サーベイ論文

様相論理へのホモフォニック真理論

Homophonic theory of truth for modal logic

佐野 勝彦*

Katsuhiko SANO

§1　序論

1960 年代のクリプキの業績（Kripke 1963）以来，様相論理では $\Box\varphi$（φ が必然的だ）の真理条件は「現実世界に相対的に可能ないかなる世界でも φ が真」と与えられてきた．クリプキの業績にはそれまで乱立していた様相論理の諸体系に統一的な扱いを可能にするという大きなメリットがあった．とはいえ，可能世界（ないしそれに類する概念）にコミットしなければ様相論理に意味論が与えられないのか，と問うことはできよう．可能世界を用いない意味論の一つの候補は，メタ言語にも $\Box$ に対応する様相を加え，否定記号の解釈と類比的に「$\Box\varphi$ が真であるのは φ が必然的に真である場合だ」と真理条件を与える，ホモフォニックな意味論である．本稿では，このホモフォニックな意味論がデイヴィドソン流の真理論の枠内で如何に可能か，をこれまでの諸研究をふまえ論じる．

以下，本稿の流れを説明しておこう．第二節では，デイヴィドソンの意味論プログラムに従った場合に様相論理に対してホモフォニックな真理論が要請されることを確認したのち，ウォーレス（Wallace 1970, 1975）のホモフォニック真理論批判を説明する．ウォーレスの批判は様相演算子の大半の読みでホモフォニック真理論の展開は不合理，というものだ．第三節では，ウォーレスの批判に対して，一部の読みについてはホモフォニック真理論が有意味に展開可能だというグプタ（Gupta 1978）の応答を扱う．第四節では，ホモフォニック真理論を許す様相論理の特徴づけが可能か，というグプタの残した問題に一定の解答を与えたブロイナー（Braüner 2001, 2002）の意味論的方法を扱う．

* 日本学術振興会特別研究員（京都大学大学院文学研究科 情報・史料学専修）
katsuhiko.sano@gmail.com

§2 ウォーレスの様相論理批判

2.1 デイヴィドソンの意味論プログラム

周知の通り，タルスキ（Tarski 1956）は形式言語（対象言語）OL が与えられた時，別の形式言語（メタ言語）ML で**規約 T** とよばれる次の性質をもつ真理述語 True を如何に定義するかを示した：OL の各文 φ に対して $\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow f(\varphi)$, ただし $\overline{\varphi}$ は φ の ML での構造記述名，$f(\varphi)$ は OL の文 φ の ML での翻訳，である．この同値式が **T-同値文**である．デイヴィドソン（Davidson 1967）は，タルスキとは逆に True を原始述語として，OL に対して ML 中で真理論を構築することが言語の解釈だと主張した．具体的には，メタ言語 ML 中で対象言語 OL の**解釈**を与えるとは，任意の OL の文 φ に対して $\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \alpha$（ただし α は OL の φ ごとに選べる ML の文）を論理的帰結としてもつ ML の文からなる**有限集合** Γ の**真理論**を特定することに等しい．α は φ の翻訳である必要はないが，ある翻訳 f が存在して，どの φ についても α が $f(\varphi)$ とかけるなら，この同値式は T-同値文だ．このとき真理論は**ヘテロフォニック**とよばれる．対象言語がメタ言語に含まれており，翻訳が恒等函数とならば，真理論は**ホモフォニック**とよばれる．Γ が有限集合であることが要請されているのは，それが無限集合になれば人間には習得できないからだ．以下では，T-同値文すべてを導く有限の真理論に関心を絞る．

このような真理論はどのように言語解釈で役立つのだろうか．文の意味がその部分の意味にどう依存するかという問題についてのデイヴィドソンの解答は次のとおりだ．

> 絶対的真理の［再帰的］理論は，次のような意味で答えを与えるのである．説明されるべき T-文は無限に存在するのであるから，理論は，その役割を果たすにあたって，真理に関与する有限個の表現を選択し，さらにあらゆる文を合成するための，真理を左右する有限個の構成法（construction）を選択しなくてはならない．その際，この理論は最初に，一定の基本的表現がもつ意味論的諸性質を与え，次に，構成法が作用する表現の意味論的諸性質にその構成法がどう影響するかを述べるのである．（Davidson 1973, p. 81, 邦訳 p. 64）

