京都大学防災研究所年報　第31号　B-2　昭63. 4
Annuals, Disas. Prev. Res. Inst., Kyoto Univ., No. 31 B-2, 1988

水文頻度解析モデルの母数推定法と確率水文量の変動性

―3母数対数正規分布について―

高棹　琢馬・宝　　馨・清水　章

PARAMETER-ESTIMATION METHODS AND THE VARIABILITY OF QUANTILES FOR HYDROLOGIC FREQUENCY ANALYSIS MODELS

―3-PARAMETER LOG-NORMAL DISTRIBUTION CASE―

By *Takuma* TAKASAO, *Kaoru* TAKARA and *Akira* SHIMIZU

Synopsis

There are many methods which estimate three parameters of the log-normal distribution. The methods of maximum likelihood, least squares, moments, as well as the Ishihara-Takase, Iwai improved and sextile methods are tested by using Monte-Carlo simulation. The authors evaluate these methods in terms of the mean and standard deviation of bias in parameter estimates and quantiles (T-year events) obtained by each method. They also discuss the relationship between the sample size and the estimation error of quantiles. When the sample size is greater than about 50, the method of maximum likelihood is considered the best. For a small sample, the methods conventionally used in Japan, such as Ishihara-Takase and Iwai improved methods, give better estimates than the other methods.

1. 緒　　言

年最大降水量などの極値水文量は，3母数対数正規分布をあてはめると良く適合することがある。そのため，従来から3母数対数正規分布について種々の母数推定法が提案され，慣用されている。解析的に母数を推定する代表的な方法として積率法がある。これは資料から求めた標本積率を母集団積率と等しいと置いて，母数を推定するものである。ところが，水文統計で対象とする資料は小標本の場合が少なくない。このとき標本積率に偏りが生じてしまう。この偏りは高次積率になるほど大きくなるため，何らかの補正をしなければいけない。たとえば，3次の積率（標本歪係数）に対する補正方法として Bobée-Robitaille の式や石原・高瀬の図表が提案されている。また，標本積率を用いることなく母数を推定できる解析的な方法として，最尤法や最小二乗法がある。この2つの方法を用いて解を求めるには多少複雑な反復計算を必要とするが，計算機の発達した今日では，比較的簡単に解くことができるようになった。これ以外にも，岩井改良法や Sextile 法と呼ばれる母数推定法が提案されている。さて，このような母数推定法の中でどれが良い方法なのであろうか。本報では，モンテカルロ・シミュレーションにより3母数対数正規

分布に従う乱数を発生させて，これに種々の母数推定法を用いて母数および確率水文量を推定した。推定値の精度を比較することにより，どれが良い推定法なのかを明らかにしようとする。また，資料の個数が母数および確率水文量の推定精度に与える影響についても併せて検討する。

2. 3母数対数正規分布

ある変量 x に対数変換をした変量 $s=s(x)$ が正規分布に従うとき，この変量 x は対数正規分布に従うという。実際には，2つあるいは3つの母数を含む対数正規分布がよく用いられる。一般に母数が多くなれば良い適合性を示すようになるが，パラメタの同定が煩雑になる。以下に3母数対数正規分布について述べる。3母数対数正規分布の累積分布関数 $F(x)$ は次式で示される。

$$F(x)=1/\sqrt{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{s}\exp(-t^2/2)dt=\Phi(s)$$

ここに Φ は標準正規分布の累積分布関数であり，$s=s(x)$ は標準変量である。この標準変量 s の形式の相違により，3母数対数正規分布の確率密度関数 $f(x)$ は次のようになる。

(I) 標準変量 $s=\{\ln(x-a)-\mu_y\}/\sigma_y$ のとき

確率密度関数：$f(x)=1/\{\sigma_y\cdot(x-a)\cdot\sqrt{2\pi}\}\cdot\exp(-s^2/2)$

変換変数：$y=\ln(x-a)$

(II) 標準変量 $s=k\cdot\ln\{(x+b)/(x_0+b)\}$ のとき

確率密度関数：$f(x)=k/\{(x+b)\cdot\sqrt{2\pi}\}\cdot\exp(-s^2/2)$

母数は形式(I)では μ_y, σ_y, a，形式(II)では k, b, x_0 であり，次のような関係がある。

$$\mu_y=\ln(x_0+b) \quad \cdots\cdots (1)$$

$$\sigma_y=1/k \quad \cdots\cdots (2)$$

$$a=-b \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで用いた対数は，底が e の自然対数 ln であるが，底が10の常用対数 log では次のようになる。

