

ドラム型遠心力載荷装置における水面波の造波

関口 秀雄・Ryan Phillips

GRAVITY WATER WAVES IN A DRUM CENTRIFUGE

Hideo SEKIGUCHI and Ryan PHILLIPS

SYNOPSIS

The generation and propagation of gravity surface waves in a drum centrifuge is discussed, with application to seabed mechanics. The dispersion relationships of the surface gravity waves in rotating fluids are derived with due consideration of the Coriolis effect. They clearly indicate that a forward wave at a given wavelength has a larger phase-velocity, compared with a backward wave with the same wavelength.

An approximate theory of wave-making is developed, with reference to the method of rapidly immersing a float of rectangular section into water in a rotating drum. The interaction between the motion of the float and the generated waves going sideways, is formulated. The nonlinear drag resistance also is allowed for. The theory successfully predicts that the float-water system forms a highly damped system owing largely to the radiation damping. The theory also gives a workable waveform in the source region.

It is found from Test WAVE12 that the wave-induced porewater pressures in fine sand exhibit marked phase-lag, compared with the water pressure measured just above the sand surface.

1. はじめに

本論文では、第一著者が英国ケムブリッジ大学工学部に滞在中に行った遠心力場における水面波実験と、それに対応する理論的検討について述べる。水面波問題を検討するに当たっては、地震波動の問題と同様に、解析対象の場を、(1)Source; (2)Path; (3)Siteのように分けると、見通しがよい。

項目(1)は、いかに波を生成するかという造波の問題である。本研究では、フロート落下方式による非定常造波を行っている。3節に、それに対応したシンプルな理論を提案する。

項目(2)は波動の伝播特性の問題である。水面波の場合には、分散特性と有限振幅に起因する非線形性のバランスの問題が大切になる。本研究では、回転流体における微小振幅重力波の分散特性、特にCoriolis効果の影響について、詳しい理論的検討を行っている (APPENDIX 参照)。

項目(3)に対応する本研究の課題は、水面波の到来にともなう海底地盤応答ということになる。4節において、モデル海底地盤内における実測間隙水圧変動と海底面における水圧変動を比較し、「位相遅れ現象」解明のための問題提起としている。

2. ドラム型遠心力载荷装置の特徴

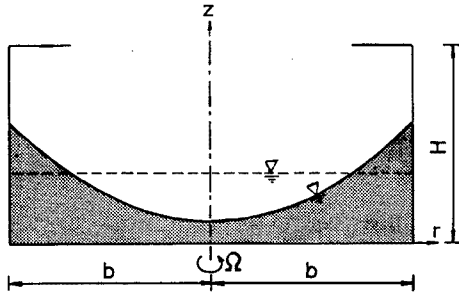


Fig. 1. Free water surface in a drum rotating at a slow speed.

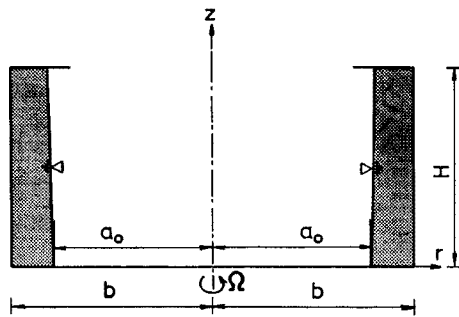


Fig. 2. Free water surface in a drum rotating at a sufficiently high speed.

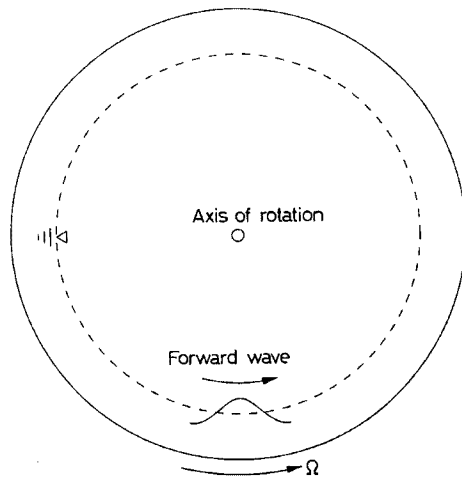


Fig. 3. Plan view of a drum rotating at an angular velocity Ω , with a 'forward' wave inside.

本研究では、直径2 m、高さ1 mのドラム型遠心力载荷装置を用いている（後出の Fig. 7 参照）。その特徴は、円周方向に連続的なモデル海底地盤および水面を設定できることにある。すなわち、側方境界での重複反射の影響を受けることなく、円周方向への波動伝播過程を詳しく調べ得るところに大きなメリットがある。

さて、角速度 Ω で鉛直軸まわりに定常回転しているドラム型の水槽を考える。角速度 Ω の値があまり大きくないときには、ドラム内の水面形は Fig. 1 に示すように、中央部がくぼんだ周知の形（回転放物面）となる。

本研究では、角速度 Ω の値が十分に大きく、遠心加速度が重力加速度よりもはるかに大きい状況（Fig. 2）を研究対象としている。この場合、容器内の水はリング状になるが、自由水面の形状 $r=r(z)$ は、やはり回転放物面である。高さ z における水深 d を、 $d=b-r(z)$ と定義すると、その具体的な表現は次のようになる。

$$r = \left[b^2 - \frac{V}{\pi \cdot H} + \frac{2g}{\Omega^2} \cdot \left(z - \frac{H}{2} \right) \right]^{1/2} \dots\dots (1)$$

ここに、 V はドラム内の水の全体積である。なお、 $a_0 = (r)_{z=0}$ なる関係がある。上式から明らかなように、角速度 Ω の値が十分に大きい場合には、 $2g(z-H/2)/\Omega^2$ の寄与は他項に比べて無視しうるので、ドラム内の水深は実質的に高さ方向（回転軸方向）に一定とみなすことができる。以下では、中央高さ（ $z=H/2$ ）における水深をもって、回転ドラム内の水深 d を代表させることにする。

