

鉄骨骨組への要求塑性変形とその変動に関する組織的算定法

中島 正愛・加登美喜子・森 保宏・辻 文三

SYSTEMATIC PROCEDURE FOR CALCULATING VARIATION OF PLASTIC DEFORMATIONS DEMANDED TO STEEL STRUCTURAL SYSTEMS

By *Masayoshi* NAKASHIMA, *Mikiko* KATO, *Yasuhiro* MORI and *Bunzo* TSUJI

Synopsis

This paper presents a study on the variation of ductility demanded to structural members of steel frames. First, the degree of variation of ductility capacity of steel beam-columns was demonstrated. Next, an analytic procedure for estimating the variation of plastic hinge rotations demanded of structural members was proposed. In this procedure, limit analysis techniques were employed, and means and standard deviations of plastic hinge rotations required at the formation of collapse mechanism were obtained systematically. This procedure was applied to multi-story steel frames, and it was found that small variation of full plastic moments can cause large variation in plastic hinge rotations.

1. はじめに

近年、外力や抵抗がもつ不可避のばらつきを勘案した信頼性設計が取り入れられる傾向にあり、我が国においても、鋼構造限界状態設計規準(案)¹⁾が示されるに至っている。信頼性設計法では、部材耐力に抵抗係数を導入することによって部材耐力のばらつきを斟酌している。我が国の耐震設計では、稀に被るであろう大地震に対しては部材の塑性化を許しており、このとき、塑性化部材は十分な塑性変形能力を有していることが前提条件になる。従って耐震設計に信頼性の考え方を持ち込むとき、部材耐力のばらつきに加えて、塑性化が予想される部材が有する塑性変形能力のばらつきも考慮しなければならない。一方、部材耐力がばらつくとき、塑性化の順序や崩壊機構が変化しうるので、塑性化する部材に要求される塑性変形(ここではこれを要求塑性変形と呼ぶ)が変動することも見逃せない。このように、信頼性の考え方に立脚した耐震設計をめざすためには、骨組を構成する部材がもつ変形能力とそれら部材に要求される要求塑性変形両者のばらつきを把握しておくことが肝要であるが、現在までに提案されている国内外の信頼性設計諸規準では、これらばらつきは陽なかたちでは考慮されていない。本論では、「塑性変形能力と要求塑性変形の変動をも考慮した耐震設計法の確立」を命題に、その一貫として、部材耐力のばらつきに起因する部材への要求塑性変形の変動を組織的に求める方法を提案する。鉄骨骨組を対象に、その主要要素の一つである柱材がもつ塑性変形能力のばらつきの程度をまず喚起し、ついで、本論で提案する手順の詳細を説明し、さらに、この手法を現実的な部材断面を有する鉄骨骨組に適用することから、構成各部材に要求される塑性変形とその変動の程度を検討する。

2. 鉄骨柱材の塑性変形能力とそのばらつき

筆者の一人は、軸圧縮力と曲げを同時に受ける鉄骨柱材に対する既往の実験結果を網羅したデータベースを構築し、その耐力と塑性変形能力のばらつきの程度を考察した^{2~4)}。Fig. 1はその結果の一例であり、最大耐力到達後、耐力が最大耐力の95%にまで低下した時点での変形の弾性限変形に対する比(塑性率)を、柱の細長比に対して描いた結果である。この図からも明らかなように、全体的な傾向として短い柱ほど大きな塑性変形能力を有しているものの、例えば降伏細長比で基準化した細長比が0.3において、塑性率が、あるときには2またあるときは20になるなど、短い柱の塑性変形能力は大きくばらついており、その変動係数としては50%~100%程度が与えられている。また、数値感度解析⁴⁾から、部材の材料特性や幾何学的特性の変動など、塑性変形能力をばらつかせる諸因子のなかでも、とりわけ素材の降伏後のひずみ硬化特性の影響が最も顕著であることも明らかになっている。さらに、鉄骨はり材や筋かい材についても同様のデータベースを整備して分析した結果、これら部材の持つ塑性変形能力は、柱材の塑性変形能力と同程度のばらつきを有していることがわかっている^{5),6)}。

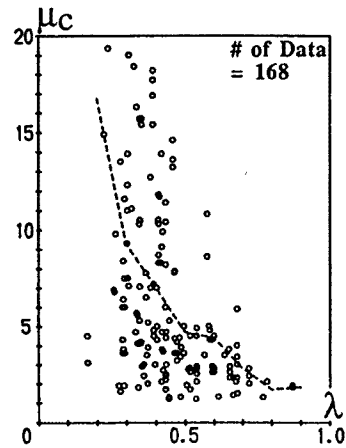


Fig. 1. Variation of ductility ratios in steel beam-columns

3. 要求塑性変形とそのばらつきの評価法

3.1 解析仮定

鉄骨骨組を構成する各部材への要求塑性変形とそのばらつきを組織的に求める方法を導くにあたって、以下の仮定を設けた。(1)柱とはりからなる鉄骨骨組を対象とする；(2)材の塑性域の広がりや考慮せず、部材端以外には塑性ヒンジは形成されないものとする；(3)単純塑性ヒンジ法を用い、軸力の影響を無視する；(4)外力として各層床位置に作用する水平力を考え、各層水平力が逆三角形分布に従うと仮定し、また比例載荷を受けるものとする；(5)骨組が崩壊機構に到達した時点における水平変位と塑性ヒンジの回転量を要求塑性変形とする；(6)部材耐力(全塑性モーメント)を独立な正規確率変数とする；(7)同じ部材に形成される塑性ヒンジは完全相関とする。

3.2 重要崩壊モードの選択と生起確率の算定

崩壊モード探索法として、下界定理に基づく極限解析にシンプレックス法を適用した Compact Procedure^{7,8)}を用いる。この方法は、目的関数を釣合方程式とし、制約条件を部材耐力(全塑性モーメント)とした線形計画法であり、極限解析を「部材力の制約条件下で、釣合を満足させつつ荷重係数の最大値を求める」という問題に帰着させている。

