

開水路流れ横流入部の非定常渦運動に関する数値解析

細田 尚・木村 一郎・村本 嘉雄・今岡 安則

NUMERICAL ANALYSIS OF VORTEX FORMATION PROCESSES IN OPEN CHANNEL FLOWS WITH A SIDE DISCHARGE

By *Takashi* HOSODA, *Ichiro* KIMURA, *Yoshio* MURAMOTO and *Yasunori* IMAOKA

Synopsis

The side discharge into a river have an important effect on the main flow structure, the river bed configuration and the local scour near the opposite bank. The fundamental characteristics of open channel flows with a side discharge is investigated by means of the laboratory test and the numerical simulation, focussing on the relation between the temporal velocity variations and the vortex formation processes in the downstream of a side discharge. The plane 2-D model is firstly applied to reproduce the flow under the condition of the laboratory tests, indicating the availability of the numerical model to some extent. In view of the model refinement, the 3-D model with turbulence model is then tested for the phenomena, tuning the model constant. It will be shown that the vortex due to the shear layer instability can be reproduced by the non-linear $k-\epsilon$ model including the effect of the strain parameter.

1. はじめに

本研究は、水力発電所放水口近傍、河川合流部など、河川横流入部の流れを対象に、流入水の影響を評価するために、流れの基本的特性を詳細に再現できる数値解析モデルについて考察したものである。横流入部近傍の流れは、流入部下流側に生じる平面的なせん断不安定に起因する顕著な渦運動（鉛直軸回り）で特徴づけられる。そこで本研究では、まず流れと渦運動を平面2次元モデルを用いて解析し、水理実験結果と比較することにより数値解析モデルの適用性を検証する。とくに、時間平均流速分布だけでなく、渦の発生、発達および合体により生じる流速変動の特性について考察する。

次に、流れのより詳細な構造を評価するための3次元モデルについて考える。すなわち、3次元解析を用いて渦運動の解析を行う場合、乱流モデルの選定に留意する必要があるが、上記の平面2次元解析である程度再現可能なせん断不安定の渦を、少なくとも定性的に解析できるモデル方程式の同定を試みる。本研究ではモデル方程式として $k-\epsilon$ モデルを基礎とするが、たとえばカルマン渦に対して標準型 $k-\epsilon$ モデルの再現性が非常に悪いことが知られている^{1,2)}。せん断不安定渦に対しても同様のことが考えられ、現象を再現可能なモデル方程式を同定する必要がある。本研究ではカルマン渦に関する従来知見を基に、構成方程式の非線形性を考慮し、さらに渦動粘性係数のストレイン・パラメータ依存性を導入した基礎式^{2,3)}を用いて数値解析を行い、モデル定数などの計算結果に及ぼす影響を考察する。

2. 平面2次元解析と実験結果の比較

横流入水が河川に及ぼす影響を評価するための基礎資料を得るとともに、数値解析モデルを検証するために行われた水理実験について概要を示す。次に、実験条件の下で行われた数値解析結果と実験結果を比較することにより数値解析モデルの適合性を検証する。

2.1 水理実験の概要

実験は、中国電力技術研究センターに設置された、幅1m、長さ8.25m、路床勾配6/1000の長方形断面水路で行われた。この主水路に幅Wの流入水路を合流角度αで設置し、流入水路と主水路の流量を各々Q_{in}、Qとして通水した。さらに、染料などで流れを可視化して流況を把握するとともに、水深方向に2点で電磁流速計を用いて流速分布を計測した。

水路の概要と記号の説明を Fig. 1 に、実験条件を Table 1 に示した。また、Photo 1 は流れの可視化写真であり、これを見ると横流入部下流で発生した渦が合体し、発達しながら流下していく様子が理解される。

Table 1. Hydraulic variables of laboratory tests

	B (m)	W (m)	B/W	α (deg)	Q (l/s)	Q _{in} (l/s)	h _e (cm)	sin θ	Re
Run A-0	1.0	0.2	5.0	40	1.98	8.89	13.11	6 / 1000	8300
Run A-1	1.0	0.6	1.67	40	1.98	8.89	13.11	6 / 1000	8300
Run A-2	1.0	0.8	1.25	40	1.98	8.89	13.17	6 / 1000	8300
Run A-3	1.0	1.2	0.83	40	1.98	8.89	13.11	6 / 1000	8300
Run B-0	1.0	0.6	1.67	90	1.98	8.89	13.04	6 / 1000	8300
Run B-1	1.0	0.6	1.67	75	1.98	8.89	13.02	6 / 1000	8300
Run B-2	1.0	0.6	1.67	25	1.98	8.89	13.0	6 / 1000	8300
Run C-0	1.0	0.6	1.67	40	3.95	6.92	13.10	6 / 1000	8300
Run C-1	1.0	0.6	1.67	40	5.93	4.94	13.09	6 / 1000	8300
Run C-2	1.0	0.6	1.67	40	6.92	3.95	13.13	6 / 1000	8300
Run C-3	1.0	0.6	1.67	40	8.89	2.96	13.25	6 / 1000	9060