(III) 標準変量 $s=\{\log(x-a')-\mu_z\}/\sigma_z$ のとき

確率密度関数：$f(x)=1/\{\sigma_z\cdot(x-a')\cdot\ln 10\cdot\sqrt{2\pi}\}\cdot\exp(-s^2/2)$

変換変数：$z=\log(x-a')$

自然対数を用いた形式(I)の母数と常用対数を用いた形式(III)の母数には，次のような関係がある。

$$\mu_z=\mu_y/\ln 10 \quad \cdots\cdots (4)$$

$$\sigma_z=\sigma_y/\ln 10 \quad \cdots\cdots (5)$$

$$a'=a \quad \cdots\cdots (6)$$

3母数対数正規分布の母数推定法は以上の3形式のどれかを用いる。本報では，各々の推定法により与えられた母数を，(1)～(6)式を用いて形式(III)の母数 μ_z, σ_z, a' $(=a)$ に変換して検討する。

3. 3母数対数正規分布の母数推定法

以下に，3母数対数正規分布の母数推定法について述べる。本報では，最尤法，最小二乗法，積率法，石原・高瀬の方法，岩井改良法，Sextile法の6種の母数推定法について検討した。

3.1 最尤法

n個の資料 x_1, x_2, …, x_n が与えられたとき，尤度関数 $L(\theta)$ は次のようになる。

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$$

ここに$f(x;\theta)$ は確率密度関数であり，θ は母数のベクトルである。一般に，尤度関数はその自然対数をとった対数尤度

$$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\theta)$$

の形式で用いられる。最尤法はすべてのθについて$L(\hat{\theta})>L(\theta)$となる$\hat{\theta}$を求める方法である。$\hat{\theta}$は対数尤度を$\theta$で偏微分して0とした連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\theta)=0$$

を解いて求められる。

形式(III)によれば，3母数対数正規分布の対数尤度は次のようになる。

$$\ln L(\mu_z,\sigma_z,a)=\sum_{i=1}^{n}\ln f(x_i;\mu_z,\sigma_z,a)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{-s_i^2/2-\ln\sigma_z-\ln(x_i-a)-\ln(\ln 10)-1/2\cdot\ln(2\pi)\}$$

これをμ_z，σ_z，aで偏微分すると非線形項が生じて，容易には解けない。そこで計算機の最適化プログラムを用いて数値的に解を求めた。ここではFACOM SSL IIの改訂準ニュートン法による多変数関数の極小化プログラムDMINF1[1)]を用いた。

3.2 最小二乗法

n個の資料を値の小さい順に並べかえた順序統計量をx_1，x_2，…，x_nとする。i番目の順序統計量x_iに対する非超過確率P_iはプロッティング・ポジション公式によれば次のようになる。

$$P_i=(i-\alpha)/(n+1-2\alpha) \quad\cdots\cdots(7)$$

αは$0\leqq\alpha<1$の定数で，$\alpha=0$のときWeibull公式，$\alpha=0.5$のときHazen公式と呼ばれている。

このP_iに対する標準変量s_iは次のようになる。

$$s_i=\Phi^{-1}(P_i),\quad \Phi:\text{標準正規分布の累積分布関数}$$

一方，順序統計量x_iに対する標準変量をs_i^*とすると，s_i^*とs_iの差の平均二乗誤差MSEは次のようになり，母数θのみの関数となる。

$$MSE(\theta)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(s_i^*-s_i)^2 \quad\cdots\cdots(8)$$

最小二乗法はこのMSEを最小とするような母数$\hat{\theta}$を求める方法である。最尤法と同様にして，MSEをθで偏微分して0とした連立方程式

$$\frac{\partial}{\partial\theta}MSE=0$$

を解けばよい。

形式(III)によれば，s_i^*は

$$s_i^*=\{\log(x_i-a)-\mu_z\}/\sigma_z$$

であるので，(8)式から平均二乗誤差MSEが求められる。これをμ_z，σ_z，aで偏微分すると，非線形項が生じて容易には解けない。そこで最尤法と同様にして，計算機の最適化プログラムを用いて数値的に解

