

湖の流れの数値解析に関する基礎的研究

申 輝華・岩佐 義朗・井上 和也

A STUDY ON THE NUMERICAL SIMULATION OF LAKE FLOWS

By Huihua SHEN, Yoshiaki IWASA and Kazuya INOUE

Synopsis

This present paper adopts an operator splitting method which is getting more and more wide applications recently, and deals with a simplified model basin three-dimensionally as the first step to simulate the flows in actual lakes. The characteristics of large scale flows such as internal Kelvin wave, Poincare wave in this basin are analysed and the operator splitting method is described here in detail.

1. 緒 言

湖沼の水質や環境を考えるとときの水理学的側面の問題の一つとして、湖沼における大規模な流れやそれに伴う物質輸送の解析がある。このような流れは、一般に時間的には非定常であるとともに空間的には三次元的構造を有しており、さらに湖盆形状、気象条件、流入・出河川および成層の有無の影響を受けてきわめて複雑な挙動を示している。本報は、これらの流れおよび物質輸送を解析するための有効な手段として、近年広く適用が図られている数値解析による方法について研究した結果であって、水深方向に静水圧分布が仮定されるような三次元の流れを対象に、差分法を適用したときのオペレータ・スプリッティング法を展開するとともに、研究の第一段階として単純な形状の水域における成層のある流れの数値解析を実施しその特性について若干の検討を行ったものである。

差分法による湖の流れの三次元的数値解析法について、著者らの一部はさきに explicit な形式の leap-frog 法を展開し、二、三の解析を試みた^{1),2)}。この方法は、explicit 法であるので計算式は簡単であるが、C. F. L. 条件³⁾の制約（すなわち、空間差分の大きさと時間差分の大きさの比が表面重力波の伝播速度より大きくなければならない）を受けるため、比較的小さい時間差分を採らなければ安定な計算が行えず、したがって湖における中規模あるいは大規模の流れを長期間にわたって解析するには膨大な計算時間を要するという問題があった。explicit 法を採る限り避けられない C. F. L. 条件の制約を克服するため、implicit 法による計算式がいくつか展開⁴⁾されているが、完全な implicit 法の場合大きな時間差分が許容される代わりに、一回の時間ステップ内に繰り返しの収束計算が含まれ、そのために時間を要し全体として期待されるほどの計算時間の短縮にならないことがある。本研究ではこれらのことを考えて、一回の時間ステップを三段階に分割し、それぞれの段階で計算される項の特性に応じた計算法を適用し、部分的に implicit 法を用いるが繰り返しの収束計算を使わずに二重掃出法によって解を求める、オペレータ・スプリッティング法を展開することにする。

湖沼の流れの三次元数値解析に関しては従来、循環流、吹送流、静振および密度流などが主として扱われていた。本研究では、これまでに数値解析の例の少ない成層した湖における内部ケルビン波、内部ポアンカレ波などの内部モードおよびそれに伴う流れについて考察する。これらは二層モデルによって理論的

に解析されているが、成層が二層モデルで置き換えられるほどには発達していなくて連続的な密度分布とみなさなければならない場合を考えて、多層モデルによって三次元解析をすすめる。

2. 基礎方程式および境界条件

2.1 基礎方程式

本研究で扱うような、時間スケールが数時間で、空間スケールが全湖にわたる大規模な流れの場合、水平方向のスケールが鉛直方向のスケールよりはるかに大きいので、鉛直方向の流速は水平方向のそれに比べてかなり小さいとする、いわゆる浅水近似が適用されて、水深方向の圧力は静水圧分布で近似される。また、さらにブシネスク近似を用いると、流れを記述する基礎方程式として次式が成立する。

連続方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

運動方程式

x-方向

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(vu)}{\partial y} + \frac{\partial(wu)}{\partial z} = fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

y-方向

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(wv)}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

z-方向

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (4)$$

密度の偏差に関する拡散方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \rho}{\partial t} + \frac{\partial(u \Delta \rho)}{\partial x} + \frac{\partial(v \Delta \rho)}{\partial y} + \frac{\partial(w \Delta \rho)}{\partial z} \\ = Q + \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial \Delta \rho}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial \Delta \rho}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

ここに、x, y および z: 座標系 (Fig. 1 を参考), u, v および w: それぞれ x, y および z 方向の流速, f: コリオリの因子, A_x, A_y および A_z: それぞれ x, y および z 方向の渦動粘性係数, ρ: 水の密度, ρ₀: 水の基準密度 (4℃における密度), Δρ: 密度の偏差 (=ρ-ρ₀), K_x, K_y および K_z: それぞれ x, y および z 方向の渦動拡散係数, Q: 熱の生成項である。

渦動粘性係数および拡散係数は次のように定める。すなわち、水平方向の渦動粘性係数および渦動拡散係数は全湖

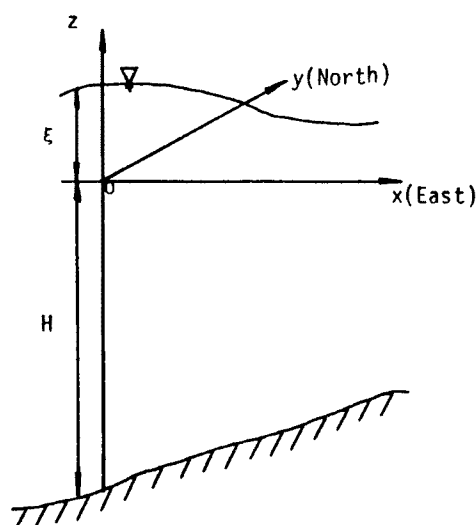


Fig. 1. Definition sketch.