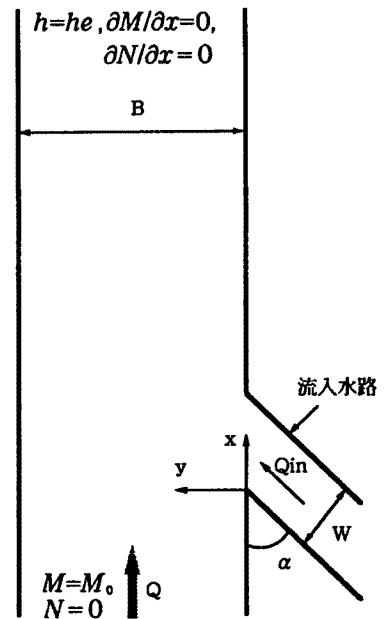


Fig. 1. Schematic illustration of laboratory test and coordinate system

2.2 数値解析の基礎式と計算法

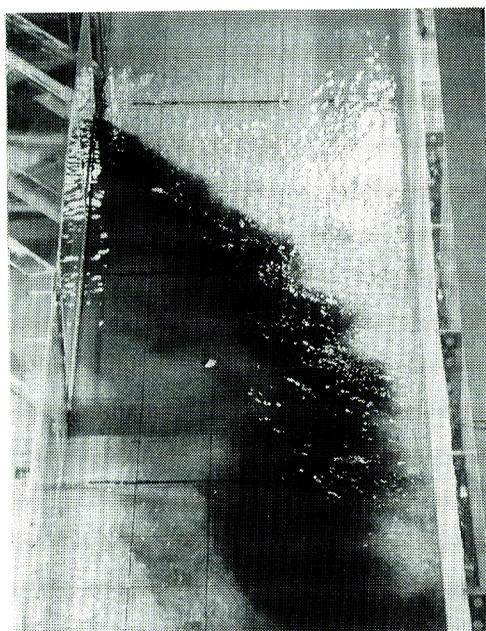
Photo 1 に示したせん断不安定渦の発生・発達を伴う非定常流を、平面2次元モデルを用いて再現することを試みる。静水圧分布を仮定し、水深方向に積分することによって導かれる通常の平面2次元流れの基礎式を示せば次のようになる。

[連続式]

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

[運動方程式]

$$\frac{\partial M}{\partial t} + \frac{\partial \beta u M}{\partial x} + \frac{\partial \beta v M}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial x} = gh \sin \theta - \frac{f}{2} u \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{\partial -\overline{u'^2} h}{\partial x} + \frac{\partial -\overline{u'v'} h}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right) \dots\dots\dots (2)$$



(a) Small vortices near the outlet of side discharge



(b) Large vortices after pairing and merging

Photo 1. Flow visualization by dye for Run A-0

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \beta u N}{\partial x} + \frac{\partial \beta v N}{\partial y} + gh \frac{\partial h}{\partial y} = -\frac{f}{2} v \sqrt{u^2 + v^2} + \frac{\partial -\overline{u'v'h}}{\partial x} + \frac{\partial -\overline{v'^2}h}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(h \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(h \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right) \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 h ：水深、 (u, v) ：水深平均流速の (x, y) 方向成分、 (M, N) ：各々 $M=hu, N=hv$ で定義される流量フラックス、 (u', v') ：変動流速の (x, y) 方向成分、 ν ：動粘性係数、 θ ：水路床勾配、 f ：摩擦損失係数でレイノルズ数の関数、 β ：運動量係数で層流の場合 1.2, 乱流で 1.0, (x, y) ：空間座標、 t ：時間を表わす。水深平均レイノルズ応力テンソルの成分 $-\overline{u'_i u'_j}$ は次式で評価した。

$$-\overline{u'_i u'_j} = D_h \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, D_h = \alpha h u_* \dots \dots \dots (4)$$

ここに、 u_* ：摩擦速度 ($=\sqrt{f(u^2+v^2)/2}$)、 k ：水深平均乱れエネルギー、 α ：係数である。また、 i, j はともに 1, 2 の値をとり、1 は x 方向、2 は y 方向を意味する。 $(k$ は瀬津の実験式⁴⁾を水深積分して得られる $2.07 \cdot u_*^2$ で評価した。)

上記の基礎式を用いて、複断面水路、植生境界付近、開水路急拡部、主流・死水域境界付近の流れを対象に、せん断不安定渦の解析が行われており、基礎式の適用性はある程度検証されている⁵⁾。

数値計算法として有限体積法を用いる。時間積分には 2 次精度のアダムス・バッシュフォース法を用い、運動方程式中の移流項の離散化には 2 次元の QUICK スキームを用いた⁶⁾。

2.3 計算の条件

数値計算は水理実験の条件に合わせて行われた。計算の境界条件および初期条件は次のように設定した。

境界条件として、Fig. 1 に示したように上流端で $M = \text{単位幅流量}$ と $N = 0$ 、下流端で実験の水深、 $\partial M / \partial x = 0$ および $\partial N / \partial x = 0$ を与えた。また、壁面に接する M を計算するとき、壁面せん断応力を対数則で評価した。横流入部では、 $N = \text{流入単位幅流量}$ (N_{in})、 $M = N_{in} / \tan \alpha$ とした。

初期条件として、全領域で $M = \text{上流端単位幅流量}$ 、 $N = 0$ 、および水位が水平となるような水深を与えた。この初期状態から横流入を開始し、流速変動が定常過程と判断されるまで計算を繰り返した。計算の格子間隔および時間間隔を Table 2 に示した。