を求めた。本報では，上の2つのプロッティング・ポジション公式の優劣も併せて比較する。

3.3 積率法

これは，標本積率（あるいはそれを補正したもの）を母集団積率と等しく置いて，母数を推定する方法である。形式(I)によれば，x の平均 μ_x，分散 σ_x^2，歪係数 β_x は次のようになる。

$$\mu_x = a + \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) \quad \cdots\cdots (9)$$

$$\sigma_x^2 = \exp(2\mu_y + \sigma_y^2) \cdot \{\exp(\sigma_y^2) - 1\} \quad \cdots\cdots (10)$$

$$\beta_x = \{\exp(3\sigma_y^2) - 3\exp(\sigma_y^2) + 2\} / \{\exp(\sigma_y^2) - 1\}^{3/2} \quad \cdots\cdots (11)$$

n 個の資料 x_1，x_2，…，x_n が与えられたとき，標本平均 $\bar{x}$ と標本平均 $\bar{x}$ のまわりの r 次の標本積率 m_r は次のようになる。

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^r$$

∴ 標本分散：$s^2 = m_2$

標本歪係数：$C_s = m_3/s^3 = m_3/m_2^{3/2}$

標本から求めた $\bar{x}$，s^2，C_s を μ_x，σ_x，β_x と等しく置いて，（9）～（11）式に代入する。こうして得られる連立方程式を解けば良いが，標本積率は偏りを有するので次のように補正する必要がある。

(a) 平均……一般に標本平均 $\bar{x}$ がよく用いられるが，標本数が小さいとき，メジアン（中央値），モード（最頻値）などが有効である。本報では標本平均を用いた。

(b) 分散……一般に標本分散 s^2 の偏りを補正した不偏分散 s'^2 がよく用いられる。これは次式で与えられる。

$$s'^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \{n/(n-1)\} \cdot s^2$$

本報では不偏分散を用いた。

(c) 歪係数……一般に標本歪係数 C_s の偏りを補正した不偏歪係数 C_s' がよく用いられる。これは次式で与えられる。

$$C_s' = \{n(n-1)\}^{1/2}/(n-2) \cdot C_s$$

水文統計で対象とする資料は標本の大きさ（データ数）n が小さいことが多く，この場合高次の積率にかなり大きな標本誤差が生じてしまう。そこで，Bobée と Robitaille は，Wallis らの研究をもとにして，対数正規分布の標本歪係数の偏り補正の式を提案している。[2)]

$$\beta_{LN} = \{(1.01 + 7.01/n + 14.66/n^2) + (1.69/n + 74.66/n^2) \cdot C_s^3\} \cdot C_s$$

ここに n はデータ数，C_s は標本歪係数である。この式は，n が $20 \leq n \leq 90$，母歪係数 β が $0.25 \leq \beta \leq 5.0$ で適切である。本報では3種の歪係数 C_s，C_s'，β_{LN} の優劣も併せて比較する。

3.4 石原・高瀬の方法[3)]

この方法は，石原・高瀬の図表（後述）により標本歪係数の偏りを補正して母数を推定するもので，1種の積率法である。形式(II)によれば，標準変量 s は次のようになる。

$$s = k \cdot \ln\{(x+b)/(x_0+b)\}$$

$$\therefore\ x + b = (x_0 + b) \cdot \exp(s/k) \quad \cdots\cdots (12)$$

$x = -b$ のまわりの i 次の母集団積率 γ_i は，

$$\gamma_i=\int_0^1(x+b)^i dF(x)$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\{(x_0+b)\cdot\exp(s/k)\}^i\cdot 1/\sqrt{2\pi}\cdot\exp(-s^2/2)ds$$
$$=(x_0+b)^i\cdot\exp(i^2/2k^2)\cdot 1/\sqrt{2\pi}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-(s-i/k)^2/2\}ds$$
$$=(x_0+b)^i\cdot\exp(i^2/2k^2)$$