回転ドラムの中央高さにおける断面を模式的に Fig. 3 に示す。図中の破線は、定常回転状態すなわちドラムとともに回転している座標系からみて「静止状態」にある場合の水面形を示している。以下の3節では、この状態を初期条件とし、回転軸方向に平行な局所的な乱れを水面に与えた場合に、どのような水面波が生成され、円周方向に伝播していくかを検討することにする。

3. フロート落下方式による非定常造波の近似理論

3.1 生成波の波高とフロート落下速度との関係

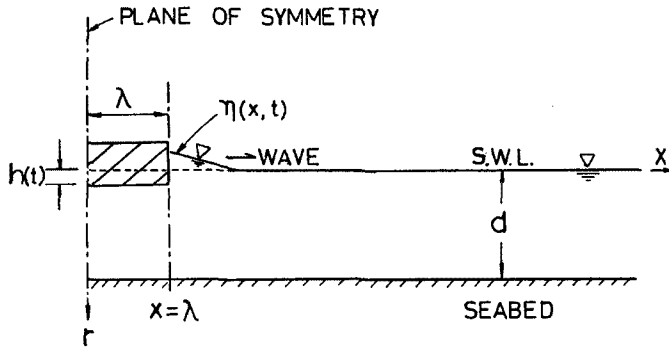


Fig. 4. Sketch showing a free-falling float and generated water wave in a rotating drum.

Fig. 4を参照しながら、全幅 2λ 、質量 M のフロートが急速に水中に貫入していく際に生ずる水面波を考える。フロートの側方領域における生成波の静止水面からの波高を $\eta(x, t)$ 、平均的な水粒子速度を $\bar{v}(x, t)$ 、水深を d とすると、これらの間には次式の関係が成り立つ¹⁾。

$$\eta\left(t - \frac{x}{c_0}\right) = \frac{d}{c_0} \bar{v}\left(t - \frac{x}{c_0}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 c_0 は基準長波の伝播速度

である。

ここで対象としている回転流体においては、APPENDIX の解析からもわかるように、Coriolis 効果によって正方向に伝播する波 (Fig. 3 に示す波) の伝播速度のほうが、負方向に伝播する波の伝播速度よりも大きくなる特性がある。したがって、厳密には波速 c_0 の値を伝播方向の正負に応じて使い分けるべきであるが、フロートの運動解析に重点を置く限りにおいては、正負二方向の寄与の平均をとるという意味からして、波速 c_0 として基準長波に対する次式を援用して差し支えない。

$$c_0 = (a\Omega^2 \cdot d)^{1/2} = (Ngd)^{1/2} \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 a はドラムの回転軸から静止水面までの距離、 Ω はドラムの回転角速度、 d は水深である。

断面 $x = \lambda$ における水量の連続条件を考慮すると、フロート側端における生成波の波高は、フロートの水中落下速度 $dh/dt(t)$ と次のような関係にあることがわかる。

$$\eta \Big|_{x=\lambda} = \frac{\lambda}{c_0} \frac{dh}{dt} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 $h(t)$ は時間 t におけるフロート底面の浸水深さを表わしている。

3.2 造波体としてのフロートの運動方程式

式 (4) に表われるフロートの水中落下速度 dh/dt は、次式 of フロートの運動方程式を解くことによって、はじめて具体的に評価し得る。

$$M \frac{d^2 h}{dt^2} + \left[\frac{1}{2} \rho C_D A \left| \frac{dh}{dt} \right| + 2\mu M \Omega \right] \frac{dh}{dt} + \rho Ng(h + \eta) A = MNg \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 ρ は水の密度、 C_D は抗力係数 (drag coefficient)、 A はフロートの底面積、 μ はフロートの案内棒とフロートとの間の摩擦係数、 Ng は水面における遠心加速度 ($a\Omega^2$) の大きさを表わしている。ただし、 g は重力加速度である。

本遠心模型実験においてフロートの案内棒が必要な理由は、もしそれがないと、Coriolis 効果によって、落下中にフロートが円周方向に偏向してしまうためである。

さて、式(5)中の η として式(4)の表現を代入すると、次式を得る。

$$\frac{d^2h}{dt^2} + 2D\omega_0 \frac{dh}{dt} + \omega_0^2 h = \omega_0^2 h^* \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 D は減衰パラメタ、 ω_0 は特性円振動数、 h^* はフロートの平衡貫入深さである。これらの具体的な定義式は次のようである。

$$D \equiv \frac{\lambda}{2\sqrt{dh^*}} + \frac{C_D |dh/dt|}{4\sqrt{Ngh^*}} + \mu\sqrt{h^*/a} \dots\dots\dots (7)$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{Ng}{h^*}} \dots\dots\dots (8)$$

$$h^* \equiv \frac{M}{\rho A} \dots\dots\dots (9)$$

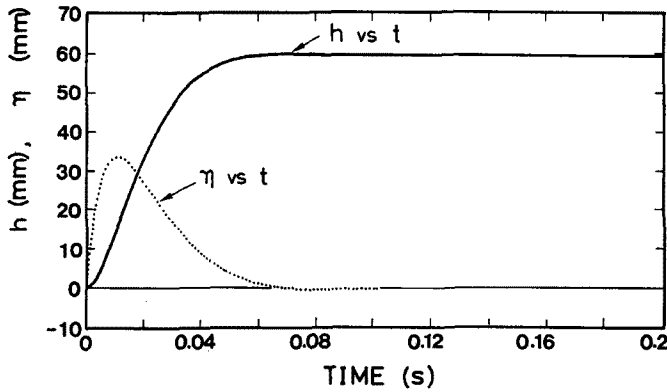


Fig. 5. Predicted depth of immersion (h) of a float into water against time, and the associated, predicted rise in the adjoining water surface, η , against time.

