

軸対称渦に関する数値実験

光田 寧・石川 裕彦・上原 真一

Synopsis

As the first step of the investigation of the wind distribution in the planetary boundary layer near and within the typhoon eye, a numerical model for the axi-symmetric vortex was coded. The model was applied to tornado like axi-symmetric vortices generated in the laboratory vortex simulator of Severe Storm Laboratory. The numerical model successfully reproduced the major features of the laboratory vortex, without quantitative details. The major deficiency of the model is that the turbulence intensity must be specified a priori. If the well defined eddy viscosity is given, however, the model may produce reliable results.

1. はじめに

台風ともなう強風災害を考える際には、実際に地上付近で吹く風の分布を明かにしておくことが必要であるが、未だに未解決の問題が多い。台風通過時の気象資料を解析した結果、台風の傾度風の最大風速半径に比べて、観測される地上風の最大風速半径のほうが明らかに小さいことがわかっている¹⁾。この現象は、熱帯低気圧の最大風速域よりも内側で Super Gradient Wind が観測されたということ^{2),3),4)}からも考えられることである。また、竜巻の渦が地表付近で細くなっているのも、同一の現象と考えられる。

台風域内の境界層では、地表付近の境界層内を渦の中心の低圧部に向かって吹き込む気流は、気圧傾度力、遠心力、コリオリ力と、地表面の影響で生じる摩擦力の力の平衡で生じるものである。したがって、地表面摩擦が渦の構造に与える影響を調べることにより、台風域内の地上風の分布を解明できると考えられる。

本論文では、台風渦の地表風速分布を調べるのに先立ち、台風と同様に2セル型の渦構造をしている竜巻渦について、文字他^{5),6),7)}が暴風雨災害部門にある回転風洞を用いて得た実験結果を参考にして、軸対称渦の数値シミュレーションを実施した結果について述べる。

2. モデル

2.1 基礎方程式と数値解法

用いるモデルは、Rotunno^{8),9)}が、Ward¹⁰⁾の tornado 渦の室内実験を数値シミュレーションするのに用いたものと同じであり、円筒座標系 (r, θ, z) における軸対称な非圧縮粘性流体の運動方程式、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = \nu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (rv)}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right] + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

と連続式、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

を支配方程式とする。ここで (u, v, w) は流速の動径成分，接線成分，鉛直成分， p は圧力， ν は粘性係数である。

ここで、

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad \dot{w} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \dots\dots\dots (5)$$

で定義される u, w に関する流線関数 Ψ ，渦度の接線成分、

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r}, \dots\dots\dots (6)$$

および循環 ($\Gamma = rv$) を用いて(1)式から(4)式を変形すると、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} - J \left(\Psi, \frac{\eta}{r} \right) = \frac{1}{r^3} \frac{\partial \Gamma^2}{\partial z} + \nu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (\eta r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} \right] \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} - \frac{1}{r} J(\Psi, \Gamma) = \nu \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Gamma}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial z^2} \right] \dots\dots\dots (8)$$

$$\eta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) \dots\dots\dots (9)$$

を得る。ここで、 J はヤコビアン、

$$J(x, y) = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial y}{\partial r} \dots\dots\dots (10)$$

である。シミュレーションでは、 (u, v, w, p) を解く代わりに (Ψ, Γ, η) を初期値，境界値問題として解く方法を用いる。 (Ψ, Γ, η) に適当な初期条件と境界条件を与えた後、(7)，(8)式を時間積分して新しい Γ と η を求め、これを(9)式に代入して新しい Ψ を求める。(7) - (9)式を中心差分により空間的に離散化し、(7)，(8)式は leap-Frog 法で時間積分する。(9)式は、過剰緩和法 (Successive Over Relaxation) により各 time step 毎に計算する。

2.2 境界条件

Fig. 1 に回転風洞の概略図を示す。装置の上端部において送風機を用いて空気を排出し風洞内に上昇気流を発生させる。装置内には環流路 (Circulation Region) の上端から空気が流入し、さらに環流路の下部 0.5 m の部分から、収束槽 (Convergence region) へと流入する。収束槽に流入する空気には、環流路内に設置された 4 台の小型送風機により、または収束槽への流入口に設置されたガイドベーンに

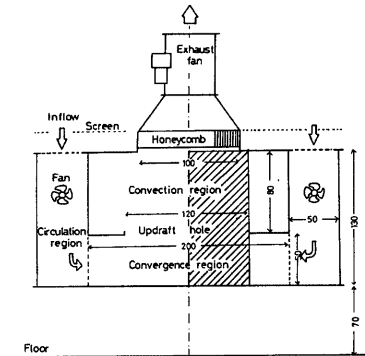


Fig. 1 Outline of the tornado vortex simulator. The shaded area is the computational domain in the numerical simulation.