Table 2. Grid size and time increment for numerical simulations

Δx (cm)	Δy (cm)	Δt (sec)
5.0	2.0	0.005

2.4 計算結果と実験結果の考察

Run A-0 の流れの様子を流速ベクトル図として Fig. 2 に示した。Fig. 2 には、渦動粘性係数のパラメータ α を 0.3 とした結果を示したが、Photo 1 に示したような渦運動の発生、発達と流下が再現されている。しかし、Photo 1 (a) に見られる流入直下流の小規模な渦が再現されておらず、より小さい格子間隔で計算する必要性も指摘される。

Fig. 3 には、Fig. 2 中に示した点 A の流速変動に関する実験結果および計算結果を示した。計算結果を見ると、 $\alpha = 0.1$ の方が 0.3 よりも実験結果の流速変動をよく再現しているように思われる。流速変動には卓越した周期が見られず、渦の合体や吸収によって 5 秒程度から数 10 秒周期の変動が存在する。これを検討するために、Fig. 4 に $\alpha = 0.1$ の計算結果と実験結果のスペクトルを示した。どちらの図にも、いくつ

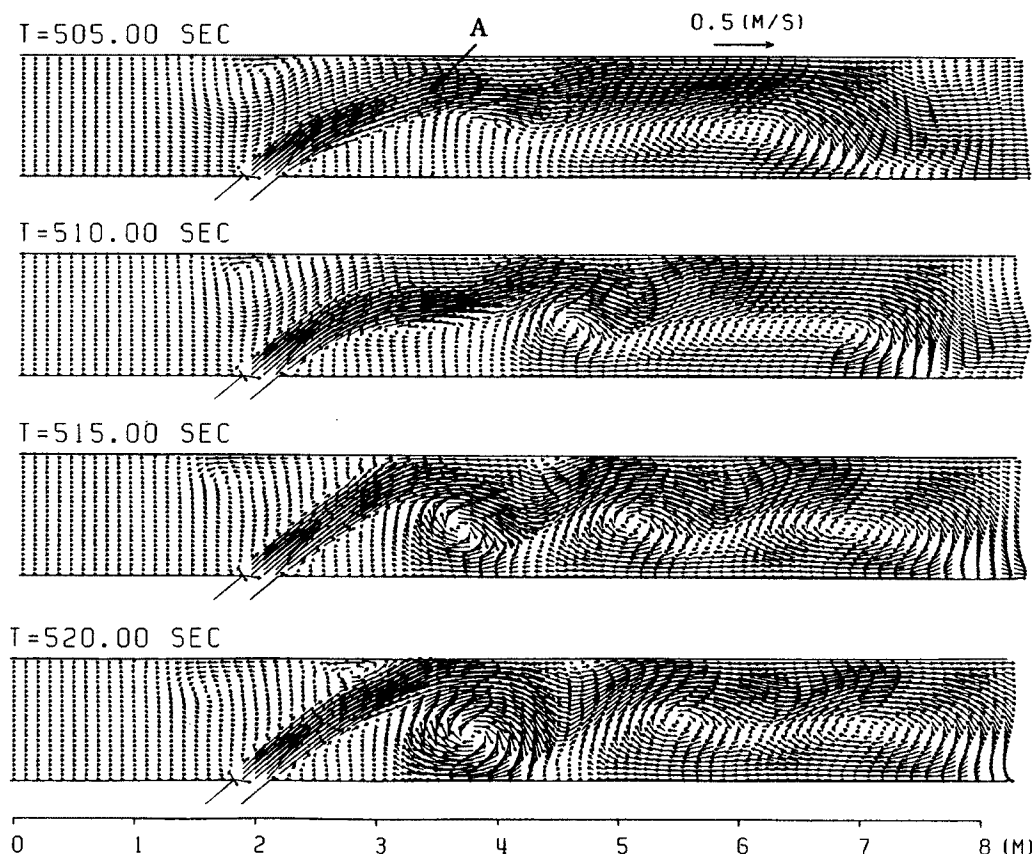
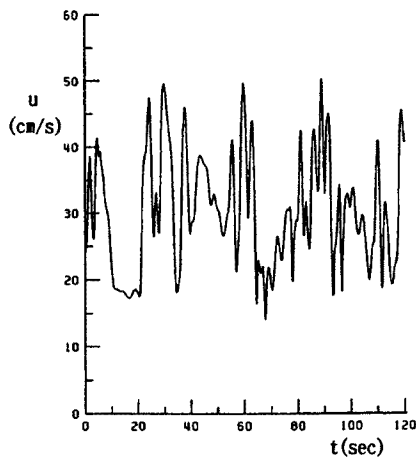
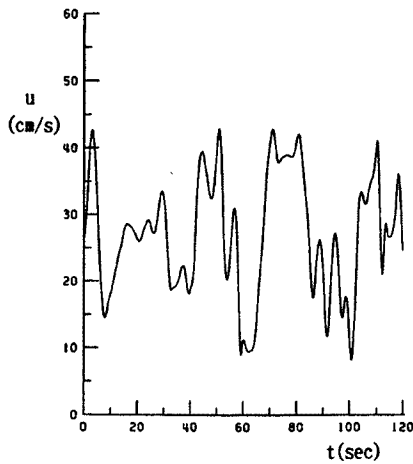