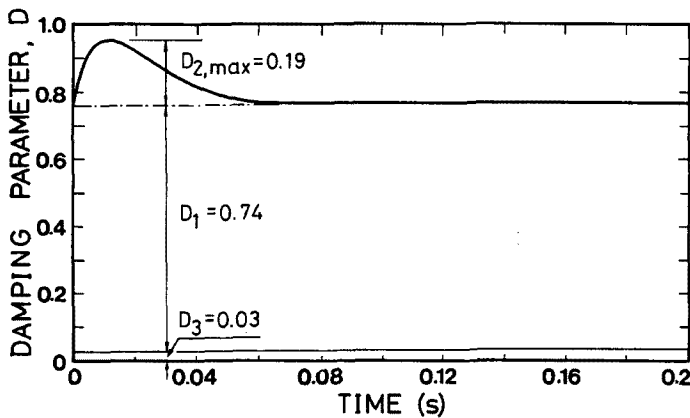


Fig. 6. Predicted variation of a damping parameter D with time, in association with the motion of the float given in Fig. 5. Note that D_1 comes from the wave-making resistance, D_2 from the nonlinear drag resistance and D_3 from the friction between the float and its guide.

式(7)の表現において注目すべきことは、その第1項が水面波としてエネルギーが運び去られる効果、すなわち逸散減衰を表わしていることである。

3.3 解析例

式(4)と式(6)に基づく解析例(後出の TEST WAVE 12に対応している)を、Fig. 5, 6に示す。式(7)で定義される減衰パラメタ D の速度依存性のために、微分方程式(6)を解析的に解くことは困難である。ここでは、Runge-Kutta-Fehlberg 法²⁾によって同式を、 $h_0 = dh_0/dt = 0$ なる初期条件のもとで、数値的に解いている。

解析に用いたパラメタの値は次のようである： $M = 8.5$ kg； $2\lambda = 0.2$ m； $A = 0.143$ m²； $d = 0.077$ m； $a = 0.813$ m； $N = 48.8$ ； $g = 9.81$ m/s²； $C_D = 2.0$ ； $\mu = 0.1$ ， $\rho = 1000$ kg/m³。ここに、 $C_D = 2.0$ という値は、角柱の抗力係数に対する既往報告(文献3の Fig. 126 および文献4の Fig. 2.17)をもとに設定したことを補足しておく。

解析結果によると、フロートの水中落下挙動は Critical Damping の状況に極めて近くなっている。この結果は、実測結果(後出の Fig. 8)

とも、よく対応している。このように、本フロート-水システムが強い減衰を示すのは、逸散減衰項 D_1 の値が 0.74 にも達していることによる (Fig. 6)。同結果は、大きな波の造波という本実験の目的達成の帰結でもあり、極めて興味深い。

4. 遠心力場における水面波の造波とモデル海底地盤応答

4.1 実験の概要

本実験 (Test WAVE 12) に用いたドラム型遠心力载荷装置の概要を、Fig. 7 に示す。

まず、モデル海底地盤の作成法について述べる。用いた地盤材料は Leighton Buzzard Sand である。その粒径の範囲は、B. S. Mesh No. 170 (等価粒径 = $90\mu\text{m}$) から B. S. Mesh No. 100 (等価粒径 = $150\mu\text{m}$) にある。したがって、細砂と考えてよい。この試料砂に適当な水分を与えながら、それを、ゆっくりと回転しているドラムの内壁面に吹きつけることにより、所定厚さのモデル海底地盤を作成する。その後、Rotary Joint を介してドラムの内壁面側 (モデル海底地盤の底部

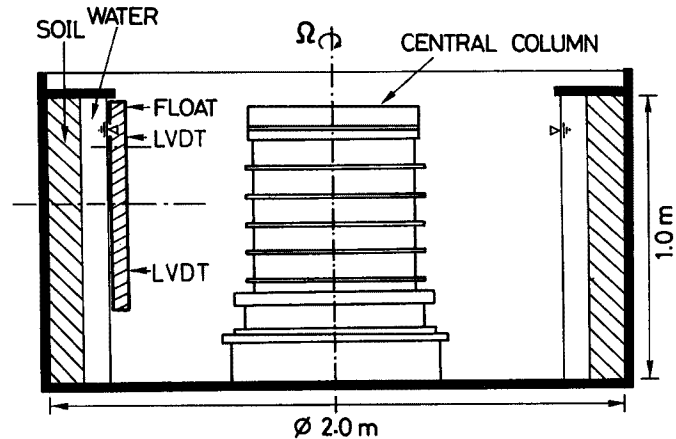


Fig. 7. A rotating drum at the Geotechnical Centrifuge Centre, University of Cambridge, with a float in position just before release. A copper wire temporarily supporting the float as well as its guide are not shown on this diagram.