にわたって一定とみなす。また、鉛直方向の渦動粘性係数および渦動拡散係数は成層の安定性を表す Richardson 数 (R_i) の関数として次のように与える。

$$\begin{aligned} A_z &= A_v = A_{v0} e^{-1.5R_i} \\ K_z &= K_v = K_{v0} e^{-3.0R_i} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、

$$R_i = -\frac{g \frac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho_0 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

であり、 A_{v0} ：中立状態の鉛直方向の渦動粘性係数、 K_{v0} ：中立状態の鉛直方向の渦動拡散係数、 \bar{u} ：水平方向の平均流速である。ただし、本研究では、 $d\rho/dz > 0$ （静的不安定）のときには瞬時に対流が起こるとしているため、 $R_i < 0$ は生じない。また、密度は温度のみの関数として与える。

2.2 境界条件

(1) 湖面 ($z=\xi$) での境界条件

運動学的条件：

$$w_s = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_s \frac{\partial \xi}{\partial x} + v_s \frac{\partial \xi}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (8)$$

水面におけるせん断応力：

$$\begin{aligned} (\tau_{sx}, \tau_{sy}) &= \rho_a A_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{z=\xi} \\ &= \rho_a \nu_a^2 (W_x, W_y) \sqrt{W_x^2 + W_y^2} \quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

水面における熱交換：

$$K_v \frac{\partial \Delta \rho}{\partial z} = \frac{\alpha Q_0}{C_p} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、添字 s は水面における量であり、 τ_{sx} および τ_{sy} ：風によるせん断応力の x および y の方向成分、 W_x および W_y ：風速の x および y 方向成分、 ρ_a ：空気密度、 ν_a^2 ：水面の摩擦係数、 C_p ：水の比熱、 Q_0 ：水面で単位時間内に吸収される単位面積当りの熱量である。ただし、本研究では、簡単のために水面における熱の出入は考えないので、 $Q_0 = 0$ である。

(2) 湖底 ($z=-H_b$) の境界条件

運動学的条件： $w_b = u_b \frac{\partial(-H_b)}{\partial x} + v_b \frac{\partial(-H_b)}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (11)$

湖底におけるせん断応力：

$$\begin{aligned} (\tau_{bx}, \tau_{by}) &= \rho_a A_v \left(\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z} \right) \Big|_{z=-H_b} \\ &= \rho_a \nu_b^2 (u_b, v_b) \sqrt{u_b^2 + v_b^2} \quad \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

ここに、添字 b は湖底における量を表し、 τ_{bx} および τ_{by} ：底面摩擦せん断応力の x および y 方向成分、 u_b および v_b ：湖底における x および y 方向の流速、 ν_b^2 ：底面摩擦係数。また、湖底における熱交換はないとする。

(3) 湖岸における境界条件

湖岸において、岸に垂直な流れは 0 とする。すなわち、湖岸に立てた法線を n とするとき、 $v_n = 0$ とする。流入、流出する河川および岸における熱交換はともないとする。

3. 計算手法および計算手順

3.1 計算手法

はじめに述べたように、本報では、オペレータ・スプリッティング法を用いる。この方法は、Yanenko⁵⁾によって始められたもので、一つ時間ステップをいくつかの段階に分割し、それぞれの段階で考慮される項の特徴に応じた差分式を用い、部分的な implicit 法によって全体の計算時間の短縮を図るものである。本研究では、一つ時間ステップを次の三つの段階に分割する。すなわち、

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{X^{n+1} - X^{**}}{\Delta t} + \frac{X^{**} - X^*}{\Delta t} + \frac{X^* - X^n}{\Delta t} \dots\dots\dots (13)$$

ここに、 X は任意の従属変数、添字 $(n+1)$ および n はそれぞれ時刻 $(n+1)\Delta t$ および $n\Delta t$ における量、* および ** は中間値を表す。(13) 式の右辺の各項を中間ステップと呼ぶことにする。

本研究で扱う湖の流れでは、運動方程式の中でもっとも影響の大きい項は圧力項である。また計算上の不安定をもたらす項は一般に圧力項と移流項である。したがって、オペレータ・スプリッティング法において、圧力項と移流項とを分離して異なる中間ステップで単独に扱うことが効果的と考えられる。水平方向の渦動粘性項は、流れに貢献する度合は通常小さいにもかかわらず、計算の安定には大きな役割を果たす。これらのことを考慮して、水平方向の渦動粘性項を不安定を起しやすい移流項と同じ中間ステップで扱い、計算の安定を図ることにする。また、鉛直方向の粘性項については、鉛直方向の速度こう配は水平方向のそれに比べてかなり大きいことや境界条件である風のせん断応力および底面摩擦力はそれぞれ水面および湖底に作用していることを考え、鉛直方向の渦動粘性項を別の中間ステップで扱うことが必要であろう。以上のことより、基礎方程式を以下のように分割する。

(1) 第一の中間ステップ

この段階においては、 x および y 方向の運動方程式については、すべての移流項と水平方向の渦動粘性項を取り入れ、密度偏差の拡散方程式については、すべての移流項および拡散項を取扱う。移流項の特性を考えた上で、時間方向には explicit な形式の Adams-Bashforth 法を用いる。すなわち、以下のようである。

運動方程式

x 方向

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}F^n - \frac{1}{2}F^{n-1} \dots\dots\dots (14)$$

$$F^n = A_h \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + A_h \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial(uu)^n}{\partial x} + \frac{\partial(vu)^n}{\partial y} + \frac{\partial(wu)^n}{\partial z} \right)$$

y 方向

$$\frac{v^* - v^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}G^n - \frac{1}{2}G^{n-1} \dots\dots\dots (15)$$

$$G^n = A_h \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + A_h \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial(uv)^n}{\partial x} + \frac{\partial(vv)^n}{\partial y} + \frac{\partial(wv)^n}{\partial z} \right)$$

密度偏差方程式

$$\frac{\Delta\rho^{n+1} - \Delta\rho^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}M^n - \frac{1}{2}M^{n-1} \dots\dots\dots (16)$$

$$M^n = - \left(\frac{\partial(u\Delta\rho)^n}{\partial x} + \frac{\partial(v\Delta\rho)^n}{\partial y} + \frac{\partial(w\Delta\rho)^n}{\partial z} \right) + K_h \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial x^2} + K_h \frac{\partial^2 \Delta\rho}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_v \frac{\partial \Delta\rho}{\partial z} \right)$$

空間の差分に関しては拡散項には中心差分、移流項には二次精度の上流差分を用いる。この Adams-

Bashforth 法は時間に関して二次の精度を有し、また空間の差分を上記のように採っているので、空間に関しても二次の精度を有する。また、この方法は時間に関して explicit な形式であるが、本研究で扱われる流速がかなり小さい上、移流項に数値解析的に安定な上流差分を採っており、しかも拡散項が解を安定にしているため、時間差分に対する制限は厳しくない。