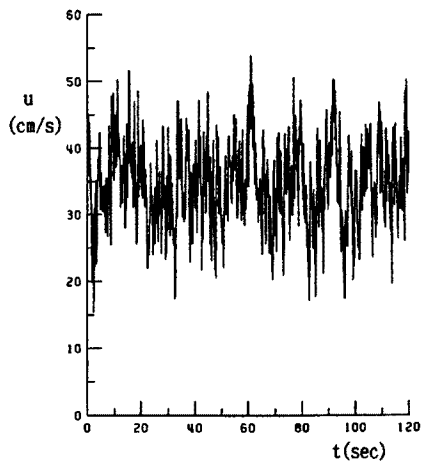
Fig. 2. Calculated results of vortex formation processes in Run A-0



(a) Cal. ($\alpha = 0.1$)

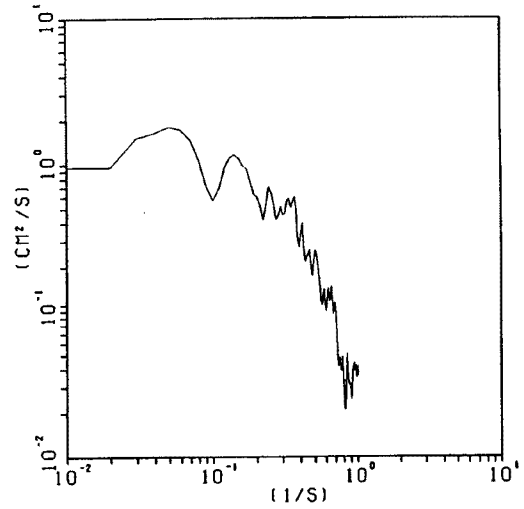


(b) Cal. ($\alpha = 0.3$)

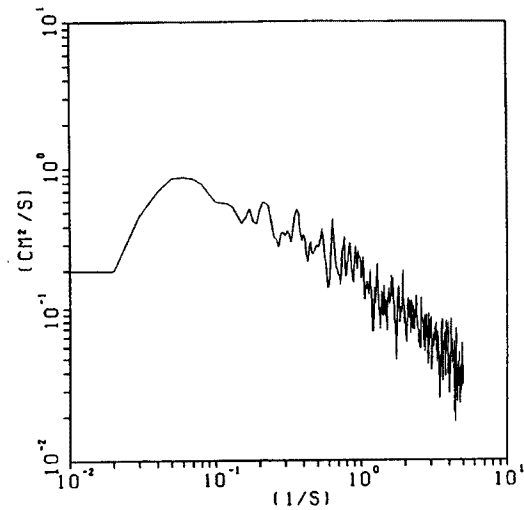


(c) Exp.

Fig. 3. Temporal velocity variations in the longitudinal direction (Run A-0, Point A)



(a) Cal. ($\alpha = 0.1$)



(b) Exp.

Fig. 4. Spectrum of temporal velocity variations in the longitudinal direction

かの小さなスペクトル・ピークが存在しているように見えるが、流速変動の周期を特定できるほど明確でなく、上述したように渦の合体、吸収によって広範囲の周期の流速変動が生じていると考えられる。長周期の変動に着目すれば、変動の最大、最小値および振幅の計算結果と実験結果はほぼ一致している。また、流速変動の振幅はかなり大きく、平均流速を用いて河床変動の解析を行う場合と、渦運動を再現した非定常流解析を同時に行う場合で結果にかなりの相違が生じる可能性も指摘される。

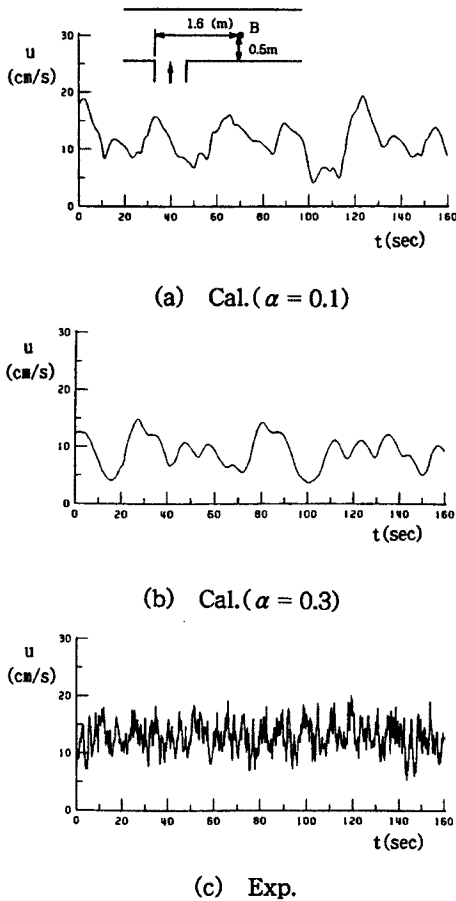


Fig. 5. Temporal velocity variations in the longitudinal direction (Run B-0, Point B)