となる。

このγ_iによれば，xの平均μ_x，分散σ_x^2，歪係数β_xは次のようになる。

$$\mu_x=\gamma_1-b$$
$$=(x_0+b)\cdot\exp(1/2k^2)-b \quad\cdots\cdots (13)$$
$$\sigma_x^2=\gamma_2-\gamma_1^2$$
$$=(x_0+b)^2\cdot\{\exp(2/k^2)-\exp(1/k^2)\} \quad\cdots\cdots (14)$$
$$\beta_x=(\gamma_3-3\gamma_2\gamma_1-2\gamma_1^3)/(\gamma_2-\gamma_1^2)^{3/2}$$
$$=\{\exp(9/2k^2)-3\exp(5/2k^2)-2\exp(3/2k^2)\}/\{\exp(2/k^2)-\exp(1/k^2)\}^{3/2} \quad\cdots\cdots (15)$$

一方，あるnを与えると，プロッティング・ポジション公式と累積分布関数の逆関数から，i番目の資料に対する標準変量s_iが求められる。(12) 式によれば，xの平均$\bar{x}$，2乗平均$\overline{x^2}$，3乗平均$\overline{x^3}$は次のようになる。

$$\bar{x}=B\cdot M_1-b$$
$$\overline{x^2}=B^2\cdot M_2-2b\cdot B\cdot M_1+b^2$$
$$\overline{x^3}=B^3\cdot M_3-3b\cdot B^2\cdot M_2+3b^2\cdot B\cdot M_1-b^3$$

ここに$B=x_0+b$，$M_m=(1/n)\cdot\sum_{i=1}^{n}\exp(m\cdot s_i/k)$，$m=1$，2，3である。以上のことから，標本歪係数$C_s'$は次のようになる。

$$C_s'=(M_3-3M_2\cdot M_1+2M_1^3)/(M_2-M_1^2)^{3/2}$$

すなわち，C_s'はk，n，s_iの関数であることがわかる。石原と高瀬はHazen公式を用いて，β_xに対するC_s'の修正係数F_s（$=\beta_x/C_s'-1$）をnとC_s'の関数として図示した。これが石原・高瀬の図表と呼ばれるものである。実際には，与えられた資料から歪係数C_{s1}を

$$C_{s1}=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3/\{(n-1)\cdot\widehat{\sigma_x^2}^{3/2}\}$$

より算出する。ここに$\widehat{\sigma_x^2}$は不偏分散である。このC_{s1}とデータ数nから石原・高瀬の図表を用いて$\hat{\beta}_x$を算出する。この$\hat{\beta}_x$を (15) 式に代入して，母数kを推定する。母数b，x_0は標本平均$\bar{x}$と不偏分散$\widehat{\sigma_x^2}$を (13) ～ (14) 式に代入して推定する。本報では，以上の手順を計算機プログラム化した。

3.5 岩井改良法[4),5)]

この方法は岩井の提案を角屋が改良したものである。順序統計学の理論を用いて母数aを推定したのち，積率法により母数μ_y，σ_yを推定するという方法である。

n個の資料x_1，x_2，…，x_nが与えられたとき，幾何平均x_gをx_0の第1次近似とする。

$$x_g=(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n)^{1/n}$$

$$\therefore \log x_g=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\log x_i$$

資料を値の小さい順に並べかえた順序統計量をx_1，x_2，…，x_nとする。i番目，$n-i+1$番目の順序統計量x_i，x_{n-i+1}に対する標準変量s_i，s_{n-i+1}は形式(II)によれば次のようになる。

$$s_i=k\cdot\ln\{(x_i+b)/(x_g+b)\}$$

$s_{n-i+1}=k\cdot\ln\{(x_{n-i+1}+b)/(x_g+b)\}$

標準変量s_i，s_{n-i+1}に対する非超過確率P_i，P_{n-i+1}は（7）式のプロッティング・ポジション公式によれば次のようになる。

$P_i=(i-\alpha)/(n+1-2\alpha)$

$P_{n-i+1}=(n-i+1-\alpha)/(n+1-2\alpha)$

$\therefore P_i+P_{n-i+1}=1$

このとき，標準変量s_i，s_{n-i+1}は次のようになる。

$s_i+s_{n-i+1}=0$

$\therefore k\cdot\ln\{(x_i+b)/(x_g+b)\}+k\cdot\ln\{(x_{n-i+1}+b)/(x_g+b)\}=0$

これをbについて解き，その解をb_iとすれば，

$b_i=(x_i\cdot x_{n-i+1}-x_g^2)/\{2x_g-(x_i+x_{n-i+1})\}$

$i=1$，2，…，r（$r\fallingdotseq n/10$）なるr個のb_iの平均によりbを推定する。すなわち，

$$\hat{b}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}b_i$$

母数bが推定されると，母数x_0，kは次式で推定される。

$$\ln(\hat{x}_0+\hat{b})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i+\hat{b})$$

$$\frac{1}{\hat{k}^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}[\ln\{(x_i+\hat{b})/(\hat{x}_0+\hat{b})\}]^2$$

