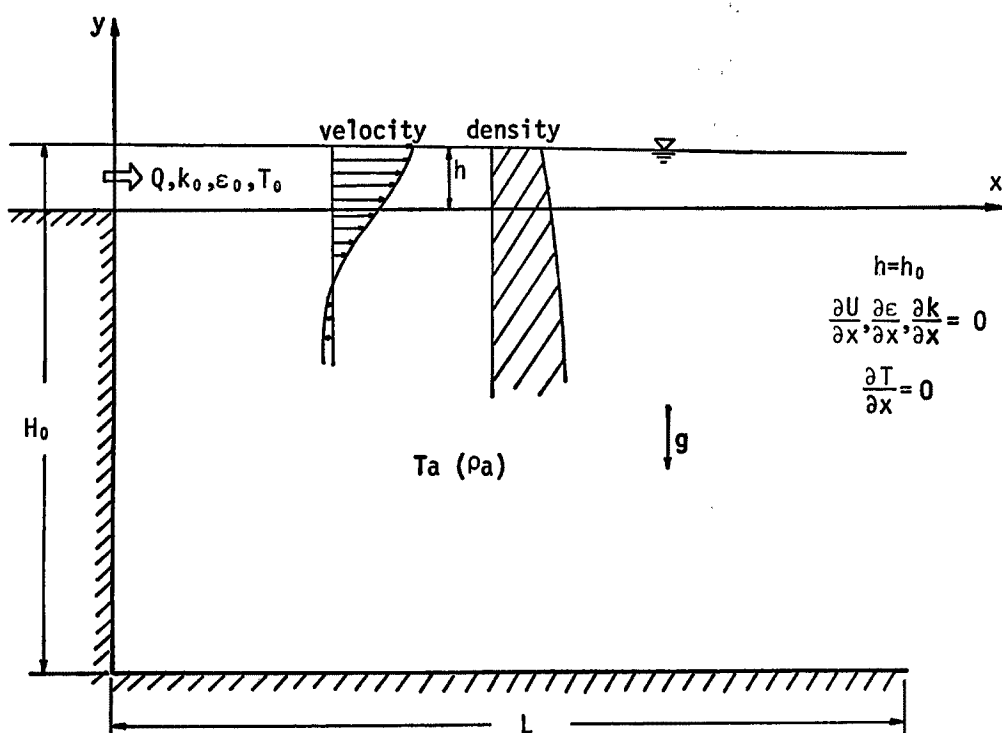


Fig. 7 Coordinate system.

$$0 = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial y} - g \frac{\rho}{\rho_a} \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (-\overline{u'T'}) + \frac{\partial}{\partial y} (-\overline{v'T'}) + \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \dots\dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial t} + U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = & -\overline{u'v'} \frac{\partial U}{\partial y} (1-R_f) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D_{mz}}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D_{mz}}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial y} \right] \\ & - \epsilon - 2\nu \left(\frac{\partial k^{1/2}}{\partial y} \right)^2 \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = & c_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} D_{mz} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{D_{mz}}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{D_{mz}}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right] \\ & + 2\nu D_{mz} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)^2 + c_{\epsilon 3} \frac{g}{\rho_a} \frac{\epsilon}{k} D_{mz} \frac{\partial \rho}{\partial y} - c_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \quad \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} -\overline{u'v'} &= f_\mu \cdot \beta \cdot \frac{\overline{v'^2 k}}{\epsilon} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = D_{mz} \frac{\partial U}{\partial y}, \\ \frac{\overline{u'^2}}{k} &= 0.94 + 0.41 \frac{R_f}{1-R_f}, \quad \frac{\overline{v'^2}}{k} = 0.53 - 0.41 \frac{R_f}{1-R_f} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$-\overline{v'T'} = f_\mu \cdot \gamma \cdot \frac{\overline{v'^2 k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y} = D_{mz} \frac{\partial T}{\partial y}, \quad -\overline{u'T'} = \phi_T \left(1 + 0.5 \frac{\gamma}{\beta} \right) \frac{\overline{u'v'k}}{\epsilon} \frac{\partial T}{\partial y} \dots\dots\dots(21)$$

上式中, f_μ , $c_{\epsilon 2}$, γ , β は次式で表せる。

$$f_\mu = \exp \left(-\frac{2.5}{1 + Re_T/50} \right), \quad c_{\epsilon 2} = c_{\epsilon 2\infty} (1.0 - 0.3 \exp(-Re_T^2)),$$

$$\gamma = \phi_T \frac{1.59 - 5.22 R_f}{1.59 - 2.82 R_f}, \quad \beta = \sigma_\epsilon = \frac{\phi}{\phi_T} \cdot \frac{1 + 0.8 \phi_T B - 0.5 \phi_T^2 B}{1 + \phi \phi_T}$$

