

粒度分布を考慮した砂質土における 非定常浸透流の基礎方程式とその抵抗則

土屋 義人・山元 淳史

BASIC EQUATIONS AND ITS RESISTANCE LAW OF UNSTEADY FLOW THROUGH POROUS MEDIA OF SANDY SOIL

By *Yoshito* TSUCHIYA and *Atsushi* YAMAMOTO

Synopsis

Applying local volume-averaging method to the microscopic continuity and Navier-Stokes equations, the macroscopic continuity equation and equations of motion of flow through porous media of sandy soil are derived. From the order estimation of each term in the derived equations, the simplified macroscopic basic equations for unsteady flow through porous media is obtained under the periodic boundary condition.

The resistance law of flow in porous media is derived by assuming the log-normal grain size distribution and modeling the pore system of porous media by series of capillary tube, in which relation between the grain size and the pore size is considered. The proposed capillary tube model is applied to evaluation of the total resistance of flow in the real porous media, in which permeability is expressed as a function of the grain size distribution and porosity. The evaluated permeability by the capillary tube model is in good agreement with experiments by Takeuchi (1971) and Loudon (1952).

1. 緒 言

わが国の重化学工業を中心とした工業地帯は、一方では海上交通や工業用水利用の便から、他方では広い敷地を埋立によってしか得られないという土地利用上の制約から臨海地域に多く存在しており、海岸・港湾構造物の確実な防災対策が必要とされている。一方、これらの構造物の周辺地盤の地下水は、埋立地背後の地下水位変動だけでなく、波浪・潮汐の影響も同時に受けており、この浸透流の挙動を正しく評価することは港湾構造物や海浜の安定性を検討するためにきわめて重要である。

このような背景で地下水問題を扱うとき、多孔質体としての砂質土は均質な連続体として取り扱われ、巨視的な平均流速や圧力で表される基礎方程式が得られている。しかし、微視的には、浸透流は非常に複雑な土粒子間の間隙の流れであり、その真の流速や圧力は空間的にも時間的にも複雑に変化している。この微視的な流れの特性は、その道筋である間隙の幾何学構造に依存しているが、その間隙構造も非常に複雑な形状となっている。また、実用上からいえば、土粒子の間隙を流れる局所的な流れの特性よりも、巨視的な浸透層内の平均流速が必要になることが多い。微視的な流体の運動を集大成した後に空間的に平均操作するのは非常に困難であるから、コントロールボリュームを考え物理量を空間的に平均操作して表した連続式および運動方程式を境界条件に対して解析する取り扱いによらざるをえない。ただし、平均操作して巨視的に浸透

流を取り扱おうとすると、平均操作するスケールよりも小さい微視的な現象は当然無視されることになり、また、コントロールボリューム内の構造は、微視的にみると非常に複雑で不均質であるものが、平均操作により均質なメディアとして取り扱われてしまう。そこで内部の微視的な流れを空間平均量とそれに対する場所的な変動成分として表し、多孔質体としての連続体の巨視的な基礎方程式を誘導するとともに、その変動成分がどのような形でその基礎方程式中に現われるかを調べる必要がある。

この空間的に平均操作する方法は、浸透流の巨視的な基礎方程式を求める方法として古くから用いられている。高木¹⁾は非圧縮性を仮定し対流慣性項を無視して平均操作を行い、巨視的な基礎方程式を誘導して壁面近傍の流れを解析している。また、合田²⁾は砂濾過の問題に適用するために、間隙率の時間的な変化を含む連続式を誘導している。この方法では Whitaker^{3),4)} および Slattery⁵⁾ によって、平均操作における積分演算と微分演算との関係が明らかにされ、土粒子やそれによって構成される構造骨格が変形する場合でも適用できるようになった。そして、Irmay⁶⁾、Whitaker⁷⁾、Slattery⁸⁾ および Bear⁹⁾ により Darcy 則と微視的な流れの構造との関係が研究されており、multi-phase flow の問題にも適用されている^{10),11)}。

本研究では、飽和浸透流を対象とし、微視的な記述における Navier-Stokes の方程式に対して対流慣性項を無視せず、また流体の圧縮性や土粒子および構造骨格の変位も考慮して空間的平均操作を行って巨視的な基礎方程式を誘導する。ついで、基礎方程式に用いるべき浸透流の抵抗則について詳細に検討し、透水係数を砂質土の粒度分布の特性を導入した表示として定式化する。すなわち、従来の飽和透水係数は間隙率および代表粒径の関数として表示されているが、砂質土の粒度分布をどう考慮するかは未解決の問題として残されている。そこで、粒度分布に対数正規分布を適用し、土粒子の個数分布や断面での大きさを表示したあと、複雑な間隙構造をもつ多孔質体としての砂質土を直列毛細管束にモデル化し、その間隙径の分布を考慮して流れの特性の空間平均から飽和透水係数を求め、武内¹²⁾ および Loudon¹³⁾ が行った実験結果と比較する。

2. 非定常浸透流の基礎方程式

2.1 微視的な浸透流の基礎方程式と境界条件

砂質土の土粒子間の間隙の流れは、粘性流体の基礎方程式としての次の連続式と Navier-Stokes の運動方程式によって記述される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 \mathbf{v} は速度ベクトル、 ρ は密度、 p は圧力、 \mathbf{F} は外力および μ は粘性係数である。これらの方程式を解くためには、初期条件および境界条件が必要である。流れが定常 ($\partial/\partial t = 0$) であれば、境界条件のみ必要となり、それは、解析対象領域の外縁の開領域と土粒子表面で与えられる。領域の外縁では多孔質体の存在限界、または自由表面において既知の流速分布および圧力分布が境界条件として与えられる。

一方、すべての土粒子表面 A_s について与えられる境界条件は、土粒子表面の移動速度ベクトルを \mathbf{w}_s として次式で表される。

$$\mathbf{v} - \mathbf{w}_s = 0 \quad \text{on } A_s \quad \dots \dots \dots (3)$$

この境界条件は、土粒子表面での non-slip 条件を示す接線方向で $\mathbf{v}_t - \mathbf{w}_{st} = 0$ および流体が土粒子内に入りしないことを示す法線方向で $\mathbf{v}_n - \mathbf{w}_{sn} = 0$ であることを意味している。

この境界条件のもとに連続式 (1) および運動方程式 (2) を解くことを考えるとき、対象とする領域内に等径の球形粒子が 1 個または数個であれば、解析的あるいは数値計算によって、流体の流速分布および圧力分布が求められるであろう。しかし、現実には土粒子の数は無数にある。この無数の土粒子が等径の球体で

かつ規則的に並んでいるのであれば解の周期性を考慮することにより解析的に解けるかもしれない。また、球形粒子の位置が不規則に任意に並んでいても数個であれば、数値計算で解が得られるかも知れない。しかしながら、実際には無数の土粒子が不規則に任意に並んでおり、その土粒子の大きさも形状も複雑であるため、境界条件を簡単に数学的に表現することは難しい。もし、土粒子の大きさ、形状および配置やその間隙の構造が既知で、領域内すべての境界条件が把握できており、領域外縁の境界条件（固定壁または自由表面など）も既知であれば、微視的なすべての流体素分の流速分布および圧力分布を同時に求めることは原理的に可能ではあろうが、解析的にもまた数値計算でも不可能である。

2.2. 巨視的な浸透流の基礎方程式

(1) コントロールボリュームと空間平均の定義

(a) 平均量と変動成分の定義：砂層を飽和状態で流れている浸透流を考える。これに砂層内のある1点 $P(x_0, y_0, z_0)$ を中心とし、Fig. 1 に示すようなコントロールボリュームを設定すると、その辺長を x, y および z 方向にいずれも l とすれば、その微小容積は $\Delta V = l^3$ で表される。

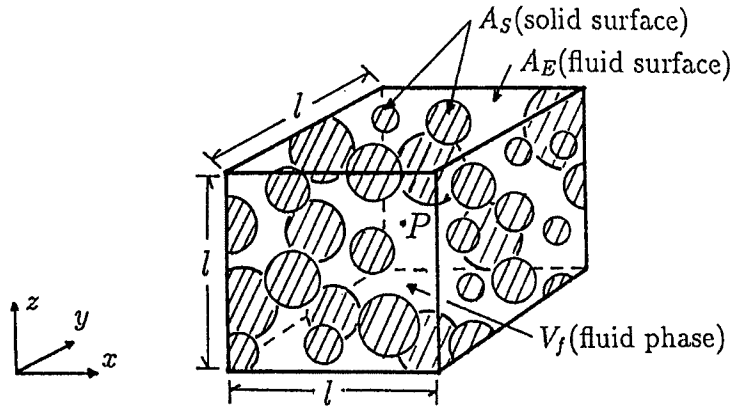


Fig. 1. A schematic of a control volume including numerous soil grains.

点 P における平均流速 v_s 、平均圧力 p_0 および平均密度 ρ_0 は、このコントロールボリュームの流体相 V_f (容積は $\Delta V_f(t)$) における流速 v 、圧力 p および密度 ρ を空間的に平均操作して表すと、次式のように定義される。

$$\left. \begin{aligned} v_s &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_f} v \, dV \\ np_0 &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_f} p \, dV \\ n\rho_0 &= \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_f} \rho \, dV \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、巨視的な特性量である間隙率 n は、このコントロールボリュームにおいて次式で定義される。

$$n = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_f} dV = \frac{\Delta V_f(t)}{\Delta V} \dots\dots\dots (5)$$

また、コントロールボリューム内部での流速、圧力および密度の空間的な変動成分 v' 、 p' および ρ' を次式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{v_s}{n} + v' \\ p &= p_0 + p' \\ \rho &= \rho_0 + \rho' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに,

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} v' dV = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} p' dV = \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \rho' dV = 0 \dots\dots\dots (7)$$

ただし、一般的に $\rho' \ll \rho_0$ であることから、次式のように表される。

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho'}{\rho_0}\right) \dots\dots\dots (8)$$

(b) 微分演算と平均操作の関係：微分演算と平均操作との関係、すなわち微分演算後の空間平均値と、空間平均した諸量の微分との関係を次に示す。流体相の特性量を ϕ で表示すると、空間微分に関して^{5),14)},

$$\langle \nabla \phi \rangle = \nabla \langle \phi \rangle + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \phi n_s dA \dots\dots\dots (9)$$

時間微分に関して⁴⁾,

$$\left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi \rangle - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \phi w_s \cdot n_s dA \dots\dots\dots (10)$$

の表示が得られる。ここに、 ϕ は v, p または ρ で、 $\langle \phi \rangle$ は ϕ の空間平均値を表し、具体的には $v_s, n\phi_0$ または $n\rho_0$ である。また、 n_s はその単位法線ベクトル（流体相から土粒子に向う方向が正）を示す。ここで、 $\phi = 1$ とすると、式 (5), (9) および (10) より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} n_s dA = -\nabla n = 0 \\ \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} w_s \cdot n_s dA = \frac{\partial n}{\partial t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

(c) コントロールボリュームの大きさ：このコントロールボリュームのスケール l は、以上の平均操作が理論的に妥当となるように数多くの土粒子（径 D ）を含んだ十分な大きさ、すなわち次式の関係を満たす必要がある。

$$l \gg D \dots\dots\dots (12)$$

この平均操作によって、土粒子間隙における複雑な速度分布 v' は見かけ上無視されることになる。間隙中における実際の流れの道すじは著しく屈曲しており、微分のスケールを上式で考慮すると、 ∇v_s と $\nabla v'$ のオーダーには次の関係があると考えられる。

$$O(\nabla v') \gg O(\nabla v_s) \dots\dots\dots (13)$$

一方、各コントロールボリューム毎に定義される平均流速の空間的变化を解析するためには、解析する現象のスケール L に比べてコントロールボリュームのスケール l を無視できるほど小さくする必要がある。

$$l \ll L \dots\dots\dots (14)$$

この関係は Whitaker³⁾ により、つぎの関係が成立する条件に対応すると説明されている。

$$\frac{1}{\Delta V} \iiint_V \langle \phi \rangle dV = \langle \phi \rangle \dots\dots\dots (15)$$

(2) 連続式と運動方程式の空間平均

(a) 連続式：連続式 (1) を空間的に平均操作すれば次式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle + \langle \nabla \cdot (\rho v) \rangle = 0 \dots\dots\dots (16)$$

この左辺第1項に式 (4) および (10) を適用すると、次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \rho}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \rangle - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \rho w_s \cdot n_s dA \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (n\rho_0) - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \rho w_s \cdot n_s dA \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

同様に、式 (16) の左辺第 2 項に式 (6), (7) および (9) を用いると、次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \rho \mathbf{v} \rangle &= \nabla \cdot \langle \rho \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s dA \\ &= \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot \langle \rho' \mathbf{v}' \rangle + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s dA \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

これらより式 (16) は次式のように書き換えられる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\rho_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_r} \rho' \mathbf{v}' dV + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \rho (\mathbf{v} - \mathbf{w}_s) \cdot \mathbf{n}_s dA = 0 \dots\dots\dots (19)$$

さらに、土粒子表面 A_s においては式 (3) により $\mathbf{v} - \mathbf{w}_s = 0$ であるから式 (19) 第 4 項は 0 となり、結局空間平均された連続式は次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (n\rho_0) + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_s) + \nabla \cdot \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_r} \rho' \mathbf{v}' dV = 0 \dots\dots\dots (20)$$

(b) 運動方程式：運動方程式 (2) を空間的に平均操作すると、次式のようになる。

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle + \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{F} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle + \left\langle \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right\rangle \dots\dots\dots (21)$$

この左辺第 1 項に式 (10) を適用すると、次式のように変形される。

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \mathbf{v} (\mathbf{w}_s \cdot \mathbf{n}_s) dA \dots\dots\dots (22)$$

式 (21) の左辺第 2 項は x 方向について考えると、 \mathbf{v} の x 成分を $u = u_s/n + u'$ および $\nabla u = \langle \nabla u \rangle + (\nabla u)'$ として、次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v} \cdot \nabla u \rangle &= \left\langle \left(\frac{\mathbf{v}_s}{n} + \mathbf{v}' \right) \cdot \{ \langle \nabla u \rangle + (\nabla u)' \} \right\rangle \\ &= \frac{\mathbf{v}_s}{n} \cdot \langle \nabla u \rangle + \langle \mathbf{v}' \cdot (\nabla u)' \rangle \\ &= \frac{\mathbf{v}_s}{n} \cdot \nabla u_s + \frac{\mathbf{v}_s}{n} \cdot \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} u \mathbf{n}_s dA + \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla u' \rangle \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ここで用いた $\langle \mathbf{v}' \cdot (\nabla u)' \rangle = \langle \mathbf{v}' \cdot \nabla u' \rangle$ の関係式は、Gray・O'Neill¹⁵⁾ により証明されている。これより式 (21) の左辺第 2 項は、次式のように表される。

$$\langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \rangle = \left(\frac{\mathbf{v}_s}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_s + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \mathbf{v} \left(\frac{\mathbf{v}_s}{n} \cdot \mathbf{n}_s \right) dA + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_r} (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' dV \dots\dots\dots (24)$$