まず、骨組全体の釣合方程式を式(1)のように設定する。ここで、 $[J]$ は単位ベクトル、 $\{P\}$ は節点ベクトル、 $[H]$ は釣合マトリクス、 $\{r\}$ は部材力(材端曲げモーメント)ベクトル、 λ は荷重係数を表す。

$$\lambda [J] \{P\} = [H] \{r\} \dots\dots\dots (1)$$

また、部材力ベクトルに対応する変形ベクトル(材端回転角の集合)を $\{e\}$ 、骨組の節点変位ベクトルを $\{d\}$ とすると、変形の適合条件は仮想仕事の原理から次式で表せる。

$$\{e\} = [H]^T \{d\} \dots\dots\dots (2)$$

次に、釣合方程式(式(1))に対して掃き出し法を適用する。釣合マトリクスの行数を M 、列数を $N(M < N)$ とすると、掃き出しの結果、 $[H^*]$ は、 N 列のうち M 列については要素“1”を一つだけ含み、他の要素はすべて“0”となる。

$$\lambda [I^*] \{p\} = [H^*] \{r\} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)において、部材力ベクトル $\{r\}$ を基底変数と非基底変数に分け、 $[H^*]$ マトリクスの“1”を一つだけ含む列に対応する要素 (M 個) を基底変数に、それ以外の列に対応する要素 ($N-M$ 個) を非基底変数に、それぞれ割り当てる。次に、部材力に関する制約条件を考慮しながら、以下のステップを繰り返すことによって崩壊荷重係数を求める。

- ・初期設定：荷重係数 $\lambda = 0$ 、部材力ベクトル $\{r\} = \{0\}$ とする。
 - ・ステップ1：基底変数 $\{r_B\}$ だけを增加させ、それらの1つが限界値である全塑性モーメントに到達するまで荷重係数 λ を増加させる。ただし、非基底変数 $\{r_N\}$ の値は変化させない。
 - ・ステップ2：荷重係数を更に増加させるために、基底変数 $\{r_B\}$ と非基底変数 $\{r_N\}$ を入れ換える。
- この操作を繰り返すことによって、全塑性モーメントを確定値とした場合の崩壊モードと崩壊荷重係数が求められる。

一方変形の適合条件が式(2) で表されていることに留意すれば、掃き出し操作中に現われる $[H^*]$ と $[I^*]$ の各行は、実現可能な崩壊モードを示すことになる。つまり、 $[H^*]$ 各行の係数は、ある崩壊モードに適合する部材変形モード(塑性ヒンジの剛体回転角)を、また、 $[I^*]$ 各行の係数は、その崩壊モードにおける各層の剛体水平変位をそれぞれ表している。このように、掃き出し操作中における行列が、実現可能な崩壊モードを表すことに着目して、できるだけ多くの崩壊モードを選択する。

次に、選択された崩壊モードの中で、崩壊しやすいモードの生起確率を求める。崩壊モード S の生起確率 $P[\text{mode } S]$ は、崩壊荷重係数 λ_S が、他の崩壊モードの $\lambda_i (i=1,2,\dots, nmode; i \neq S)$ より小さいという事象 $E_i^{(S)}$ の積事象で表せる。崩壊荷重係数は全塑性モーメントの線形結合で表せるので、生起確率は式(4) で表現できる。ここで、 nm は部材数を、 $nmode$ は選択された崩壊モードの数を、 (Mp_j) は j 部材の全塑性モーメントを、 $c_i^{(s)}$ は確定的な係数を表す。

$$\begin{aligned}
 P[\text{mode } S] &= P\left[\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} E_i^{(S)}\right] \\
 &= P[(\lambda_S < \lambda_1) \cap (\lambda_S < \lambda_2) \cap \dots \cap (\lambda_S < \lambda_{nmode})] \\
 &= P\left[\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nmode} c_i^{(s)} Mp_j < 0\right)\right] \dots\dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

本論では、生起確率が 10% 以上の崩壊モードを重要な崩壊モードとして選択した (Fig. 2)。

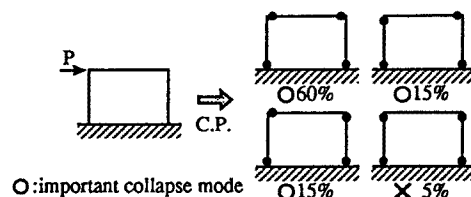


Fig. 2. Collapse modes obtained from collapse mode search and selection of important collapse modes

3.3 要求塑性変形の推定

次のステップとして、崩壊モード探索法から得られた重要崩壊モード S の要求塑性変形（崩壊機構に到達した時点における変形と定義）を求める。崩壊時における骨組の剛性方程式は、塑性ヒンジ位置をピンに置換した骨組に対して、外力として、崩壊荷重と塑性ヒンジまわりに一対の全塑性モーメントが作用したときの剛性方程式に等しい (Fig. 3)。塑性ヒンジが形成されている材端部分は、剛節点と部材 (Fig. 4 の (A) と (B)) を切り離して考えるので、部材 (B) の回転を独立した変形量と考え、剛性方程式の次数を塑性ヒンジの数だけ拡大する。従って、剛性マトリクス of 行と列は、全ての節点を剛節点とした元の骨組の剛性マトリクスと比較すると、それぞれ塑性ヒンジの数だけ増える (Fig. 5)。このように考えると、骨組の剛性方程式は式(5) のように表せる。ここで、 $\{P^{(S)}\}$ は外力ベクトルを、 $\{u^{(S)}\}$ は節点変位ベクトルを、 $[K^{(S)}]$ は剛性マトリクスを示し、(S) は諸量が崩壊モード S にかかわることを示す添字である。