Fig. 5 には、同様に Run B-0 の流速変動を示した。この場合、 $\alpha = 0.1$ の結果を見ても短周期の流速変動の振幅が実験結果よりかなり小さく、小規模の渦に対する解像度が不足していると考えられる。このように、流速変動を詳細に再現するためには、より小さい格子間隔を用いて計算する必要性が指摘されるが、大規模渦運動の流下過程および長周期変動の最大、最小値はほぼ再現され、解析モデルの有用性が確認される。

Fig. 6 には Run A-0 の時間平均流速分布に関する実験結果と計算結果を示した。流入部近傍の $x = 60$ (cm) の分布はほぼ一致しているが、 $x = 200$ (cm) の分布形は $\alpha = 0.1, 0.3$ ともに若干の差異が見られ、側壁近傍の流速分布を再現できるように渦動粘性係数に減衰関数を乗じるなどの改良が必要と考えられる。

3. 3次元解析モデルに関する考察

渦運動を伴う流れは、渦の近傍で局所的に強い3次元構造を有しており、側壁近傍の局所洗掘などを精度良く評価するためには、流れの非定常3次元構造を予測する必要がある。そこで本研究では、2. の平面2次元解析で再現される渦運動を、少なくとも定性的に予測できる3次元モデルの同定を行う。

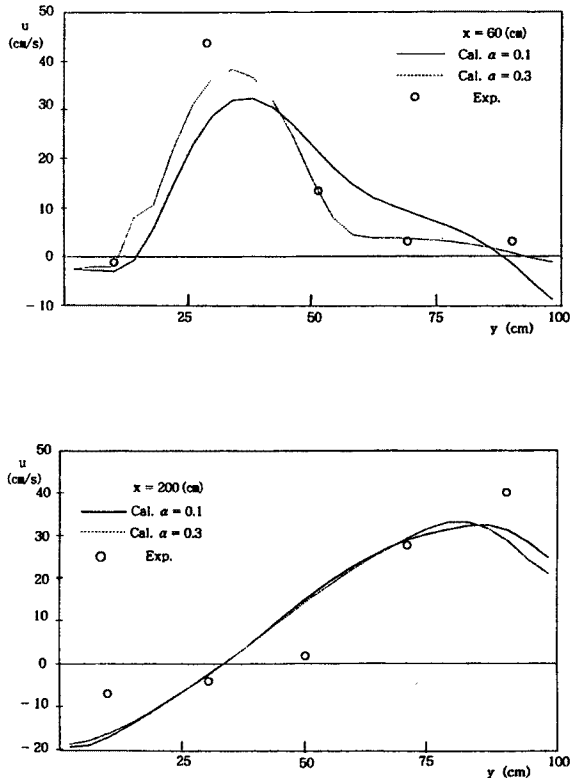


Fig. 6. Transverse distributions of time-averaged velocity in the longitudinal direction (Run A-0)

Fig. 5 には、同様に Run B-0 の流速変動を示した。この場合、 $\alpha = 0.1$ の結果を見ても短周期の流速変動の振幅が実験結果よりかなり小さく、小規模の渦に対する解像度が不足

3.1 非線形 $k-\epsilon$ モデルの基礎式

3次元解析を用いて渦運動の解析を行う場合、乱流モデルの選定に留意する必要がある。たとえば、カルマン渦に対して標準型 $k-\epsilon$ モデルの適用性が非常に悪いことが知られており、モデルの改良が行われている^{1,2)}。本研究では、標準型 $k-\epsilon$ モデルを基本として、構成則の非線形性を考慮した非線形 $k-\epsilon$ モデルを用いた解析を試みる。非線形 $k-\epsilon$ モデルの導出過程にはいくつかの方法が提案されてきたが⁷⁻¹⁰⁾、モデル方程式の表示は類似であり、本研究では次のようなレイノルズ応力の表示を用いる。

$$-\overline{u_i' u_j'} = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} - c_\mu \frac{k^3}{\epsilon^2} \sum_{\beta=1}^3 c_\beta \left(S_{\beta ij} - \frac{1}{3} S_{\beta \alpha \alpha} \delta_{ij} \right)$$

$$S_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, S_{1ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \frac{\partial u_j}{\partial x_r}, S_{2ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_r} + \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_r} \right), S_{3ij} = \frac{\partial u_r}{\partial x_i} \frac{\partial u_r}{\partial x_j} \dots \dots \dots (5)$$

基礎式は、3次元の連続式とレイノルズ方程式、 $k-\epsilon$ 方程式で構成され、静水圧分布を仮定せず鉛直方向の運動方程式も計算する。用いた基礎式を総和の規約を用いて書き表せば次のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \dots \dots \dots (6)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial -\overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \dots \dots \dots (7)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_j k}{\partial x_j} = -\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{D}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial^2 k}{\partial x_j^2} - \epsilon \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_j \epsilon}{\partial x_j} = -c_{\epsilon_1} \frac{\epsilon}{k} \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \left(\frac{D}{\sigma_\epsilon} + \nu \right) \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial x_j^2} - c_{\epsilon_2} \frac{\epsilon^2}{k} \dots \dots \dots (9)$$