このうち右辺第 1 項は平均流速による対流慣性項、右辺第 3 項は流速の空間的な変動成分によって生じる対流慣性項である。右辺第 2 項は、式 (22) の右辺第 2 項と同じく土粒子またはそれによって構成される構造骨格の圧縮性に関係する項である。

次に、式 (21) の右辺第 1 および 2 項は次のように変形される。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{F} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle &= - \langle \nabla \Omega \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle \\ &= - n \left(\nabla \Omega_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 \right) - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \left(\Omega + \frac{p'}{\rho_0} \right) \mathbf{n}_s dA \\ &\quad + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_r} \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p' dV \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

ここに、式 (21) の右辺第 1 項の \mathbf{F} は主として重力であるが、これを次式のようにポテンシャル Ω で表している。

$$\mathbf{F} = \mathbf{g} = - \nabla \Omega \dots\dots\dots (26)$$

この式 (25) の最後の右辺第 1 項が 0 のとき (たとえば $\mathbf{v} = 0$ のとき)、右辺第 2 項も 0 となる。ここでは Gray・O'Neill¹⁵⁾ の方法にならない、右辺第 2 項が第 1 項に比例すると仮定すると、次式のように表される。

$$\langle \mathbf{F} \rangle - \left\langle \frac{1}{\rho} \nabla p \right\rangle = -nF_1 \nabla \Omega_0 - \frac{nF_1}{\rho_0} \nabla p_0 + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p' dV \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 F_1 は主として間隙構造によって決まる定数であり、 Ω_0 は点 P での Ω の値を示す。

つぎに、式 (21) の右辺第3項を書き換える。 x 方向について考えると、これまでと同様に式 (6) および (9) を用いて次式のように変形される。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 u \right\rangle &= \frac{\mu}{\rho_0} \langle \nabla \cdot (\nabla u) \rangle - \left\langle \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla^2 u' \right\rangle \\ &= \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 u_s + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} u \mathbf{n}_s dA \\ &\quad + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla u \cdot \mathbf{n}_s dA - \left\langle \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla^2 u \right\rangle \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

これより式 (21) の右辺第3項は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v \right\rangle &= \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_s + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} v \mathbf{n}_s dA \\ &\quad + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla v \cdot \mathbf{n}_s dA - \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla^2 v' dV \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

最後に、式 (21) の右辺第4項は x 方向について次式となる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot v) \right\rangle &= \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot v_s) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} v \cdot \mathbf{n}_s dA \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} (\nabla \cdot v) n_{sx} dA \\ &\quad - \left\langle \frac{1}{3} \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot v) \right\rangle \dots\dots\dots (30) \end{aligned}$$

ここに、 n_{sx} は \mathbf{n}_s の x 成分である。これより式 (21) の右辺第4項は、次式のように表される。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho} \nabla (\nabla \cdot v) \right\rangle &= \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \nabla (\nabla \cdot v_s) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} v \cdot \mathbf{n}_s dA \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} (\nabla \cdot v) \mathbf{n}_s dA \\ &\quad - \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{1}{3} \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla (\nabla \cdot v) dV \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

式 (3), (22), (24), (27), (29) および (31) から、空間的に平均操作された運動方程式として最終的に次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{v_s}{n} \cdot \nabla v_s + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} (v' \cdot \nabla) v' dV \\ - \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} w_s (v' \cdot \mathbf{n}_s) dA \\ = -nF_1 \nabla \Omega_0 - \frac{nF_1}{\rho_0} \nabla p_0 + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p' dV + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_s \\ + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \cdot \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} w_s \mathbf{n}_s dA + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla v' \cdot \mathbf{n}_s dA \\ - \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla^2 v' dV + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \nabla (\nabla \cdot v_s) + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \nabla \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} w_s \cdot \mathbf{n}_s dA \\ + \frac{1}{3} \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} (\nabla \cdot v') \mathbf{n}_s dA - \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} \frac{1}{3} \frac{\mu \rho'}{\rho_0^2} \nabla (\nabla \cdot v') dV \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

(c) 圧縮性について：さて、空間的に平均操作によって得られた連続式 (20) と運動方程式 (32) には、密度、圧力および流速の変動成分である ρ' , p' および v' を含む項が含まれている。このうち密度の変動成分 ρ' については、一般に次の示性方程式により圧力変動成分と関係づけられる。

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p'}{\beta} \dots\dots\dots (33)$$

しかし、水の体積弾性係数 β は常温常圧で $2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ であり、もし、コントロールボリュームの中に空気が混入していない場合を対象にすれば一般的な条件では $\rho' \ll \rho_0$ であることから、コントロールボリューム内部での空間的な密度変化は非常に小さい。したがって、次式のように考えられる。

$$O(\rho'v) \ll O(\rho_0v_s) \dots\dots\dots (34)$$

これより、空間平均された連続式 (20) の左辺第3項は、左辺第2項と比べて無視することができる。なお、ここでは v' と v_s のオーダーはほぼ同じと考えている。結局、式 (20) は次式のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(n\rho_0) + \nabla \cdot (\rho_0v_s) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

この式には、もはや変動成分は含まれておらず、これが目的とする巨視的な連続式である。しかし、砂質土の中に空気が混入しているような不飽和浸透流を対象とする場合には、式 (33) のような示性方程式が連続式および運動方程式に加えて基礎方程式を構成することになるはずである。

同様にすれば、運動方程式 (32) についても ρ' の含まれる項、右辺第3, 7および11項は、他の項に比べて無視することができる。また、式 (35) より平均密度 ρ_0 の時空間的な変化で書き換えられる右辺第8および10項も、それぞれ右辺第4および6項に比べて無視することができる¹⁵⁾。

次に、式 (32) の左辺第4項、右辺第5項および9項について調べる。これらの項に含まれる土粒子表面の移動速度 w_s は、土粒子および地盤の骨格が非圧縮であれば0である。また、非圧縮性を仮定しなくても、一般的な土質を対象とする限り w_s は流速 v に比べて非常に小さく、左辺第4項は左辺第3項に比べて無視することができる。さらに、次式の関係が成り立つことから右辺第5および9項も、右辺第6項に比べて無視することができる。

$$O(\nabla w_s) \ll O(\nabla v') \quad \text{on } A_s \dots\dots\dots (36)$$

これより式 (32) は次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_s}{\partial t} + \left(\frac{v_s}{n} \cdot \nabla\right)v_s + \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V'} (v' \cdot \nabla)v' dV \\ = -nF_1 \nabla \Omega_0 - \frac{nF_1}{\rho_0} \nabla p_0 + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_s + \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla v' \cdot n_s dA \dots\dots\dots (37) \end{aligned}$$

(3) 運動方程式と抵抗則

空間平均された連続式 (35) および運動方程式 (37) を用いて、周期境界条件における地下水問題を対象とするものとして、これらの基礎方程式の簡単化について考える。

運動方程式 (37) は、等流状態の場合には、基本的には右辺第2項の圧力項と右辺第4項で表される抵抗項は力学的につり合わなければならない。圧力項の微分のスケールはコントロールボリュームのスケール l であり、そのオーダーは圧力の代表量を p^* として $O(p^*/\rho_0 l)$ で表される。一方、抵抗項の土粒子表面 A_s における流速の変動成分 v' は、non-slip 条件より $v' = w_s - v_s/n$ であることから平均流速 v_s と同じオーダーであり、その微分のスケールに土粒子径 D をとれば、そのオーダーは $O(\mu v_s / \rho_0 D^2)$ である。これより平均流速 v_s および流速の変動成分 v_s のオーダーは、 p^* を用いて、次のように表すことができる。

$$O(v_s) = O(v') \sim \frac{D^2 p^*}{\mu l} \dots\dots\dots (38)$$

これを基本として、次の無次元量を定義することができる。

$$\tilde{t} = \sigma t, \quad \tilde{p} = \frac{p_0}{p^*}, \quad \tilde{\Omega} = \frac{\rho_0}{p^*} \Omega_0, \quad \tilde{v}_s = \frac{\mu l}{D^2 p^*} v_s, \quad \tilde{v}' = \frac{\mu l}{D^2 p^*} v' \dots\dots\dots (39)$$

ここに、 σ は角周波数 $2\pi/T$ で、 T は周期境界条件における現象の周期を表す。なお、 ∇ のスケールは変動成分の項である左辺第3項および右辺第4項では D を用い、その他の項では l を用いる。式 (39) に関係して、浸透流の Re 数は次のように定義される。

$$Re = \frac{\rho v_s D}{\mu} = O\left(\frac{\rho_0 D}{\mu} \frac{D^2 \rho^*}{\mu l}\right) \dots\dots\dots (40)$$

これらの無次元量に加えて、さらに長さの比を表す $\epsilon = D/l \ll 1$ を導入し、かつ $F_1 = 1$ として式 (37) を変形すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{\sigma^2 D}{g}} \sqrt{Re} \sqrt{\frac{\rho_0 g l}{p^*}} \frac{\partial \tilde{v}_s}{\partial \tilde{t}} + \epsilon Re \frac{1}{n} (\tilde{v}_s \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v}_s + Re \frac{1}{\Delta V} \iiint_{V_s} (\tilde{v}' \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{v}' dV \\ & = -n \tilde{\nabla} \tilde{\Omega} - n \tilde{\nabla} \tilde{p} + \epsilon^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{v}_s + \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \tilde{\nabla} \tilde{v}' \cdot \mathbf{n}_s dA \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

これからわかるように、周期境界条件の地下水現象に対する巨視的な運動方程式は Re 数、 ϵ 、 $p^*/\rho_0 g l$ および $\sigma^2 D/g$ で示される 4 つの無次元量によって表される。この式の左辺第 1 項の加速度項に現れる無次元パラメータ $\sigma^2 D/g$ は周期変動に関するパラメータであり、土粒子径の代表的な値として $D = 10^{-3}$ m をとれば、波浪のような短周期境界条件では $O(\sigma^2 D/g) = 10^{-4}$ となるが、潮汐による周期境界条件では $O(\sigma^2 D/g) = 10^{-12}$ となり、また、 $p^*/\rho_0 g l$ のオーダーは、代表値 $l = 1$ m をとれば $O(p^*/\rho_0 g l) = 10^{-4} \times Re$ である。これより加速度項は波浪による周期境界条件の場合には圧力項や抵抗項と同じオーダーとなり、これらの項を無視することはできないことがわかる。左辺第 2 項は対流慣性項であるが、 $Re < 1$ のときには一般的に圧力項および抵抗項に比べて無視できるけれども、 Re 数が大きくなり平均流速の勾配が大きくなるような地下水問題では無視できなくなる可能性がある。さらに、右辺第 3 項は平均流速による抵抗項であり、そのオーダーは $\epsilon^2 \ll 1$ であることから通常無視することができる。この項はもともと式 (20) の右辺第 3 項に式 (9) を適用して得られたものであったが、この式 (20) 右辺第 3 項を Gauss の公式により体積積分から面積積分に変換すると、次式のようにも表示することができ、その物理的意味がより明らかになる。

$$\frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v_s = \frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla v_s \cdot \mathbf{n}_s dA \dots\dots\dots (42)$$

ここに、 A_s はコントロールボリュームの外縁で隣合うコントロールボリュームと流体で接している部分であり、 \mathbf{n}_s はその単位法線ベクトル（外向き正）である。この項は実際には壁面のごく近傍の解析で、壁面の non-slip 条件を考慮するときのみ必要とされている¹⁾。

さて、式 (41) の左辺第 3 項と右辺第 4 項はいずれもコントロールボリューム内での抵抗を示す項であり、そのオーダーの比は Re 数で表されている。このうち左辺第 3 項は微視的な流れの道筋が曲がっていることにより生じる抵抗で、 v' に関して比線形である。一方、 v' に関して線形である右辺第 4 項は、コントロールボリューム内での土粒子との摩擦抵抗を表しており、土粒子表面での non-slip の境界条件が集大成され平均されて定式化される抵抗則である。

そして、 $Re > 1$ であれば左辺第 3 項の寄与が大きくなり、一般的には比線形の抵抗則の表示が必要となるが、 $Re < 1$ のとき、すなわち左辺第 3 項が右辺第 4 項に比べて無視することができるときには、 v' と v_s との関係は明らかではないけれども、右辺第 4 項が平均流速 v_s に比例すると考えて、次式のような線形の抵抗則で表現することができよう。

$$\frac{\mu}{\rho_0} \frac{1}{\Delta V} \iint_{A_s} \nabla v' \cdot \mathbf{n}_s dA = -\frac{ng}{k} v_s \dots\dots\dots (43)$$

ここに、 k は透水係数で速度の次元をもつ。式 (43) の右辺が負になっているのは、 $w_s \approx 0$ のときにすべての土粒子表面 (A_s) で $\nabla v' \cdot \mathbf{n}_s < 0$ となるからである。ここでは、その比例定数である透水係数 k は一定値として仮定されているが、これは多孔質体の特性を十分反映して決定されなければならない。そこで次章において、この抵抗則の比例定数である透水係数 k に及ぼす砂質土の粒度分布の影響について考慮し、その定式化を試みる。

以上のことから、 $Re < 1$ のときにおける周期境界条件の地下水問題を取り扱う巨視的な運動方程式は、次式のように表される。

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = -\nabla(n\Omega_0) - \frac{1}{\rho_0}\nabla(np_0) - \frac{ng}{k}v_s \dots\dots\dots (44)$$

次に、連続式を同様な方法で無次元表示する。はじめに、体積弾性係数 β と骨格の圧縮率 $C_p = \frac{1}{k} \frac{\partial p_0}{\partial t}$ を用いて、式 (35) を書き換えると次のようになる。

$$\frac{n}{\beta} \frac{\partial p_0}{\partial t} + nC_p \frac{\partial p_0}{\partial t} + \nabla \cdot v_s + \frac{1}{\beta} v_s \cdot \nabla p_0 = 0 \dots\dots\dots (45)$$