より回転成分が与えられる。

数値シミュレーションにあたっては、図中に網掛けした部分を計算対象領域とした。Fig. 2 に、計算対象領域を境界条件とともに図示する。

渦の中心 ($r = 0, 0 < z < H$) では、まず軸対称性から、 $u = 0$ 、が必要であるから、これより $\partial \Psi / \partial z = 0$ 、 $\eta = -\partial w / \partial r$ が得られるが、 $r = 0$ において流速の鉛直成分には応力が働くわけでは無いから、 $\eta = 0$ となる。同様に、 $v = 0$ が必要であるから $\Gamma = 0$ が境界条件となる。

計算領域の外縁 ($r = R$) における境界条件を次に考える。 Ψ に関しては、取束槽 ($0 < z < h$) においては一定の動径流速 $-U_0$ で空気が流入し、一方 $h < z$ では流入も流出も無い ($u = 0$) として、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -U_0 \quad (0 < z < h)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad (h < z < H_0)$$

とする。 Γ に関しては、 $0 < z < h$ では流入してくる空気が接線風速 V_0 を持っていることから、 $\Gamma = RV_0$ 、また、 $h < z < H$ では、 v 成分に応力が働かないとして、

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma}{r^2} \right) = const.$$

とする。 η に関しては、 $r = R$ においては物理的な壁が存在しないことから鉛直成分には応力が働かない ($\partial w / \partial r = 0$) として、これと、 $\partial u / \partial z = 0$ ($u = 0$ より) から、 $\eta = 0$ とする。

上面 ($z = H, 0 < r < R$) では、 $u = \partial \Psi / r \partial z = 0$ 、 $\partial \Gamma / \partial z = 0$ 、 $\partial \eta / \partial z = 0$ 、を用いる。

底面 ($z = 0, 0 < r < R$) での境界条件は、まず底面上で $w = 0$ であることから Ψ に関する条件、

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 0, \dots\dots\dots (11)$$

が得られる。また、 $w = -\partial \Psi / r \partial z = 0$ であるから、 η に関する境界条件は、 $\eta = (\partial u / \partial z)$ 、となる。ここで、底面上で流速が 0 になる場合 (No slip) と、底面の摩擦が効かない場合 (Slip) の 2 つの場合について考えることにする。まづ slip の場合には、底面近傍で応力が 0 となるので、 $(\partial u / \partial z) = (\partial v / \partial z) = 0$ 、である。これから、ただちに η と Γ に関する境界条件、 $\eta = 0$ 、 $\partial \Gamma / \partial z = 0$ が得られる。No slip の場合は、まづ、 $v = 0$ より Γ に関する条件、 $\Gamma = 0$ 、が得られる。 η に関する条件は、

$$\eta = \partial u / \partial z = (1/r) (\partial^2 \Psi / \partial z^2) \dots\dots\dots (12)$$

となる。 Ψ に関する境界条件は、(11) の条件に加え、 $u = 0$ から導かれる条件、 $\partial \Psi / \partial z = 0$ 、を満たす必要がある。実際の計算では、 $\partial \Psi / \partial r = \partial \Psi / \partial z = 0$ 、を満たす Ψ を求めた後、これより境界における η を計算する。 Ψ に関する条件が多いため、境界付近で Ψ を 2 次の多項式で近似して解く方法を用いる。