(14), (15) および (16) 式より、 u^* , v^* , および $\Delta\rho^{n+1}$ が求められる。得られた $\Delta\rho^{n+1}$ が水深方向に静的に不安定な場合には、瞬時に対流混合が生ずるとする。

(2) 第二の中間ステップ

この段階では、 x と y 方向の運動方程式の鉛直渦動粘性項およびコリオリ項を取り入れる。前述したように、鉛直方向渦動粘性項は流れに大きな影響を与えており、また、水面と湖底の境界条件が含まれているので、implicit な形式の Crank-Nicholson 法を用いることにする。すなわち、

$$\frac{u^{**} - u^*}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u^{**}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) \right] + f v^* \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$\frac{v^{**} - v^*}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v^{**}}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_v \frac{\partial v^*}{\partial z} \right) \right] - f u^{**} \quad \dots\dots\dots (18)$$

である。Crank-Nicholson 法は、一般に無条件に安定であり、また時間差分をあたかも時刻 (*) および (**) での平均を取った実効中心差分で評価しているため、時間に関しても空間に関しても二次の精度を持っている。

(17) と (18) 式の係数行列は三重対角行列であるため、二重掃出法によって、 u^{**} および v^{**} が簡単に求められる。

(3) 第三の中間ステップ

この段階では、連続方程式と、運動方程式の圧力項とを扱う。すなわち、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{**}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\frac{v^{n+1} - v^{**}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。(22) 式より、圧力 p は次式によって表される。

$$p = \int_z^{\xi} \rho g dz = \rho_0 g (\xi - z) - g \int_z^{\xi} \Delta\rho dz \quad \dots\dots\dots (23)$$

(23) 式中の $\rho_0 g z$ は x および y によらず、 $\frac{\partial p}{\partial x}$ および $\frac{\partial p}{\partial y}$ には何の貢献もしないので、上式からこの項を取り除くことにし、改めて圧力 p を次式で与える。

$$p = \rho_0 g \xi - g \int_z^{\xi} \Delta\rho dz \quad \dots\dots\dots (24)$$

本研究で扱う流れでは、水位 ξ は十分小さいと考えられるため、(24) 式は線形化されて、次のように表される。

$$p = \rho_0 g \xi \left(1 - \frac{\Delta\rho_{sur}}{\rho_0} \right) - g \int_z^0 \Delta\rho dz \quad \dots\dots\dots (25)$$

(25) 式の右辺の第一項は水位変動 ξ による圧力の順圧 (barotropic) 成分であり、第二項は密度偏差 $\Delta\rho$ による傾圧 (baroclinic) 成分である。一般に、傾圧成分による流れの伝播速度は、順圧成分による流れのそれに比べてかなり小さく、それだけ安定条件は緩やかであるため、以下のように順圧成分には implicit な形式、傾圧成分には explicit な形式を用いる。いま、湖底から水面まで積分された連続方程式

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = - \int_{-H}^{\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz \dots\dots\dots (26)$$

を, Crank-Nicholson 法で差分化すれば, 次式が得られる。

$$\frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} = - \frac{1}{2} \int_{-H}^{\xi} \left(\frac{\Delta u^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\Delta u^n}{\Delta x} + \frac{\Delta v^{n+1}}{\Delta y} + \frac{\Delta v^n}{\Delta y} \right) dz \dots\dots\dots (27)$$

ここで, (20), (21) および (25) 式を (27) 式に用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{\xi^{n+1} - \xi^n}{\Delta t} - \frac{\Delta t}{2} g \left(1 - \frac{\Delta \rho_{surf}^{n+1}}{\rho_0} \right) (\xi^n + H_b) \left(\frac{\partial^2 \xi^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi^{n+1}}{\partial y^2} \right) \\ = - \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho_{surf}^{n+1}}{\rho_0} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\Delta u^{k*}}{\Delta x} + \frac{\Delta v^{k*}}{\Delta y} + \frac{\Delta u^n}{\Delta x} + \frac{\Delta v^n}{\Delta y} \right) \Delta z - \Delta p_{inf}^{n+1} \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

が得られる。ただし,

$$\Delta p_{inf}^{n+1} = \frac{g \Delta t}{2 \rho_0} \int_{-H}^{\xi} \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \int_z^0 \Delta \rho^{n+1} dz \right\} dz$$

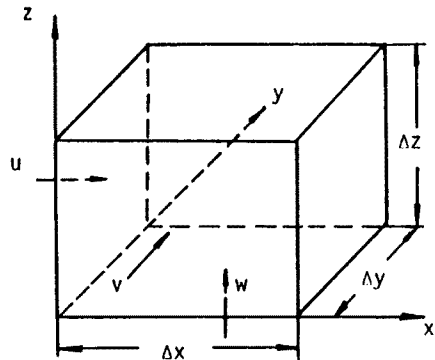
である。(28) 式は Poisson 型の方程式である。これを解くのに, 再びオペレータ・スプリットング法を適用する。

以上の各式の離散式による表現は, 前報¹⁾にならって, 各方程式を control volume に関して積分した式を用い, 各物理量の定義位置を Fig. 2 のように定めて行く。その詳細⁶⁾はここでは省略する。

3.2 計算手順

本報では, 以下の計算手順によって, 計算を進める。

- ① (14), (15) および (16) の各式より, u^* , v^* , および $\Delta \rho^{n+1}$ を求める。
- ② u^* および v^* を用いて, 二重掃出法によって, (17) 式と (18) 式より, u^{**} および v^{**} を定める。
- ③ オペレータ・スプリットング法によって, (28) 式を解き, ξ^{n+1} を求める。さらに, この ξ^{n+1} を (25) 式に代入し圧力 p を求める。
- ④ 圧力 p を用いて, (20) 式と (21) 式より, u^{n+1} および v^{n+1} を求める。
- ⑤ 最後に, (19) 式より, w^{n+1} を求める。



- $u : x, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2$
- $v : x+\Delta x/2, y, z+\Delta z/2$
- $w : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z$
- $\xi : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2$
- $p : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z$
- $\rho : x+\Delta x/2, y+\Delta y/2, z+\Delta z/2$

Fig. 2. Arrangement of variables.