$$\{P^{(S)}\} = [K^{(S)}] \{u^{(S)}\} \dots\dots\dots (5)$$

上式は崩壊機構形成時の剛性方程式であるから、その剛性マトリクスの行列式は0となる。しかし、骨組が崩壊に到達した時点では、最後に形成される塑性ヒンジ（ここではラストヒンジと呼ぶ）の相対回転量は0である。極限解析結果は崩壊機構を与えるだけで、塑性ヒンジの形成順序はわからないので、塑性ヒンジの中の任意の一つ T をラストヒンジと仮定しておく。そして、この塑性ヒンジが形成されている材端部を剛節点に戻す (Fig. 6) ことで、式(5) の剛性方程式を一次元だけ縮約することができ、このようにして得られた方程式 (式(6)) から、崩壊時の変形量が求まる。ここで、 $\{P^{(S, T)}\}$ は外力ベクトルを、 $\{u^{(S, T)}\}$ は節点変位ベクトルを、 $[K^{(S, T)}]$ は剛性マトリクスを示し、(S, T) は崩壊モード S において、ラストヒンジ T を仮定したことを示す添字である。

$$\{P^{(S, T)}\} = [K^{(S, T)}] \{u^{(S, T)}\} \dots\dots\dots (6)$$

塑性ヒンジの相対回転量 $\theta_i^{(S, T)}$ は、節点での適合条件を参照すれば、Fig. 4 に示すように、塑性ヒンジが形成されていた部材 (A) の回転量 $\theta_{(A)}^{(S, T)}$ から隣接する剛節点 (B) の回転量 $\theta_{(B)}^{(S, T)}$ を差し引けばよい。

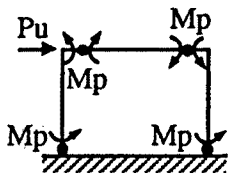


Fig. 3. Frame in collapse mechanism

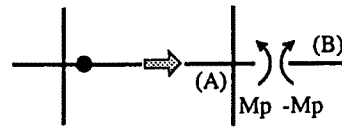


Fig. 4. Connection where a plastic hinge is formed

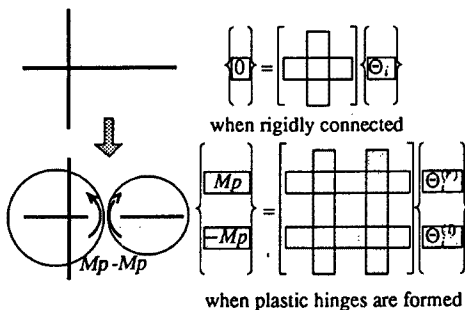


Fig. 5. Stiffness matrix formulation at the instant of collapse formation

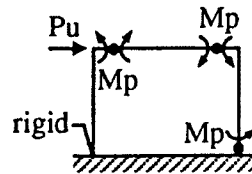


Fig. 6. Frame at the instant of collapse formation

$$\theta_i^{(S, T)} = \theta_{i(B)}^{(S, T)} - \theta_{i(A)}^{(S, T)} \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 i は塑性ヒンジ番号を表す。

次に、他の塑性ヒンジをそれぞれラストヒンジと仮定して (Fig. 7), 崩壊時の変形量を求める。このとき、剛性方程式を再度導く必要はなく、新たに仮定したラストヒンジの相対回転量が 0 となるように、最初に求めた変形量から、剛体変形による変形量を差し引きすればよい。例えば、最初に仮定したラストヒンジを T と、次に仮定したラストヒンジを N とすると、塑性ヒンジ N の相対回転量を 0 とするために次式が得られる。ここで、 $\theta_{i=N}^{(S, T)}$ は塑性ヒンジ N の剛体回転角、 $\theta_{i=N}^{(S, T)}$ はラストヒンジを T としたときの塑性ヒンジ N の回転量である。

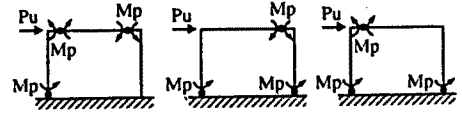


Fig. 7. Selection of last plastic hinges

$$0 = k_N \times \theta_{i=N}^{(S)} + \theta_{i=N}^{(S, T)} \quad \therefore k_N = -\frac{\theta_{i=N}^{(S, T)}}{\theta_{i=N}^{(S)}} \dots\dots\dots (8)$$

k_N を用いて、塑性ヒンジ N をラストヒンジとしたときの、他の塑性ヒンジ $i (i = 1 \sim nhinge)$ の回転量が式(9) で求められる。ここで、 $\theta_i^{(S, T)}$ はラストヒンジ N を仮定したときの塑性ヒンジ i の回転量、 $\theta_i^{(S)}$ はラストヒンジ T を仮定したときの塑性ヒンジ i の回転量、 $\theta_i^{(S)}$ は塑性ヒンジ i の剛体回転角、 $nhinge$ は崩壊モード S で形成されている塑性ヒンジの個数である。

$$\theta_i^{(S, T)} = k_N \times \theta_i^{(S)} + \theta_i^{(S, T)} \dots\dots\dots (9)$$

この操作をすべての塑性ヒンジについて繰り返すことによって、各塑性ヒンジをそれぞれラストヒンジと仮定したときの、要求塑性変形量を求めることができる。

ところで、式(6) の外力ベクトルは、崩壊荷重と全塑性モーメントからなるため、外力ベクトルは全塑性モーメントの線形結合として表されるので、要求塑性変形もまた全塑性モーメントの線形結合となる。崩壊モード S において、ラストヒンジ $k (k = 1 \sim nhinge)$ を仮定したときの、崩壊時の i 層の水平変位 $U_i^{(S, k)}$ と塑性ヒンジ i の回転量 $\theta_i^{(S, k)}$ は次式で表せる。ここで、 Mp_j は j 部材の全塑性モーメントを、 $e_{i,j}^{(S, k)}$ 、 $f_{i,j}^{(S, k)}$ は確定的な係数を、 nm は部材数を表す。

$$U_i^{(S, k)} = \sum_{j=1}^{nm} e_{i,j}^{(S, k)} Mp_j \dots\dots\dots (10)$$

$$\theta_i^{(S, k)} = \sum_{j=1}^{nm} f_{i,j}^{(S, k)} Mp_j \dots\dots\dots (11)$$