これを式 (39) で表される無次元量を用いて書き直せば、次のようになる。

$$\sqrt{\frac{\sigma^2 D}{g}} \left(\frac{\rho_0 g l}{\beta} \right) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{Re}} \sqrt{\frac{p^*}{\rho_0 g l}} n \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \sqrt{\frac{\sigma^2 D}{g}} (C_p \rho_0 g l) \frac{1}{\varepsilon \sqrt{Re}} \sqrt{\frac{p^*}{\rho_0 g l}} n \frac{\partial \tilde{p}}{\partial t} + \tilde{v} \cdot \tilde{v}_s + \left(\frac{\rho_0 g l}{\beta} \right) \frac{p^*}{\rho_0 g l} \tilde{v}_s \cdot \tilde{v} \tilde{p} = 0 \dots\dots\dots (46)$$

ここで、圧縮性に関する無次元パラメータ $\rho_0 g l / \beta$ および $C_p \rho_0 g l$ は代表的な値として $\beta = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ および $C_p = 2 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{N}$ (密な砂) をとれば、それぞれ $O(\rho_0 g l / \beta) = 10^{-5}$ および $O(C_p \rho_0 g l) = 10^{-3}$ である。さらに、前述した代表的な値を用いるならば、式 (45) の第 1, 2 および 4 項のオーダーはそれぞれ 10^{-6} , 10^{-4} および 10^{-9} となり、結局式 (44) に対応する連続式は次のように表される。

$$\nabla \cdot v_s = 0 \dots\dots\dots (47)$$

3. 砂質土における浸透流の抵抗則

これより複雑な間隙構造をもつ多孔質体としての砂質土に直列毛細管モデルを適用し、その流れの特性から粒度分布を考慮した抵抗則の表示について検討する。このモデルでは管内の流れの方向は管軸方向のみであり、また管径が小さく流れが遅いことから層流として取り扱うことができ、土粒子表面での幾何学的に複雑な境界条件は毛細管の表面での境界条件に置き換えることができる。そして、置き換えられた境界条件は今度は簡単な数学的表現が可能であり、連続式 (1) および運動方程式 (2) の定常解は Hagen-Poiseuille の流れとなり、毛細管内の流速分布が求められる。その結果、平均操作によりコントロールボリューム単位での平均流速と圧力勾配の関係、すなわち流れの抵抗則の表示とその比例定数である透水係数 k を砂質土の粒度分布を考慮して求めることができる。

3.1 従来の抵抗則

前章では $Re < 1$ のとき、巨視的な運動方程式には流速に関して線形の抵抗則が必要で、その比例定数である透水係数は、砂質土の特性を十分反映して決められるべきものであることを述べた。さて、砂質土の特性のうち、土粒子の粒径や間隙率から飽和土の透水係数を算定する式は、すでに種々提案されており^{16),17)}、それらの比較も行われている¹⁸⁾。その中で飽和透水係数 k の表示式としてよく用いられているものを挙げれば、次のようである。

$$\text{Terzaghi の式: } k = \frac{C_t g}{\nu} \left(\frac{n - 0.13}{\sqrt[3]{1-n}} \right)^2 D_{10}^2 \dots\dots\dots (48)$$

$$\text{Zunker の式: } k = \frac{C_z g}{\nu} \left(\frac{n}{1-n} \right)^2 D_w^2 \dots\dots\dots (49)$$

$$\text{Kozeny の式: } k = \frac{C_k g}{\nu} \frac{n^3}{(1-n)^2} D_w^2 \dots\dots\dots (50)$$

$$\text{Hazen の式: } k = C_h (0.7 + 0.03 t) D_{10}^2 \dots\dots\dots (51)$$

ここに、 g は重力加速度、 ν は流体の動粘性係数、 t は温度 ($^{\circ}\text{C}$)、 C_t , C_z , C_k および C_h は土粒子の状態によって異なる実験定数である。Zunker の式 (49) と Kozeny の式 (50) に用いられている代表粒径 D_w はともとも間隙の径深として定義され、次式で計算される。

$$\frac{1}{D_w} = \frac{A_s}{V_f} = \Sigma \left(\frac{\Delta p_i}{D_i} \right) \dots\dots\dots (52)$$

ここに、 A_s は土粒子の表面積、 V_f は間隙の体積および Δp_i はある粒径範囲を代表する平均粒径 D_i の試料が全試料に対して占める重量表示の含有率である。さらに、間隙率が未知のときに最もよく用いられる Creager の表では、 D_{20} と k の関係が示されているし、Kenney・Lau・Ofogebu¹⁹⁾ は代表粒径として D_5 を推薦している。

このように従来の抵抗則における透水係数は、土粒子の粒径 D の 2 乗に比例するが、これは流れが層流であるということから流体力学的根拠がある。しかし、その代表粒径をどうとるのかについては、砂質土の粒度分布と関係して種々の取り扱いが示されている。

3.2 対数正規分布による粒度分布の表示

(1) 対数正規分布と粒度分布特性値

砂質土は種々の粒径を持つ土粒子の集合体であり、その粒度分布は通常篩分け試験を行い、累積重量百分率表示の粒径加積曲線によって表されるが、浸透問題においては中央粒径 (D_{50})、均等係数 ($U_c = D_{60}/D_{10}$) および曲率係数 ($U_c' = D_{30}/(D_{10} \cdot D_{60})$) によってその粒度分布の特性を表示することが多い。

これに対してより統計的な取り扱いのため、粒度分布を対数正規分布に近似する方法が Hazen によって始められた。Gardner²⁰⁾ は 200 以上の土試料を調査した結果、粒度分布が対数正規分布で表現できることを示しており、箭内²¹⁾ や陶野²²⁾ によっても対数正規性の研究が行われ、人工的な混合土や風化土を除けば、自然の砂質土の粒度分布を対数正規分布に近似できることがわかっている。また岩井・松尾²³⁾、岩井^{24)~27)} は、より現実に近い分布形として、粒度分布の最大粒径と最小粒径を考慮した両側有限の対数正規分布についても検討している。さらに粒度分布が対数正規分布に従わない砂質土は、2 種以上の対数正規分布に従う砂質土が混合していると考えることができ²⁸⁾、Burger²⁹⁾ により粒度分布で得られた離散的な観測点から、対数正規補間により滑らかな粒度分布関数を求める方法が示されている。

重量百分率表示の粒度分布が対数正規分布で表されるならば、その確率密度関数 $f(D)$ は次式で与えられる。

$$f(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 D} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\ln D - \lambda}{\sigma_0} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (53)$$

ここに、 D は土粒子の粒径、 λ は $\ln D$ の平均値、 σ_0 は $\ln D$ の標準偏差である。粒度分布の特性値となる λ および σ_0 は、それぞれ次式で与えられる。

$$\lambda = \ln D_{50} \dots\dots\dots (54)$$

$$\sigma_0 = \ln \sqrt{\frac{D_{84}}{D_{16}}} \dots\dots\dots (55)$$

ここに、 D_{50} は中央粒径 (幾何平均粒径)、 $\sqrt{D_{84}/D_{16}}$ は対数幾何標準偏差であり、 D_{84} および D_{16} は、より正確にはそれぞれ 84.1% 粒径および 15.9% 粒径で与えられる。

Shirazi・Boersma³⁰⁾ は粒度分布が対数正規分布に従うと仮定し、従来の USDA の三角座標の土性図における粘土、シルトおよび砂の混合割合から中央粒径および対数幾何標準偏差を計算して、それを基に新しい土性図を作成した。これによると、一般的な土質では D_{50} が 0.001 から 1.03 mm にあるときは、 $\sqrt{D_{84}/D_{16}}$ は 1 から 32.0 の範囲をとる。またこのとき、 σ_0 は 0 から 3.47 の範囲となる。

さて、一般的には D_{50} 、 U_c および U_c' が粒度分布の特性値として用いられることが多く、このうち U_c はその粒度分布のばらつき程度の、また U_c' は分布形状のそれぞれ指標となっている。そこで、ともに分布のばらつきを示す U_c 、 U_c' と σ_0 の関係を求めておくと都合がよい。福田³¹⁾ は、実験データから最小自乗法で U_c と σ_0 の相関関係 (正確には堆積学における ϕ -scale での σ_ϕ と U_c との相関関係) を求め、 U_c' については σ_0 と無相関であるとしているが、これらの関係は対数正規分布の定義から理論的に求めることができる。

標準正規確率表から、上側確率が 10、30 または 60% になるパーセント点は、それぞれ $P_{10} = 1.28$ 、 P_{30}

= 0.524 または $P_{60} = -0.253$ と読みとることができる。この意味は、例えば 10% 点について次のようである。

$$\frac{\ln D_{50} - \ln D_{10}}{\sigma_0} = P_{10} \dots\dots\dots (56)$$

したがって、 U_c , U'_c および σ_0 の関係は、それぞれ次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} U_c &= \exp \{ (P_{10} - P_{60}) \sigma_0 \} = \exp (1.53 \sigma_0), & \sigma_0 &= \ln U_c^{0.652} \\ U'_c &= \exp \{ (2P_{30} - P_{10} - P_{60}) \sigma_0 \} = \exp (0.0206 \sigma_0), & \sigma_0 &= \ln U'_c^{-48.5} \\ U'_c &= U_c^{-0.0134} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (57)$$

さて、式 (52) で計算される代表粒径 D_w について、宇野・杉井・稲垣³²⁾ はある砂試料で D_{20} に近い値となることを見出した。しかし、粒度分布が対数正規分布に従うならば、代表粒径 D_w は理論的に粒度分布の特性値の関数として表すことができる³¹⁾。代表粒径 D_w を粒度分布の確率密度関数 $f(D)$ の調和平均と考えると、 $1/D_w$ は次式のように粒径 D の逆数の期待値 $E(1/D)$ で表される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_w} &= \int_0^\infty \frac{1}{D} f(D) dD \\ &= \exp \left(-\lambda + \frac{1}{2} \sigma_0^2 \right) \dots\dots\dots (58) \end{aligned}$$

これより D_w は σ_0 または U_c を用いて次のように表される。

$$D_w = D_{50} \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \right) = D_{50} \exp \{ -0.212 (\ln U_c)^2 \} \dots\dots\dots (59)$$

この関係を Fig. 2 に示す。従来の式 (52) による代表粒径 D_w の算定には多少の手間を必要としたが、粒度分布が対数正規分布で近似できることを確認さえすれば、 U_c または σ_0 よりこの図を用いて、代表粒径 D_w が何% 粒径に相当するかを簡易に算定することができる。この図より宇野らが $D_w \approx D_{20}$ の関係を導いた砂試料の U_c および σ_0 の値はそれぞれは約 14 および約 1.7 であったと推定される。

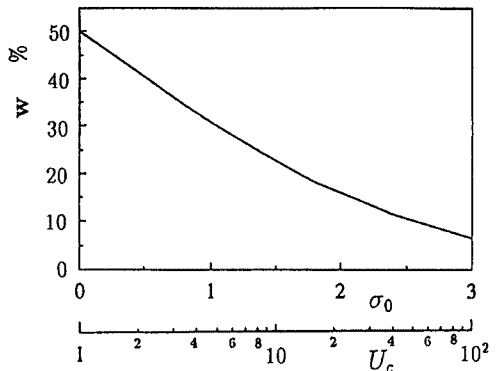


Fig. 2. Relation between coefficient of uniformity U_c , standard deviation σ_0 and representative grain size D_w . where D_w is the size for which w % of the entire materials are finer by weight.

一方、Terzaghi の式 (48) および Hazen の式 (51) に用いられている D_{10} , あるいは Creager の方法で用いられている D_{20} についても、 D_{50} および σ_0 または U_c を用いてそれぞれ次のように表すことができる。

$$\left. \begin{aligned} D_{10} &= D_{50} \exp (-1.28 \sigma_0^2) = D_{50} U_c^{-0.835} \\ D_{20} &= D_{50} \exp (-0.842 \sigma_0^2) = D_{50} U_c^{-0.548} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (60)$$

このように従来の透水係数の表示式における代表粒径を D_{50} および σ_0 に書き換えると、 σ_0 または σ_0^2 の係数は大きさは異なるがすべて負になっており、混合粒径の粒度のばらつきが大きいほど、透水係数は小さくなることになる。また、従来の各表示式における代表粒径の違いは、混合粒径のばらつきの度合いによる透水係数の変化をどの程度考慮しているかによることわかる。

(2) 土粒子の個数分布と断面での大きさの表示

(a) 粒度分布から個数分布への変換： これまでは、粒度分布を重量百分率で表示してきた。ここでは土屋³⁴⁾ の方法に従い、重量百分率表示の粒度分布から、単位断面、単位体積および単位長さ当たりの土粒子の個数分布を求める。まず、砂質土をある断面で切ったときの、単位面積当たりの土粒子の個数分布 $h'(D)$ と、それを確率密度関数に直した $h(D)$ を考える。砂質土が等方かつ均質であれば、式 (53) の $f(D)$ と $h'(D)$ との関係は次のように表すことができる。

$$\frac{A_3 D^3 \rho_s g h'(D)}{A_1 D} = f(D) \dots\dots\dots (61)$$

$$\int_0^\infty \frac{A_3 D^3 \rho_s g h'(D)}{A_1 D} dD$$

ここに、 ρ_s は土粒子の密度でここでは粒径によらず一定と考え、また A_1 および A_3 はそれぞれ 1 次元および 3 次元形状係数で、土粒子が球形のとき $A_1 = 1$ および $A_3 = \pi/6$ となる³⁵⁾。

さて、直径 1 の球を 1 つの平面で切断するとき、一定の直径に垂直な平面だけを考えれば、その切断面の面積の期待値は $\pi/6$ となる。したがって、直径 D の土粒子をある断面で切ったときの面積の期待値は $\pi D^2/6$ である。また、多孔質体が等方均質で粒径に比べ十分に断面が大きいときは、面積空隙率の期待値は体積空隙率 n と等しいと考えて良いから³⁶⁾、土粒子の断面積の合計は全断面積の $(1 - n)$ 倍となる。そこで、単位面積当たりに関する正規化、

$$\int_0^\infty \frac{\pi}{6(1-n)} D^2 h'(D) dD = 1 \dots\dots\dots (62)$$

により、式 (61) は次のように書き換えることができる。

$$h'(D) = \frac{6(1-n)}{\pi} \frac{f(D)}{D^2} \dots\dots\dots (63)$$

ここで式 (62) の定義により、単位面積当たりの土粒子の個数の期待値 N_h は次式で与えられる。

$$N_h = \int_0^\infty h'(D) dD \dots\dots\dots (64)$$

また、断面での土粒子の個数の確率密度関数 $h(D)$ は、次のように定義される。

$$h(D) = \frac{h'(D)}{N_h} \dots\dots\dots (65)$$

さらに、式 (53) の $f(D)$ を式 (63) に代入すると、式 (64) および (65) より N_h と $h(D)$ は、それぞれ次式で表される。

$$N_h = \frac{6(1-n)}{\pi} \frac{1}{D_{50}^2} \exp(2\sigma_0^2) \dots\dots\dots (66)$$

$$h(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 D} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln D - (\lambda - 2\sigma_0^2)}{\sigma_0}\right\}^2\right] \dots\dots\dots (67)$$