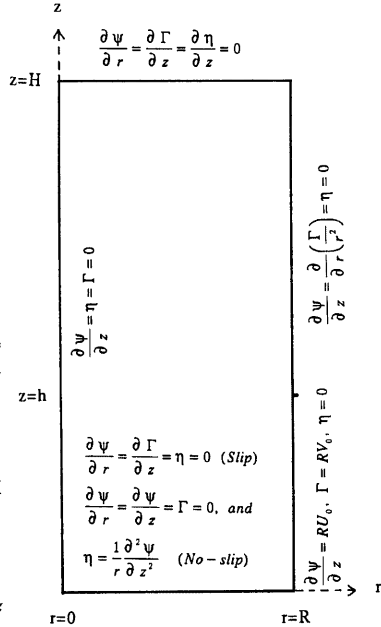


Fig. 2 Boundary conditions

3. 計算結果と考察

数値シミュレーションは、まず Rotunno が用いたのと同じパラメータを用いたテストランを行い追試を行った後、Mitsuta and Monji⁵⁾と文字他⁷⁾で行われた実験時と同じパラメータを用いた計算を実施した。Table 1 に室内実験の概要とそれぞれに対応して実施した計算の一覧を示す。表中で、 Re は収束槽頂部の直径 (D)、開口部における平均的な上昇流 (W_0)、空気の分子粘性係数 ν により、 $Re = DW_0/\nu$ 、で定義されるレイノルズ数で、これは風洞内を流れる空気の流量に比例する量である。また、 Sr は収束層の高さ (h)、 D および半径方向から図った収束槽への気流の流入角 (θ) により、 $Sr = (D/4h)\tan\theta$ で定義されるスォール比と呼ばれる量で、 Sr が大きいほど流入する空気の回転成分が大きい (流入角が大きい) 状態をあらわす。表の第4列めには、回転成分を与える方法を、また第5列めには生成した渦の性状を示してある。One cell 型は渦の全域が上昇流である場合、Two cell 型は渦の中心付近で下降流が生じている場合、いわゆる眼のある場合を示している。

表の第6列めには、それぞれの室内実験の Re , Sr 条件について実施した数値シミュレーションを示した。表中に示した SLP, NSL はそれぞれ、底面の境界条件を slip, no slip にした場合をあらわす。また括弧内の数字は、用いた粘性係数の大きさを示すもので、例えば 'x10' は分子粘性の10倍の大きさの渦粘性を与えた場合を示している。格子間隔は、SLP の計算では水平、鉛直方向とも1cmを用い、NSL の計算では0.5cmを用いた。また、計算時間幅はクラン条件から adaptive に決定した。

3.1. Slip 条件の計算結果

Fig. 3 には Slip 条件で計算した場合について、流れがほぼ定常に達したときの Ψ の分布を示してある。図の左端が渦の中心に相当する。いずれの CASE においても、流入した空気は $\Psi = 0$ の等値線よりも中心側には到達できず上部にふきぬけるような流れが達成されている。仮に $\Psi = 0$ となる半径をもって渦核を定義するなら、以下の事がいえる。

- 1) 渦核の大きさは Sr の増加とともに大きくなる (Case I, II, III, IV, VIII),
- 2) 渦核の大きさは Re の大きさには依存しない (Case III, V, VI, VII)。

これらの結果は、回転風洞による実験結果と定性的には一致するものであるが、計算で得られた渦核の半径は、実験で測定されるものよりも大きい。たとえば CASE III について、回転風洞実験で Mitsuta and Monji⁵⁾ が接線風速を測定した結果では、 $z = 20$ cm において半径約 20 cm のところに最大が存在するが、計算される接線風速の最大は半径約 40 cm のところにある (後出 Fig. 4)。

さらに、CASE III について異なる渦粘性を与えて計算した結果を Fig. 4 に比較してある。渦粘性を大きくすると渦核の大きさはわずかに小さくなるのがわかる。接線成分をみると、渦粘性が小さい場合には接線風速が大きい領域は動径方向の狭い範囲集中しているが、渦粘性が大きいときには、比較的広い範囲に分布している。流速の鉛直成分においても、接線成分と同様に渦粘性が大きい条件で計算した場合の方が、流速の大きな領域が広い範囲に分布している。また渦粘性が大きな場合の方が渦核内での下降流が大きくなっている。

3.2 No-slip 条件の計算結果

Fig. 5 には、CASE III について、底板上での境界条件を No-slip とした計算について、分子粘性係数の10倍、および100倍の渦粘性係数を用いて計算した結果を示してある。

底面を No-slip とした場合でも、中心付近での下降流が生じる2セル型の渦が再現された。さらに、Slip 条件の場合と比べると、渦核の半径が底板に近いところほど小さくなっており、より現実の渦に近い形状となっているのがわかる。これに伴い接線風速の最大が、Slip の場合よりも内側で生じている。これは、渦