すなわち真理論は (i) まずは対象言語の文の論理的構造（再帰的な論理形式）を有限個の表現と構成から明らかにし，そして (ii) 次にそれらの表現と構成に意味を与えるこ

とで，その再帰的な論理形式にもとづいて文に解釈を与える．このようにして無限個の T 文を有限個の公理から導くことが可能になる．さらに，言語解釈において論理がかかわるのもこの二つの役割においてだ．たとえば古典論理を例にとって簡単に説明すれば，「笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝しない」を「¬（笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝する）」とその論理形式を明らかにし（役割 (i)），笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝する ↔ ‘笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝する’ が真，どの文 φ についても（‘$\neg\varphi$’ が真 ↔ ‘φ’ が真でない），という二つの公理を使えば，古典論理で許される推論を使って「¬（笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝する）」の真理がどのように笑い飯が 2008 年度 M1 で優勝するという事実に基づくか，を説明できる（役割 (ii)）．

デイヴィドソン（Davidson 1973）によれば，自然言語の意味論の理想は自然言語中で構成することだという．もちろん，タルスキの真理の定義不可能性定理はこの理想が完全には達成できないことを明らかにしたが，対象言語とメタ言語の差をなるたけ最小にして理想を近似できるのが最適である．そこで，上述の二つの役割に関して，役割 (i) に適す論理は，役割 (ii) も果たせるべし，すなわち，ホモフォニック真理論が構成できるべし，ということが要請される．この点を具体例で説明しよう．たとえば量化様相論理は自然言語における時制・様相言明をある程度表現できる点で役割 (i) を果たしているといえる．仮に量化様相論理が役割 (ii) を果たせないとすれば，代替としてたとえば外延的一階述語論理を役割 (ii) のために使うことになるだろう．しかしその場合，結局役割 (i) でも外延的一階述語論理の論理形式を使うことになり，量化様相論理は無駄な媒介物にしか過ぎなくなってしまう．さて実際に，量化様相論理を対象言語としたとき，メタ言語としてクリプキや D. ルイスらの外延的可能世界意味論をとれば真理論を与えることができる（Wallace 1975）．そこで量化様相論理が役割 (i) のみならず役割 (ii) も果たすことができるか，という問題が俎上に上る．これに否定的に答えるのがウォーレスである．

2.2　論理の土俵設定

この節では，本稿で一貫して使う様相論理の対象言語（様相命題論理）とメタ言語（定数記号を rigid に解釈する対象言語の様相論理の量化拡大）を説明する．本稿は対象言語を様相命題論理に限っている．これはすでに先行研究において，様相論理にホモフォニック真理論を与える際の困難が，対象言語の量化子や，量化子と様相演算子の相互作用ではなく，**様相演算子の扱い**にある，ということが明らかにされているた

めである (Gupta 1978, p. 449).

対象言語 (以下 OL と表記) の語彙は, (i) 命題記号 p, q[1]; (ii) ブール結合子 $\neg, \wedge$; (iii) 様相演算子 $\Box$; (iv) 括弧 (,) からなり, OL の論理式 (φ, ψ, θ などと表記) は,

$$\varphi ::= p \,|\, q \,|\, (\neg\varphi) \,|\, (\varphi \wedge \psi) \,|\, (\Box\varphi)$$

のように帰納的に定義する. 以下では混乱が生じない場合は括弧を適宜省略する. OL の論理式の集合 Λ が**正規様相論理**であるのは, Λ が全てのトートロジーと $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ を含み, 次の推論規則に閉じる場合である : MP: $\varphi, \varphi \to \psi \in \Lambda$ ならば $\psi \in \Lambda$; Nec: $\varphi \in \Lambda$ ならば $\Box\varphi \in \Lambda$; Sub: $\varphi \in \Lambda$ ならば $\varphi[\psi/r]$ ($(-)[\psi/r]$ は $-$ 中の命題記号 r の出現への ψ の一様代入を表す). 最小の正規様相論理はいわゆる **K** に等しい. $\varphi \in \Lambda$ (φ は Λ の定理である) を $\vdash_\Lambda \varphi$ とも書く.