式 (53) と式 (67) を比較すると、 $h(D)$ もまた対数正規分布に従い、その $\ln D$ の標準偏差は $f(D)$ と同じく σ_0 であるが、 $\ln D$ の平均値は $\lambda - 2\sigma_0^2$ と異なっている。また、式 (66) より標準偏差 σ_0 が大きくなればなるほど、ある断面における土粒子の個数は増えることがわかる。

次に、単位体積当たりの土粒子の個数分布 $g'(D)$ と、それを確率密度関数に直した $g(D)$ を同様の方法で求める。 $f(D)$ と $g'(D)$ との関係は次のようである。

$$\frac{A_3 D^3 \rho_s g g'(D)}{\int_0^\infty A_3 D^3 \rho_s g g'(D) dD} = f(D) \dots\dots\dots (68)$$

直径 D の球形の土粒子の体積は $\pi D^3/6$ で表され、単位体積当たりの土粒子の体積の合計は $1 - n$ であるから、単位体積当たりに関する正規化、

$$\int_0^\infty \frac{\pi}{6(1-n)} D^3 g'(D) dD = 1 \dots\dots\dots (69)$$

を用いると、式 (68) は次式のようになる。

$$g'(D) = \frac{6(1-n)}{\pi} \frac{f(D)}{D^3} \dots\dots\dots (70)$$

ここで、単位体積当たりの土粒子の個数の期待値 N_g および土粒子の個数の確率密度関数 $g(D)$ は、それぞれ次式で定義される。

$$N_g = \int_0^\infty g'(D) dD \dots\dots\dots (71)$$

$$g(D) = \frac{g'(D)}{N_g} \dots\dots\dots (72)$$

式 (53) の $f(D)$ を式 (70) に代入すると、 N_g と $g(D)$ はそれぞれ次式で求められる。

$$N_g = \frac{6(1-n)}{\pi} \frac{1}{D_{50}^3} \exp\left(\frac{9}{2}\sigma_0^2\right) \dots\dots\dots (73)$$

$$g(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 D} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln D - (\lambda - 3\sigma_0^2)}{\sigma_0}\right\}^2\right] \dots\dots\dots (74)$$

このように、単位体積当たりの個数分布も平均値 $\lambda - 3\sigma_0^2$ および標準偏差 σ_0 の対数正規分布に従う。同様に、単位長さ当たりの土粒子の個数の期待値 N_v と確率密度関数 $y(D)$ は、それぞれ次式で表すことができる。

$$N_v = \frac{4(1-n)}{\pi} \frac{1}{D_{50}} \exp\left(\frac{1}{2}\sigma_0^2\right) \dots\dots\dots (75)$$

$$y(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0 D} \exp\left[-\frac{1}{2}\left\{\frac{\ln D - (\lambda - \sigma_0^2)}{\sigma_0}\right\}^2\right] \dots\dots\dots (76)$$

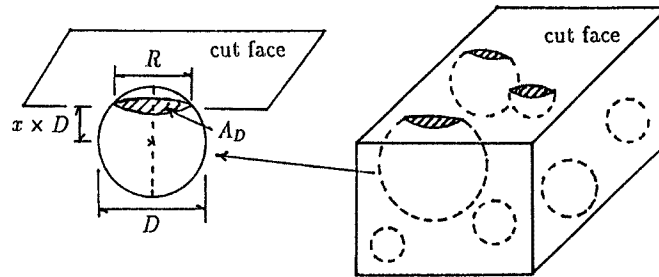


Fig. 3. Cut face of porous media and definition of radius R and area A_D .

(b) 砂質土断面における土粒子断面円の径と面積の分布：球形粒子からなる均質の砂質土を任意の平面で切断すると、Fig. 3 のように土粒子の断面円が現れる。ここでは、 σ_0 の変化により、土粒子径 D の断面円の径 R と、その面積 A_D の分布形がどのように変わるか調べる。

土粒子断面円の大きさは、土粒子径 D と、その土粒子のどこを切断するかで決定される。このうち土粒子径 D は式 (67) の確率密度関数 $h(D)$ に従い、砂質土が等方かつ均質であれば、任意の断面で等しい。一方、土粒子を切断する平面はある一定の半径を等確率で垂直に切るものと考え、平面と土粒子中心間の距離を $x \times D$ とし、次式で定義される確率変数 x とその確率分布 $P_x(x)$ を導入する。

$$P_x(x) = 2; \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \dots\dots\dots (77)$$

ここに、 $h(D)$ と $P_x(x)$ は独立であり、両者の結合確率として R と A_D の確率密度関数を求める。

さて、断面円の径 R と面積 A_D は、 D と x を用いて次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R &= D\sqrt{1-4x^2} \\ A_D &= \frac{\pi}{4} D^2(1-4x^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (78)$$

ここで、関数 $gr(x, D)$ を次のように定める。

$$gr(x, D) = R = D\sqrt{1-4x^2} \dots\dots\dots (79)$$

この逆関数とその微分は、それぞれ次式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} gr^{-1}(x, D) &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}} \\ \frac{\partial gr^{-1}}{\partial R} &= -\frac{R}{2D^2 \sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (80)$$

ただし、 R の確率密度関数 $f_R(R)$ は、式 (79) および (80) と、 $0 \leq R \leq D$ のとき $P_x(gr^{-1}) = 2$ であることを用いて、次式のように求められる。

$$\begin{aligned} f_R(R) &= \int_0^\infty P_x(gr^{-1}) h(D) \left| \frac{\partial gr^{-1}}{\partial R} \right| dD \\ &= \int_R^\infty \frac{R}{D^2 \sqrt{1 - \frac{R^2}{D^2}}} h(D) dD \dots\dots\dots (81) \end{aligned}$$

同様に、断面円の面積 A_D の確率密度関数 $f_{A_D}(A_D)$ は次式のように求められる。

$$f_{A_D}(A_D) = \int_{\sqrt{4A_D/\pi}}^\infty \frac{2}{\pi D^2 \sqrt{1 - \frac{4A_D}{\pi D^2}}} h(D) dD \dots\dots\dots (82)$$

これらの確率関数の積率は次式のようになる。

径 R : 期待値	$E(R) = \frac{\pi}{4} D_{50} \exp(-1.5 \sigma_0^2)$	}	(83)
	$E(R^2) = \frac{2}{3} D_{50}^2 \exp(-2 \sigma_0^2)$		
分散	$\text{Var}(R) = D_{50}^2 \left\{ \frac{2}{3} \exp(-2 \sigma_0^2) - \frac{\pi^2}{16} \exp(-3 \sigma_0^2) \right\}$		
面積 A_D : 期待値	$E(A_D) = \frac{\pi}{6} D_{50}^2 \exp(-2 \sigma_0^2)$		
	$E(A_D^2) = \frac{\pi^2}{30} D_{50}^4$		
分散	$\text{Var}(A_D) = D_{50}^4 \left\{ \frac{\pi^2}{30} - \frac{\pi^2}{36} \exp(-4 \sigma_0^2) \right\}$		

このようにして、砂質土断面における土粒子断面円の径と面積の期待値および分散を求めることができた。同じ D_{50} をもつ砂質土では均一粒径の場合より混合粒径の方が、すなわち σ_0 が大きければ大きいほど、式 (66) より断面円の数自体は増えるけれども、その径および面積の期待値は逆に小さくなることわかる。

さらに、式 (81) および (82) を D_{50} で無次元化すると、次のように表される。

$$\begin{aligned} f_R^*(R^*) &= \int_0^\infty \frac{R^*}{(D^* + R^*)^2 \sqrt{1 - \frac{R^{*2}}{(D^* + R^*)^2}}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0(D^* + R^*)} \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln(D^* + R^*) + 2\sigma_0^2}{\sigma_0} \right\}^2\right] dD \dots\dots\dots (84) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{A_D}^*(A_D^*) &= \int_0^\infty \frac{1}{(D^* + \sqrt{A_D^*})^2 \sqrt{1 - \frac{A_D^*}{(D^* + \sqrt{A_D^*})^2}}} \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0(D^* + \sqrt{A_D^*})} \exp\left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln(D^* + \sqrt{A_D^*}) + 2\sigma_0^2}{\sigma_0} \right\}^2\right] dD \dots\dots\dots (85) \end{aligned}$$

ここに、 $D^* = D/D_{50}$ 、 $R^* = R/D_{50}$ および $A_D^* = A_D/(\pi D_{50}^2/4)$ であり、さらに $f_R^*(R^*)$ および $f_{A_D}^*(A_D^*)$ はそれぞれ R^* および A_D^* の確率密度関数を表す。標準偏差 σ_0 をパラメータとしてこれらの分布形を Figs. 4 および 5 に示す。この図から、標準偏差 σ_0 が大きくなるほど無次元した径 R^* および面積 A_D^* の最頻値が小さくなることわかる。また、その最頻値が 0.5 のとき対応する確率が最も小さくなり、0.5 よ

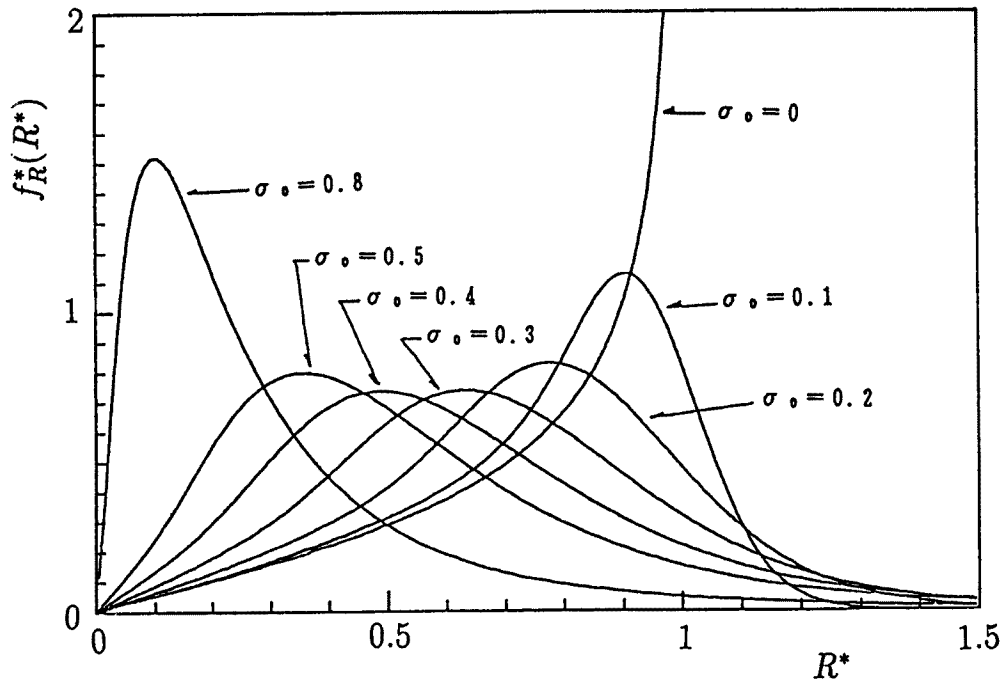


Fig. 4. Probability density function of R^* with parameter of standard deviation σ_0 .

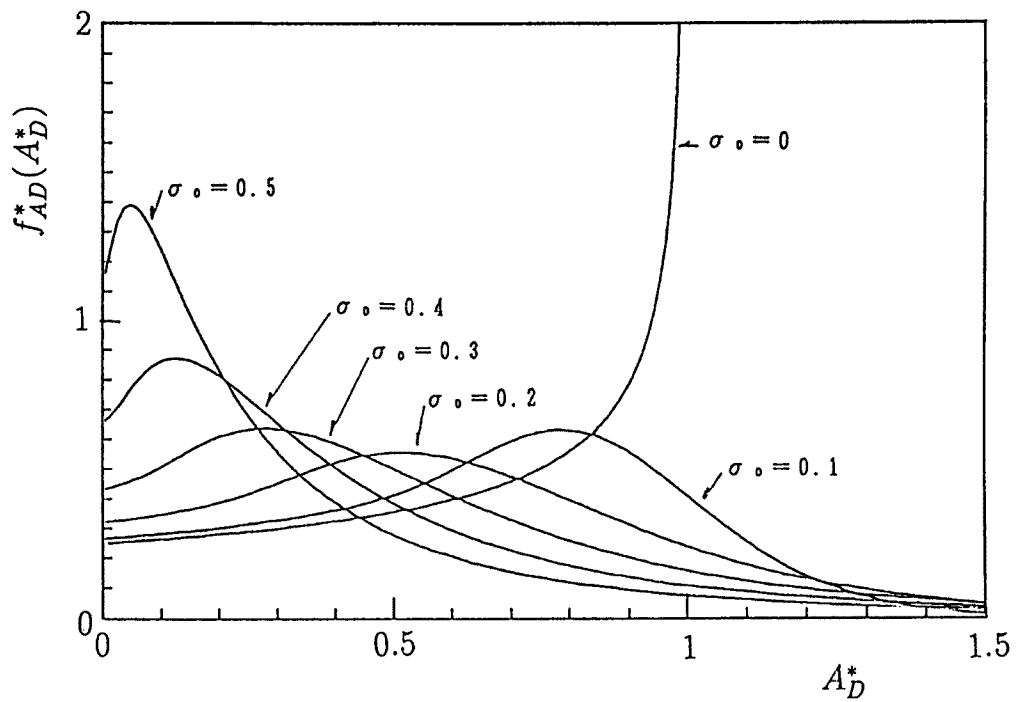


Fig. 5. Probability density function of A_D^* with parameter of standard deviation σ_0 .