Table 1 List of laboratory experiments and the corresponding numerical simulations. In the description of the numerical simulation, the SLP and NSL mean that the lower boundary condition is slip and no-slip, respectively. The number in the parentheses is the amplification factor to the molecular viscosity ($0.0000152 \text{ m}^2/\text{s}$) to yield eddy viscosity.

| CASE | Re | Sr | Source of Rotation | Type of vortex | Numerical Simulations |
|---------------------|-------------------|------|--------------------|----------------|----------------------------------|
| CASE I of ref.(5) | 2.8×10^4 | 0.71 | Fan | One cell | SLP (x10), NSL (x5, x10, x100) |
| CASE II of ref.(5) | 2.8×10^4 | 1.1 | Fan | One cell | SLP (x10) |
| CASE III of ref.(5) | 2.8×10^4 | 2.1 | Fan | Two cell | SLP (x10, x100), NSL (x10, x100) |
| CASE IV of ref.(5) | 2.8×10^4 | 4.0 | Fan | Two cell | SLP (x10) |
| CASE V of ref.(5) | 4.8×10^3 | 2.1 | Fan | Two cell | SLP (x10) |
| CASE VI of ref.(5) | 1.5×10^4 | 2.1 | Fan | Two cell | SLP (x10) |
| CASE VII of ref.(5) | 4.0×10^4 | 2.1 | Fan | Two cell | SLP (x10) |
| CASE VIII(ref.(7)) | 4.1×10^4 | 0.23 | Guide vane | Two cell | SLP (x10), NSL (x10, x100) |

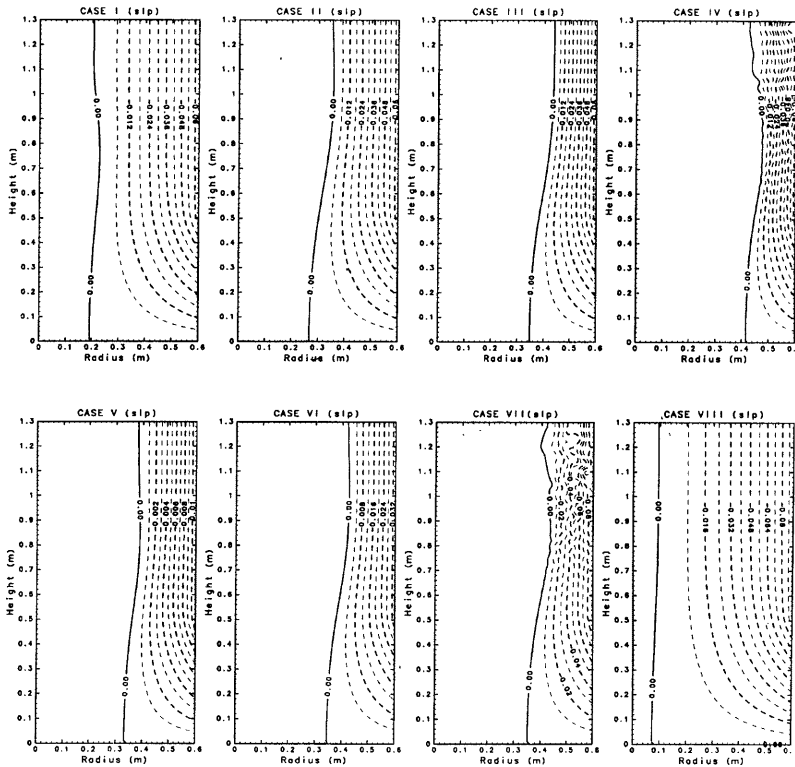


Fig. 3 Comparison of the steady state stream function of each case conducted with surface slip condition. The eddy viscosity was 10 times of molecular viscosity.