側) に水を供給し、極めて徐々に水面を半径方向に上げていくことにより、所定の自由水面を設定する。すなわち、ドラム内の所定の位置にあらかじめセットしておいたフロートの底面 (ドラム回転軸に平行である) に、水面が接触するまで、ドラムを回転させながら水を供給する。その後、水の供給弁を閉じ、所定の回転速度までドラムの回転速度を上げ、水面が定常状態に達するのを待つ。

以上が初期状態の設定である。この状態でフロートに作用している遠心力のサポートは、半径方向に張った一本の銅線によって行っている。フロートの自重のサポートは、Fig. 7 には示していないが、水平な一本の案内棒による。水面波を起こすには、所定の瞬間に上述の銅線に高電流を通電することにより、それを溶断し、フロートを水中に自由落下させる。フロートの運動の追跡は、図示した 2 個の LVDT (差動変位計) によって行う。

Test WAVE 12 では、以上のようにして、モデル海底地盤厚さ $d_s = 110\text{ mm}$ 、水深 $d = 77\text{ mm}$ 、水面までの距離 $a = 813\text{ mm}$ 、ドラムの回転角速度 $\Omega = 24.26\text{ rad/s}$ のもとで、フロート (幅 $2\lambda = 200\text{ mm}$) の急速水中落下による非定常造波を行い、波高計測およびモデル海底地盤の間隙水圧応答を計測した。波高計測は、電気抵抗式波高計によって、4 地点 ($\theta = \pm 22.5^\circ$, $\theta = \pm 38.6^\circ$) で行った。ここに、フロートの中心位置を $\theta = 0$ とし、正の波の伝播方向と θ の正方向を合せている。地点 $\theta = 22.5^\circ$ では、モデル海底面における水圧、海底面からの深度 55 mm と 110 mm における間隙水圧を測定している。地点 $\theta = -22.5^\circ$ では海底面における水圧のみを測定した。

4.2 TEST WAVE12における計測結果と考察

(a) フロートの運動

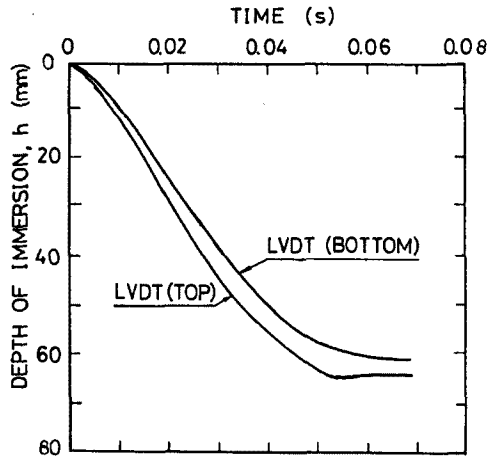


Fig. 8. Measured motion of a float after release in Test WAVE12, at a centrifugal acceleration of 48.8 gravities at the level of still water surface.

次に、このような海底面における変動水圧の第一ピーク値と測定波高との関係を調べておく。地点 $\theta = 22.5^\circ$ における同ピーク値は、 $p_e = 7.3 \text{ kPa}$ である (Fig. 9 (a))。それに対し、同地点で波高計によって測定した主要波ピーク値は $\eta = 12.6 \text{ mm}$ である。すなわち、海底面と水面での変動水圧比は、 $p_e / \rho a \Omega^2 \eta = 1.2$ となる。他方、地点 $\theta = -22.5^\circ$ における海底面の変動水圧の第一ピーク値は、 $p_e = 4.6 \text{ kPa}$ である (Fig. 10)。対応する同地点の測定波高は、 $\eta = 28.9 \text{ mm}$ である。すなわち、地点 $\theta = -22.5^\circ$ における海底面と水面での変動水圧比は、 $p_e / \rho a \Omega^2 \eta = 0.33$ となり、地点 $\theta = 22.5^\circ$ における結果と顕著な差異がある。

回転流体に対する重力波伝播理論 (APPENDIX 参照) によると、上述の差異は Coriolis 効果の反映と解釈しうる。Fig. 11 は、同理論式 (A-22), (A-31) に基づく解析結果を示したものである。同図中の破線は、水平な静止自由表面をもつ通常流体に対する古典的な理論曲線³⁾ である。回転流体中を正方向へ伝播する波 (forward wave) では、Coriolis 効

LVDT によって計測したフロートの運動状況を Fig. 8 に示す。貫入を開始してから $t = 0.06$ 秒後には、ほぼフロートの貫入は停止している。その全般的な運動過程は、Fig. 5 の解析結果とよく対応している。

(b) 海底面における変動水圧波形

地点 $\theta = 22.5^\circ$ における海底面での変動水圧波形、及び同地点における海底地盤内の変動間隙水圧波形を合せて Fig. 9 に示す。また、 $\theta = -22.5^\circ$ 地点における海底面の変動水圧を Fig. 10 に示す。ここでは、海底面における変動水圧波形に着目する。

本実験の造波法によると、孤立波 (solitary wave) に近い波が生成されるはずである (Fig. 5 の解析結果参照)。実際、Fig. 9 (a) 及び Fig. 10 の結果によると、第一ピークを含む主要波に対して、ほぼこのことは満たされている。

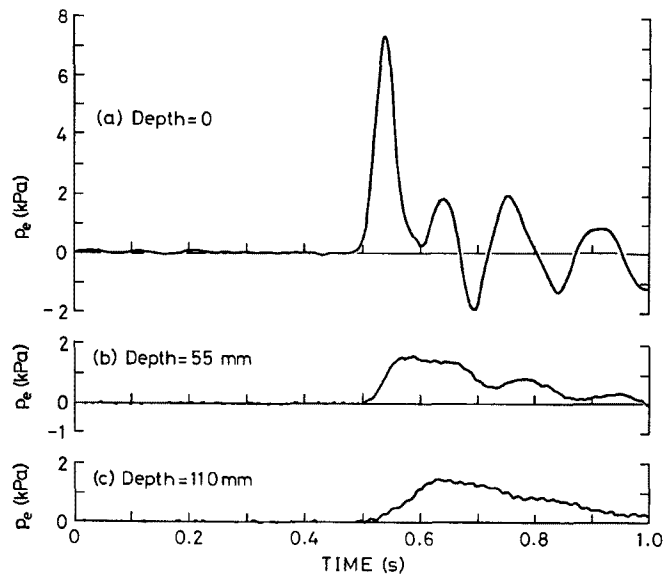


Fig. 9. Wave-induced pressures measured at section $\theta = 22.5^\circ$ in Test WAVE12: (a) water pressure just above the seabed; (b) porewater pressure in fine sand at a depth of 55 mm from the seabed; (c) porewater pressure at the base of the fine sand.