ここでは、ラストヒンジの選択によって要求塑性変形量も変わるので、同じ崩壊モードでも、ラストヒンジ位置が異なれば別のモードと考える。崩壊モード S において、塑性ヒンジ T がラストヒンジとなる確率 $P[\text{last } T | \text{mode } S]$ は、Symonds の定理⁹⁾ (崩壊時の真の変位は、各塑性ヒンジの相対回転角を順次 0 とし得られる変位の中で最大の変位に等しい) から、ラストヒンジ T を仮定したときの骨組頂部の水平変位 $U_{Top}^{(S, T)}$ が、塑性ヒンジ i をラストヒンジとしたときの水平変位 $U_{Top}^{(S, i)} (i = 1, 2, \dots, nhinge; i \neq T)$ よりも大きいという事象の積事象として、式(12) で表せる。ここで、 $c_{i,j}^{(S)}$ 、 $g_{j,k}^{(S, T)}$ は確定的な係数、 $nhinge$ は塑性ヒンジの数、 $nmode$ は重要崩壊モードの数である。なお、ラストヒンジの生起確率は、崩壊モード S の条件付確率となっている。

$$P[\text{last } T | \text{mode } S] = P[(U_{Top}^{(S, 1)} < U_{Top}^{(S, T)} \cap \dots \cap (U_{Top}^{(S, M)} < U_{Top}^{(S, T)}) | \text{mode } S]$$

$$= P\left[\bigcap_{k=1 (k \neq T)}^{nhinge} \sum_{j=1}^{nm} g_{j,k}^{(S, T)} Mp_j < 0 \left| \left(\bigcap_{i=1 (i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nm} c_{i,j}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right) \right. \right]$$

$$P \left[\left(\bigcap_{k=1(k \neq T)}^{nhinge} \left(\sum_{j=1}^{nm} g_{i,j}^{(S,T)} Mp_j < 0 \right) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nm} c_{i,j}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right) \right] \dots\dots (12)$$

$$= \frac{P \left[\left(\bigcap_{k=1(k \neq T)}^{nhinge} \left(\sum_{j=1}^{nm} g_{i,j}^{(S,T)} Mp_j < 0 \right) \right) \cap \left(\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nm} c_{i,j}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right) \right]}{P \left[\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nm} c_{i,j}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right]}$$

本論では、崩壊モード S という条件をはずしたラストヒンジの生起確率 $P[\text{last } T | \text{mode } S] \cdot P[\text{mode } S]$ が、5%以上となるラストヒンジを重要なラストヒンジとして選択する (Fig. 8)。

3.4 要求塑性変形が持つばらつき の推定

次のステップとして、崩壊モード S でラストヒンジが T という条件下において (Fig. 9)、要求塑性変形の平均値と分散を求める。要求塑性変形 (塑性ヒンジ k の回転量 $\theta_k^{(S,T)}$) の確率分布関数 $F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T)$ は、次式のように全塑性モーメントの線形結合で表せる。

$$F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T)$$

$$= P[\theta_k^{(S,T)} < x | \text{mode } S, \text{last } T]$$

$$= P \left[\sum_{j=1}^{nm} f_{i,j}^{(S,T)} Mp_j < x \mid \left(\bigcap_{i=1(i \neq S)}^{nmode} \left(\sum_{j=1}^{nm} c_{i,j}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right) \cap \left(\bigcap_{k=1(k \neq T)}^{nhinge} \left(\sum_{j=1}^{nm} g_{i,k}^{(S)} Mp_j < 0 \right) \right) \right] \dots\dots (13)$$

また、この式を用いて、条件付塑性ヒンジの回転量の平均値 $E[\theta_k | \text{mode } S, \text{last } T]$ と二乗平均値 $E[\theta_k^2 | \text{mode } S, \text{last } T]$ は、次式から求めることができる。

$$E[\theta_k | \text{mode } S, \text{last } T] = - \int_{-\infty}^0 F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T) dx$$

$$+ \int_0^{\infty} [1 - F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T)] dx \dots\dots\dots (14)$$

$$E[\theta_k^2 | \text{mode } S, \text{last } T] = - \int_{-\infty}^0 2x F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T) dx$$

$$+ \int_0^{\infty} 2x [1 - F_{\theta_k}(x | \text{mode } S, \text{last } T)] dx \dots\dots\dots (15)$$

なお、条件付水平変位の平均値と二乗平均値も同様の手順から求めることができる。

3.5 構造物全体における要求塑性変形の変動の推定

最後に、全平均値の定理を用いて、崩壊モードとラストヒンジの条件をはずせば、最終的な要求塑性変

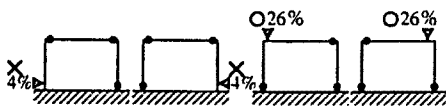


Fig. 8. Occurrence probabilities of last hinges

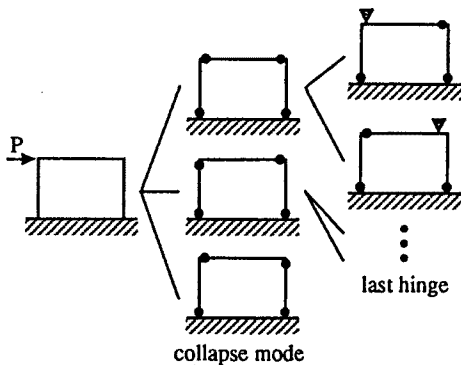


Fig. 9. Conditions associated with collapse mode and last hinge

形の平均値と分散が求められる。ここで、 $nmode$ と $nhinge$ を、モード j における重要崩壊モードと重要塑性ヒンジとして、

$$\sum_{j=1}^{nmode} \sum_{k=1}^{nhinge} P[mode\ j]P[last\ k|mode\ j]=1 \quad \dots\dots\dots (16)$$