ここに、 k ：乱れエネルギー、 ϵ ：乱れエネルギー散逸率である。また、 $k-\epsilon$ 定数は Table 3 に示した慣用の値を用いた。

Table 3. Constants of $k-\epsilon$ model

C_{ϵ_1}	C_{ϵ_2}	σ_k	σ_ϵ
1.44	1.92	1.0	1.3

3.2 計算の条件と結果の考察

計算の対象とした流れは、Fig. 7 に示したように幅 1 (m)、長さ 8.25 (m)、路床勾配が水平の長方形断面水路に、角度 90° の横流入を伴う流れである。前述の水理実験の条件の下で解析しない理由は、実験水路の勾配が 6 / 1000 と大きいため上流水深と下流水深の差が大きく、本研究で用いる直角座標系に適合しないため、今後水深方向に相対水深座標を用いる等、計算法の改良を行う必要がある。

計算法は平面 2次元解析と同様に有限体積法（移流項には 3D QUICK・スキームを適用）であり、Fig. 8 に示した水量量の定義位置に従い、基礎式を内部および表層のコントロール・ボリュームで積分することにより、離散式が導かれる¹¹⁾。また、圧力は時間ステップ毎に連続式を満たすように収束計算を用いて

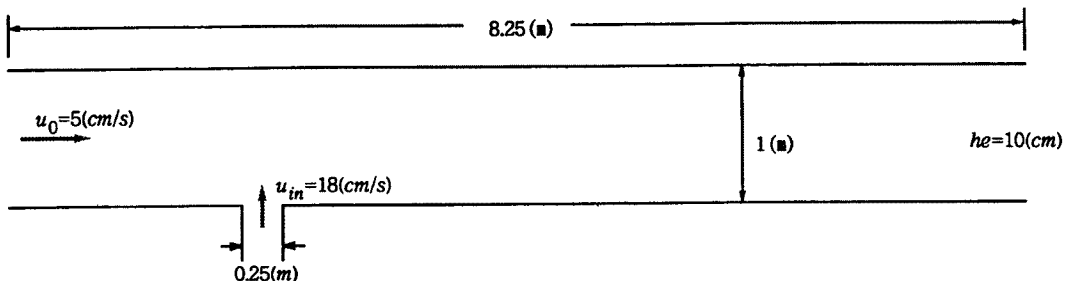


Fig. 7. Schematic illustrations of boundary conditions for 3-D numerical simulations

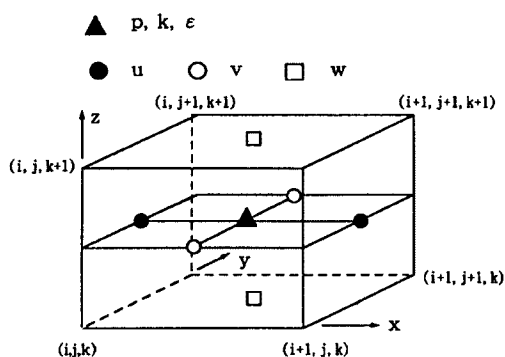


Fig. 8. Arrangement of hydraulic variables

求められる。

初期条件, 境界条件は平面2次元解析と同様であり, k, ϵ についての壁面境界条件として wall function 法を用いた。格子間隔は, 流れ (x) 方向, 横 (y) 方向, 鉛直 (z) 方向それぞれ, $\Delta x=5(\text{cm}), \Delta y=2(\text{cm}), \Delta z=1(\text{cm})$ であり, 鉛直方向には10層に分割されている。また, 時間間隔は $\Delta t=0.004(\text{sec})$ である。

まず, 3次元解析を行う前に平面2次元解析を行い, 渦運動が再現されているのを確認した (Fig. 9)。次に, 標準型 $k-\epsilon$ モデルを用いた3次元計算の結果を Fig. 10 に示したが, 渦運動は全く再現されていない。

そこで, 非線形 $k-\epsilon$ モデルによる解析の前に, 本研究で用いた計算法の渦運動解析への適用性を確かめるために, N·S 方程式 (ただし, 粘性係数は分子粘性の20倍の 20ν とした。) を用いて計算した結果が Fig. 11 である。より長時間の計算が必要ではあるが, 渦の発振が見られ, 本研究の数値解析法で渦運動が再現できることが確認される。また, 横断面内の流速分布を Fig. 12 に示した。これを見ると渦の周辺部で上昇流, 中心部で下降流が見られ, 渦運動の3次元構造を示している。

次に, (5)式の定数を $c_1=0.4, c_2=0, c_3=-0.15$ とした非線形 $k-\epsilon$ モデルの計算結果を Fig. 13 に示した。標準型 $k-\epsilon$ モデルの結果と比較して循環が下流方向に引き伸ばされ形がかなり変化し, 平面2次元モデルの結果に近づいているが, 渦の発振にはいたっていない。そこで, さらにモデルを改良するために, (10)式で定義されるストレイン・パラメータを導入する。

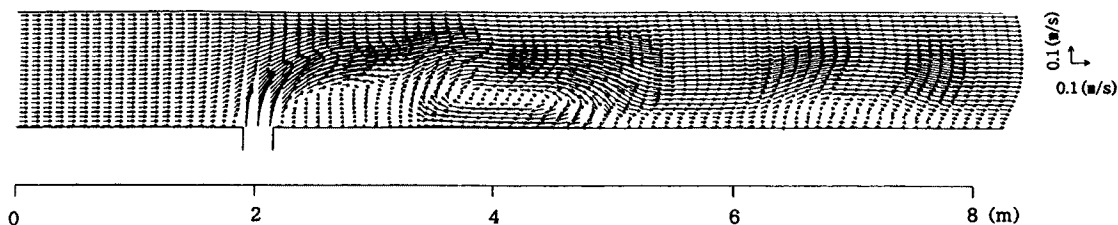


Fig. 9. Plane flow pattern of plane 2-D model ($\alpha=0.3$)