一方, メタ言語 (以下 ML と表記) は対象言語の語彙全てに加え, (i) 量化子 $\forall$; (ii) 変数記号 $x, y, z, \ldots$ の集合 Var; (iii) 一項述語 Form (-は論理式だ), True (-は真だ); (iv) 対象言語の各語彙 e に対し定数記号 $\overline{e}$; (v) **連接** のための二項函数記号 ^ を加える. ML 上の項 t は変数記号と定数記号から函数記号により通常通り定義するが, ML 上の項として OL の式 φ の ML での**構造記述名** $\overline{\varphi}$ を

$$\overline{(\psi \wedge \theta)} = \overline{\psi}\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,\overline{\theta})$$
$$\overline{(\neg\psi)} = \overline{\neg}\,\hat{}\,\overline{\psi}$$
$$\overline{(\Box\psi)} = \overline{\Box}\,\hat{}\,\overline{\psi}$$

と定義できる. ML 上の論理式 (α, β, γ などと表記) は,

$$\alpha ::= p \,|\, q \,|\, \mathrm{Form}(t) \,|\, \mathrm{True}(t) \,|\, (\neg\alpha) \,|\, (\alpha \wedge \beta) \,|\, (\Box\alpha) \,|\, (\forall x.\alpha)$$

と定義する. OL の任意の式 φ は ML の式でもあることに注意しよう. OL の正規様相論理 Λ に対してその ML での**量化拡大** $\mathbf{Q}\Lambda$ を, (i) $\varphi \in \Lambda$ ならば $\varphi[\alpha/r] \in \mathbf{Q}\Lambda$; (ii) $\forall x.\alpha \to \alpha[t/x] \in \mathbf{Q}\Lambda$ (ただし t は α において x に対し自由, $[t/x]$ は x への t の代入を表す); (iii) Nec: $\alpha \in \mathbf{Q}\Lambda$ ならば $\Box\alpha \in \mathbf{Q}\Lambda$; (iv) MP: $\alpha, \alpha \to \beta \in \mathbf{Q}\Lambda$ ならば $\beta \in \mathbf{Q}\Lambda$; (v) R$\forall$: $\alpha \to \beta \in \mathbf{Q}\Lambda$ かつ x が α で自由でないならば $\alpha \to \forall x.\beta \in \mathbf{Q}\Lambda$; (vi) **バルカン式** BF: $\forall x.\Box\alpha \to \Box\forall x.\alpha \in \mathbf{Q}\Lambda$, をみたす ML の論理式の最小集合とする. **$\mathbf{Q}\Lambda$ で仮定 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ から β が演繹できる** ($\alpha_1, \ldots, \alpha_n \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \beta$ と表記) とは, ML の論理式の列 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ が存在し, (i) $\gamma_1 \in \mathbf{Q}\Lambda$ あるいは γ_1 は α_i のいずれか, (ii) γ_k $(1 < k)$ は (a) それ

[1] 有限個ならばどれだけの個数でもよいが, 単純さのために二つとする.

以前の二つの式から MP により得られたか，(b) それ以前の一つの式 $\gamma_j \in \mathbf{Q}\Lambda$ $(j < k)$ から Nec により得られたか，(c) それ以前の一つの式から R∀ により得られた (ただし x は $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のいずれにも自由に出現しない)，のいずれか[2]; (iii) γ_m は β, をみたす場合にいう．ここで (b) の条項の「$\gamma_j \in \mathbf{Q}\Lambda$」は γ_j が $\mathbf{Q}\Lambda$ の定理であることを要請していることに注意しておこう．一方，我々は (a)，(b) の条項でこのような制限を必要とはしない．この準備の下で正規様相論理に対するホモフォニック真理論を以下のように厳密に定義できる．