り小さくなると正のひずみをもつ確率分布となることがわかる。

3.3 直列毛細管モデルと抵抗則

(1) 間隙構造と定義

砂質土の透水性は、間隙率、間隙の表面積、構成土粒子の粒径や粒度分布と形状、あるいは土粒子の充填方法などに影響される。このうち最も測定が容易な粒径、粒度分布および間隙率によって、砂質土の透水係数の表示を求める。

従来の研究の多くは、粒度分布および間隙率からまず間隙の構造を推定し、次にその間隙構造から透水係数を予測する方法をとっている。これに対し Bloemen³⁷⁾ は、間隙構造について検討せず、粒度分布から直接透水係数を求める研究を行っている。彼は、縦軸に通過重量百分率の対数目盛りを、横軸に粒径の対数目盛りをとった特別な粒径加積曲線において、その勾配の期待値 f を粒度分布指標として採用した。標準偏差 σ_0 が小さくなれば、粒度分布指標 f は大きくなる傾向がある。この期待値 f と中央粒径 D_{50} を用いて実験データの解析を行い、飽和透水係数の表示式として、次式を得ている。

$$k = 0.02 D_{50}^{1.93} f^{-0.74} \text{ (cm/day)} \dots\dots\dots (86)$$

しかし、間隙率を考慮していないので、その精度はあまり良くないこと、間隙構造についての情報がなく、理論的裏付けができないなどの問題点がある。したがって、ここではまず間隙構造を表す間隙量 (径) の分布について検討する。

さて、砂質土の構成土粒子はそれぞれ独立しており明確な境界を持っているが、間隙は非常に複雑な形状でかつ連続的に存在しており、個々の間隙の明確な境界を持たない。したがって、間隙構造を定量的に記述するためには、何らかの間隙の定義を行い、その間隙量 (間隙径、間隙面積、間隙の方向など) の分布を調べる必要がある。この間隙の定義には、大別して二つの方法がある。一つは砂質土の間隙を水分特性曲線と関連づけて、同じ毛管現象を起こす等価毛管束で近似し、その毛管径の分布で間隙の分布を表すものである。いま一つの方法では個々の間隙を幾何学的に定義し、主として構成土粒子との関係からその分布を決定するもので、さらに幾何学的な定義の仕方などがあるが、ここではまずこれらについて考察する。

(a) 等価毛管束による間隙の定義：等価毛管束は水分特性曲線から求めることができる。この水分特性曲線は含水量と負の圧力水頭 (サクション) との関係を示したものであるが、その含水量は土の毛管現象および間隙の大きさに依存する。土の間隙を同じ毛管上昇をもつ円柱状の等価毛管束で近似するとき、土の間隙の大きさはその毛管束の径で表すことができる³⁸⁾。そして毛管束の径の分布関数、すなわち間隙径分布は、この水分特性曲線の勾配に比例する形で求めることができる。この間隙径分布について、Brutsaert³⁹⁾ はガンマ分布、対数正規分布および極値分布などによる表現の適用性を検討しているが、この中で土粒子径分布がほぼ対数正規分布に従うことから間隙径分布に対数正規分布を適用することは妥当であると述べている。また、Bathke・Amoozegar・Cassel⁴⁰⁾ も、この間隙径の分布形の簡単な表現方法について検討を行っている。さらに、水銀圧入法によって実際に粘土試料の間隙を測定したところ、その間隙径分布は対数正規分布に近いという実験結果も報告されている⁴¹⁾。

間隙径分布と対応する水分特性曲線を粒度分布などの土の特性から予測する方法についても数多くの研究がある。不飽和透水係数を含水量の関数で表した Brooks・Coorey⁴²⁾ の式、または Campbell⁴³⁾ の式で用いる諸係数を、Bloemen は先の粒度分布指標の期待値 f と関係づけており、Campbell⁴⁴⁾ は D_{50} および σ_0 と関係づけている。また、Gupta・Larsen⁴⁵⁾ は砂、シルト、粘土、有機物含有量、密度およびサクションの関数として含水量を計算している。この水分特性曲線は粒径加積曲線と同じような形をしており、粒径が揃っているほど、すなわち分級がよいほど含水量の変化は大きく間隙径が揃う傾向にある⁴⁶⁾。

しかし、いずれの研究も実験による回帰分析が主体となっており、間隙径分布と土の物性との関係を理論的に明確にしたものではない。さらに、水分特性曲線にはいわゆる“インクピン効果”などで説明されるヒステリシスが存在する⁴⁷⁾。すなわち脱水過程および吸水過程で二つの水分特性曲線が得られる。このうち一

一般的には脱水過程の水分特性曲線を基に等価毛管径を決定するように定義されているが、このヒステリシスを毛管束のモデルにどう含めるかの問題も残る。さらに、 $20\ \mu\text{m}$ 以下の間隙径は測定が困難⁴⁸⁾なことや、間隙測定法の違いにより異なった実験結果が得られることもある⁴⁹⁾。したがって、構成土粒子の粒度分布と間隙の分布との関連を調べるには、次に述べるように幾何学的に間隙を定義する方が理解しやすいと考える。

(b) 幾何学的な間隙の定義：土の間隙構造を幾何学的に検討する研究は、単位間隙の定義の仕方によりいくつかに分類できる。また、その間隙の大きさの決定方法にも間隙と構成土粒子との関係で論じるものと、多孔質体の断面から実測で求める方法とがある。これらの研究のうち主なものについて考察する。

最も簡単な間隙の幾何学表現としては、Fara・Scheidegger⁵⁰⁾の研究があげられる。彼らは砂質土の断面に引いた任意のラインと土粒子断面との交わりかたを統計的に調べることによって、間隙構造を表現しようとしている。

パイプ状間隙を単位間隙とし、それを三次元的に組み合わせて間隙構造を表現する方法は、特に分散係数の解析のためによく用いられている。de Jong⁵¹⁾は、管径 d および管長さ L_p が一定で、管軸方向がランダムなパイプ状間隙を設定した。一方、Haring・Greenkorn⁵²⁾は、管径 d および管長さ L_p の分布にベータ関数を仮定している。

室田・佐藤⁵³⁾ および武内¹²⁾は、同様に多孔質体の断面で単位間隙を定義している。Fig. 6 のような多孔質体の切断面において、3個の土粒子断面円の中心を結ぶ三角形内の間隙を独立した一つの単位間隙と考え、その間隙面積 A_p と等しい面積の円の直径を間隙径 d と定義した。そして間隙径の分布は、人工的に作った多孔質体の切断面の間隙面積を直接測定する方法で求めている。室田・佐藤および武内は、この実験により間隙径分布が径の小さいところを除けば正規分布に近いことを示した。また、Milligan・Adams⁵⁴⁾も、熱処理ゲルの電子顕微鏡写真の解析から、正規分布に近い間隙径分布関数を示している。しかしながら、この間隙の定義は、間隙を決定する3個の土粒子断面の選択に任意性があり、間隙径を一意的に決めることができない。例えば、Fig. 7(a) および (b) で同じ土粒子の配置でありながら、3個の土粒子断面円の選び方によって間隙径が異なるうえに (c) のような選び方も許されない。さらに、切断面が少しずれただけで土粒子断面円および間隙の面積は大きく変わることから、この定義によって求めた間隙径分布を3次元的な毛細管モデルの間隙径分布に応用することには問題がある。

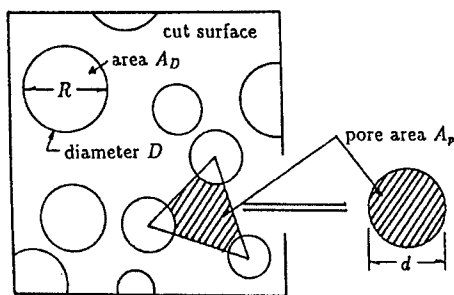


Fig. 6. Cut surface and definition of pore area A_p and pore size d by Murota and Sato⁵³⁾.

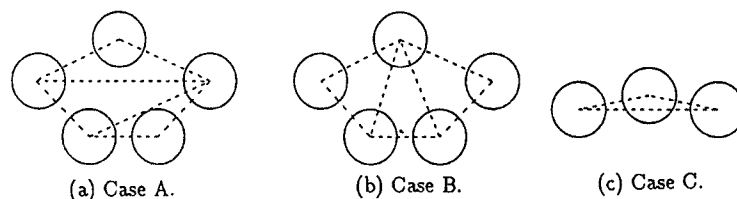


Fig. 7. Selection of grains for unit pore area defined by Murota and Sato⁵³⁾.

一方、玉井・浅枝・田中⁵⁵⁾は毛細管モデルによる不飽和透水係数のシミュレーションにおいて、間隙径 d を粒径 D の等しい4つの砂粒子にとり囲まれている状態で定義し、 $d = (\sqrt{2} - 1)D$ の関係を仮定して、構成土粒子の粒度分布が対数正規分布になることから、間隙径の分布も平均値の周りに対数正規分布するものと考えている。また、Araya・Paris⁵⁶⁾も似たような方法で間隙径を定義している。まず土粒子を各粒径毎に区分し、各区分の間隙率は全体のものと同じで均一径粒子が立方充填していると仮定して、間隙を一本の円柱状間隙に置き換え、土粒子形状のパラメータを導入して間隙径および円柱長さを求めている。しかし、土粒子径分布と間隙径分布を関係づけるために用いられたこれらの仮定では、土粒子の配置や断面における粒径の個数分布と粒度分布との違い、または毛細管の分布の決定に間隙率を考慮するなどの改良の余地があると考えられる。

さらに、間隙量の分布関数をエントロピーの概念で求める方法もある。最上⁵⁷⁾は土粒子配置の統計モデルにエントロピーの概念を初めて導入し、個々の間隙量をもつサンプル空間の存在確率が最も大きくなるような分布関数を求め、これを間隙量の分布関数と考えた。この方法は金谷⁵⁸⁾により、全体の間隙率の制約条件や間隙の状態密度関数を考慮するなどの改良が加えられている。また中野^{59),60)}は、微小立方体の内部にO型およびX型の間隙をもつサンプル空間を多孔質体の幾何学的モデルとして与え、エントロピーの概念を用いてその間隙量の分布関数を求めた。そして、O型およびX型の間隙が同確率で存在し、 x, y, z 方向にも同確率で向いているとして、土中水の保持形態を検討し水分特性曲線を解析的に導いている。このモデルは、不飽和透水係数に係わるメニスカスを解析するうえでは自然の間隙構造により近い三次元的な間隙モデルと評価できるが、粒径分布と間隙分布との関連性を明らかにすることは困難である。このエントロピーの理論と同じように土の構造のランダム性に注目した研究として、フラクタル理論の導入が試みられている。Rieu・Sposito^{61),62)}は、土の構造を3より少し小さいフラクタル次元を持つ自己相似性のフラクタル構造として水分量や透水性の検討を行っている。しかし、個々の間隙形状やそのつながり方はまだ明確にされていない。

また、最近では浸透流の微視的な流れの構造の解析に periodic cell モデルが利用されている。その解析の方法は homogenization method と言われ、十数年前から研究が進められている。これは、同じ幾何学的構造をもつコントロールボリューム (cell) が、周期的に繰り返されて全体を構成していると考えられる。すなわち、巨視的には均質な多孔質体と仮定する。そして、cell のスケール l と巨視的な平均の流れを特性づけるスケール L との比、 $\varepsilon = l/L \ll 1$ を用いて摂動展開を行う。Levy⁶³⁾ および Burrige・Keller⁶⁴⁾ は、間隙水を圧縮性とした多孔質弾性体の cell を仮定し、巨視的なスケールの式である Biot の式の係数を微視的な cell の解析から求めようとしている。Zick・Homsy⁶⁵⁾ は等径の球からなる cell を仮定し、その球の詰め方による違いを調べている。また、Auriault・Borne・Chambon⁶⁶⁾ は、cell 自体には非常に簡単な幾何学的形状を仮定しているが、透水係数の非定常性をあきらかにしている。さらに、Mei・Auriault^{67),68)} は粘土と砂が混在しているような不均質な問題にも拡張し、また Re 数が小さく対流慣性項は小さいが無視できない場合には Darcy 則が流速の3乗のオーダーで修正されるとしている。この periodic cell モデルでは、cell 内部での解を得るために、領域外縁で周期的な境界条件が利用できる。すなわち、隣合う cell との間には開領域が存在するが、cell の周期性により出入する流体の質量の合計は差し引きゼロ、運動量のやりとりの合計も差し引きゼロと仮定でき、隣合う cell の影響を実質考慮する必要がない。しかし、cell 内部の流れの構造を解析的にもしくは数値計算によって求めるためには、その cell 内部も何からの幾何学的なモデル化が必要であり、せいぜい1個ないし数個の土粒子に限られてしまう。periodic cell モデルは毛細管モデルに比べてより現実に近い幾何学的な間隙構造を表現できる可能性はあるけれども、本研究の目的である粒度分布を考慮することは難しい。

(2) 単位間隙の設定

これより新たに幾何学的な単位間隙の定義を行い、その単位間隙の大きさの分布を調べる。前述したよう

に、間隙の幾何学的特性は、構成土粒子の粒径、粒度分布、土粒子形状および土粒子の充填状態によって決定される。このうち、粒度分布は対数正規分布に従うものとし、粒度分布特性値 D_{50} および σ_0 が与えられているものとする。土粒子形状の特性は、比表面積によって表されることがある。しかし、その測定は容易でなく、測定値も空間平均値であるから個々の土粒子の形状を定量的に示すものではない。したがって、ここでは理想的な球形粒子を仮定する。また、土粒子の充填状態を定量的に表す指標としては、空間平均値である間隙率のみが使用できるものとし、等方均質な充填状態と考える。土粒子の充填方法に関する研究では、徳光⁶⁹⁾や Furnas⁷⁰⁾が混合粒径の間隙率を解析的に求めようとしており、宇野・杉井・佐橋⁷¹⁾はエントロピーの概念を用いて二次元等粒径状態の接点数と間隙比との関係を調べている。またモンテカルロ・シミュレーションにより数値的に土粒子の配置を検討する方法も提案されている⁷²⁾。しかし現段階では、土粒子の局所的な配置の状況を定量的に表すのは困難であり、空間平均値である間隙率のみが測定可能である。したがって、間隙と土粒子の位置関係にはいくつかの仮定を与えることにする。

単位間隙形状は、3次元的な取り扱いとして従来から良く使われているパイプ状間隙を採用する。すなわち、Fig. 8 に示すようにいくつかの土粒子に囲まれ間隙を独立した一つの間隙と考え、その間隙を同じ容積のパイプ状間隙に置き換える。