となるように基準化しておく。また要求塑性変形の平均値 $E[\theta_i]$ と分散 $Var[\theta_i]$ は、それぞれ以下のようになる。

$$E[\theta_i] = \sum_{j=1}^{nmode} \sum_{k=1}^{nhinge} P[mode\ j]P[last\ k|mode\ j]E[\theta_i|mode\ j, last\ k] \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$E[\theta_i^2] = \sum_{j=1}^{nmode} \sum_{k=1}^{nhinge} P[mode\ j]P[last\ k|mode\ j]E[\theta_i^2|mode\ j, last\ k] \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$Var[\theta_i] = E[\theta_i]^2 - E[\theta_i^2] \quad \dots\dots\dots (19)$$

水平変位の平均値と分散も同様の手順で求められる。

3.6 積事象で表せる確率の評価方法

式(4), (12), (13) は多重積分を伴うため、本論ではこれを一重積分に置き直した近似計算から求める。 n 個の正規確率変数 $X_i (i=1\sim n)$ が負となる事象の積事象の確率については、相関係数が正でかつ全て等しい場合、一重積分で正解を求めることができる¹⁰⁾。しかし、一般には相関係数が全て等しいとは限らず、また、本研究では負の相関もでてくる。ここでは文献^{11,12)}による方法にヒントを得て、事象のグループ化を行うことから近似的な確率計算を実施する。まず、 n 個の事象 $E_i (i=1\sim n)$ の中で、生起確率が一番大きくなる事象 E_{Aa} を探す。そして、この事象と強い正の相関を持つ事象（限界相関係数を予め定め、それを越える相関係数をもつ事象と定義：本論では限界相関係数として0.7を採用）を A_a スロットに入れ、一方、強い負の相関を持つ事象（相関係数が-0.7以下として抽出）を B_a スロットに入れる。いずれのスロットにも入らなかった事象のなかで、既にスロットに入った事象の一つと強い相関を持つものは、対応するスロットのなかに入れる。この操作を経た後もなおスロットから漏れた事象については、そのなかで最も大きな生起確率を有する事象 E_{Ab} を探し、上記と同様の手順を繰り返す。最初にできたグループ（スロット $A_a B_a$ を含む）を a 、次にできたグループを b とした場合、 a と b は、Fig. 10 のように独立なグループであると考えられる。最後に、それぞれのグループ内の A, B スロットに含まれる事象もつ相関係数の平均値を計算し、それをそのグループの代表相関係数とすると、積事象の確率は式(20) で近似的に表せる。ここで、 m は Fig. 10 に示す A, B スロットをもつグループの数、 nAl, nBl は、グループ l にある A, B スロットに入っている事象の数、 ρ_{Al}, ρ_{Bl} はグループ l 内にある A, B スロットの代表相関係数、また $\mu_{Aij}, \sigma_{Aij}, \mu_{Bij}, \sigma_{Bij}$ は、グループ l のなかの A, B スロットに含まれる各事象の平均値と標準偏差である。（詳細は文献13）を参照のこと。）

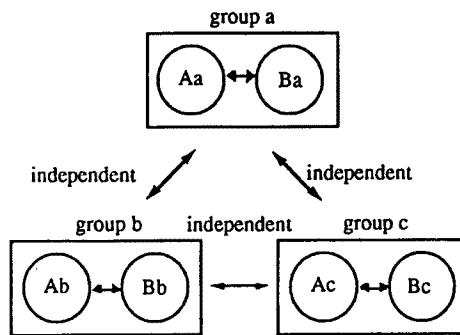


Fig. 10. Procedure for grouping events

$$P \left[\bigcap_{i=1}^n X_i < 0 \right] \cong \prod_{i=1}^m \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{j=1}^{n_{Ai}} \Phi \left(\frac{-\frac{\mu_{Aij}}{\sigma_{Aij}} - \sqrt{\rho_{Ai}} u}{\sqrt{1 - \rho_{Ai}}} \right) \prod_{k=1}^{n_{Bi}} \Phi \left(\frac{-\frac{\mu_{Bij}}{\sigma_{Bij}} + \sqrt{\rho_{Bi}} u}{\sqrt{1 - \rho_{Bi}}} \right) \varphi(u) du \right\} \dots\dots\dots (20)$$

4. 簡便手法を用いた要求塑性変形とばらつきの評価法

3で説明した方法（以下、提案手法と呼ぶ）は、崩壊モードとラストヒンジがそれぞればらつくことを積極的に考慮しているが、幾度も多重積分（またはその近似計算）を要求する。このような多重積分を回避する方法として、崩壊モードとラストヒンジのばらつきを無視し、確定的な解析から得られる崩壊モードとラストヒンジだけを頼りに、要求塑性変形量のばらつきを求める手順（以下、簡便法と呼ぶ）を考えてみる。

まず、3.2で説明した崩壊モード探索法（Compact Procedure）において、全塑性モーメントを確定値と考え、確定的な（ばらつきを一切考えない）崩壊モードを求める。次に、3.3の方法にならい、各塑性ヒンジをラストヒンジと仮定したときの崩壊時の水平変位と塑性ヒンジの回転量を、式(10)、(11)に示すように、全塑性モーメントの線形結合で表し、さらに、Symondsの定理に従って、骨組頂部の水平変位が最大になるラストヒンジを真のラストヒンジとして選ぶ。