定義 1. ML の閉論理式の有限集合 Γ が正規様相論理 Λ の**真理論**であるのは OL の任意の論理式 φ に対して $\Gamma \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ をみたす場合である．

2.3 ホモフォニック真理論の構成

さて，様相論理に対するホモフォニックな真理論が可能か，という問いに対するウォーレス（Wallace 1970）の診断は，(i) 技術的には構成可能だが，(ii) (i) の構成において $\Box(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ という T-同値式の必然化版にコミットせねばならずこれが不合理，というものだ．この節ではまず (i) について，Λ が **S4**（**S4** とは $\Box p \to p$ と $\Box p \to \Box\Box p$ を含む最小の正規様相論理）ならば真理論を特定できることを明らかにしよう[3]．次節で (ii) を扱う．

まずは対象言語の構文論のための道具立てとして Form（-は論理式だ）に関して：

$$\mathrm{Form}(\overline{p})$$
$$\mathrm{Form}(\overline{q})$$
$$\mathrm{Form}(x\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,y)) \leftrightarrow (\mathrm{Form}(x) \wedge \mathrm{Form}(y))$$
$$\mathrm{Form}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \mathrm{Form}(x)$$
$$\mathrm{Form}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \mathrm{Form}(x)$$

のそれぞれの全称閉包が必要となる．次に，True（-は真だ）に関してはホモフォニックな精神を反映した次のような条項（もちろん全称閉包にしたもの）を加えるのが自

[2] ここで MP, Nec, R∀ とは次の推論規則である．MP：$\alpha \to \beta, \alpha$ から β を導く; Nec：α から $\Box\alpha$ を導く; R∀：$\alpha \to \beta$ から $\alpha \to \forall x.\beta$, ただし x は α で自由ではない．

[3] ウォーレス自身は **S5**（$\Box p \to p$ と $\Box p \to \Box\Box p$ に加え $p \to \Box\Diamond p$ を含む最小の正規様相論理）を扱っており，**S4** で真理論を具体的に構成してみせたのは著者の知る限りグプタ（Gupta 1978）ないしピーコック（Peacocke 1978） が最初である．

然に思える：

$$\begin{array}{l}
\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p \\
\mathrm{True}(\overline{q}) \leftrightarrow q \\
\mathrm{Form}(x\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,y)) \to (\mathrm{True}(x\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,y)) \leftrightarrow (\mathrm{True}(x) \wedge \mathrm{True}(y))) \\
\mathrm{Form}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \to (\mathrm{True}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \neg\mathrm{True}(x)) \\
\mathrm{Form}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \to (\mathrm{True}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(x))
\end{array}$$

これらの Form と True に関する閉論理式の集合を Γ_1 としよう．

しかし，ウォーレスは Γ_1 は真理論になりえないと論じた（Wallace 1970, p. 140）．何故なら，

$$\Gamma_1 \nvdash_{\mathbf{QS4}} \mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box p$$

となるためだ．この困難は一言でいうなら**様相文脈内で同値式の入れ替えが一般に保障されていないため**に生じている．具体的に敷衍しよう．Γ_1 から **QS4** で $\mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(\overline{p})$ が演繹できる．ここで仮に Γ_1 の要素 $\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p$ から $\Box(\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p)$ がいえれば，さらに $\Box\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow \Box p$ がいえ，上の結果と合わせてほしい結果が得られる．しかし，$\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p$ は仮定 Γ_1 からの帰結に過ぎず **QS4 の定理である保障がないので** Nec を適用できないのである．これに対する直ちの応答は $\mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(\overline{p})$ を Γ_1 に加えることだろう．しかしこれは問題の先送りになってしまう．なぜなら，上と同様の議論により今度は $\mathrm{True}(\overline{\Box\Box p}) \leftrightarrow \Box\Box\,\mathrm{True}(\overline{p})$ を導くことができなくなるためである．もうひとつの応答は，$p \to \Box p$ 自体を論理公理として加えることだ．しかし、これも **QS4** に $\Box p \to p$ が含まれていることから、様相自体が無意味なものとなってしまう．