4. 計算結果およびその考察

成層した湖においては, 風や気圧の変化などによって, その躍層付近で水温の周期的変動が引き起こされることが知られている。このような現象は一般に内部波と呼ばれるが, その内部波には周期数分のものから, 周期が数日に及ぶさまざまなモードが含まれる。内部波の周期は, 湖の形状とその大きさあるいは躍層の深さなどによって決定され, その振幅は風の応力および吹送時間などに関係すると考えられている。本報では, 研究の第一歩として問題を簡単するため, 単純な形状の水域を考え, 空間的に大規模なスケールを有し時間的にかなり長周期の内部ケルビン波と内部ポアンカレ波の挙動およびそれらに伴う流れにつ

いて考察する。

4.1 計算条件

水温躍層の変動で示される内部波をみるには、かなりの水深が必要である。また、内部波の周期と地形性の波⁷⁾の周期がほぼ一致する可能性があり、その場合に、両者の分離がむずかしくなる。地形性の波は湖盆形状が一様でないことによって生ずるから、地形性の波を取り除くために、一様な水深の水域を想定し、**Fig. 3** に示される 40 m の水深で一辺 30 km の正方形の水域を考えることにする。

計算に必要な渦動粘性係数および渦動拡散係数は次のように与える。

$$A_h = 10 \text{ m}^2/\text{s} \quad A_v = 1 \times 10^{-2} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K_h = 30 \text{ m}^2/\text{s}$$

$$K_v = 1 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

計算格子は、水平面内の x および y 方向にはそれぞれ 1.5 km ごとに分割し、鉛直方向には 2 m ごとに分割する。

気象の条件として、初期に静止している水域に 5 m/s の一様な西風 (x の正方向の風) を 12 時間吹送させ、その後静止させる。初期の温度分布には、水深 15 m の位置に温度こう配の最大値 (躍層) が存在するような連続な水温分布を与える。時間ステップ Δt を 60 秒とし、計算期間は 120 時間とする。

4.2 計算結果の考察

Fig. 4 は、**Fig. 3** に示される湖岸の S_1 、 S_2 、 S_3 および S_4 の各点での躍層付近における水温の時間的变化である。この図より、風の停止 (計算開始後 12 時間) 後、風の吹送していた方向の右岸 (南岸) で、大きな水温上昇 (**Fig. 4** 中の矢印で示される) が発生し、それが時間の経過とともに反時計

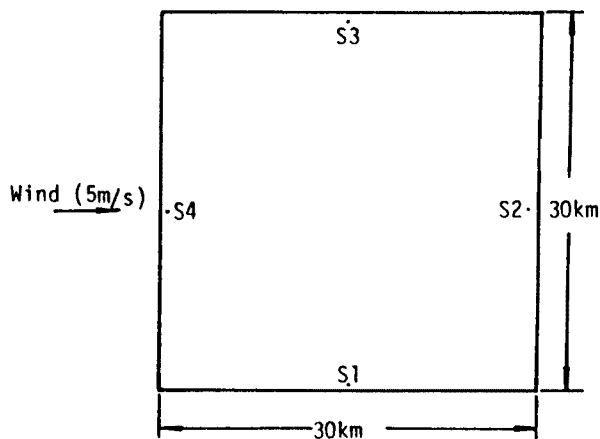


Fig. 3. Shape of model basin.

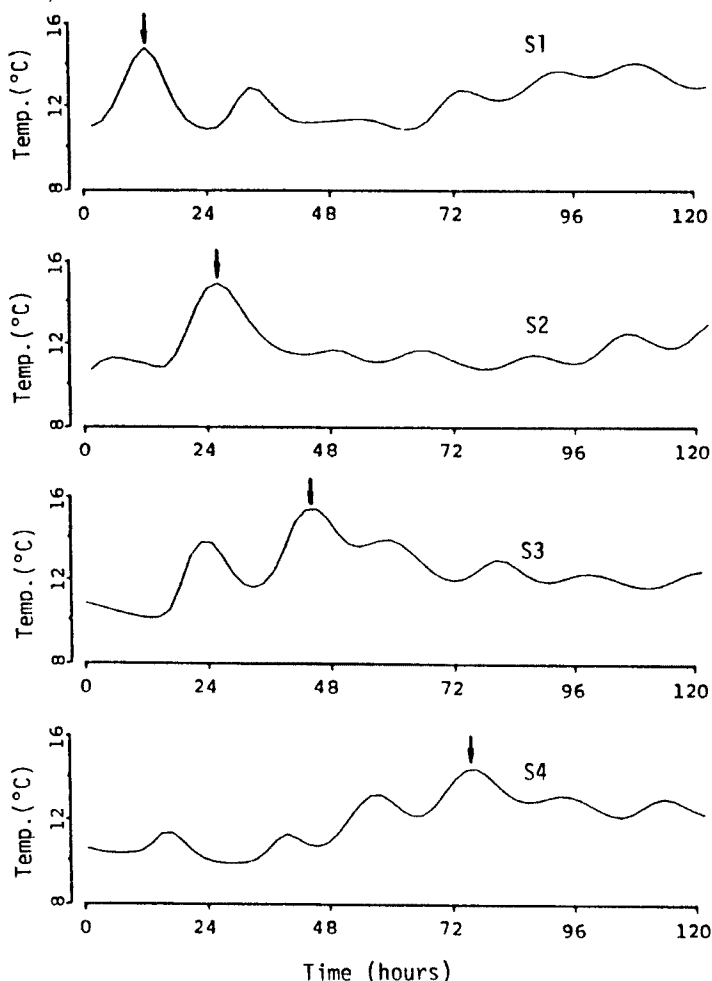


Fig. 4. Temperature change near the metalimnion in shore areas.