崩壊モードとラストヒンジ（いずれも確定値）が決まれば、崩壊時の*i*層の水平変位 $U_i^{(S,T)}$ と塑性ヒンジ*i*の回転量 $\theta_i^{(S,T)}$ は、式(21)、(22)のように表せる。ここでは、*S*を確定崩壊モード、*T*を確定ラストヒンジとしている。

$$U_i^{(S,T)} = \sum_{j=1}^{nm} e_{ij}^{(S,T)} Mp_j \dots\dots\dots (21)$$

$$\theta_i^{(S,T)} = \sum_{j=1}^{nm} f_{ij}^{(S,T)} Mp_j \dots\dots\dots (22)$$

要求塑性変形量の平均値と分散は、本来崩壊モードとラストヒンジの条件付となるが、この方法では、両者を確定値として取り扱うので、以下のような単純な計算から求めることが可能となる。

$$E[\theta_i] = \sum_{j=1}^{nm} e_{ij}^{(S,T)} E[Mp_j] \dots\dots\dots (23)$$

$$Var[\theta_i] = \sum_{j=1}^{nm} e_{ij}^{(S,T)2} Var[Mp_j] \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $E[\theta_i]$ 、 $Var[\theta_i]$ は塑性ヒンジ*i*の回転量の平均値と分散を、 $E[Mp_j]$ 、 $Var[Mp_j]$ は部材*j*の全塑性モーメントの平均値と分散を、 $e_{ij}^{(S,T)}$ は各全塑性モーメントにかかわる確定的な係数を、*nm* は部材数を表す。この解析法の大まかな流れを Fig. 11 に示す。

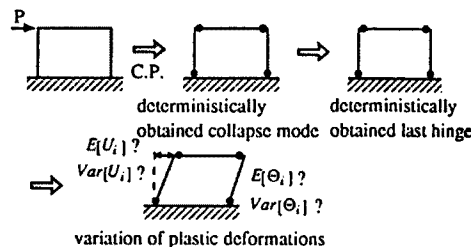


Fig. 11. Analysis flow of simple procedure

5. 鉄骨骨組における要求塑性変形とそのばらつき

5.1 骨組の設定

Fig. 12 に示す 4 層 2 スパン鉄骨骨組を対象に、各層水平変位や各部材への要求塑性変形量と、それらのばらつきを、提案手法、簡便法、モンテカルロシミュレーションから求めた。この骨組は、逆三角形分布に従う静的な地震水平力を仮定し、ベースシアー係数が 0.3 においては降伏型全体崩壊機構を形成するように設計したものであり、選択された部材特性を Table 1 に示す。全塑性モーメントを部材毎に独立な正規確率変数とし、そのばらつきを変動係数にして 10% とした。また、モンテカルロシミュレーションでは、サンプル数を 1,000 個とした。

Table 1. Member strength and stiffness properties of 4-story 2-bay steel frame

Number	Mp (tcm)	I (cm ⁴)
C 1	3100	18100
C 2	3700	23000
C 3	1900	9400
C 4	2200	11500
B 1	2500	20400
B 2	1800	13100
B 3	1000	6000

5.2 解析結果の比較

まず、確定的な弾塑性ヒンジ解析によって得られた結果のうち、崩壊荷重、崩壊モード、塑性ヒンジの形成順序を結果を Fig. 13 に、4 層の層せん断力と建物頂部変位の関係を Fig. 14 に示す。また確定的な極限解析の結果を Fig. 15 に示す。弾塑性解析と全く同じ降伏型崩壊機構を形成し、また 3. 3 に示した手順から得られたラストヒンジは、最上層の梁に形成された塑性ヒンジ (11) であり、これも弾塑性解析結果に一致しているなど、本

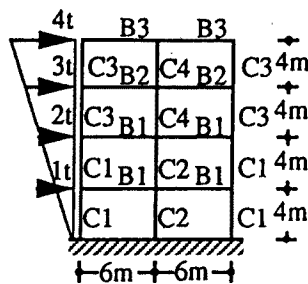


Fig. 12. 4-story 2-bay steel frame

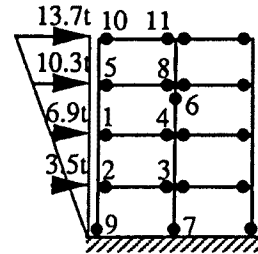


Fig. 13. Results obtained from plastic hinge analysis

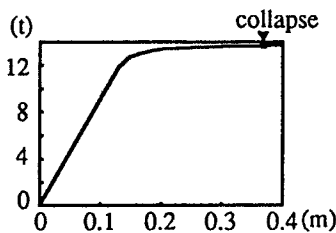


Fig. 14. Force versus deformation relationship obtained from plastic hinge analysis

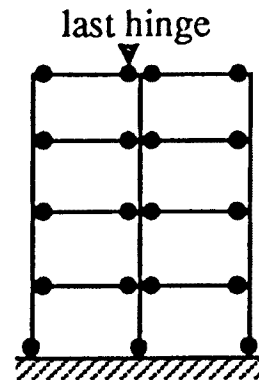


Fig. 15. Results obtained from limit analysis combined with stiffness formulation

論で導いた手順が正しい解を与えていることがわかる。次に、提案手法とモンテカルロシミュレーションから得られた重要崩壊モードとラストヒンジを Fig. 16, Fig. 17 に示す。提案手法では、崩壊モード探索により 54 個の崩壊モードが生成され、Fig. 16 に示す三種類の崩壊モード (mode 1~3) が重要崩壊モードとして選択された。一方モンテカルロシミュレーションでは、この三種類の崩壊モードの合計が 1,000 個のサンプルのうち 956 個を占めており、提案手法は生起する崩壊モードのほとんどを網羅しえたことがわかる。また、提案手法で得られた重要なラストヒンジは合計 5 つで、これもシミュレーションから得られたラストヒンジの分布と良い対応を示している。

次に、回転量の大きな 6 つの塑性ヒンジの回転量と各層水平変位の平均値と標準偏差について、提案手法による解と、簡便法による解と、モンテカルロシミュレーションによる解を比較した。Fig. 18 の横軸は、平均値と標準偏差を、縦軸は塑性ヒンジ番号 (Fig. 19) と層番号を表す。提案手法の平均値がシミュレーション結果よりやや小さい傾向を示しているが、その理由として、提案手法では生起確率の小さな崩壊モードやラストヒンジを無視したので、真の解よりも剛性が高い解 (つまり真の塑性回転角より小さい塑性回転角) が混入されていることが挙げられる。これに対して、