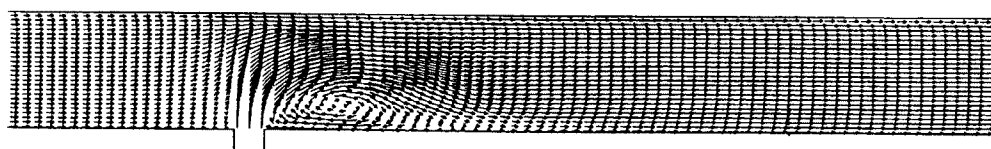


Fig. 10. Flow pattern of 3-D standard $k-\epsilon$ model (5th layer from the surface layer)

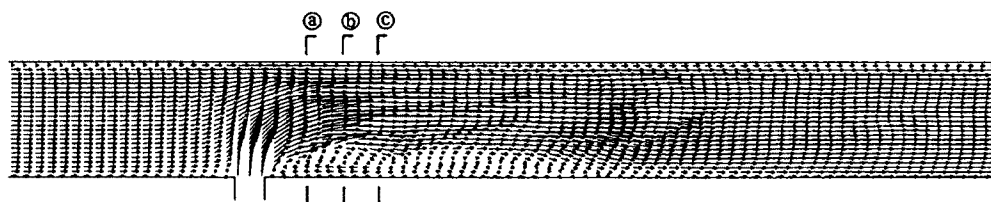


Fig. 11. Flow pattern of N·S equation with 20ν (5th layer from the surface layer)

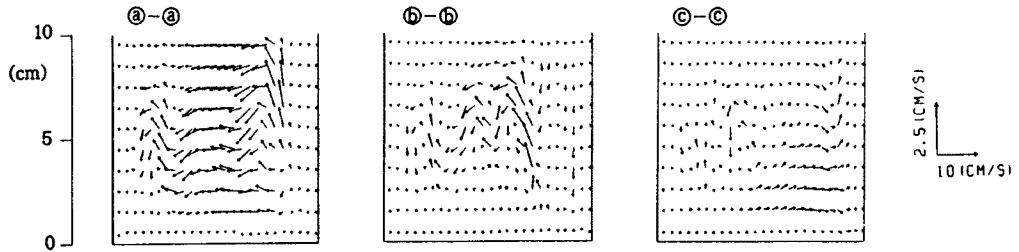


Fig. 12. Cross sectional velocity distributions seen in calculated result of N · S equation with 20ν

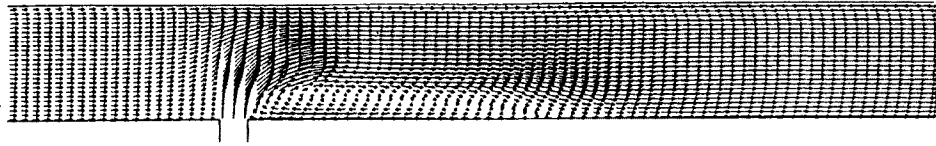


Fig. 13. Flow pattern of 3-D non-linear $k-\epsilon$ model ($c_1=0.4, c_2=0, c_3=-0.15$, 5 th layer from the surface layer)

$$S = \frac{k}{\epsilon} \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij}^2} \dots\dots\dots (10)$$

渦動粘性係数のストレイン・パラメータ依存性については、代数応力モデルの基礎式を用いた理論的研究⁹⁾およびDNSデータに基づいた検証¹⁰⁾があり、本研究では両者の関係を表す関数形としてKato・Launder²⁾がカルマン渦の再現に用いた(11)式を用いて計算を試みる。

$$c_\mu(S) = \min\left[0.09, \frac{A_2}{1 + A_1(\min(20,S))^{1.5}}\right] \dots\dots\dots (11)$$

上式中の A_1, A_2 の値を Table 4 に示したように変化させて計算を試みた。それぞれの場合の c_μ と S の関係を Fig. 14 に示した。Run S-1 は Kato・Launder が用いている値である。Fig. 15 および Fig. 16 は、Run S-1 と S-4 の計算結果であって、これを見ると、Run S-1 では循環が Fig. 13 に比べて若干下流側に引き伸ばされているにとどまっているが、Run S-4 では渦の発振が見られる。このように、 $k-\epsilon$ モデルを用いてせん断不安定の渦を再現するためには、構成則に非線形効果を導入するだけでなく、渦動粘性係数にストレイン・パラメータあるいは回転パラメータなどの効果を考慮し、その関数形にも留意する必要があることが分かる。

Table 4. Constants used in the relation between c_μ and strain parameter

	A_1	A_2
Run S-1	0.35	0.3
Run S-2	0.35	0.2
Run S-3	0.35	0.1
Run S-4	1.0	0.3
Run S-5	0.7	0.3