回りに湖を伝播していることがみられる。また Fig. 5 に示した躍層付近の水温の平面的な分布より、水温の高い分布（図の濃淡の淡い部分）が沿岸域を反時計回りに回転していることが確かめられる。これらの二つの図から、風の停止によって生ずる岸に沿った高水温域の反時計回りの伝播の周期は、約80時間と見積られ、これが内部ケルビン波によるものであることがつぎのように確かめられる。すなわち、Csanady ら⁷⁾の二層モデルを用いた内部ケルビン波の理論によれば、湖の内部変形半径 R_2 および内部ケルビン波の波速 C はそれぞれ次のように与えられている。

$$R_2 = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{gh_1 h_2}{h_1 + h_2}} \dots\dots\dots (29)$$

$$C = \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} \frac{gh_1 h_2}{h_1 + h_2}} \dots\dots\dots (30)$$

ここに、 ρ_1 および ρ_2 はそれぞれ上層および下層の密度であり、 h_1 および h_2 はそれぞれ上層と下層の水深である。いま、この計算で与えた水温分布より $\rho_1 = 998.234$ (kg/m³) (20°C に相当)、 $\rho_2 = 999.848$ (kg/m³) (8°C に相当)、 $h_1 = 15$ m および $h_2 = 25$ m とすれば、上式より $R_2 = 4.13$ km、 $C = 0.383$ m/s と計算される。また、この計算で用いた水域の等価半径は、

$$r_e = \sqrt{\frac{30 \times 30}{\pi}} = 16.93 \text{ (km)}$$

である。 $R_2 \ll r_e$ であるので、内部ケルビン波が沿岸域に顕著に現れることが知られ、またその周期は、

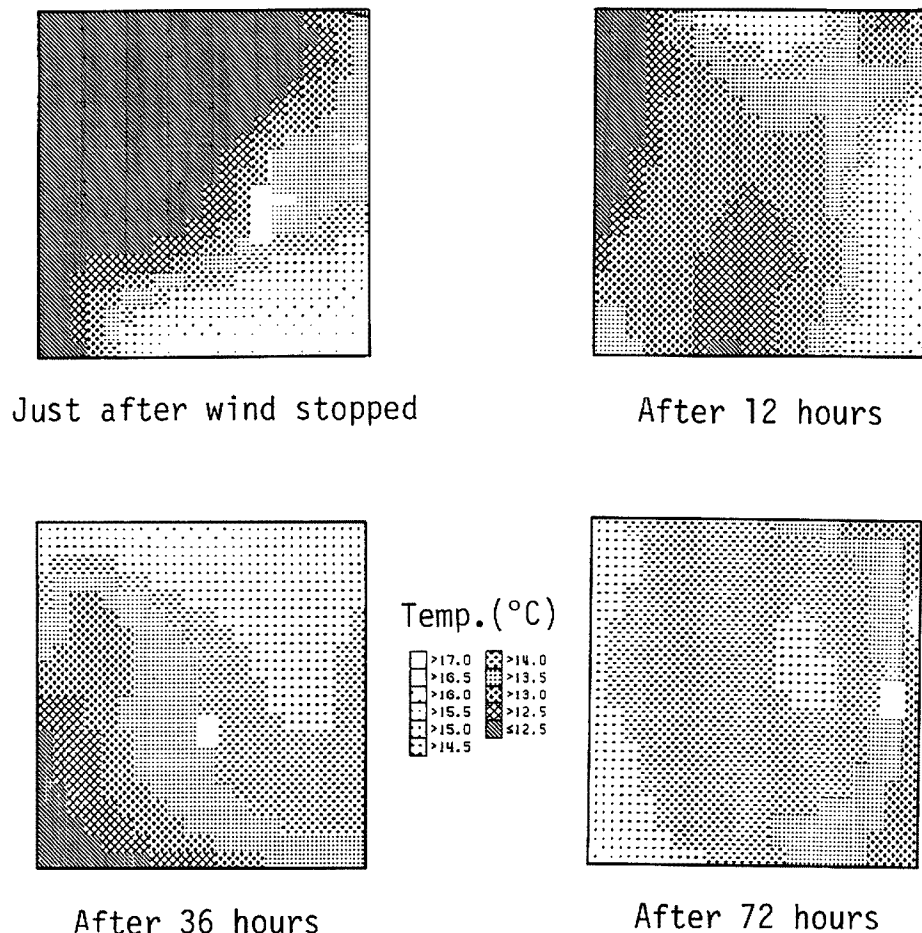


Fig. 5. Water temperature distribution near the metalimnion.

$$T = \frac{2\pi r_e}{C} = \frac{2\pi \times 16.93 \times 10^3}{0.383 \times 3600} = 76.8 \text{ (時間)}$$

と計算される。この内部ケルビン波の周期は先に計算結果から見積られた周期とほぼ一致しているから、先述のように Fig. 4 と Fig. 5 にみられる沿岸域で卓越する内部波は内部ケルビン波と考えられよう。

Fig. 6 は、水域の中央の南北方向の横断面内 (y 方向) における水位および躍層の位置の変動を示したものである。この図より、内部ケルビン波による躍層の位置は約 3 m 変動しているのに対し、自由表面の振動の振幅は高々 1 cm にも及ばないことがわかる。この結果も、表面モードと内部モードの振幅の差として二層モデルによって導かれている結果⁷⁾と定性的に一致しているといえる。

Fig. 7 は S1 点における表層の流速および躍層付近の流速 (x 方向) の時間変化を示している。この図より、内部ケルビン波による表層の流速が大きいものに対して、躍層以下ではそれが小さいことがわかる。また、内部ケルビン波に伴う大きな表層流速は沿岸域に限定されており、沿岸ジェット流として知られているものである。この沿岸ジェット流は内部ケルビン波とともに反時計回りに回転することが Fig. 8 より確かめられる。

Fig. 9 は沿岸域 (S1 点) における岸に平行な流速 (x 方向) の鉛直分布を示している。この図より、下層の流速は上層の流速と逆向きとなっていることがみられる。

Fig. 10 は、水域の中央域における水位と躍層付近の水温との時間的変化を示したものである。この図より、水温の変化には慣性周期の $T_p = 2\pi/f = 20.88$ 時間よりやや短い約 17 時間の周期の変動が含まれていることがわかる。さらに、躍層付近の水温度は時間とともに、徐々に上昇する傾向にある。Csanady の二層モデル⁷⁾によれば、水域の中央域において卓越する内部ポアンカレ波の振動数は、

$$\sigma_n^2 = f^2 + \frac{n^2 \pi^2 C^2}{b^2} \quad (n=1, 3, \dots) \dots\dots\dots (31)$$