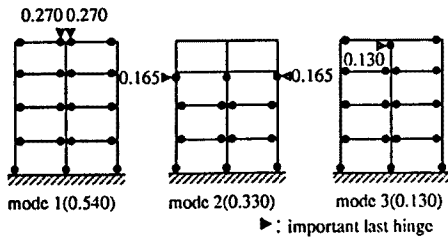


Fig. 16. Important collapse modes and last hinges obtained from proposed procedure

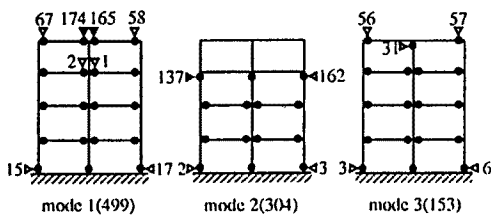


Fig. 17. Important collapse modes and last hinges obtained from Monte-Carlo simulation

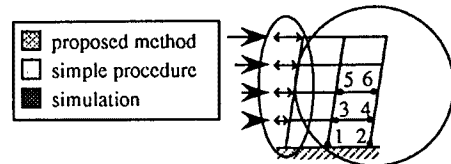
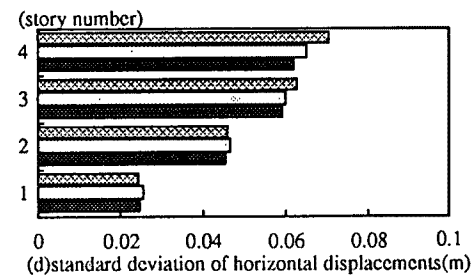
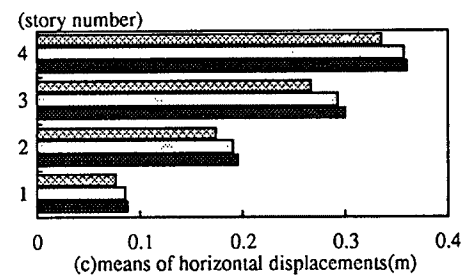
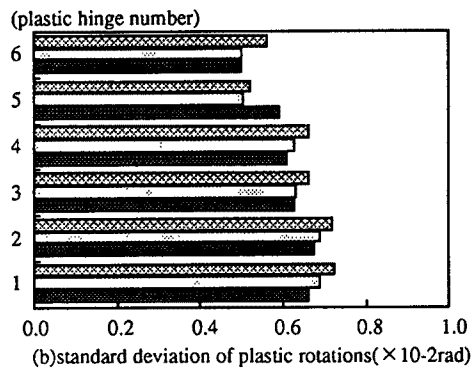
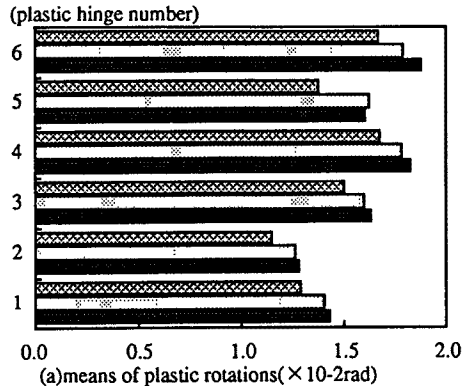


Fig. 18. Means and standard deviations of horizontal displacements and plastic hinge rotations

標準偏差は、提案手法の結果がやや大きくなる傾向にあるが、逆の場合も観察されるなど、その定性的な傾向を解釈するには至らなかった。また、簡易推定法についても、シミュレーションに近い平均値と標準偏差が得られているが、その理由として、この例題の場合、確定的な崩壊モードである全体崩壊が、ばらつきを考慮してもなお多数を占めていたことが挙げられる。以上、若干の相違はあるものの、提案手法と簡便法はともに、要求塑性変形の平均値とばらつきを精度よく（概ね90%以上の精度で）推定していることは明らかである。

5.3 要求塑性変形のばらつき

Fig. 19に、提案手法を用いて求めた、崩壊荷重係数、崩壊時の各層水平変位、10箇所の塑性ヒンジの回転量の平均値とばらつきを示す。図中、棒グラフは平均値を、中央の太線は標準偏差を、右の数字は変動係数を表す。これらの結果、部材耐力の変動係数を10%と仮定したのに対し、崩壊荷重係数の変動係数が3%、崩壊時の水平変位の変動係数が20%~30%、塑性ヒンジの回転量の変動係数が30%~120%と、特に塑性ヒンジの回転量が大きくばらつくことがわかる。また、水平変位は高層になるほど、塑性ヒンジの回転量は平均値が小さいほど、ばらつきが大きくなる傾向が認められた。

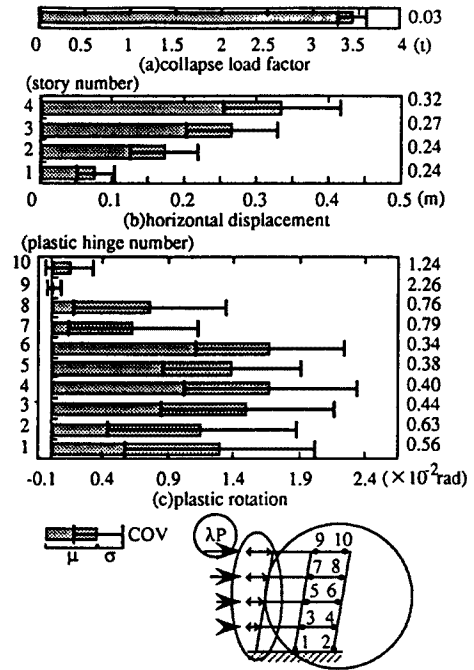


Fig. 19. Variations of collapse load, horizontal displacements, and plastic hinge rotations