(18), (19) 式中, D_{mz} は D_{mz} と等置した。また, 乱れ Reynolds 数 Re_T , flux Richardson 数 R_f , B は次式で定義される。

$$Re_T = \frac{k^2}{\nu \epsilon}, \quad R_f = \frac{\overline{g v' \rho'}}{\rho_a (-\overline{u'v'}) \frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{\alpha g (-\overline{v'T'})}{T_a (-\overline{u'v'}) \frac{\partial U}{\partial y}},$$

$$B = \frac{1}{\phi_T} \cdot \frac{3R_f}{1.59 - 5.22 R_f} \quad (\alpha; \text{無次元体積膨張係数})$$

R_f は gradient Richardson 数 $R_i = -g \partial \rho / \partial y / \rho_a (\partial U / \partial y)^2$ を計算した後, R_i と R_f の関係式 $R_i = \sigma_i R_f$ より求める。定数の値は通常の k - ϵ 定数 $c_{\epsilon 1} = 1.44$, $c_{\epsilon 2\infty} = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\epsilon = 1.3$ と, Launder が用いている $\phi = 0.2$, $\phi_T = 1/3.2$ である。

本研究で用いる R_f と R_i の関係と, Mellor¹⁴⁾ の研究を基にした Yamada¹⁵⁾ の提案する

$$\begin{aligned} R_f = & \frac{1}{2} \frac{A_2 E_5}{A_1 E_4} \left[R_i + \frac{A_1 E_3}{A_2 E_5} \right. \\ & \left. - \left\{ R_i^2 + 2 \frac{A_1}{A_2} \frac{E_3 E_5 - 2 E_1 E_4}{E_5^2} R_i + \left(\frac{A_1 E_3}{A_2 E_5} \right)^2 \right\}^{1/2} \right] \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(22)$$

$$E_1 = B_1 - 6A_1,$$

$$E_2 = B_1 + 12A_1(1 - C_2) + 3B_2(1 - C_3),$$

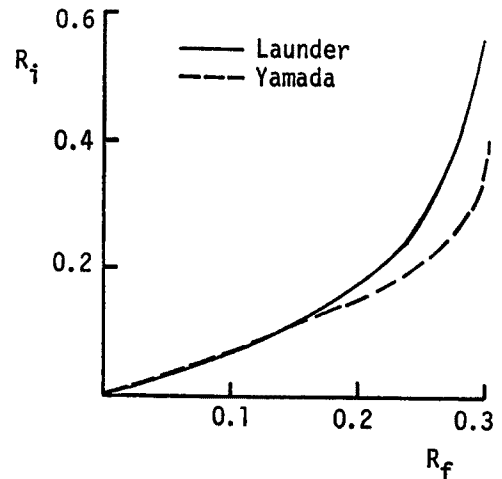


Fig. 8 Relation between R_f and R_i .

$$E_3 = B_1(1-3C_1) - 6A_1, \quad E_4 = B_1(1-3C_1) + 12A_1(1-C_2) + 9A_2(1-C_2),$$

$$E_5 = B_1 + 3A_1(1-C_2) + 3B_2(1-C_3)$$

$$(A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, C_3) = (0.78, 0.79, 15, 8, 0.056, 0.3, 0.33)$$

を Fig. 8 に示した。両者は R_f の小さい領域で一致し、 R_f の増加とともに急激に増加して行く。

4.2 計算条件

計算の境界条件は 2. で述べた simple jet の解析と同様である。放出口において流量、 $k=k_0$, $\epsilon=\epsilon_0$ さらに $T=T_0$ を与えた。下流端でも、水位一定、その他の水理量は $\partial \cdot \partial x = 0$ とした。また、水路床の影響はその近傍に限られると考えて、水路床では簡単に $\partial \cdot / \partial y = 0$ ($V=0$) とした。自由表面でも U, k, ϵ について $\partial / \partial y = 0$ とした。