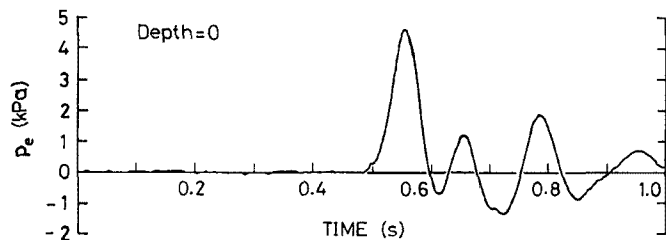


Fig. 10. Wave-induced water pressure just above the seabed, measured at section $\theta = -22.5^\circ$ in Test WAVE12.

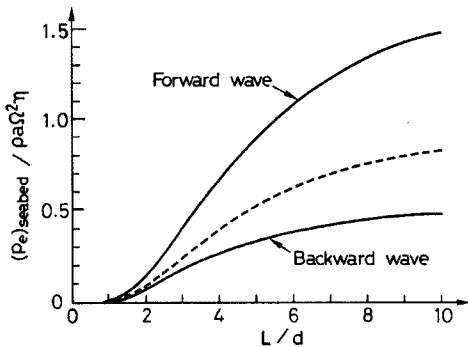


Fig. 11. Predicted relationships between the normalized wave-induced pressure at the seabed and the ratio of wave length, L , to water depth, d , for the forward- and backward-travelling waves in a rotating drum with $a/d = 10.6$. The dotted curve is a well-known, theoretical curve for ordinary fluids with the horizontal free surface at rest.

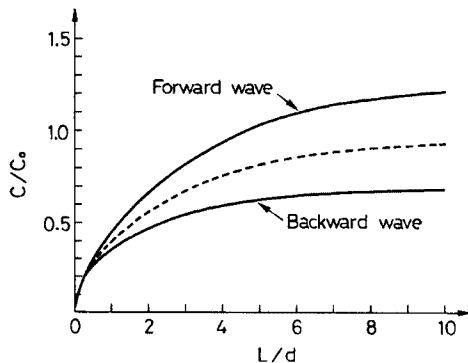


Fig. 12. Predicted relationships between the normalized phase-velocity and the wave-length to depth ratio, under exactly the same situation as described in Fig. 11.

果によって、同一の波長/水深比で比較した場合、通常の波に比べて変動水圧比の値は大きくなる。さて、縦軸の変動水圧比が1.2となる波長/水深比の値を、同図から読み取ると、 $L/d = 7$ となる。他方、回転流体中を負方向へ伝播する波 (backward wave) では、Coriolis効果によって、同一の波長/水深比で比較した場合、通常の流体中よりも変動水圧比の値は小さくなる。ここで、縦軸の変動水圧比が0.33となる波長/水深比の値を読み取ると、 $L/d = 5$ となる。本実験では直接には波長 L を測定していないが、上述の結果からみて、波長 $L = 7d \sim 5d$ (ただし、 $d = 77 \text{ mm}$) の調和波相当の水面波が、本ドラム内を正方向と負方向のそれぞれに伝播したと考えるとよい。

参考のために、回転流体に対する無次元化した位相速度 c/c_0 と波長/水深比 L/d の理論的關係 (APPENDIXの式 (A-19), (A-29) 参照) を、Fig. 12 に示しておく。ただし、同図中の破線は、水平な静止自由表面をもつ通常流体に対する古典理論曲線⁵⁾である。

(c) モデル海底地盤内の変動間隙水圧

地点 $\theta = 22.5^\circ$ では、前述のように、海底面における変動水圧に加えて、海底面下 55 mm と 110 mm の二深度において変動間隙水圧の測定を行っている (Fig. 9)。同図より、深度 55 mm において変動間隙水圧波形は、既に「地盤による filtering 効果」をかなり受けていることがわかる。この傾向は、深度 110 mm ではより顕著である。また、位相遅れ現象も明瞭である。

例として、 $t = 0.7 \text{ s}$ の時点を考えてみよう。このとき、海底面の変動水圧は、 -2 kPa である。他方、海底地盤内には正圧 (1 kPa 程度) が残留しており、海底地盤の安定にとっては不利な方向に働いている。

本実験のスケール・ファクター N の値は、海底面 ($r = a + d$) で 53.4 である。したがって、Fig. 9 (c) の結果をプロトタイプ換算すると、海底面より 6 m の深さまで

波浪の影響が伝達していることになる。この結果は、海底地すべりと高波や異常潮位低下との関わりを今後、遠心模型実験を通じて詳しく調べていくうえに、有用な手がかりを与えるものである。

5. 結 論

ドラム型遠心力载荷装置を用いた水面波実験と、それに対応した理論的検討を行った。得られた主要な結論を列挙すると、次のようである。

1) 回転流体における微小振幅表面波の二次元伝播特性を理論的に検討し、分散関係に及ぼす Coriolis 効果の解析的表現を得た (APPENDIX の式 (A-18) と (A-28))。その結果によると、正方向に伝播する波の位相速度は、各波長において、負方向に伝播する波の位相速度よりも大きい (Fig. 12)。

2) フロート落下方式による非定常造波の近似理論を3節で誘導した。これにより、フロートの運動予測と、Source 領域における生成波の波形予測が可能である。Test WAVE 12 に対する解析結果によると、同試験条件のもとでは造波抵抗による逸散減衰項が大きく、フロートの運動は critical damping 状態に近くなる (Fig. 6)。この結果は、Test WAVE 12 の実測挙動ともよく対応している。