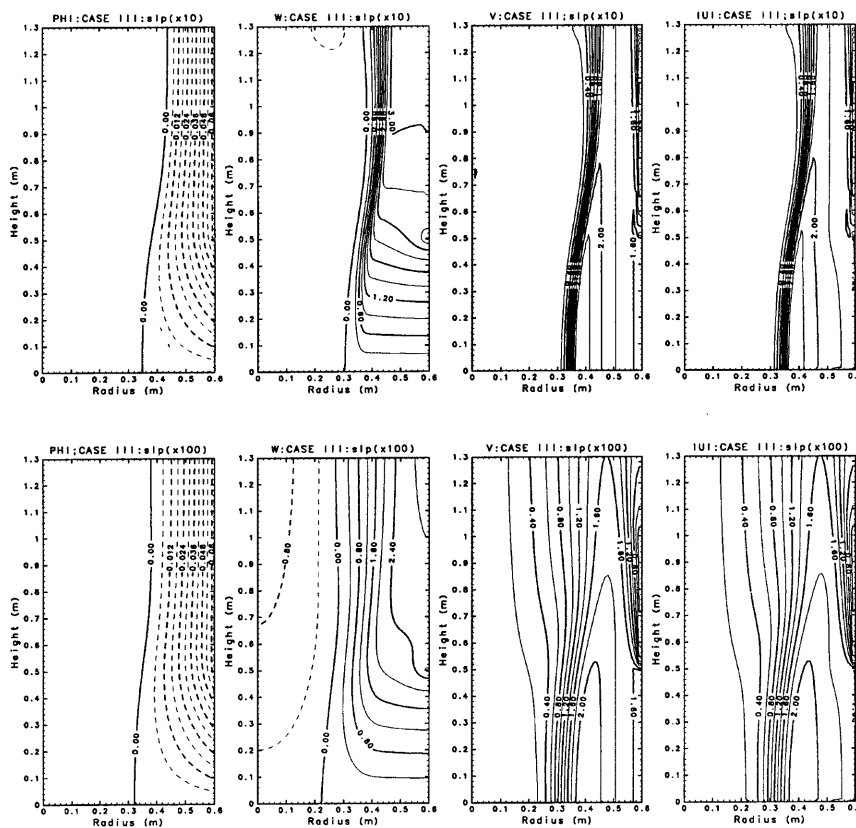


Fig. 4 Comparisons of stream function, vertical wind component, tangential wind component and the horizontal wind component for two runs with different eddy viscosity, 10 times of molecular viscosity (upper figures) and 100 times of molecular viscosity (lower figures), for the CASE III (slip).

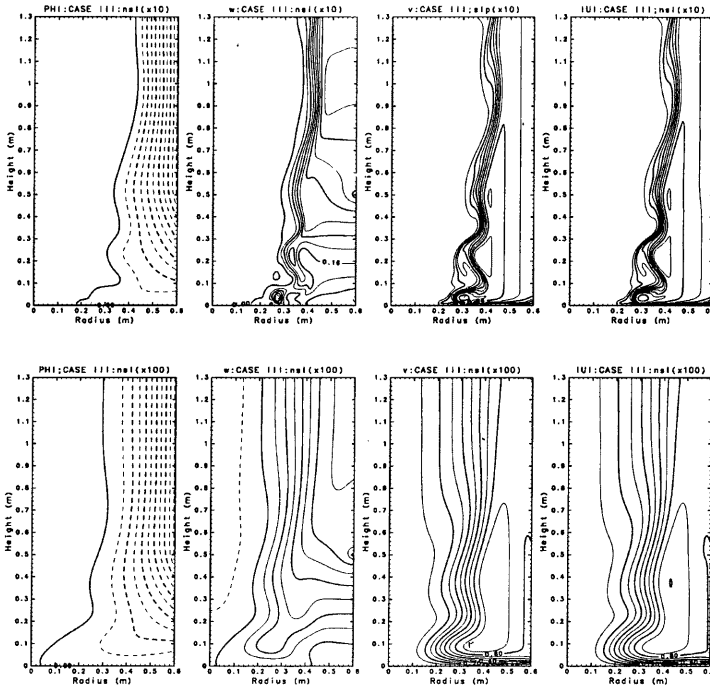


Fig. 5 Same as Figure 4, but for the CASE III (No-slip).