基礎式に現れる k/ϵ , ϵ/k と gradient Richardson 数 $R_i = -g\partial\rho/\partial y/\rho_s(\partial U/\partial y)^2$ の計算の際、 $k \rightarrow 0$, $\epsilon \rightarrow 0$ あるいは $\partial\rho/\partial y \rightarrow 0$, $\partial U/\partial y \rightarrow 0$ のときの発散を防ぐため、微小な基準 $\Delta\epsilon$, Δk , ΔU を設け、 $\epsilon_{i+1/2,j} < \Delta\epsilon$, $k_{i+1/2,j} < \Delta k$, $U_{i,j+1} - U_{i,j-1} < \Delta U$ の時各々 $k/\epsilon \rightarrow 0$, $\epsilon/k \rightarrow 0$, $R_i \rightarrow 0$ とした。本研究では $\Delta\epsilon = 0.01\epsilon_0$, $\Delta k = 0.01 \cdot k_0$, $\Delta U = 0.01$ (cm/s) とした。

計算の水理諸量は比較する実験条件に合わせ Table 3 のようにした。また、 ϵ -方程式の浮力項の係数 c_{ϵ_3} は 0 と 2 の二通りとした。 $c_{\epsilon_3} = 0$ は浮力項を考慮しない場合である。放出口の k, ϵ に関するパラメータは $\alpha = 10^{-3}$, $\beta = 10^{-2}$ とした。

Table 3 Hydraulic variables of experiment and calculation

	h_0 (cm)	U_0 (cm/s)	Ta (deg.)	T_0 (deg.)	$\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_s}$	Fr_d	Re
Exp.	1.15	10.6	13.1	34.3	0.0051	4.41	1650

$$Fr_d = \frac{U_0}{\sqrt{\frac{\rho_s - \rho_0}{\rho_s} g h_0}}$$

4.3 計算結果の検討

まず Fig. 9(a)~(d) に水温分布の実験結果と計算結果を示した。 $c_{\epsilon_3} = 0$ では水温の成層化は見られず、ほぼ直線分布となっている。 $c_{\epsilon_3} = 2$ では実験結果に見られる水温分布の急激な成層化過程がほぼ再現されている。 ϵ -方程式の浮力項の効果は、 k -方程式との関係により複雑であるが、 ϵ -方程式のみを考えれば、水温こう配（密度こう配）の大きい領域で ϵ を減少させる。 ϵ が減少すればその領域で D_m , D_r の値が大きくなる。ただし、 D_m , D_r は Richardson 数の関数でもあり、水温急変部では R_i が大きくなり、 D_m , D_r を 0 にする。 ϵ -方程式の浮力項の効果が顕著なのは、Fig. 10 の D_m の分布形を見れば解るように、大きな Richardson 数により D_m が 0 となる領域よりもやや上方であり、この部分で大きな混合が起こり、成層化を促進して行くと考えられる。

Fig. 11(a)~(c) には流速 U, k, ϵ の分布形を示した。 $c_{\epsilon_3} = 0$ の場合は 2. の Fig. 5 に示した simple jet の場合と同様であるが、 $c_{\epsilon_3} = 2$ の場合には水温分布と同様の成層化が見られる。

5. 結 語

本研究は、乱流モデルを用いて Buoyant Surface Jet の数値解析を試みたものである。基礎式は、応力モデルに至る一歩手前として、密度流での応力モデルの基本となる Launder の研究を k - ϵ モデルに組み