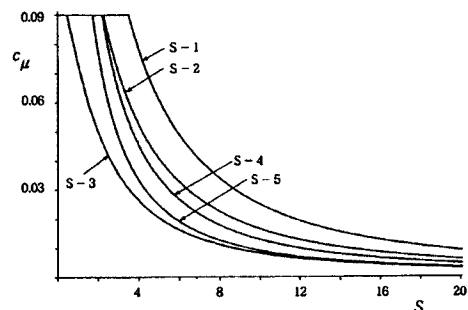


Fig. 14. Relation between c_μ and strain parameter S

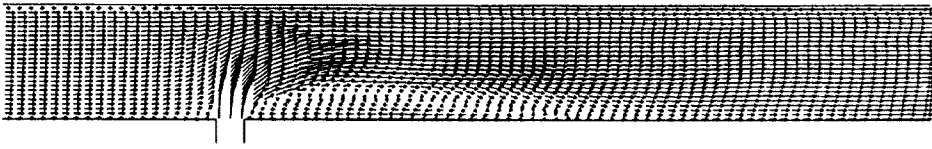


Fig. 15. Flow pattern of Run S-1 (5th layer from the surface layer)

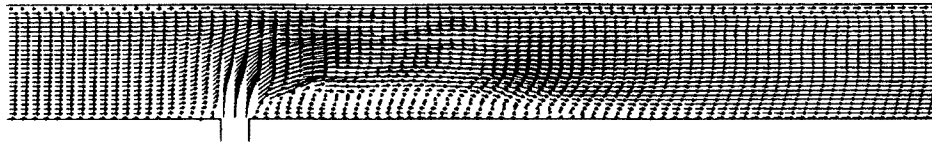


Fig. 16. Flow pattern of Run S-4 (5th layer from the surface layer)

4. おわりに

本研究は、河川横流入部の流れを対象に、せん断不安定渦を伴う流れの基本的特性を詳細に再現できる数値解析モデルについて考察したものである。まず、水理実験の概要を説明し、平面2次元モデルを用いて実験の再現計算を行った。その結果、より細かな格子間隔を用いる必要性、および側壁近傍で対数則が再現されるように渦動粘性係数に減衰関数を乗じることが指摘されたが、本数値解析モデルを用いてせん断不安定渦を伴う流速変動がほぼ再現できることが分かった。次に、流れのより詳細な構造を予測するために、3次元モデルの考察を行った。本研究では、平面2次元解析で再現できる渦運動を、少なくとも定性的に予測できる3次元モデルの同定を主目的とし、非線形 $k-\epsilon$ モデルを基本として渦動粘性係数にストレイン・パラメータの効果を考慮することによって、計算結果に少なくとも定性的にはせん断不安定の渦が発生することを指摘した。ただし、 $k-\epsilon$ モデルを用いたときの渦の発振に対する解像度の影響も指摘されており¹²⁾、より詳細な検討が必要と考えられる。

最後に、本研究を行うに当たってご助力を頂いた京都大学大学院・櫻井寿之氏に感謝いたします。

参考文献

- 1) Franke, R. and Rodi, W. : Calculation of vortex shedding past a square cylinder with various turbulence models, *Turbulent Shear Flows* 8, 189-204, Springer-Verlag, 1992.
- 2) Kato, M. and Launder, B.E. : The modelling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders, *Proc. 9th Symp. on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Vol. 1*, 10-4-1 ~ 10-4-6, 1993.
- 3) Cotton, M. A. and Ismael, J. O. : Development of a two-equation turbulence model with reference to a strain parameter, *Proc. 5th Symp. on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements, Paris*, 117-124, 1993.
- 4) Nezu, I. and Nakagawa, H. : *Turbulence in open channel flows*, IAHR Monograph, Balkema, 1993.
- 5) 木村一郎・細田 尚・友近文志 : 開水路流れ混合層におけるせん断不安定波動の空間的増幅特性, *土木学会論文集 No. 509/II-30*, 99-110, 1995.
- 6) Leonard, B. P., Leschziner, M. A. and McGuirk, J. : Third-order finite-difference method for

- steady two-dimensional convection, In Numerical Method in Laminar and Turbulent Flow, Wiley, 807 – 819, 1978.
- 7) Nishijima, S. and Yoshizawa, A. : Turbulent channel and Qouette flows using an anisotropic $k-\varepsilon$ model, AIAA Journal, 25-3, 414 – 420, 1987.
 - 8) Rubinstein, R. and Barton, J. M. : Nonlinear Reynolds stress models and renormalization group, Phys. Fluids A2, 1472 – 1476, 1990.
 - 9) Gatski, T. B. and Speziale, C. G. : On explicit algebraic stress models for complex turbulent flows, J. Fluid Mech., Vol. 254, 59 – 78, 1993.
 - 10) 明 賢國・笠木伸英・小林敏雄：乱れの壁面漸近条件を考慮した非等方 $k-\varepsilon$ 乱流モデルの提案, 日本機械学会論文集 (B 編), 56 巻 531 号, 3298 – 3304, 1990.
 - 11) 例えば, 岩佐義朗・細田 尚・平岡順次・岡川一義：無巻水路トンネル内の流れの抵抗則について, 京都大学防災研究所年報, 第 34 号 B-2, 337 – 353, 1991.
 - 12) Durbin, P. A. : Separated flow computations with the $k-\varepsilon-v^2$ model, AIAA Journal, Vol. 33, No. 4, 659 – 664, 1995.