3.6 Sextile 法[6)]

この方法は，確率密度関数の分割面積が6分の1になるような7個の区間境界値x_iについて，6個のSextile mean，w_iを算出する。すなわち，

$x_0=-\infty$，$x_6=+\infty$，$x_j=F^{-1}(j/6)$，$j=1,2,\cdots,5$

$w_i=\int_{x_{i-1}}^{x_i}6\cdot x\cdot f(x)dx$，$i=1,2,\cdots,6$

ここにF，fは累積分布関数と確率密度関数である。このw_iの平均μ_w，標準偏差σ_w，差の比l_wは次のようになる。

$$\mu_w=\sum_{i=1}^{6}w_j/6$$

$$\sigma_w^2=\sum_{i=1}^{6}(w_j-\mu_w)^2/6$$

$l_w=(w_2-w_1)/(w_6-w_5)$

変数変換$x_i=z_i\cdot\exp$（m）$+a$によれば，z_iのSextile mean，ν_iは

$\nu_i=6\cdot\exp(\sigma_y^2/2)\cdot\{\Phi(t_i-\sigma_y)-\Phi(t_{i-1}-\sigma_y)\}$，$\Phi(t_i)=i/6$，$i=1,2,\cdots,6$

となる。ここにΦは標準正規分布の累積分布関数である。このν_iの平均μ_ν，標準偏差σ_ν，差の比l_νは次のようになる。

$\mu_\nu=\exp(\sigma_y^2/2)$

$\sigma_\nu=\sigma(\sigma_y)$

$l_\nu=l(\sigma_y)$

変数変換$\omega_i=\nu_i\cdot\exp$（m）$+a$を用いれば，ω_iの平均μ_ω，標準偏差σ_ω，差の比l_ωは次のようになる。

$\mu_\omega = \exp(\mu_y + \sigma_y^2/2) + a$

$\sigma_\omega = \exp(\mu_y) \cdot \sigma_\nu$

$l_\omega = l_\nu$

ある資料が与えられたとき，これを順序統計量にしてから，データ数を6等分してこの資料を6つの群に分ける。データ数が6の倍数でないとき，標本誤差を小さくするために値の大きい群のデータ数を多くする。このように群ごとのSextile meanを求めて，その平均，標準偏差，差の比を算定する。母数は

$\hat{\mu}_y = \ln\{\hat{\sigma}_\omega/\sigma(\hat{\sigma}_y)\}$

$l(\hat{\sigma}_y) = l_\omega$

$\hat{a} = \hat{\mu}_\omega - exp(\hat{\mu}_y + \hat{\sigma}_y^2/2)$

により推定できる。

4．母数推定法の優劣の評価手順

本報では，以下の手順により母数推定法の優劣を評価する。

① 3母数対数正規分布の母数μ_z, σ_z, aの真値を設定する。ここでは，大阪の年最大日降水量（1889年～1980年）にこの分布をあてはめた最尤解が$\mu_z = 1.73$, $\sigma_z = 0.22$, $a = 30.41$であったので[7]，これに近い値（$\mu_z = 2.00$, $\sigma_z = 0.20$, $a = 30.00$）を用いた。