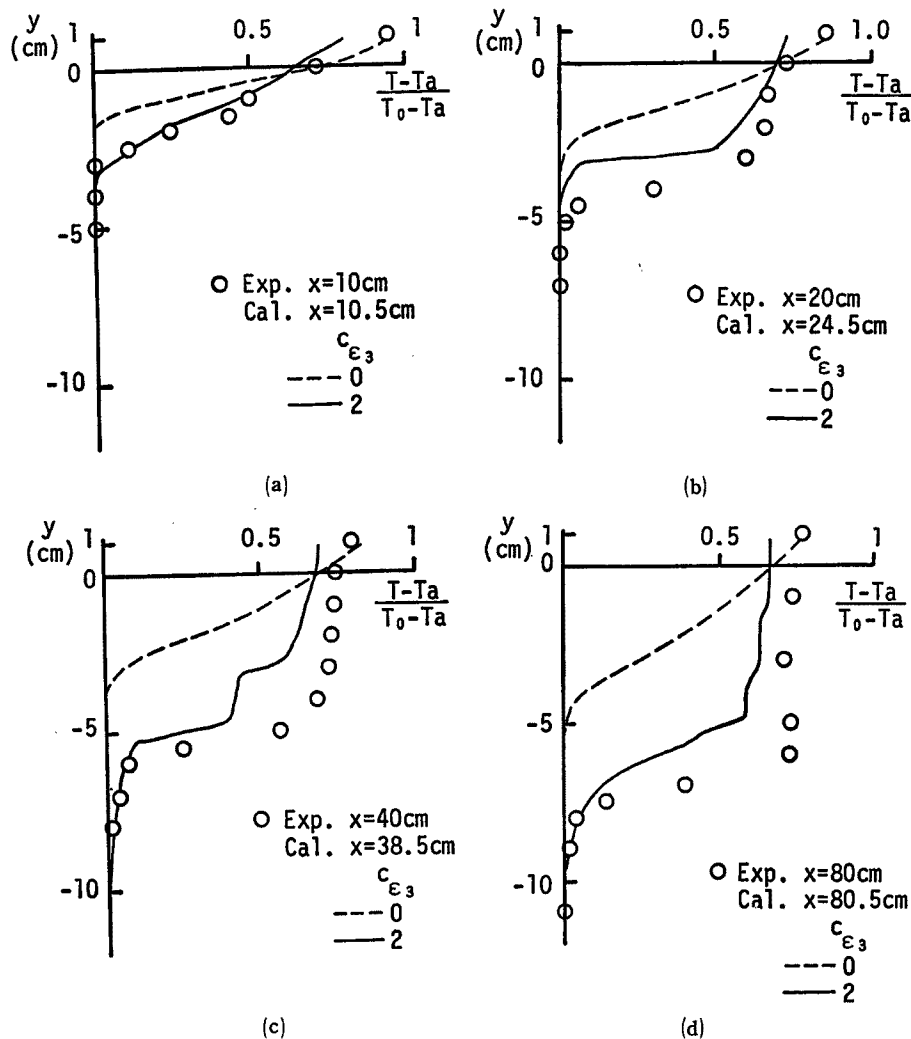


Fig. 9 Vertical distributions of water temperature.

込んだ Gibson・Launder の研究を基にしている。得られた結論をまとめれば次のようになる。

- ① まず、乱れ Reynolds 数が低い領域を含む $k-\epsilon$ モデル (Jones・Launder モデル) により、著者等が以前に行った周囲流体と同一の密度で放出される simple jet の解析を行った。路床近傍での取り扱いを詳述し、計算結果を示した。結果は以前と同様であるが、流量の振動は示していない。
- ② 密度流での ϵ -方程式に関して、homogeneous shear flow turbulence と constant spectral shape の仮定を用いた簡単な考察を行った。長さのスケールとして $k^{3/2}/\epsilon$ を用いれば浮力項に関する最も簡単な表示となる。
- ③ ϵ -方程式の浮力項の係数 c_{ϵ_3} をパラメータとして

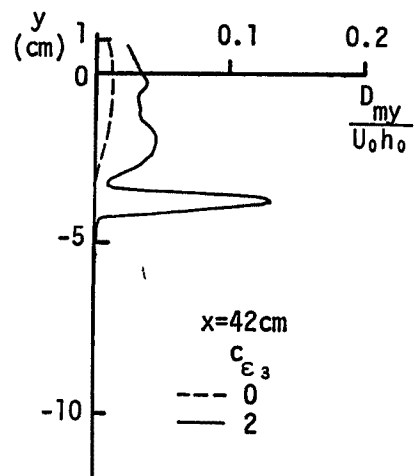


Fig. 10 Vertical distribution of eddy viscosity.