3) Test WAVE 12 において、正方向に伝播する波と負方向に伝播する波の特性を比較した。その結果によると、正方向に伝播する波では、負方向に伝播する波に比べて波高が小さいにもかかわらず、モデル海底面には大きな変動水圧が発生している。この特徴は、本報文の APPENDIX に詳述した回転流体における重力波伝播理論で、その傾向を概ね説明し得る (Fig. 11)。

4) Test WAVE 12 において、モデル海底地盤 (細砂) 内の変動間隙水圧波形と海底面における変動水圧波形を比較したところ、前者は後者に対して顕著な位相遅れを示していることがわかった (Fig. 9)。

謝 辞

遠心力場水面波実験を行うにあたり、格別のサポートをいただいたケムブリッジ大学工学部 Schofield 教授及び同研究室の関係各位に感謝します。また、有益な御討議をいただいた Sleath 博士、河田恵昭助教授、山下隆男博士、中川一博士、西村直志博士に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 徳岡辰雄: 波動論, サイエンス社, 1984, pp. 168-177.
- 2) Forsythe, G. E., M. A. Malcolm and C. B. Moler: Computer Methods for Mathematical Computations, Chapter 6 Prentice-Hall, Inc., 1977.
- 3) Rouse, H.: Elementary Mechanics of Fluids, Art 40 Dover Publications, Inc., 1946.
- 4) 中川 一: 洪水および土砂氾濫災害の危険度評価に関する研究, 京都大学工学博士論文, 1989, pp. 71-75.
- 5) Horikawa, K.: Coastal Engineering, University of Tokyo Press, 1978, pp. 9-23.

APPENDIX 回転流体における重力波の伝播理論

一定の角速度 Ω のもとで、鉛直軸 (z 軸) まわりに一様回転しているドラム内の自由水面に乱れを与えると、それは水面波 (重力波) として伝播する。ここでは、遠心加速度が重力加速度よりも十分に大きい状況を対象とし、回転軸に垂直な面内における水面波の円周方向への伝播問題を考える。ただし、微小振幅の定常進行波を対象とする。分散関係に及ぼす Coriolis 効果の具体的な表現を得るのが、本解析の眼目である。

さて、ドラムとともに回転する極座標系 (r, θ) を採用する (Fig. A-1 参照)。水粒子速度を v_r, v_θ 、水圧を p と表示すると、 r 方向と θ 方向の運動方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + r\Omega^2 + 2\Omega v_\theta \dots\dots\dots (A-1)$$

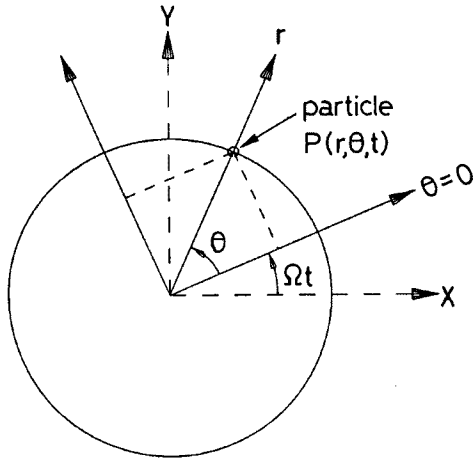


Fig. A-1. A polar co-ordinate system attached to a rotating drum. Note that the X, Y-coordinate axes are fixed in space.

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} - 2\Omega v_r \dots\dots\dots (A-2)$$

ここに、 ρ は流体の密度である。
非圧縮性流体を考えているので、連続方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \dots\dots\dots (A-3)$$

解析を簡単にするため、次式の形の手速度ポテンシャルの存在を仮定する。

$$\varphi = f(r) \cdot \sin(k\theta - \nu t) \dots\dots\dots (A-4)$$

$$\varphi = f(r) \cdot \sin(k\theta + \nu t) \dots\dots\dots (A-5)$$

ここに、 k は波数、 ν は円振動数、 t は時間である。式(A-4) が正方向に伝播する波に対する速度ポテンシャル、式(A-5) が負方向に伝播する波に対する速度ポテンシャルを表わしている。これらのいずれも次の

Laplace 方程式を満足する。

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0 \dots\dots\dots (A-6)$$

なお、ここでは θ 方向に周期 2π の周期性を仮定しているため、波数 k は正整数となる。
自由水面の表現式は次のようである。

$$r = a - \eta(\theta, t) \dots\dots\dots (A-7)$$

ここに、 a はドラムの回転軸から静止水面までの距離、 η は静止水面からの波高である。

設定した境界条件は次のとおりである。

$$v_r = 0 \quad \text{on } r = b \dots\dots\dots (A-8)$$

$$\left. \begin{array}{l} p = 0 \\ v_r = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \end{array} \right\} \text{ on } r = a - \eta \dots\dots\dots (A-9)$$

ここに、 $b = a + d$ である。ただし、 d は水深である。

A-1 正方向に伝播する水面波

(a) 分散関係

式(A-4) の表現を基礎式(6) に代入し、関数 $f(r)$ の具体形を求める。次に境界条件式(A-8) を考慮したうえで、その表現を速度ポテンシャル式(A-4) に代入する。その結果、次式を得る。

$$\varphi = \frac{D}{2} \cdot [(r/b)^k + (r/b)^{-k}] \cdot \sin(k \cdot \theta - \nu \cdot t) \dots\dots\dots (A-10)$$

ここに、 D は積分定数である。

次に式(A-10) の表現を運動方程式(A-1) に代入すると、これは r に関して容易に積分することができる。しかる後、式(A-10) の両辺を時間 t で偏微分して得た関係式を利用し、積分定数 D を消去する。その結果、水圧 p と速度ポテンシャル速度 $\partial \varphi / \partial t$ に関する次式の表現を得る。