で与えられる。ここに、 b は湖の幅であり、 C は内部ケルビン波の波速と同じである。基本モード ($n=$

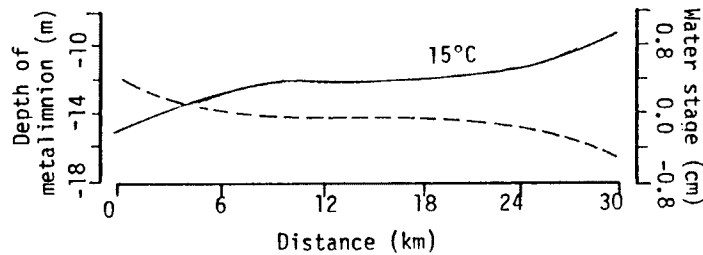


Fig. 6. Changes of water stage and metalimnion in transverse section. (Solid line: water stage, Dashed line: metalimnion)

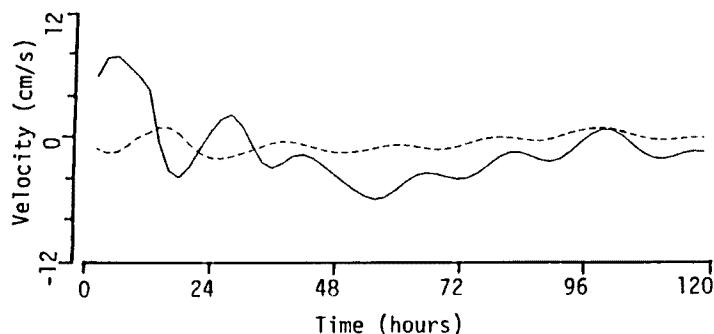


Fig. 7. Velocity change at shore area (S1 Point). (Solid line: velocity of surface layer, Dashed line: velocity near the metalimnion)

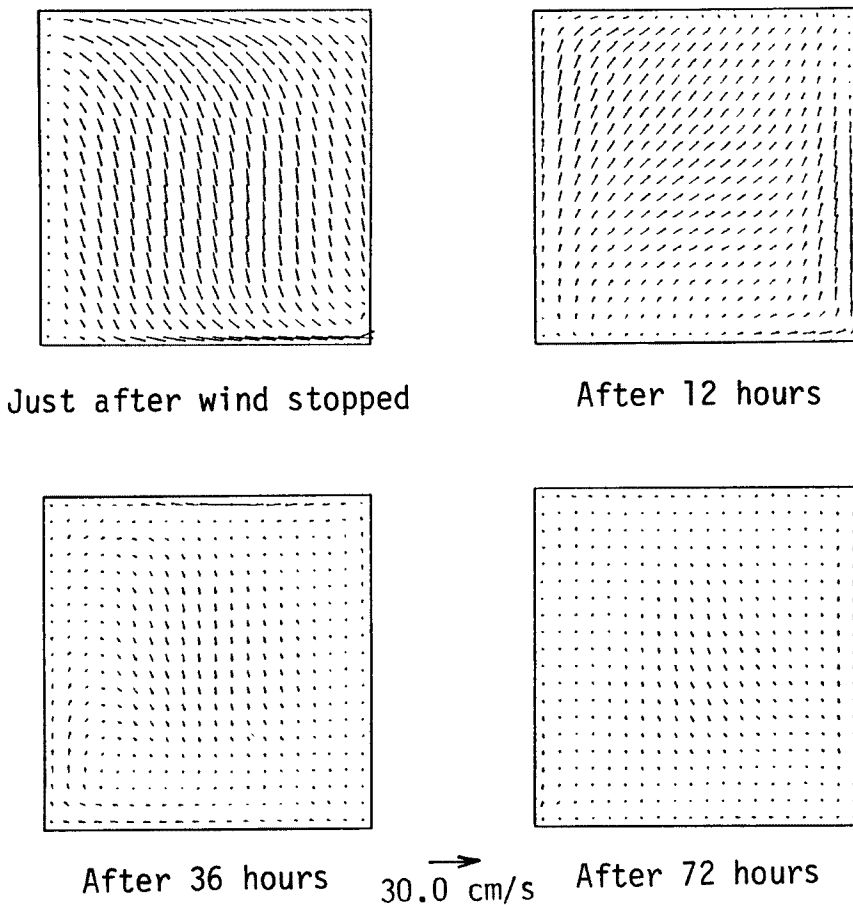


Fig. 8. Velocity distribution of surface layer after wind stopped.

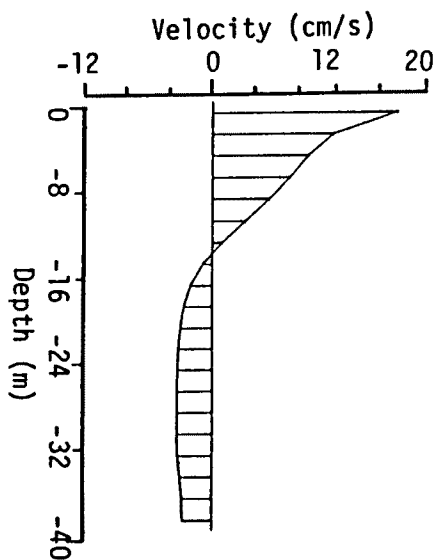


Fig. 9. Velocity parallel to shore along the vertical direction near shore.