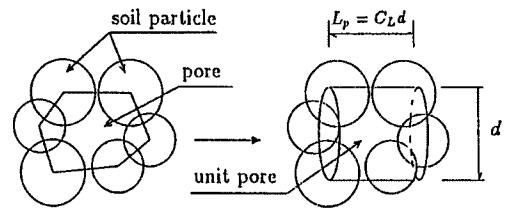


Fig. 8. Definition of unit pore.

de Jong⁵¹⁾は分散係数を求める実験により、パイプの管長さ L_p は平均粒径の約 $1/3$ で最密充填時の四面体間隙の中心間の距離に等しいことを示している。Saffman⁷³⁾は同様の間隙構造において、 L_p は平均粒径に等しいとしている。また武内¹²⁾は、シミュレーションにおける L_p を粒子間の距離に比例するものとし、その比例係数をやはり実験により得ている。一方、等方充填の仮定から、多孔質体をパイプの軸に水平に切っても垂直に切っても同じ間隙の分布が現れるはずである。このことからここでは、単位間隙のパイプの管長さ L_p は、土粒子径との関連ではなく、管径 d に比例するものとし、定数 C_L を用いて次式で与える。

$$L_p = C_L d \dots\dots\dots (87)$$

次に、単位間隙径の分布を求める。武内¹²⁾はシミュレーションにより間隙径分布を得ている。また杉尾⁷⁴⁾も Koplik⁷⁵⁾に似た間隙構造を仮定し、シミュレーションによりその空隙個数を求めている。しかしここでは、粒径と間隙径との関係を仮定し、間隙径分布を対数正規分布に従う粒径分布から数学的に求める。単位間隙の大きさは、周囲を取り囲む土粒子の大きさおよび充填方法（土粒子数および位置関係）によって決まる。このうち充填方法についての仮定として、周囲を取り囲む土粒子数は定数 C_n 個で固定とし、間隙径は C_n 個の土粒子径より求められ、かつどの土粒子も同じ程度で間隙径に影響するものとする。

さて、3個の土粒子（土粒子径； D_1, D_2 および D_3 ）が互いに接しているとき、土粒子中心間を結ぶ三角形の面積 S は Heron の公式により次のように求められる。

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{(D_1 + D_2 + D_3) D_1 D_2 D_3} \dots\dots\dots (88)$$

ところで面積 S は、任意の平面で切った単位間隙の断面積にはほぼ比例していると考えられるから、 $S \propto d^2$ とすれば次のようになる。

$$d \propto \sqrt[3]{D_1 D_2 D_3}, \quad D_a = \frac{(D_1 + D_2 + D_3)}{3} \dots\dots\dots (89)$$

そして、土粒子を3個から C_n 個にしたときには、この関係を拡張して次式のように考える。

$$d \propto \sqrt[C_n+1]{D_1 D_2 \dots D_{C_n}}, \quad D_a = \frac{(D_1 + D_2 + \dots D_{C_n})}{C_n} \dots\dots\dots (90)$$

これは間隙径 d が、相加平均 D_a と、 D_1, D_2, \dots, D_{C_n} の計 $C_n + 1$ 個の幾何平均で与えられるという関係式

である。さらに、 D_a は $D_1 \times D_2 \times \dots \times D_{C_n}$ と比べると変化が少ないから省略し、より簡単な関係式として最終的に次式を仮定する。

$$d = \alpha \sqrt[C_n]{D_1 D_2 \dots D_{C_n}} \dots\dots\dots (91)$$

すなわち、間隙径は間隙を取り囲む土粒子の径の幾何平均に比例すると考える。ここに、 α は比例定数で後に求める。式 (91) の両辺の対数をとると次式を得る。

$$\ln d = \ln \alpha + \frac{1}{C_n} (\ln D_1 + \ln D_2 + \dots \ln D_{C_n}) \dots\dots\dots (92)$$

$D_i (i = 1, 2, \dots, C_n)$ は、対数正規分布 $g(D)$ に従う確率変数である。 $\ln d$ は、同じ正規分布に従う $\ln D_i$ の一次結合で与えられるため正規分布に従い、ゆえに単位間隙径 d は、次の期待値および分散をもつ対数正規分布 $F(d)$ に従う。

$$\left. \begin{aligned} E(\ln d) &= E(\ln D) + \ln \alpha \\ &= \lambda - 3\sigma_0^2 + \ln \alpha \\ \text{Var}(\ln d) &= \frac{1}{C_n} \sigma_0^2 \\ F(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi/C_n} \sigma_0 d} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\ln d - (\lambda - 3\sigma_0^2 + \ln \alpha)}{\sigma_0 / \sqrt{C_n}} \right\}^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93)$$

ここに C_n は間隙径 d のばらつきを示す係数であり、粒径 D よりも分散が大きければ $C_n > 1$ となり、その逆であれば $1 > C_n > 0$ となる。さらにこれから次式の期待値が求められる。

$$\left. \begin{aligned} E(d) &= \alpha D_{50} \exp \left\{ \left(\frac{1}{2C_n} - 3 \right) \sigma_0^2 \right\} \\ E(d^3) &= \alpha^3 D_{50}^3 \exp \left\{ \left(\frac{9}{2C_n} - 9 \right) \sigma_0^2 \right\} \\ E\left(\frac{1}{d^3}\right) &= \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{D_{50}^3} \exp \left\{ \left(\frac{9}{2C_n} + 9 \right) \sigma_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (94)$$

最後に、比例定数 α は間隙率 n と単位体積当たりの単位間隙の個数 N_p から計算することができる。しかし、この N_p は土粒子の充填状態により左右される性質のものであるため、次の仮定を考えておく。なお、式中の α および N_p の添字 1~5 はその仮定の番号である。

はじめに、 N_p は式 (73) に示される単位体積当たりの土粒子の個数 N_g と、定数 C_m を用いて次式の関係があるものと仮定する。

$$\begin{aligned} N_{p1} &= \frac{N_g}{C_m} \\ &= \frac{6}{\pi C_m} (1-n) \frac{1}{D_{50}^3} \exp \left(\frac{9}{2} \sigma_0^2 \right) \dots\dots\dots (95) \end{aligned}$$

さらに、単位体積当たりの間隙の総容積が間隙率 n となることから次式を得る。

$$\frac{\pi C_L}{4} E(d^3) N_{p1} = n \dots\dots\dots (96)$$

この式に式 (94) の第2式および式 (95) を代入すれば、係数 α は次式のように求められる。

$$\alpha_1 = \left(\frac{2 C_m}{3 C_L} \frac{n}{1-n} \right)^{1/3} \exp \left\{ \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2C_n} \right) \sigma_0^2 \right\} \dots\dots\dots (97)$$

次に、 N_p は (断面での間隙個数) \times (直列毛細管一本の単位間隙個数) と考える。室田・佐藤の方法を参考にすると断面での間隙個数は式 (66) の N_h で与えられ、直列毛細管一本の単位間隙個数が $1/E(d)$ に比例するとすれば、 N_p および α はそれぞれ次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_{p2} &= \frac{N_h}{C_m E(d)} \\ \alpha_2 &= \left(\frac{2 C_m}{3 C_L} \frac{n}{1-n} \right)^{1/2} \exp \left\{ \left(2 - \frac{2}{C_n} \right) \sigma_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (98)$$

同様に、直列毛細管一本の単位間隙個数が N_v に比例するとすれば、次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_{p3} &= \frac{N_h N_v}{C_m} \\ \alpha_3 &= \left(\frac{\pi C_m}{6 C_L} \right)^{1/3} \frac{n^{1/3}}{(1-n)^{2/3}} \exp \left\{ \left(\frac{13}{6} - \frac{3}{2 C_n} \right) \sigma_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (99)$$

また、混合粒径であっても小さい土粒子が大きい土粒子間に入り込み、表示偏差 σ_0 が大きくなっても単位間隙を取り囲む土粒子数 C_n は増えるが N_p は変わらないとすれば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_{p4} &= \frac{6}{\pi C_m} (1-n) \frac{1}{D_{50}^3} \\ \alpha_4 &= \left(\frac{2 C_m}{3 C_L} \frac{n}{1-n} \right)^{1/3} \exp \left\{ \left(\frac{9}{2} - \frac{3}{2 C_n} \right) \sigma_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (100)$$

次に、モデルの径深 d_{pm} と実際の径深 d_{pr} が同じとすれば次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} d_{pm} &= \frac{\sum \text{断面積} \frac{\pi}{4} d_i^2 \times \text{管長} C_L d_i}{\sum \text{潤辺} \pi d_i \times \text{管長} C_L d_i} = \frac{E (d^3)}{4 E (d^2)} \\ &= \frac{1}{4} \alpha_5 D_{50} \exp \left\{ \left(\frac{5}{2 C_n} - 3 \right) \sigma_0^2 \right\} \\ d_{pr} &= \frac{\text{間隙容積}}{\text{砂粒子総表面積}} = \frac{1}{6} \frac{n}{1-n} \frac{E (D^3)}{E (D^2)} \\ &= \frac{1}{6} \frac{n}{(1-n)} D_{50} \exp \left(-\frac{1}{2} \sigma_0^2 \right) \\ \alpha_5 &= \frac{2}{3} \frac{n}{(1-n)} \exp \left\{ \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2 C_n} \right) \sigma_0^2 \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (101)$$

これらの仮定から求められた $\alpha_1 \sim \alpha_5$ は、すべて間隙率 n および標準偏差 σ_0 の関数として表されている。

(3) 直列毛細管モデル

実際の間隙は複雑な形をしており、流路としての間隙を表現するためには、単位間隙どうしのつながり方をなんらかの形で考慮しなければいけない。Childs・Collis-George⁷⁶⁾ は2つの断面に現れるつながった間隙のうち、小さい方の間隙径でフラックスが規定されるという連結確率を導入し、間隙径分布から飽和透水係数を求める式を提案した。また Garcia-Bengochea・Lovell・Altschaeff⁷⁷⁾ は、この方法で透水係数を求め実験結果と比較している。Juang・Holtz^{78), 79)} は、さらに2つの間隙径がつながる確率も考慮して Childs らの求めた式を改良し、締固めによる間隙径の変化と透水性の関連を調べる実験によって検証している。これらの連結確率の仮定は、実際の間隙中において流路の幅が変化することを表し、間隙径分布のばらつきが大きいほど透水係数が小さくなることを説明できる。ただし、間隙径分布は水分特性曲線から求められ、土粒子形状などの係数は実験により与える必要がある。間隙径分布が対数正規分布で与えられているとき、数値的にはこれら方法でも透水係数を予測することができるが、ここではどの間隙も等確率で次の間隙に連結されると考えた直列毛細管モデルを採用し、間隙径に依存した連結確率は導入しない。

さて、Dunn・Phillips⁸⁰⁾ は、間隙を3種類の管径の異なるパイプを直列につないだモデルで考えた。これを拡張して、Fig. 9 のように単位間隙であるパイプ(管径; d_1, d_2, \dots, d_n) が N 本連なった間隙モデルを考

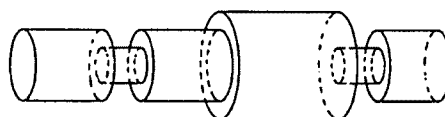


Fig. 9. Series of capillary tube model.

える。この間隙を流れる流体は層流状態で、管径の変化による形状抵抗は無視し、表面摩擦による抵抗のみを受けるものとする。

実際の間隙は各流路間がさらに細かい間隙でつながっており、流路の合流、分岐、さらには流体の移動のない袋小路になった流路まで複雑な形状をしている。しかし、浸透流の抵抗則の比例定数である飽和透水係数を求めるにあたっては、流線方向の流れの特性のみわかればよいのであって、流路の合流、分岐などによる分散を同時に考慮する必要はない。したがって、ここでの間隙モデルのパイプの方向は流線方向としている。 i 番目の単位間隙の管長さを $C_L d_i$ 、水頭差を h_i とすると、Hagen-Poiseuille の法則により、平均流速 V_i 、および流量 Q は次式のように表される。

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \frac{g}{32\nu} d_i^2 \left(\frac{h_i}{C_L d_i} \right) = \frac{g}{32\nu C_L} d_i h_i \\ Q &= \frac{\pi}{4} V_i d_i^2 = \frac{\pi g}{128\nu C_L} d_i^3 h_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (102)$$

間隙の全長 ΔL および全水頭差 Δh はそれぞれ次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta L &= C_L \sum d_i = C_L N \cdot E(d) \\ \Delta h &= \sum h_i = \frac{128\nu C_L}{\pi g} Q \sum \frac{1}{d_i^3} \\ &= \frac{128\nu C_L}{\pi g} Q N \cdot E\left(\frac{1}{d^3}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (103)$$

これより、流量 Q は単位間隙径の平均値を用いて次式のように示される。

$$Q = \frac{\pi g}{128\nu} \frac{E(d)}{E\left(\frac{1}{d^3}\right)} \frac{\Delta h}{\Delta L} \dots\dots\dots (104)$$

同様に、この間隙の平均断面 A_m については次式で表される。

$$A_m = \frac{\sum \frac{\pi}{4} d_i^2 \cdot C_L d_i}{\Delta L} = \frac{\pi}{4} \frac{E(d^3)}{E(d)} \dots\dots\dots (105)$$

これより、間隙内の平均流速 V_m は次式で求められる。

$$V_m = \frac{Q}{A_m} = \frac{g}{32\nu} \frac{E(d)^2}{E(d^3) E\left(\frac{1}{d^3}\right)} \frac{\Delta h}{\Delta L} \dots\dots\dots (106)$$

浸透流の線形の抵抗則である Darcy 則の表示における比例定数、すなわち透水係数 k を用いれば、多孔質体の断面平均流速 V_s は $V_s = nV_m = k(\Delta h/\Delta L)$ であるから、式 (106) に式 (94) を代入し式 (91) の α に式 (97) の α_1 を用いると、粒度分布特性値 σ_0 と透水係数 k の最終的な次の関係式が得られる。

$$\frac{\nu k}{g D_{50}^2} \frac{1}{f(n)} = C_1 \exp(-C_2 \sigma_0^2) \dots\dots\dots (107)$$

ここに、

$$f(n) = \frac{n^{3/5}}{(1-n)^{2/3}}, \quad C_1 = \frac{1}{32} \left(\frac{2C_m}{3C_L} \right)^{2/3}, \quad C_2 = 3 + \frac{11}{C_n} \dots\dots\dots (108)$$