粘性係数が小さいときに顕著である。

もう一つの特徴は、渦核の形状が高さ方向に波打っている点である。これは、特に渦粘性が小さい場合に顕著である。これは、底板に沿う境界層内を渦の中心近くまで進入した気塊が上昇すると、その気塊より外側の角運動量が小さいため慣性不安定により動径方向に押し戻され、このとき平衡位置よりも渦の外側に出た気塊が再び中心方向に移動する、という過程を繰り返すことで生じているものと推測できる。

Fig. 6には、CASE Iについて、Fig. 5と同様の図を示す。渦粘性係数を分子粘性の10倍とした計算例(図の上側)では、接線風速の分布に見られる波動状の乱れの中の2箇所に特徴的な形状(便宜上bulbと呼ぶ)が見られる。Rotunnoは、このような渦の形を、層流軸対称渦が乱流軸対称渦に移行するVortex Breakdownと呼ばれる現象に対応するものと解釈している。一方、渦粘性を分子粘性の100倍として計算した例(図の下側)では、底板付近で渦が細くなり、これより上部では弱い波動状の変動が見られるが、'bulb'のような特徴的な擾乱は形成されていない。

Fig. 7に、CASE IIIについて、高さ3, 10, 20 cmにおける接線風速の半径方向の分布を示す。図中に*で示したのは、Mitsuta and Monji⁵⁾による測定結果である。底面での境界条件をNo-slipとした計算結果においても、渦核の半径は実験よりも大きく、室内実験ほど集中した渦は再現されなかった。

Fig. 7にみられるもう一つの特徴は、 $z = 10, 20$ (cm)の接線風速が、半径方向の2箇所に極値をもつような分布をしていることである。理論解析¹¹⁾¹²⁾¹³⁾によれば、このような接線風速分布は、順圧不安定により非軸対称な擾乱を引き起こす要因となることが知られており、これがMonji⁶⁾が室内実験で示した'multiple vortices'発生の要因となっていると解釈できる。

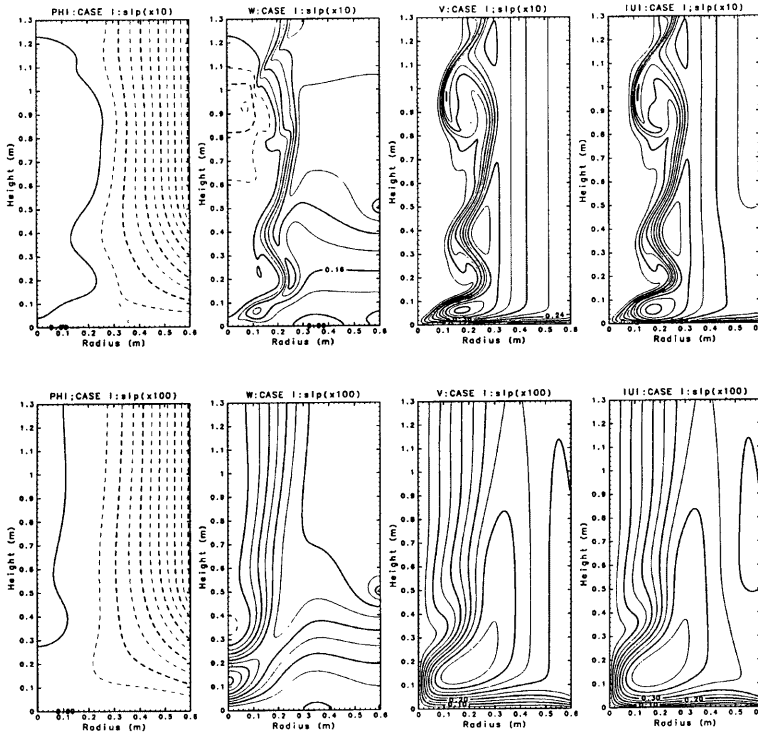


Fig. 6 Same as Figure 4, but for the CASE I (No-slip).

4. おわりに

Rotunnoの論文に基づいて軸対象渦の数値モデルを作り、暴風雨災害部門の回転風洞で実施した実験のパラメータを与えて室内実験の数値シミュレーションを行った。中心付近で下降流が生じる2セル型渦の生成や、地表摩擦を考慮したとき地表付近で渦が細くなることなど渦の基本的な特徴はモデルで表現できたが、定量的な一致はよくない。すなわち、シミュレーションで得られた渦核の半径は、室内実験で観察されたものよりもかなり大きく、またこれに伴いシミュレーションでは室内実験で得られるほど強い接線風速が再現されなかった。この一因は、渦粘性係数の大きさや、その空間分布が十分にモデルで考慮されていない為であると考えられる。Rotunnoの数値モデルでは乱流の強さは予測できないため、全領域で一様な渦粘性性をa prioriに与えるため、乱流強度の空間分布に伴う渦粘性の空間分布が考慮されていない。渦の構造に対する粘性の影響を定量的に明らかにするためには、回転風洞内で生じる渦に関して特に乱流強度やレイノルズ応力の測定を行い、これを用いた数値計算を実施した結果に基づく解析を行う必要がある。あるいは、数値モデルに乱流モデルを組み込み、乱流強度を予測変数としたシミュレーションを行うのがより望ましいと考えられる。