1) を考えることにし、本報で扱っている諸量 $b=30\text{ km}$ および $C=0.383\text{ m/s}$ を代入すれば、

$$\sigma_1 = 9.28 \times 10^{-5} / \text{s}$$

となり、内部ポアンカレ波の基本モードの周期は

$$T = 2\pi / \sigma_1 = 18.8 (\text{時間})$$

と求められる。この値は Fig. 10 にみられる温度の変動周期とほぼ一致しており、Fig. 10 の温度の変動は内部ポアンカレ波によるものと考えられる。さらに、Fig. 8 にみられる湖中央域で、時計回りに回転している流れは、水温の変動と同様に内部ポアンカレ波によって発生したと考えられよう。

Fig. 11 は、風が吹いている間の表層の流速分布である。この図をみると、表層においては、風の吹送にもなって中央域の流向は次第に時計回りに回転し、さらに風が続くと、流れは定

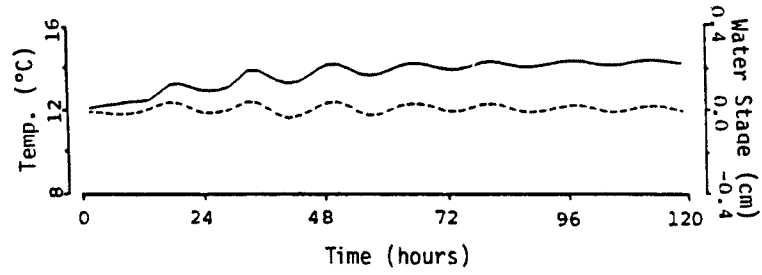


Fig. 10. Temperature change near the metalimnion and water stage change in central area of basin.
(Solid line: temperature, Dashed line: water stage)

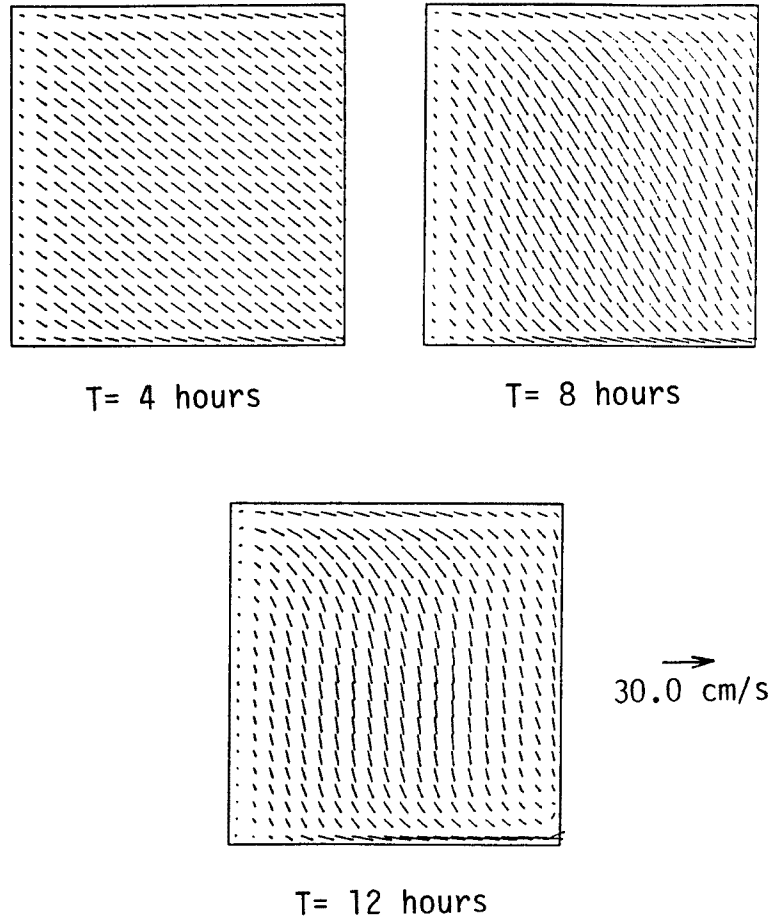


Fig. 11. Velocity distribution of surface layer during wind blowing.

常状態に近づき、流向は風向に対してほぼ反時計回りに直角となっていることがわかる。これは次のように説明される。一般に地衡流近似においては岸に平行な流れに作用するコリオリ力と岸に垂直な方向の圧力こう配とが平衡に達している。中央域では岸に垂直な方向の圧力こう配が Fig. 6 に例示されるようにほぼ0であるので、これに平衡すべきコリオリ力も0でなければならず、したがって風向きの流れはほと

んど生じない。これに対して、風に垂直な方向の流れに伴うコリオリ力は、岸に平行な圧力差および風の応力の合計と釣り合う。中央域においては圧力差が小さいが風の応力により釣り合うべきコリオリ力に対応する風と垂直な大きな流れがみられ、その結果湖の中央域では風応力は風に垂直な流れに作用するコリオリ力と釣り合うと考えられる。なお、この流れは、風がやむと、Fig. 8のように時計回りに回転しながら徐々に減衰する。

Fig. 12は、他の条件は同一で成層のない場合の表層の流速分布図である。この場合、風が吹き続けると、中央域の流向はエクマン螺旋によって説明されるように、風下方向に右ほぼ45°に旋回し定常状態に達するが、成層時のように45°を超えることはない。このように、成層の有無によってエクマン螺旋の特性が顕著に異なることは非常に興味のある現象であろう。なお、成層がない場合も風がやむと成層のある場合と同じように流向は時計回りに回転し始めるが、その回転の周期は成層のある場合よりかなり長い。これは、(31)式より確かめられる。すなわち、この場合の基本モードは

$$\sigma^2 = f^2 + \frac{\pi^2 C^2}{b^2} \dots\dots\dots (32)$$

である。ただし、この場合 $C = \sqrt{gH}$ で、barotropic な波の波速である。いま、 $H = 40$ m とすると、明らかに

$$\frac{\pi^2 C^2}{b^2} \gg f^2 \dots\dots\dots (33)$$

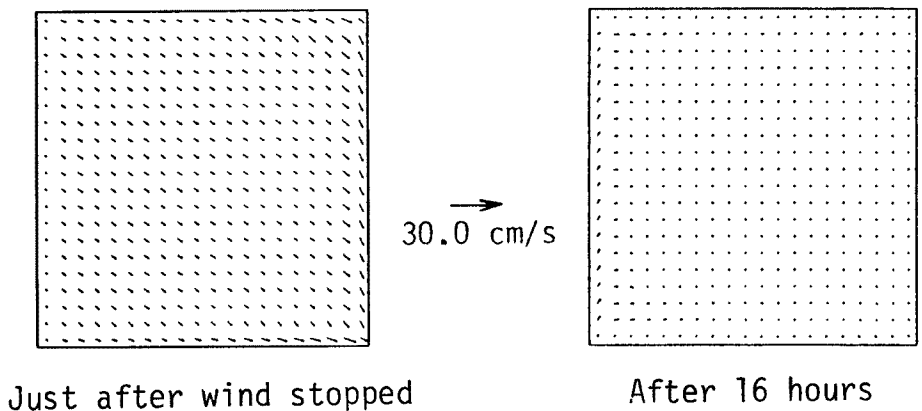


Fig. 12. Velocity distribution of surface layer (unstratification).