この式では、透水係数 k が間隙率 n 、中央粒径 D_{50} および標準偏差 σ_0 の関数として表現されており、混合粒径の粒度のばらつき σ_0 が大きい程透水係数 k が小さくなることを示している。

また、式 (91) の α に式 (98), (99), (100) および (101) の $\alpha_2 \sim \alpha_5$ を用いても、 C_1, C_2 および $f(n)$ が少し変わるだけで式 (107) の関係は変わらない。以下、 α_2 を用いて変わる係数のみを示すと次のようになる。

$$f(n) = \frac{n^2}{1-n}, \quad C_2 = 2 + \frac{12}{C_n} \dots\dots\dots (109)$$

この $f(n)$ は、Rumer・Drinker⁸¹⁾ が球の周りの流れの抵抗則から誘導した透水係数の式と同じ形式の関数となっている。同様に、 α_3 を用いれば、

$$f(n) = \frac{n^{3/5}}{(1-n)^{4/3}}, \quad C_1 = \frac{1}{32} \left(\frac{\pi C_m}{6 C_L} \right)^{2/3}, \quad C_2 = \frac{10}{6} + \frac{11}{C_n} \dots\dots\dots (110)$$

α_4 を用いれば,

$$C_2 = \frac{11}{C_n} \dots\dots\dots (111)$$

α_5 を用いれば, 次式のようになる。

$$f(n) = \frac{n^3}{(1-n)^2}, \quad C_1 = \frac{1}{72}, \quad C_2 = 1 + \frac{13}{C_n} \dots\dots\dots (112)$$

この $f(n)$ は, Kozeny の式 (50) と同じ形式である。係数 C_1 と C_2 には, 土粒子の充填状態, 土粒子形状特性, 流路の屈曲度⁸²⁾ およびモデルでは無視されている流路の合流, 分岐の効果も影響する。したがって, それぞれ実験により求める必要があると考えられる。

(4) 実験結果との比較

武内¹²⁾ および Loudon¹³⁾ が球形ガラス粒子および川砂で行った定水位透水試験の結果 (Tables 1,2 および 3) を用いて, 式 (107) の関係を調べるとともに, 比例定数 α の与え方によって異なる間隙率の関数 $f(n)$ について比較する。武内のデータ (Table 1) で得られている均等係数 U_c は式 (57) により標準偏差 σ_0 に換算し, Loudon のデータ (Table 3) で得られている代表粒径 D_{10} および D_w はそれぞれ式 (59) および (60) により標準偏差 σ_0 に換算した。

Table 1. Experimental results for permeability of glass beads by Takeuchi¹²⁾

Run	中央粒径 D_{50} (mm)	間隙率 n	均等係数 U_c	標準偏差 σ_0	透水係数 k (cm/s)
E	0.620	0.38	1.10	0.062	0.288
F	0.774	0.38	1.13	0.079	0.383
G	0.915	0.38	1.09	0.056	0.575
H	1.200	0.38	1.08	0.050	1.030
I	1.464	0.38	1.14	0.085	1.460
10	1.12	0.356	2.41	0.572	0.466
11	1.20	0.346	2.50	0.596	0.567
12	0.981	0.361	1.63	0.318	0.500
13	1.04	0.364	2.33	0.550	0.530
14	1.12	0.346	2.00	0.451	0.596
15	0.971	0.356	1.24	0.140	0.438
16	1.11	0.351	1.90	0.417	0.551
17	1.10	0.360	1.74	0.360	0.610
18	1.25	0.368	1.89	0.414	0.749

Table 2. Experimental results for permeability of sand by Takeuchi¹²⁾

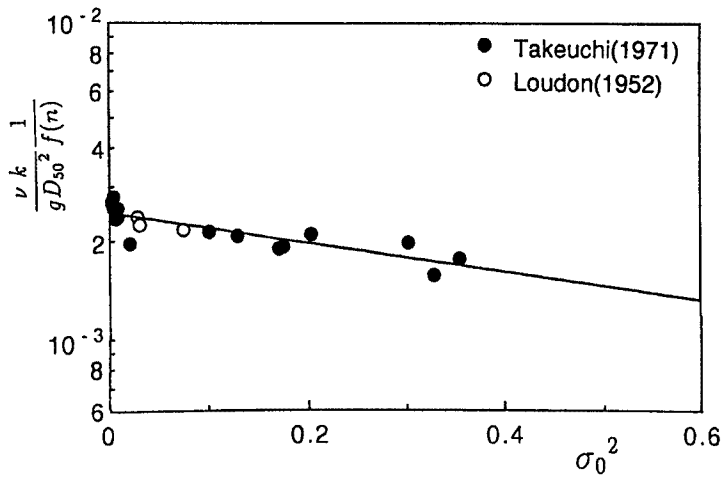
Run	中央粒径 D_{50} (mm)	間隙率 n	透水係数 k (cm/s)
1	0.36	0.40	0.0633
2	0.44	0.40	0.105
3	0.62	0.40	0.161
4	0.62	0.42	0.225
5	0.75	0.39	0.217
6	0.75	0.40	0.294
7	0.92	0.40	0.471
8	1.3	0.38	0.374
9	1.3	0.375	0.591
10	0.36	0.40	0.813

Table 3. Experimental results for permeability of glass beads by Loudon¹³⁾

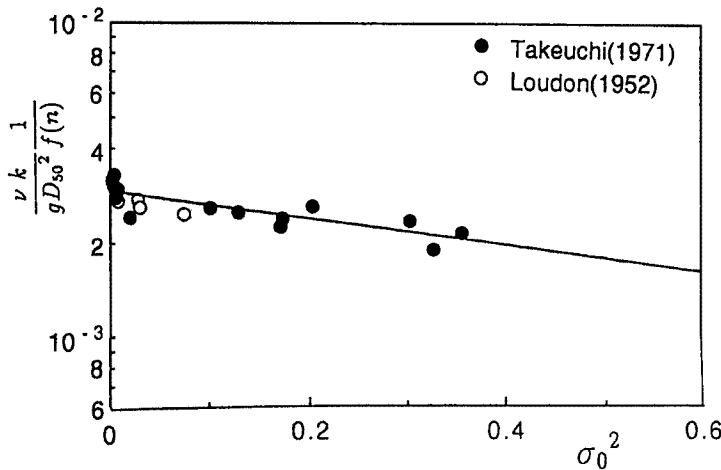
Run	代表粒径 D_w (mm)	10%粒径 D_{10} (mm)	間隙率 n	標準偏差 σ_0	透水係数 k (cm/s)
1	0.831	0.680	0.4	0.168	0.205
2	0.541	0.440	0.4	0.173	0.510
3	0.303	0.270	0.4	0.094	0.066
4	0.164	0.120	0.4	0.273	0.019

Fig. 10 はこれらの実験データを、横軸に σ_0^2 、縦軸に無次元化した透水係数をとって図示したものであり、(a)~(d) は、式 (107) の間隙率の関数にそれぞれ式 (108), (109), (110) および (112) を採用したものである。図中の直線は式 (107) の関係を表しており、その係数 C_1 および C_2 は回帰分析により求められ、 C_1 は (a)~(d) の順に 2.47×10^{-3} , 2.93×10^{-3} , 1.81×10^{-3} および 4.90×10^{-3} , C_2 は 1.05, 0.942, 0.971 および 0.623 となる。この図から、混合粒径の粒度のばらつきを示す標準偏差 σ_0 が大きくなるほど透水係数 k が小さくなる傾向が確認できる。また、間隙率の関数 $f(n)$ の与えかたによって標準偏差の係数 C_2 が若干変わることから、間隙率 n と標準偏差 σ_0 はまったく独立ではなく、なんらかの相関があると考えられる。さらに、(d) の係数 $C_2 = 0.623$ に対して、同じ間隙率の関数を含む Kozeny の式 (50) の代表粒径 D_w^2 が C_2 に換算すると 1 であることより、Kozeny の式が標準偏差 σ_0 の影響をやや過大に考慮していることがわかる。

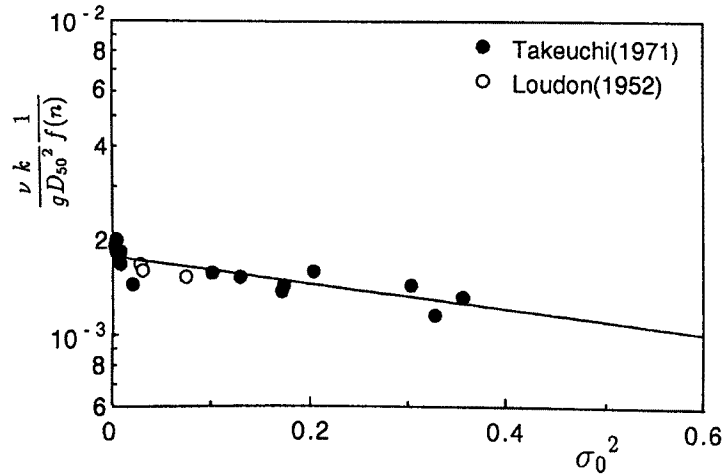
さて、式 (107) は実験結果をよく説明できているが、Fig. 10(a)~(d) からは間隙率の関数 $f(n)$ の優劣を判断することはむずかしい。そこで、各関数形の違いを調べるために、武内が行ったガラス球粒子と川砂



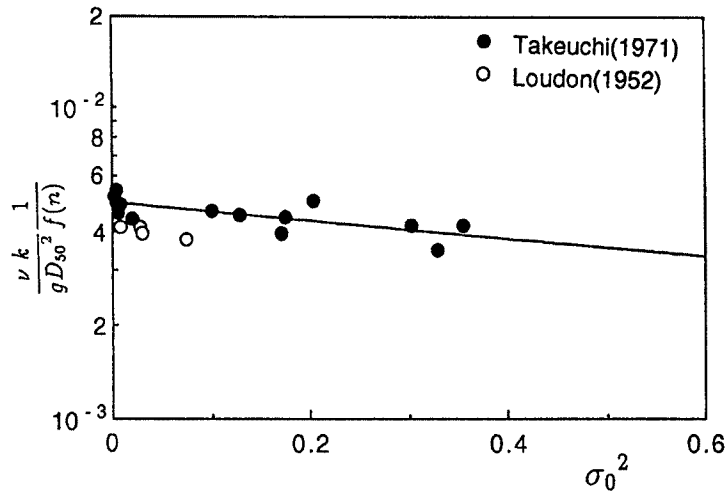
(a) In the case of function $f(n) = \frac{n^{5/3}}{(1-n)^{2/3}}$



(b) In the case of function $f(n) = \frac{n^2}{(1-n)}$



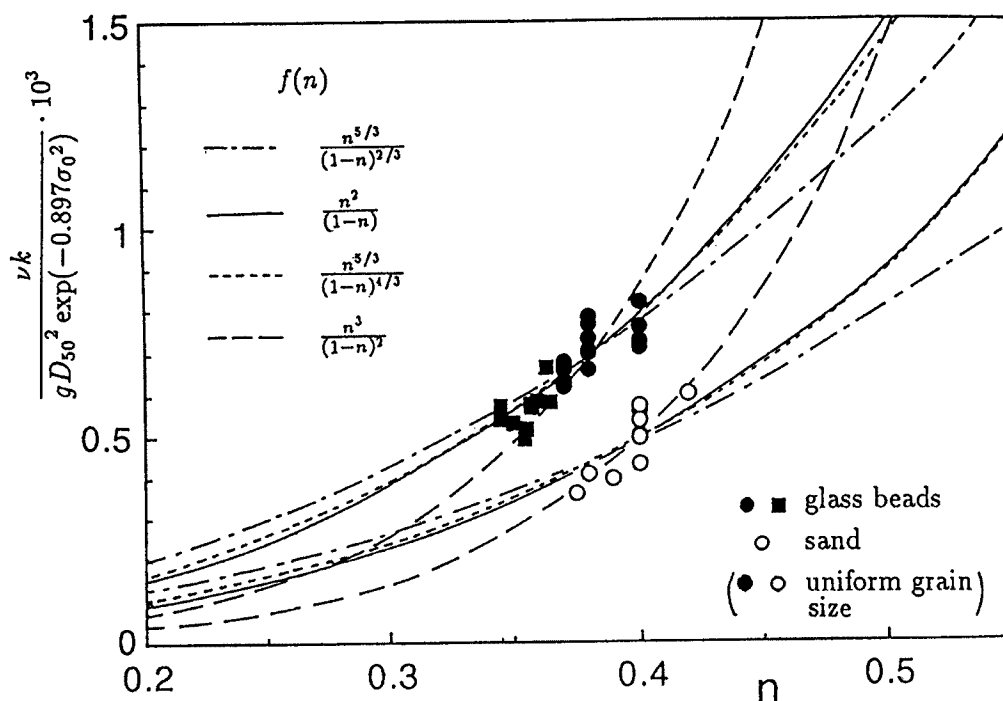
(c) In the case of function $f(n) = \frac{n^{5/3}}{(1-n)^{4/3}}$



(d) In the case of function $f(n) = \frac{n^3}{(1-n)^2}$

Fig. 10. Comparison of theoretical and experimental^{12,13)} permeabilities of glass beads.

の透水係数の実験データをもとにして、間隙率と無次元化した透水係数の関係を Fig. 11 に示す。図中の丸印は均一粒径を示し、四角印は混合粒径で係数 C_2 に平均値 0.897 を与えている。等径球を理想充填したときは最密で間隙率 $n = 0.260$ 、最粗で間隙率 $n = 0.476$ であり、自然の砂質土の間隙率の範囲はこれより大きい。川砂の C_1 も同様に回帰分析で求められ、前述したガラス球粒子と同じ順に示すと 1.61×10^{-3} 、 1.84×10^{-3} 、 1.14×10^{-3} および 2.80×10^{-3} となる。この図から、式 (107) の間隙率の関数に式 (109) を適用したとき、透水係数 k が間隙率 n に対して最も変化すること、また、その変化の大きい間隙率の関数ほど対応する係数 C_2 が小さいことがわかる。さらに、実験データの間隙率の範囲が狭くお広範囲な実験値を必要とするが、球形ガラス粒子に対しては式 (109) が、川砂に対しては式 (112) がそれぞれ最もよく実験結果を説明できているといえる。

Fig. 11. Relation between permeability k and porosity n .