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{-p/\rho + \Omega^2 \cdot (r^2 - a^2)/2}{1 - (2\Omega/\nu) \cdot S(r)/C(r)} \dots\dots\dots (A-12)$$

ここに、関数 $S(r)$ と $C(r)$ の定義式は次のようである。

$$S(r) \equiv -\frac{1}{2} [(r/b)^k - (r/b)^{-k}] \dots\dots\dots (A-13)$$

$$C(r) \equiv \frac{1}{2} [(r/b)^k + (r/b)^{-k}] \dots\dots\dots (A-14)$$

式(A-12)において、 $r=a-\eta$ において $p=0$ という境界条件を考慮する。高次項を無視すると、次式を得る。

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{r=a} = \frac{-a\Omega^2 \cdot \eta}{1 - (2\Omega/\nu) \cdot A_t} \dots\dots\dots (A-15)$$

ただし、

$$A_t \equiv \frac{S(a)}{C(a)} = \frac{(b/a)^k - (b/a)^{-k}}{(b/a)^k + (b/a)^{-k}}$$

である。

式(A-15)の両辺を時間 t に関して偏微分した後、式(A-9)を考慮する。その結果、速度ポテンシャル φ で表現した次式の重要な境界条件式を得る。

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)_{r=a} - \frac{a\Omega^2}{1 - (2\Omega/\nu) \cdot A_t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (A-16)$$

ここで、Coriolis項 $(2\Omega/\nu) \cdot A_t$ をゼロと置くと、古典的な境界条件式⁵⁾に帰着することを指摘しておく。

式(A-10)で定義された速度ポテンシャルは、式(A-16)の斉次境界条件を満たす必要があるので、これより分散関係式として次式を得る。

$$\nu^2 - 2\Omega \cdot A_t \cdot \nu - k \cdot A_t \cdot \Omega^2 = 0 \dots\dots\dots (A-17)$$

上式は円振動数 ν の波数 k に関する二次方程式である。ここで、 ν は正実数であるので、最終的に次式の分散関係を得る。

$$\nu = \Omega \cdot [(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} + A_t] \dots\dots\dots (A-18)$$

上式より、位相速度 $c = a\nu/k$ と波数 k (あるいは波長 $L = 2\pi a/k$)との関係も直ちに求めることができる。すなわち、次の関係を得る。

$$\frac{c}{c_0} = \left(\chi + \chi^2 \cdot \frac{d}{a}\right)^{1/2} + \chi \cdot \sqrt{d/a} \dots\dots\dots (A-19)$$

$$\chi \equiv \frac{L}{2\pi d} \cdot \frac{(1+d/a)^k - (1+d/a)^{-k}}{(1+d/a)^k + (1+d/a)^{-k}} \dots\dots\dots (A-20)$$

ここに、 $c_0 = (a\Omega^2 \cdot d)^{1/2}$ は基準長波の伝播速度である。

式(A-19)の表現を、後出の式(A-29)と比較すると、回転流体においては正方向に伝播する波の位相速度の方が、各波長において、負方向に伝播する波の位相速度よりも大きいことがわかる。その差異はパラメタ a/d の値が大きくなるにつれて小さくなる。実際、式(A-19)と(A-29)において $a/d \rightarrow \infty$ とみると、 $(1+d/a)^{a/d} \rightarrow e$ なる関係があるので、それらは厳密に古典理論の表現⁵⁾に帰着する。ここに、 e は自然対数の底である。

(b) 水面変動と変動水圧

静止水面からの波高 η は、次のようになる。

$$\eta = \frac{H}{2} \cdot \cos(k \cdot \theta - \nu \cdot t) \dots\dots\dots (A-21)$$

ここに、 $H/2$ は振幅である。

任意地点 ($\theta = \theta$) における任意深度の変動水圧 p_e は、同地点の波高 η と次の関係がある。

$$\frac{p_e}{\rho a \Omega^2 \eta} = \frac{C(r)}{C(a)} \cdot \left[1 + \frac{2A_t - 2S(r)/C(r)}{(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} - A_t} \right] \dots\dots\dots (A-22)$$

すなわち、変動水圧と水面変動とは同位相である。

(c) 水粒子速度

任意地点における任意深度の水粒子速度は、同地点の水面変動と次の関係を満たす。

$$v_r = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{S(r)}{S(a)} \dots\dots\dots (A-23)$$

$$v_\theta = \eta \cdot \nu \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{C(r)}{S(a)} \dots\dots\dots (A-24)$$

A-2 負方向に伝播する水面波

議論の展開は、正方向に伝播する水面波の場合と本質的には同じである。そこで、主要な結果のみを以下に示しておく。

(a) 分散関係

式(A-10) と (A-16) に対応した速度ポテンシャルと境界条件式は、ここでは次のようになる。

$$\varphi = \frac{D}{2} \cdot [(r/b)^k + (r/b)^{-k}] \cdot \sin(k \cdot \theta + \nu \cdot t) \dots\dots\dots (A-25)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{r=a} - \frac{a \Omega^2}{1 + (2\Omega/\nu) A_t} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (A-26)$$

これらの関係より、分散方程式として次式を得る。

$$\nu^2 + 2\Omega \cdot A_t \cdot \nu - k \cdot A_t \cdot \Omega^2 = 0 \dots\dots\dots (A-27)$$

ここで正実数 ν に対する解を求めると、最終的に次の分散関係を得る。

$$\nu = \Omega \cdot [(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} - A_t] \dots\dots\dots (A-28)$$

これより、直ちに位相速度 c に関する次の表現を得る。

$$\frac{c}{c_0} = \left(\chi + \chi^2 \cdot \frac{d}{a} \right)^{1/2} - \chi \cdot \sqrt{d/a} \dots\dots\dots (A-29)$$