② 3母数対数正規分布に従う乱数をn個発生させる。ここでは，標準正規分布に従う正規乱数sをn個発生させて，これと①で与えた母数を用いて，

$x = a + \exp10(s \cdot \sigma_z + \mu_z)$

により変換して求めた。ここに$\exp 10\ (t) = 10^t$，すなわち10のt乗である。

③ 作業②において発生させた標本に対して，各々の推定法により母数を推定し，確率水文量を算定する。

④ 作業③をm回繰り返し，各々の推定法により母数と確率水文量の標本平均（推定値）と標準偏差（推定誤差）を算定する。

⑤ 推定値の真値からの偏倚が小さく，推定誤差が小さい母数推定法を良いと判定する。

この作業により，3母数対数正規分布の種々の母数推定法の中でどれが良いのかが明らかになる。また，異なるnについてこの①～⑤の作業をすれば，nの増加に伴って母数と確率水文量の推定誤差がどのように推移するのかを検討することができる。本報では$m = 1000$, $n = 10, 20, \cdots, 100, 200, 500, 1000$としたが，データ数$n$が小さいとき（$n$が20程度以下）母数推定値（特に$a$について）が異常に大きくなってしまうことがあった。ここでは，aの推定値の絶対値がaの設定値（$a = 30.0$）の5倍以上であれば，その母数推定値は除外した。その除外した個数は，たとえば$n = 10$のとき最尤法では$m = 1000$に対して48個，Hazen公式を用いた最小二乗法では64個であった。また，**3.1～3.6**で述べた全ての母数推定法について母数および確率水文量を算定するのに要したCPU時間は，京都大学大型計算機センターのFACOM M-780によれば，たとえば$m = 1000$, $n = 100$のとき約3.9分，$m = 1000$, $n = 1000$のとき約53.8分であった。

5．結果と考察

Table 1は$m = 1000$, $n = 100$のとき，各々の推定法による母数推定値および推定誤差を示したものである。母数推定値の真値からの偏倚および推定誤差がともに小さい推定法は，最尤法であることがわかる。最小二乗法についてはWeibull公式を用いるよりもHazen公式を用いるほうが良く，Hazen公式によれ

ば推定誤差は最尤法の示す結果とほぼ同じ程度となり偏倚も小さい。次に3種の積率法および石原・高瀬の方法を比較する。全く補正をしない標本歪係数を用いる方法に比べて，わずかな補正をした不偏歪係数を用いると，母数推定値の偏倚および推定誤差はかなり小さくなることがわかる。Bobée–Robitailleの式を用いれば，母数推定値の偏倚はかなり小さくなるが，推定誤差はかえって大きくなってしまう。この積率法の中では，石原・高瀬の方法が偏倚，推定誤差ともに小さい。このように積率法は，歪係数を補正すればかなり良い推定ができるようになるが，最尤法や最小二乗法と比べると偏倚，推定誤差ともに劣ることがわかる。岩井改良法は推定誤差が各々の推定法の中で最も小さいことがわかるが，偏倚はかなり大きくBobée–Robitailleの補正式を用いた積率法に劣る。また，Sextile法は偏倚がかなり小さくHazen公式を用いた最小二乗法に優るが，推定誤差がかなり大きい。このように，偏倚または推定誤差のどちらかが極端に優れているだけでは良い推定法であるとはいえない。偏倚が小さく推定誤差も小さい推定法が望ましい。

Table 2 は $m=1000$, $n=100$ のとき，各々の推定法による確率水文量の推定値および推定誤差を示したものである。50年確率水文量については，真値からの偏倚，推定誤差ともに小さい推定法は最尤法であることがわかる。ここでも最小二乗法はWeibull公式よりHazen公式を用いるほうが良く，このとき偏倚は最尤法よりもわずかに大きいが，推定誤差はむしろ小さくなる。これは20年確率水文量についても同じである。20年確率水文量について比較すると，偏倚は最尤法が最も小さいが，推定誤差はBobée–Robitailleの式を用いた積率法，石原・高瀬の方法，岩井改良法が小さい。しかし，この3つの推定法は推定誤差は小さくなるが偏倚が大きくなり，必ずしも良い推定法であるとはいえない。

Table 3 はデータセット数を一定（$m=1000$）にしてデータ数 n を変化させたとき，100年確率水文量の推定値および推定誤差がどのように推移するのかを示したものである。どの推定法も，n の増加に伴って推定誤差は減少し，推定値は徐々に真値に近づく傾向があることがわかる。$n \geq 100$ のようにたくさんの資料があるとき，母数や確率水文量の偏倚および推定誤差の小さいものは最尤法である。Hazen公式を用いた最小二乗法は最尤法とほぼ同じ結果を示し，特に $n=200$, 500のとき最尤法に優る（偏倚および推定誤差ともに小さい）こともある。

積率法もかなり良い推定ができるが，最尤法や最小二乗法に優ることはない。このように n が大きいとき，岩井改良法やSextile法は良い推定ができるとはいえない。

Table 1. Mean and standard deviation of parameter estimates obtained by each method when m= 1000 and n= 100.