一方、台風の場合には、本論で報告した計算例と比較して現象の縦横比が異なること、時間・空間スケールが異なることなどが相違点であるが、大気境界層内の渦粘性係数に関する既存の知識を用いれば、このモデルを台風に伴う大気境界層内の風速を考察するための基本モデルとしては利用できる可能性がある。

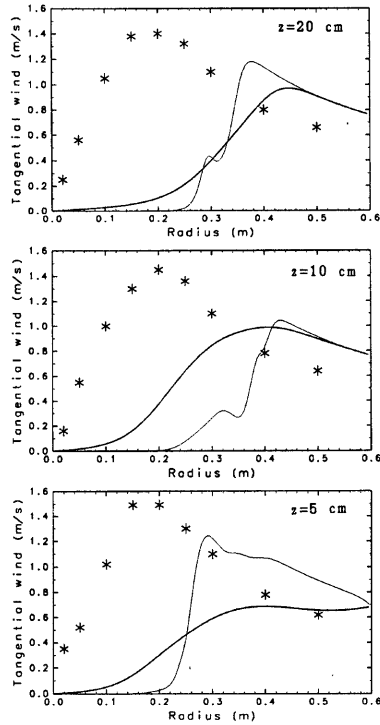


Fig. 7 Comparisons of the tangential wind at $z = 5, 10,$ and 20 cm. The thin and thick lines corresponds to CASE III (NSL (x10)) and CASE III (NSL (x100)), respectively.

参考文献

- 1) 藤井健, 光田 寧: 台風9313号の気圧と強風の分布の特性について, 京都大学防災研究所年報, 第37号B-1, 1994, pp.35-46
- 2) Shea, D. J. and W. M. Gray: The hurricane inner core region. I, Symmetric and asymmetric structure, J. Atmos. Sci., Vol. 30, 1973, pp.1544-1564.
- 3) Gray, W. M. and D. J. Shea: The hurricane inner core region. II, Thermal stability and dynamic characteristics, J. Atmos. J. Atmos. Sci., Vol. 30, 1973, pp.1565-1576.
- 4) Mitsuta, Y. and T. Suenobu: Supergradient surface wind in the eye of a Typhoon, J. Meteor. Soc. Japan, Vol. 66, 1988, pp.505-508.
- 5) Mitsuta, Y. and N. Monji: Development of a laboratory simulator for small scale atmospheric vortices, Natural Disaster Science, Vol. 6, 1984, pp.43-54.
- 6) Monji, N.: A laboratory investigation of the structure of multiple vortices, J. Meteor. Soc. Japan, Vol. 63, 1985, pp.703-713.

- 7) 文字信貴, 王 允寛, 光田 寧: 大気中の小規模な渦に及ぼす地表面粗度の影響に関する実験. 京都大学防災研究所年報 31号B-1, 1988, pp.177-182.
- 8) Rotunno, R: Numerical simulation of a laboratory vortex, J. Atmos. Sci., Vol. 34, 1977, pp.1942-1956.
- 9) Rotunno, R.: A study in tornado-like vortex dynamics, J. Atmos. Sci., Vol. 36, 1979, pp.140-155.
- 10) Ward, N. B.: The exploration of certain features of tornado dynamics using a laboratory model, J. Atmos. Sci., Vol. 29, 1972, pp.1194-1204.
- 11) Snow, J. T.: On inertial instability as related to multiple vortex phenomemon. J. Atmos. Sci., Vol. 35, 1978, pp.1660-1677.
- 12) Staley, D. O. and R. L. Gall: Barotropic instability in a tornado vortex. J. Atmos. Sci., Vol. 36, 1979, pp.973-981.
- 13) 石川裕彦, 光田 寧: 負渦度領域を持つ軸対称渦の安定性, 京都大学防災研究所年報, 24号B-1, 1981, pp.345-356.