4. 結 語

本研究では、空間的平均操作により浸透流の巨視的な基礎方程式を誘導するとともに、直列毛細管モデルによって粒度分布を考慮した浸透流の抵抗則の定式化を行った。本研究で得られた主な成果を要約すると、次のようである。

1) 微視的な流れの速度や圧力を空間平均値とその変動成分に分けて表し、多孔質体としての砂質土を均質な連続体として取扱い、微視的な連続式と運動方程式に空間的平均操作を行って、その均質な連続体に対する空間平均された基礎方程式を誘導した。また、周期境界条件における地下水の挙動を対象として、この方程式を無次元表示して各項のオーダーを評価することにより、簡単化された巨視的な基礎方程式が得られた。

2) 砂質土の粒度分布に対数正規分布を適用し、その標準偏差と均等係数および曲率係数の関係を示すとともに、従来の抵抗則に含まれる代表粒径を対数正規分布の特性値で表示した。また、重量表示の粒度分布から、単位体積、単位断面積および単位長さ当たりの個数分布を誘導し、断面での土粒子断面円の大きさを求めた。

3) 複雑な間隙を円筒形の単位間隙にモデル化し、その間隙径分布を粒度分布特性値で表示した。そして、多孔質体としての砂質土に直列毛細管モデルを適用して粒度分布を考慮した浸透流の抵抗則の表示を検討した。その結果、浸透流の抵抗則が Darcy 則に基礎をおいたとき、その係数を砂質土の平均粒径の自乗に比例し、標準偏差と間隙率の関係として定式化し、実験結果と比較してその適用性を示した。

参 考 文 献

- 1) 高木俊介：土壌水の運動機構について，応用物理，第17巻，第8-9号，1948，pp. 241-251.

- 2) 合田 健：砂濾過の水理に関する一基礎的研究，土木学会誌，第37巻，第1号，1952，pp. 29-33.
- 3) Whitaker, S.: Advances in theory of fluid motion in porous media, Ind. Eng. Chem., Vol. 61, No. 12, 1969, pp. 14-28.
- 4) Whitaker, S.: The transport equations for multi-phase systems, Chem, Eng. Sci., Vol. 28, 1973, pp. 139-147.
- 5) Slattery, J. C.: Flow of viscoelastic fluids through porous media, AIChE J., Vol. 13, No. 6, 1967, pp. 1066-1071.
- 6) Irmay, S.: On the theoretical derivation of Darcy and Forchheimer formulas, Trans. Am. Geophys. Union., Vol. 39, No. 4, 1958, pp. 702-707.
- 7) Whitaker, S.: Flow in porous media I: a theoretical derivation of Darcy's law, Transp. Porous Media, Vol. 1, 1986, pp. 3-25.
- 8) Slattery, J. C.: Single-phase flow through porous media, AIChE J., Vol. 15, No. 6, 1969, pp. 866-872.
- 9) Bear, J.: Dynamics of Fluids in Porous Media, American Elsevier Publ., 1972, pp. 65-118.
- 10) Corapcioglu, M. Y.: Advances in Porous Media Vol. 1, Elsevier Science Publ., 1991, pp. 179-213.
- 11) Nield, D. A. and A. Bejan: Convection in Porous Media, Springer-Verlag, 1992, pp. 29-46.
- 12) 武内 等：確率モデルによる多孔体内の流れのシミュレーション，土木学会論文報告集，第187号，1971，pp. 79-93.
- 13) Loudon, A. G.: The computation of permeability from simple soil tests, Geotechnique, Vol. 3, 1952, pp. 165-182.
- 14) Whitaker, S.: Diffusion and dispersion in porous media, AIChE J., Vol. 13, No. 3, 1967, pp. 420-427.
- 15) Gray, W. G. and K. O'Neill: On the general Equations for flow in porous media and their reduction to Darcy's law, Water Res. Res., Vol. 12, No. 2, 1976, pp. 148-154.
- 16) 土木学会編：水理公式集，土木学会，1985，pp. 375-376.
- 17) 河野伊一郎：地下水工学，鹿島出版会，1989，pp. 90-92.
- 18) 吉田 洋・宇野尚雄・柳澤栄司：土の力学(2)，土木学会編 新体系土木工学17，技報堂出版，1984，pp. 251-253.
- 19) Kenney, T. C., D. Lau and G. I. Ofoegbu: Permeability of compacted granular materials, Can. Geotech. J., Vol. 21, 1984, pp. 726-729.
- 20) Gardner, W. R.: Representation of soil aggregate-size distribution by a logarithmic-normal distribution, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 20, 1956, pp. 151-153.
- 21) 箭内寛治：土の粒度分布に関する考察，第10回土質工学研究発表会講演概要集，1975，pp. 51-54.
- 22) 陶野郁雄：砂質堆積物の粒度試験，第14回土質工学研究発表会講演概要集，1979，pp. 129-132.
- 23) 岩井重久・松尾新一郎：土の粒度加積曲線に関する統計学的研究，土木学会誌，第36巻，第12号，1951，pp. 560-563.
- 24) 岩井重久：濾過砂粒度の従来の統計的解析，水道協会雑誌，第203号，1951，pp. 24-34.
- 25) 岩井重久：濾過砂粒度の完全な統計的解析，水道協会雑誌，第204号，1951，pp. 12-24.
- 26) 岩井重久：砂ろ過理論における Fair-Hatch 法の改良 (I)，水道協会雑誌，第242号，1954，pp. 9-15.
- 27) 岩井重久：砂ろ過理論における Fair-Hatch 法の改良 (II)，水道協会雑誌，第243号，1955，pp. 13-19.
- 28) 井口正男：漂砂と流砂の水理学，古今書院，1975，pp. 112-120.
- 29) Burger, H.: Log-normal interpolation in grain size analysis, Sedimentology, Vol. 23, 1976, pp. 395-405.
- 30) Shirazi, M. A. and L. Boersma: A unifying quantitative analysis of soil texture, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 48, 1984, pp. 142-147.
- 31) 福田光治：重量による粒度分布と個数による粒度分布の関係について，土木学会第43回年次学術講演会概要集，Ⅲ-214，1988，pp. 470-471.
- 32) 宇野尚雄・杉井俊夫・稲垣弘二：透水係数に及ぼす諸要因との関係，第24回土質工学研究発表会講演概要集，1989，pp. 1655-1656.

- 33) Hatch, L. P.: Flow through Granular Media, *J. App. Mech.*, Vol. 7, No. 3, 1940, pp. A-109-A-112.
- 34) 土屋義人: 混合砂礫の限界掃流力に関する研究, 京都大学防災研究所年報, 第6号, 1963, pp. 228-253.
- 35) 中川博次・辻本哲郎: 移動床流れの水理, 土木学会編 新体系土木工学23, 技報堂出版, 1986, pp. 25-26.
- 36) Bear, J.: *Dynamics of Fluids in Porous Media*, American Elsevier Pub. Comp. Inc., New York, 1972, pp. 19-22.
- 37) Bloemen, G. W.: Calculation of hydraulic conductivities of soils from texture and organic matter content, *Z. Pflanzenernaehr. Bodenkd.*, Vol. 143, 1980, pp. 581-605.
- 38) 土壤物理研究会編: 土の物理学, 森北出版, 1979, pp. 225-236.
- 39) Brutsaert, W.: Probability laws for pore-size distribution, *Soil Sci.*, Vol. 101, 1966, pp. 85-92.
- 40) Bathke, G. R., A. Amoozegar and D. K. Cassel: Description of soil pore size distribution with mean weighted pore diameter and coefficient of uniformity, *Soil Sci.*, Vol. 152, 1991, pp. 82-86.
- 41) 地下水入門編集委員会編: 地下水入門, 土質工学会, 1983, p.31.
- 42) Brooks, R. H. and A. T. Corey: Properties of porous media affecting fluid flow, *Proc. ASCE*, Vol. 92, IR2, 1966, pp. 61-88.
- 43) Campbell, G. S.: A simple method for determining unsaturated conductivity from moisture retention data, *Soil Sci.*, Vol. 117, 1974, pp. 311-314.
- 44) Campbell, G. S. (中野政詩, 東山 勇監訳): パソコンで学ぶ土の物理学, 鹿島出版会, 1987, pp. 40-42.
- 45) Gupta, S. C. and W. E. Larson: Estimating soil water retention characteristics from particle size distribution, organic matter percent, and bulk density, *Water Res. Res.*, Vol. 15, No. 6, 1979, pp. 1633-1635.
- 46) Hartge, K. H. (福士定雄訳): 土壤物理学概論, 博友社, 1985, pp. 135-136.
- 47) Hillel, D. (岩田進午監修, 高見晋一, 内嶋善兵衛訳): 土壤物理学概論, 養賢堂, 1984, pp. 63-65.
- 48) Wilkins, D. E., W. F. Buchelle and W. G. Lovely: A technique to index soil pores and aggregates larger than 20 micrometers, *Soil Sci. Am. J.*, Vol. 41, 1977, pp. 139-140.
- 49) Ragab, R. and J. Feyen: Effect of the method for determining pore size distribution on prediction of the hydraulic conductivity function and of infiltration, *Soil Sci.*, Vol. 134, 1982, pp. 141-145.
- 50) Fara, H. D. and A. E. Scheidegger: *Statistical Geometry of Porous Media*, *J. Geo. Res.*, Vol. 66, No. 10, 1961, pp. 3279-3284.
- 51) de Jong, de Josselin: Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits, *Trans. Amer. Geophys. Union* Vol. 39, No. 1, 1958, pp. 67-74.
- 52) Haring, R. E. and R. A. Greenkorn: A statistical model of a porous medium with nonuniform pores, *AIChE J.*, Vol. 16, No. 3, 1970, pp. 477-483.
- 53) 室田 明・佐藤邦明: 空隙規模の分布による透水係数の評価について, 第13回水理講演会講演集, 1969, pp. 73-78.
- 54) Milligan, W. O. and C. R. Adams: An analytical expression for cumulative pore volumes and pore size distributions, *J. Phys. Chem.* Vol. 58, 1954, pp. 891-893.
- 55) 玉井信行・浅枝 隆・田中靖治: 毛管モデルによる不飽和透水係数の評価, 土木学会論文集, 第381号, II-7, 1987, pp. 75-81.
- 56) Arya, L. F. and J. F. Paris: A physicoempirical model to predict the soil moisture characteristic from particle-size distribution and bulk density data, *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 45, 1981, pp. 1023-1030.
- 57) Mogami, T.: Mechanics of granular material composed of particles of various sizes, *Trans. of JSCE*, No. 137, 1967, pp. 43-47.
- 58) 金谷健一: 粒状体の統計モデルとエントロピー, 土質工学会論文報告集, Vol. 20, No. 4, 1980, pp. 151-160.

- 59) 中野政詩：土の水分量と毛管張力の関係(脱水過程) I -理論-, 農業土木学会論文集, 第35号, 1971, pp. 1-9.
- 60) 中野政詩：土の水分量と毛管張力の関係(脱水過程) I -主として諸定数, 理論曲線, 実験曲線について-, 農業土木学会論文集, 第35号, 1971, pp. 10-14.
- 61) Rieu, M. and G. Sposito: Fractal Fragmentation, soil porosity, and soil water properties:1. theory, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 55, 1991, pp. 1231-1238.
- 62) Rieu, M. and G. Sposito: Fractal Fragmentation, soil porosity, and soil water properties:2. application, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 55, 1991, pp. 1239-1244.
- 63) Levy, T.: Propagation of waves in a fluid-saturated porous elastic solid, Int. J. Engng Sci, Vol. 17, 1979, pp. 1005-1014.
- 64) Burrige, R. and J. B. Keller: Poroelasticity equations derived from microstructure, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 70, No. 4, 1981, pp. 1140-1146.
- 65) Zick, A. A. and G. M. Homsy: Stokes flow through periodic arrays of spheres, J. Fluid Mech., Vol. 115, 1982, pp. 13-26.
- 66) Auriault, J.-L., L. Borne and R. Chambon: Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Darcy, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 77, No. 5, 1989, pp. 1641-1650.
- 67) Mei, C. C. and J.-L. Auriault: Mechanics of heterogeneous porous media with several spatial scales, Proc. R. Soc. Lond., A426, 1989, pp. 391-423.
- 68) Mei, C. C. and J.-L. Auriault: The effect of weak inertia on flow through a porous medium, J. Fluid Mech., Vol. 222, 1991, pp. 647-663.
- 69) 徳光善治：粒体のつめこみに関する研究, 材料, 第13巻, 第133号, 1964, pp. 752-758.
- 70) Furnas, C. C.: I-Mathematical relations for beds of broken solids of maximum density, Ind. Eng. Chem., Vol. 23, No. 9, 1931, pp. 1052-1058.
- 71) 宇野尚雄・杉井俊夫・佐橋祐輔：土の粒状体構造表現の試み, 土木学会第43回年次学術講演会概要集, 3-427, 1988, pp. 896-897.
- 72) 瀬瀬 満：統計確率論的手法(モンテカルロ法)(その6), 出光技報, 35巻, 1号, 1992, pp. 104-116.
- 73) Saffman, P. G.: A theory of dispersion in porous media, J. Fluid Mech., Vol. 6, 1959, pp. 321-349.
- 74) 杉尾 哲：空隙モデルの併用による2次元非定常浸透流の解析, 土木学会論文報告集, 第296号, 1980, pp. 39-47.
- 75) Koplik, J.: Creeping flow in two-dimensional networks, J. Fluid Mech., Vol. 119, 1982, pp. 219-247.
- 76) Childs, E. C. and N. Collis-George: The permeability of porous materials, Proc. R. Soc. Lond., A 201, 1950, pp. 392-405.
- 77) Garcia-Bengochea, I., C. W. Lovell and A. G. Altschaeffl: Pore distribution and permeability, Proc. ASCE, Vol. 105, GT7, 1979, pp. 839-856.
- 78) Juang, C. H. and R. D. Holtz: A probabilistic permeability model and the pore size density function, Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech., Vol. 10, No. 5, 1986, pp. 543-553.
- 79) Juang, C. H. and R. D. Holtz: Fabric, pore size distribution, and permeability of sandy soils, J. Geotech. Eng., Vol. 112, No. 9, 1986, pp. 855-868.
- 80) Dunn, G. H. and R. E. Phillips: Equivalent diameter of simulated macropore systems during saturated flow, Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 55, 1991, pp. 1244-1248.
- 81) Rumer, R. R. and P. A. Drinker: Resistance to laminar flow through porous media, Proc. ASCE, Vol. 92, HY5, 1966, pp. 155-164.
- 82) Carman, P. C.: Fluid flow through a granular bed, Trans. Inst. Chem. Eng. London 15, 1937, pp. 150-156.