Parameter	μ_z	σ_z	a
true value	2.00	0.20	30.00
M. L. E.	*2.00(0.09)**	0.20(0.04)	28.28(21.68)
L. -S. (Hazen)	2.01(0.09)	0.20(0.04)	25.47(22.79)
L. -S. (Weibull)	2.02(0.09)	0.20(0.04)	23.98(22.94)
MoM. (sample)	2.10(0.14)	0.17(0.05)	0.49(41.20)
MoM. (unbiased)	2.09(0.14)	0.17(0.05)	2.42(40.53)
MoM. (B. -R.)	2.03(0.18)	0.19(0.07)	16.07(41.23)
Ishihara–Takase	2.02(0.16)	0.20(0.06)	18.87(39.74)
Iwai improved	2.06(0.08)	0.18(0.03)	13.82(24.25)
Sextile	2.00(0.11)	0.21(0.04)	26.67(25.95)

* denotes the estimate ; ** the standard deviation.

Table 2. Mean and standard deviation of T-year events (T= 20, 50) obtained by each method when m= 1000 and n= 100.

T-year event	T=20	T=50
true value	243.29	287.48
M. L. E.	*244.04(17.02)**	289.38 (25.95)
L. -S. (Hazen)	244.69(16.97)	289.79 (25.70)
L. -S. (Weibull)	249.76(17.81)	297.17 (27.19)
MoM. (sample)	241.49(17.20)	282.50 (26.60)
MoM. (unbiased)	241.54(17.17)	282.79 (26.62)
MoM. (B. -R.)	241.27(16.42)	284.92 (26.91)
Ishihara-Takase	241.15(16.27)	284.87 (26.28)
Iwai improved	240.00(15.67)	280.61 (22.61)
Sextile	249.20(16.82)	297.88 (26.12)

* denotes the estimate; ** the standard deviation.

n= 10, 20のように資料が極端に少ないとき，最尤法や最小二乗法の偏倚および推定誤差は大きくなる。特にn= 10のとき最尤法の推定誤差はかなり大きくなり，**Table 3**から削除した。これは小さな標本に対して強引に最適化手法を用いようとしたためである。このとき，石原・高瀬の方法，岩井改良法によればかなり良い推定ができる。このように，わが国で慣用されているこの2つの推定法は，小標本に対して有用であることがわかる。$n \leqq 50$のとき，積率法は最尤法や最小二乗法に比べて偏倚および推定誤差が小さい。このように積率法や石原・高瀬の方法はnが小さくても確率水文量の偏倚は少なく，nが増えるにつれて推定誤差が小さくなることがわかる。**Table 3**から，最尤法と最小二乗法の推定値は，データ数が大きくなるにつれて真値の上側から徐々に真値に近づき，推定誤差も小さくなることがわかる。これは，星ら[8]の結果と一致する。また，積率法や石原・高瀬の方法は，データ数が大きくなっても偏倚は真値の下側であまり変化せず，推定誤差のみが徐々に小さくなっている。Sextile法はデータ数が30, 60, 90のとき，すなわち6の倍数のとき偏倚は小さいが，それ以外では偏倚はかなり大きい。すなわち，一般的にSextile法は良い推定ができないといえる。

6. 結　　論

3母数対数正規分布の種々の母数推定法の優劣を，モンテカルロ・シミュレーションを用いて比較検討した。その結果，以下のことが明らかになった。

(i) 50個程度以上のデータ数が得られるとき，最尤法が良い。

(ii) データ数が30個程度以下のとき，Bobée-Robitailleの補正式を用いた積率法，石原・高瀬の方法，岩井改良法によれば比較的良い推定ができる。

(iii) 最小二乗法にはHazen公式を用いるのが良く，標本数が大きくなれば最尤法と同じ程度の推定ができる。

(iv) Sextile法はnが6の倍数のときを除いて，全般的に良い結果を与えない。

最尤法が大標本に対して有用であることが本研究でも確認されたが，小標本では石原・高瀬の方法などの積率法や岩井改良法が最尤法よりも良い推定値を与えることがわかった。従来，わが国で慣用されてきたこれらの手法の小標本に対する有用性が明らかとなった。