5.4 部材耐力間に相関がある場合

同じ断面を有する部材耐力は完全相関で、異なる断面をもつ部材耐力は独立であると仮定して、Fig. 12の骨組を再度解析した。(3で示した提案手法の説明では、部材耐力はすべて独立であると仮定していたが、いくつかの部材が完全相関すると仮定しても、誘導手順の基本は変わらない。) Fig. 20に提案手法から得られた重要崩壊モードとラストヒンジを示す。部材耐力が独立な場合 (Fig. 16) と比較すると、下3層の層崩壊 (mode 2) が増えている。耐力と要求塑性変形のばらつきを示した Fig. 21を、部材耐力

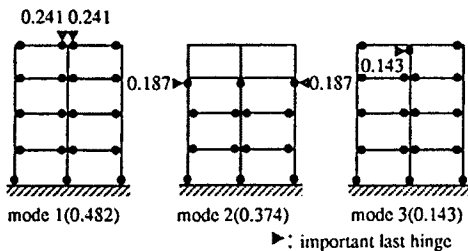


Fig. 20. Important collapse modes and last hinges when correlation is considered for member strength

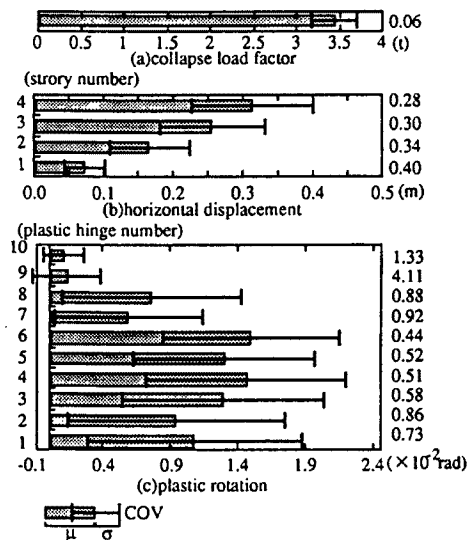


Fig. 21. Variations of collapse load, horizontal displacements, and plastic hinge rotations when correlation is considered for member strength

を部材毎に独立と仮定した場合のばらつきを示す Fig. 19 と比べると、相関を考慮した方が、平均値は小さくなり、その一方でばらつき（標準偏差，変動係数）が大きくなるという傾向を示している。その一因として、最も生起確率の高い全体崩壊モードの生起確率が減り、その分要求塑性変形が小さな崩壊モード（下 3 層の層崩壊（mode 2））の生起確率が増えたことが挙げられる。

6. 結 論

本論から得られた主な知見は以下のとおりである。(1) 部材耐力のばらつきに起因する要求塑性変形の変動を組織的に求めるために、(1) 極限解析を利用した崩壊モードの抽出、(2) 崩壊モードに着目した崩壊機構形成時塑性変形量の推定、(3) ラストヒンジという概念を導入した真の塑性変形量の算出、(4) 重要崩壊モードと重要ラストヒンジの選択による、要求塑性変形の平均値と標準偏差の推定、からなる手順を新しく提案した。(2) 上記の手順のなかで、崩壊モードとラストヒンジを確定的に取り扱う簡便法を提案した。(3) ここで提案した手法の有効性を、モンテカルロシミュレーションから求めた結果と比較することによって実証した。(4) 現実的な断面を有する鉄骨骨組を対象に、提案手法を用いることによって、構成各部材への要求塑性変形量とそのばらつきを求めた。その結果、部材耐力の変動係数を 10% に仮定した場合、崩壊荷重の変動係数は 3 ~ 5%，各層水平変異の変動係数は 20 ~ 50%，塑性ヒンジの回転量の変動係数が 30 ~ 120% と、特に塑性ヒンジの回転量のばらつきが大きくなることを明らかにした。

参 考 文 献

- 1) 鋼構造限界状態設計基準（案）同解説：日本建築学会，1990.
- 2) Nakashima, M., S. Morino and S. Koba : Statistical evaluation of strength of steel beam columns, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 11, pp. 3375 - 3395, 1991.
- 3) Nakashima, M. : Variation and prediction of deformation capacity of steel beam-columns, Proc. 10 th World Conference on Earthquake Engineering, Vol. 5, pp. 4501 - 4507, 1992.
- 4) Nakashima, M. : Variation of ductility capacity of steel beam-columns, Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 120, No. 7, pp. 1941 - 1960, 1994.
- 5) 水谷雄康・中島正愛・西野孝仁・辻 文三：鉄骨筋違材の座屈後耐力に関する統計分析，日本建築学会大会学術講演梗概集，pp. 1461 - 1462, 1992.
- 6) Nakashima, M., T. Nishino, B. Tsuj, and Y. Iwasa : Effect of strain hardening on post-buckling resistance of steel braces, Proc. Third Pacific Structural Steel Conference, pp. 561 - 568, 1992.
- 7) Livesley, R. K. : Matrix method of structural analysis, (2 nd ed) Pergamon Press, 1976.
- 8) Gorman, M. R. : Automatic generation of collapse mode equation, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 107, No. ST7, pp. 1350 - 1354, 1981.
- 9) Symonds, P. S. and B. G. Neal : The interpretation of failure loads in the plastic theory of continuous beams and frames, Journal of Aeronautical Science, Vol. 19, 1952.
- 10) Dunnet, C. W. L. and A. Sobel : Approximations to the probability of integral and certain percentage points of a multivariate analogue of students-distribution, Bio-metrika, Vol. 42, pp. 258 - 260.
- 11) Thoft-Christensen, P. and J. D. Sorensen : Reliability of structural systems with correlated elements, Applied Mathematical Modelling, Vol. 6, pp. 75 - 82, 1982.

- 12) Ma, H. F. and A. H-S. Ang : Reliability analysis of redundant ductile structural systems, Civil Engineering Studies, Structural Research Series, No. 494, University of Illinois, Urbana, 1981.
- 13) 加登美喜子：信頼性設計のための要求塑性変形とその変動の定量化手法，神戸大学大学院修士論文，1995.