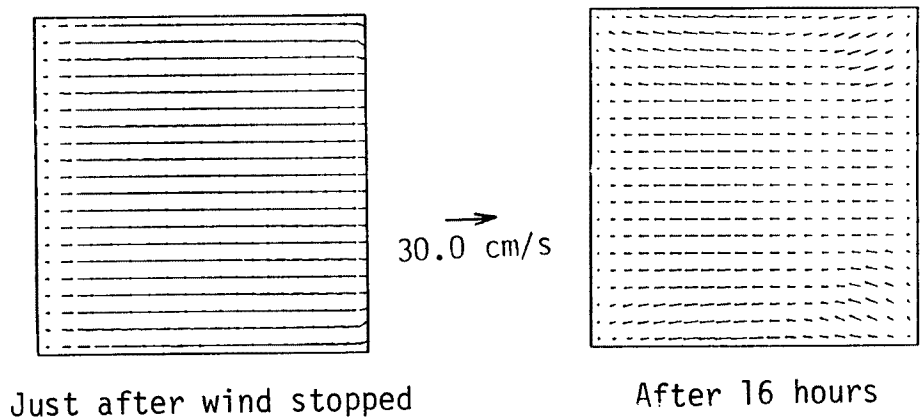


Fig. 13. Velocity distribution of surface layer (without Coriolis force).

であるから、成層のない場合コリオリ力が静振の周期に与える影響は小さいとみることができる。さらに Fig. 8 と Fig. 12 を見比べると、成層のある場合の表層流速は成層のない場合のそれより大きく、しかも風がやんだ後、前者の流速の減衰は後者より遅いことがわかる。これは、成層のない場合には風の応力は全水深に作用し底面摩擦の表層流速に与える影響がかなり大きいのに対し、成層のある場合には風の応力はほぼ上層だけに与えられて、底面摩擦の影響が少ないからと説明される。つまり、成層のある場合には内部波が発達するとともに、成層が水域全体の流れに与える影響の大きいことが裏づけられる。

コリオリの因子 f を 0 とした場合、つまり、地球の自転の影響を考えない場合、表層の流速分布は、Fig. 13 に示されるように、流向の旋回はみられず、流向は静振により規則的に反転しているだけである。また、その反転の周期は (31) 式の基本モードで示されるコリオリ力を考慮した場合よりかなり長い。これらの結果より先述した内部ケルビン波および内部ポアンカレ波はコリオリ力によるものであることが確かめられる。

5. 結 論

本報は、湖沼における流れを数値解析する最初の段階として、単純な地形の水域を想定し成層がある場合の大規模な流れを、三次元的に数値解析する方法を展開するとともに、計算結果について若干の考察を加えたものである。

本研究で得られた成果をまとめると、次のようである。

(1) 本研究で展開したオペレータ・スプリッティング法によって、湖における流れを三次元的に解析することができた。この方法は、explicit 法に比べて計算式はやや複雑になるが、大きな時間差分が許容されるので、全体の計算時間は短いと考えられる。また、この方法には部分的に implicit 法による差分式が含まれるにもかかわらず、その部分にオペレータ・スプリッティング法と二重掃出法を用いることにより、繰り返しの収束計算が必要でなくなっており、この点において完全な implicit 法より有利と考えられる。ただし、本研究ではクーラン数が比較的小さい場合を扱っており、クーラン数が大きくなれば反復計算が必要になると予想されるので、今後さらに検討が必要である。

(2) 湖の成層の有無によって、流れの特性は大きく変わる。表面静振による表層の流れは、成層のない場合より成層のある場合の方がかなり大きい。また、コリオリ力は、成層のある場合、成層のない場合より重要であることが知られた。

(3) 内部ケルビン波は沿岸域で卓越するのに対して、内部ポアンカレ波は中央域で卓越することが確かめられた。

以上のような結果が得られたが、今後のさらに研究をすすめるべき課題としては、次の点が挙げられよう。

(1) 本研究で展開したオペレータ・スプリッティング法をさらに改善するとともに、計算時間、安定性および現象の再現性などあらゆる角度から他の方法と比較しつつ、この方法の適用性を高めなければならない。

(2) 実際の湖の流れを、現実の気象条件のもとで、解析するとともに、本研究で考察したような種々の流れが実際の湖においてどのように現れるかを確かめ、さらに、それらの流れに伴う物質や熱の輸送を考察することによって、湖の水理学的挙動を現実的かつ実用的な姿で研究する必要がある。

最後に、本研究を進めるにあたって、計算および作図などに多大の御援助をいただいた河川工学研究室大学院学生広瀬昌由氏に謝意を表します。なお、この計算は京都大学大型計算機センターによったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗, 井上和也, 劉 樹坤, 阿部徹: 琵琶湖湖流の三次元的な解析, 京都大学防災研究所年報, 第26号, B-2, 1983, pp.531-542.
- 2) Iwasa, Y. and K. Inoue: Mathematical Simulation of Plane and Multi-Layer Flows in a Large and Deep Lake, Proc. 21 st Congress of IAHR, Vol. 2, 1985, pp.254-259.
- 3) 水理公式集, 土木学会, 昭和60年版, 1985, pp.128.
- 4) パトリックJ. ローチェ著, 高橋亮一他訳: コンピューターによる流体力学(上), 構造計画研究所, 1978, pp.122-129.
- 5) Yanenko. N.N.: The Method of Fractional Steps for Solving Multi-Dimensional Problems of Mathematical Physics, Springer-Verlag, 1971.
- 6) 申 輝華: 湖沼における流れの数値解析法に関する研究, 京都大学修士論文, 1988.
- 7) Csanady. G.T. : Hydrodynamics of Large Lake, Annual Rev. of Fluid Mech., Vol. 7, 1975, pp.357-386.