Table 3. Relationship between sample size and the estimation accuracy of 100-year event estimated by each method when m = 1000 (true value = 321.92)

Size : n	n = 10	n = 20	n = 30	n = 50	n = 70	n = 100	n = 200	n = 500	n = 1000
Skew : Mean S. D.	0.6922 (0.4418)	0.9023 (0.5243)	1.0253 (0.5575)	1.1717 (0.5943)	1.2473 (0.5509)	1.3231 (0.5276)	1.4223 (0.4452)	1.5142 (0.3670)	1.5417 (0.2814)
M. L. E.	— (—)	350.71* (113.29)**	338.77 (74.83)	328.43 (52.70)	325.76 (42.53)	325.03 (34.21)	323.65 (24.44)	322.99 (14.58)	321.92 (9.97)
L.-S. (Hazen)	405.58 (204.20)	347.31 (92.40)	338.45 (68.30)	329.15 (51.09)	326.22 (41.72)	325.14 (33.72)	323.47 (24.13)	322.85 (14.52)	322.34 (9.93)
L.-S. (Weibull)	536.90 (383.15)	391.64 (121.12)	367.15 (81.60)	346.55 (57.30)	339.01 (45.39)	334.46 (35.84)	328.46 (24.87)	324.97 (14.70)	323.41 (9.99)
Moments (sample)	301.46 (78.13)	305.21 (60.71)	308.65 (53.89)	310.28 (46.60)	311.70 (40.97)	314.08 (35.50)	316.95 (26.21)	320.15 (18.00)	320.95 (12.93)
Moments (unbiased)	305.22 (80.39)	307.30 (61.59)	309.92 (54.48)	311.29 (46.85)	312.43 (41.10)	314.61 (35.59)	317.23 (26.24)	320.27 (18.01)	321.01 (12.93)
Moments (B.-R.)	323.53 (86.89)	320.67 (67.68)	320.86 (59.74)	318.73 (50.27)	318.67 (44.18)	319.34 (37.94)	319.92 (27.39)	321.61 (18.40)	321.88 (13.09)
Ishihara- Takase	317.53 (83.74)	317.76 (65.90)	319.20 (58.50)	317.27 (47.98)	317.84 (41.34)	319.31 (36.45)	320.78 (26.85)	322.42 (18.15)	322.54 (13.10)
Iwai improved	332.87 (100.50)	317.12 (64.87)	315.90 (53.53)	311.33 (42.31)	311.40 (34.66)	311.83 (28.79)	312.40 (20.77)	312.93 (13.10)	312.84 (9.02)
Sextile	548.00 (151.67)	422.98 (91.31)	324.53 (62.01)	357.58 (53.25)	342.47 (42.90)	336.44 (34.96)	330.59 (24.98)	325.88 (15.38)	323.69 (10.64)

* denotes the estimate ; ** the standard deviation.

参考文献

1) 富士通㈱: FACOM FORTRAN SSL II 使用手引書, 1980, pp. 403-406.

2) Bobée, B. and R. Robitaille: Correction of bias in the estimation of the Coefficient of Skewness, Water Resources Research, Vol. 11, No. 6, 1975, pp. 851-854.

3) 石原藤次郎・高瀬信忠: 対数正規分布とその積率による解法, 土木学会論文集, 47号, 1957, pp. 18-23.

4) 岩井重久: 確率洪水推定法とその本邦河川への適用, 統計数理研究2巻3号, 1949, pp. 21-36.

5) 角屋 睦: 対数正規分布の適用範囲, 定数について, 農業土木研究, 別冊第3号, 1962, pp. 12-16.

6) 竹内邦良・土屋一仁・伊達結城: Sextile 法と PWM 法による三母数対数正規分布の母数推定, 昭和62年度関東支部年次学術講演会講演概要, 土木学会関東支部, 1987.

7) 宝 馨・高棹琢馬: 水文頻度解析モデルにおける確率分布モデルの評価規準, 土木学会論文集, 第393号/II-9, 1988, pp. 151-160.

8) Hoshi, K., J. R. Stedinger and S. J. Burges: Estimation of log-normal quantiles: Monte Carlo results and first-order approximations, Journal of Hydrology, Vol. 71, 1984, pp. 1-30.