(b) 水面変動と変動水圧

任意点における波高は次のようになる。

$$\eta = \frac{H}{2} \cdot \cos(k \cdot \theta + \nu \cdot t) \dots\dots\dots (A-30)$$

ここに、 $H/2$ は振幅である。

変動水圧と水面変動は、ここでも同位相である。その具体的な表現は次のようである。

$$\frac{p_e}{\rho a \Omega^2 \eta} = \frac{C(r)}{C(a)} \cdot \left[1 - \frac{2A_t - 2S(r)/C(r)}{(A_t^2 + k \cdot A_t)^{1/2} + A_t} \right] \dots\dots\dots (A-31)$$

(c) 水粒子速度

水粒子速度と水面変動との関係は次のようになる。

$$v_r = -\frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{S(r)}{S(a)} \dots\dots\dots (A-32)$$

$$v_\theta = -\eta \cdot \nu \cdot \frac{a}{r} \cdot \frac{C(r)}{S(a)} \dots\dots\dots (A-33)$$

A-3 計算例

分散関係の具体的な計算例を Fig. A-2 に示す。ここでは、円振動数 ν を基準円振動数 $\nu_0 = (a\Omega^2/d)^{1/2}$ で除して無次元化している。ただし、図中の破線は、Corliolis 効果を全く受けていない通常流体に対する分散曲線⁵⁾である。この場合の基準円振動数は $\nu_0 = (g/d)^{1/2}$ である。同図より、パラメタ a/d の値が小さくなるほど、Corliolis 効果の影響が大きくなることがよくわかる。

変動水圧の深さ方向の分布に関する計算例を Fig. A-3 に示す。図中の破線は、Corliolis 効果のない通常流体に対する古典理論曲線⁵⁾である。この図より、同一深度で比較した場合、もし波高 η が同じであるとすると、正方向に伝播する波による変動水圧の方が、負方向に伝播する波による変動水圧よりも大きくなるのがわかる。同結果は物理的にも興味深い現象である。

ところで、地盤工学的な実際問題への遠心模型実験の応用という観点に立つと、Fig. A-2 の結果は次のことを示唆している。すなわち、プロトタイプが水平な静止自由水面を有しているとする、動的相似則を良い近似で満足させるためには、ドラム径をある程度大きくする必要がある。すなわち、ドラム回転中心軸から水面までの距離 a を水深 d の 20 倍以上に保つのが望ましい。

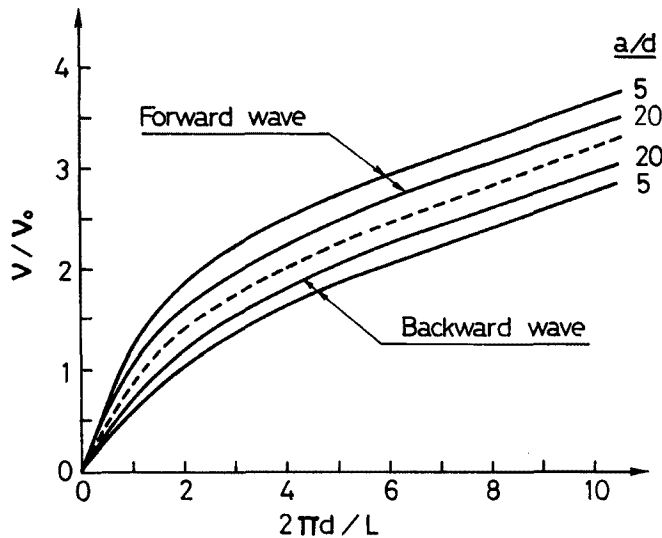


Fig. A-2. Dispersion relationships predicted for water waves in rotating drums. The dotted curve indicates the situation of $a/d \rightarrow \infty$ where Corliolis effects vanish.

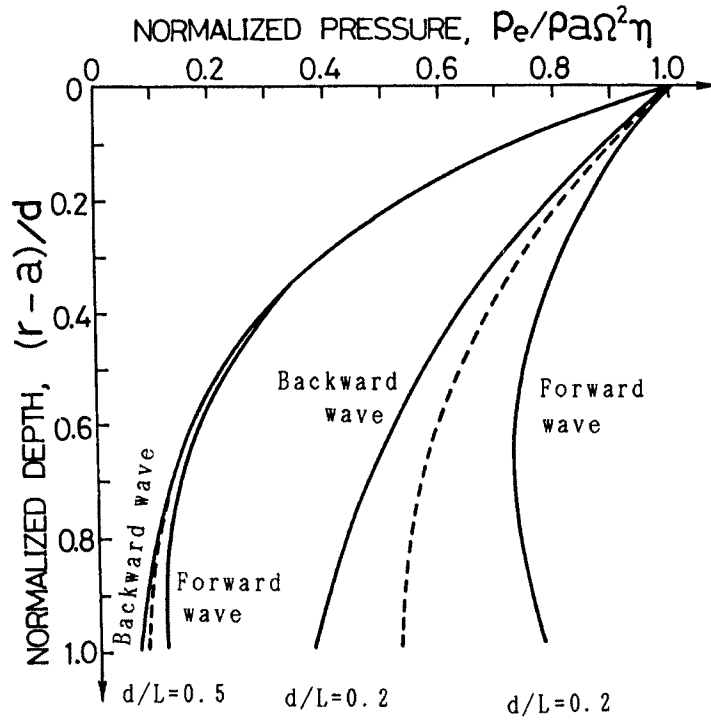


Fig. A-3. Predicted distributions of wave-induced pressures with depth for water waves in a rotating drum with $a/d = 20$. The dotted curves indicate the classical distributions of pressure at the given values of d/L .