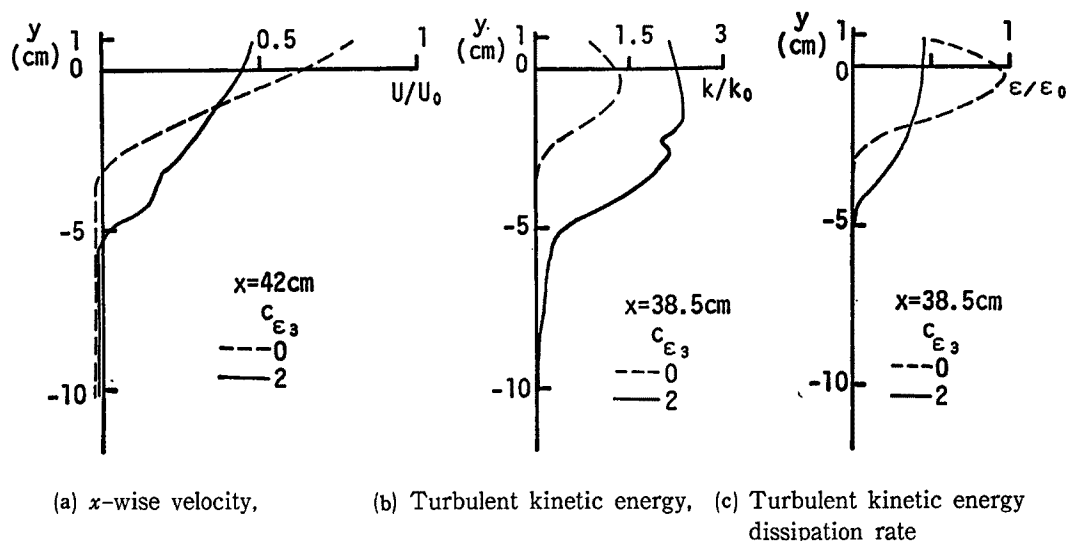


Fig.11 Vertical distributions of hydraulic variables.

buoyant surface jet の数値解析を試みた。 $c_{\epsilon_3}=0$ のとき従来の計算と同様、水温の成層化の再現はできないが、 $c_{\epsilon_3}=2$ のとき、急激な成層化が見られ、実験結果ともほぼ適合している。これは、 ϵ -方程式の浮力項の効果のため、急激な水温こう配により $D_m, D_T=0$ となる領域よりやや上方の部分で局所的に大きな D_m, D_T を示すためと考えられる。 U, k, ϵ にも成層化が見られる。

今後、応力モデルを用いて解析結果の再検討を行いたい。

最後に、本研究を行うにあたって協力をおしめなかった坂井伸一氏（京都大学大学院）に心より感謝します。

参 考 文 献

- 1) Launder, B.E. : On the Effects of a Gravitational Field on the Turbulent Transport of Heat and Momentum, J. Fluid Mech., Vol. 67, 1975, pp. 569~581.
- 2) Gibson, M.M. and B.E. Launder : On the Calculation of Horizontal Turbulent Free Shear Flows under Gravitational Influence, J. Heat Transfer, Tran. ASME, 98c, 1976, pp. 81~87.
- 3) 松井健一・岩佐義朗・細田 尚 : $k-\epsilon$ モデルの Buoyant Surface Jet への適用, 土木学会第39回年次講演会概要集, 1984.
- 4) 白畑智幸・岩佐義朗・細田 尚 : Buoyant Surface Jet における成層化過程について, 土木学会第40回年次講演会概要集, 1985.
- 5) Hinze, J.O. : Turbulence, 2nd edn., McGraw-Hill, 1975.
- 6) Jones, W.P. and B.E. Launder : The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, 1972, pp. 301~314.
- 7) 細田 尚・岩佐義朗・余越正一郎 : $k-\epsilon$ モデルによる水理解析に関する二、三の検討, 京都大学防災研究所年報第27号 B-2, 1984, pp. 419~432.
- 8) Hosoda, T., Y. Iwasa and S. Yokosi : Hydraulic Analysis of Turbulent Jets by means of $k-\epsilon$ Models, Kyoto Univ., School of Civil Eng., Research Report No. 84-HY-01, 1984.
- 9) Launder, B.E. and D.B. Spalding : The Numerical Computation of Turbulent Flow, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering 3, 1974, pp. 269~289.

- 10) McGuirk, J. J. and C. Papadimitriou: Buoyant Surface Layers under Fully Entraining and Internal Hydraulic Jump Conditions, Fifth Symposium of Turbulent Shear Flows, August 7-9, 1985, Cornell Univ. Ithaca, New York, pp. 22.33~22.41.
- 11) Plumb, O. A. and L. A. Kennedy: Application of the k - ϵ Turbulence Model to Natural Convection from a Vertical Isothermal Surface, J. Heat Transfer, Trans. ASME, 99, C1, 1977, pp. 79~85.
- 12) Zeman, O. and J. L. Lumley: Buoyancy Effects in Entraining Turbulent Boundary Layers: a Second Order Closure Study, Turbulent Shear Flows I, Springer Verlag, Heidelberg, 1979, pp. 295~306.
- 13) André, J. C., G. De Moor, P. Lacarrère, G. Therry and R. du Vachat: The Clipping Approximation and Inhomogeneous Turbulence Simulations, Turbulent Shear Flows I, Springer Verlag, Heidelberg, 1979, pp. 307~318.
- 14) Mellor, G. L. : Analytical Prediction of Properties of Stratified Planetary Surface Layer, J. Atmospheric Science, Vol. 30, 1973, pp. 1061~1069.
- 15) Yamada, T. : The Critical Richardson Number and the Ratio of the Eddy Transport Coefficient Obtained from a Turbulent Closure Model, J. Atmospheric Science, Vol. 32, 1975, pp. 926~933.