ウォーレスはこの難点に対する回避策を，Γ_1 の True に関する部分を

$$\begin{array}{l}
\Box(\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p) \\
\Box(\mathrm{True}(\overline{q}) \leftrightarrow q) \\
\mathrm{Form}(x\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,y)) \to \Box(\mathrm{True}(x\,\hat{}\,(\overline{\wedge}\,\hat{}\,y)) \leftrightarrow (\mathrm{True}(x) \wedge \mathrm{True}(y))) \\
\mathrm{Form}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \to \Box(\mathrm{True}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \neg\mathrm{True}(x)) \\
\mathrm{Form}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \to \Box(\mathrm{True}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(x))
\end{array}$$

（の全称閉包）に置き換えればよい，と提案している（Wallace 1970, p. 140）．すなわち，真理条件の記述に必要な「同値」を必然的同値にすればよい，ということだ．こ

の新しい閉論理式の集合を Γ_2 としよう．すると，**必然的同値となる二つの式は様相文脈内で入れ替えができる**，という事実に訴えて次の命題を示せる．

命題 2 (Wallace 1970；Gupta 1978)**.** OL の任意の論理式 φ に対して $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$, それゆえ，$\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$. すなわち，$\Gamma_2$ は **S4** の真理論である．

(**証明**) まず，任意の OL の式 φ について $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \mathrm{Form}(\overline{\varphi})$ を示し，その後，φ の構成に関する帰納法で $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ を示せる．一例として $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box(\mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box p)$ を示す．Γ_2 の下で $\Box(\mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box\mathrm{True}(\overline{p}))$ と $\Box(\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p)$ がいえる．$\Box p \to \Box\Box p \in \mathbf{QS4}$ に注意して後者から $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box\Box(\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p)$ がいえる．さらに，これと $\Box(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\Box\alpha \leftrightarrow \Box\beta) \in \mathbf{QS4}$ より $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box(\Box\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow \Box p)$ がわかる．最後に，$\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box(\mathrm{True}(\overline{\Box p}) \leftrightarrow \Box\mathrm{True}(\overline{p}))$ とあわせて，ほしい結果が言える． (**証明終**)

2.4 ウォーレスの批判

しかしウォーレスは Γ_2 が適切な真理論を構成しないと論じる．まず，彼は命題 2 で $\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ にとどまらず

$$\Box(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi) \tag{1}$$

まで示せたことに注目し，式 (1) を含意する真理論は偽だと論じる（Wallace 1970, p. 140）．ウォーレスによれば，$\Box$ を論理的必然性を表すものと理解すると (1) から不合理な主張が導かれてしまう，という．ここで文が論理的に必然であるとは，その文中の非論理定項のいかなる再解釈の下でも真である，すなわち，その論理形式によって真である場合のことをいう．(1) の不都合な一例として彼があげるのが，

$$\Box(\overline{\text{Lizzy is playful}}\text{ is true (in English)} \leftrightarrow \text{Lizzy is playful}). \tag{2}$$

である．上述の論理的必然性の意味に従えば，この (2) が真であるためには，(2) の一見したところの非論理定項 ‘$\overline{\text{Lizzy is playful}}$’, ‘is true’, ‘Lizzy’, ‘is playful’ を論理定項とみなさなければならないが，これは明らかに不合理である．たとえ，‘is true’ を論理定項とみなしても， ‘$\overline{\text{Lizzy is playful}}$’,‘Lizzy’, ‘is playful’ がそれぞれの構造記述名，個体定項，一項述語のカテゴリを ‘$\overline{\text{Martha is playful}}$’,‘Martha’, ‘is unplayful’ のように勝手に動く限りは真にできない．これからウォーレスは (1) が偽だ，と主張する（Wallace 1970, p. 121）．

この議論からウォーレスは

> ‘□’ がたとえば「ニキータは-と信じる」のような，**他のどんな非真理函数的な文演算子を事実上表現していても**，それら［(1)］は同様に偽である．
> これが，ホモフォニック戦略が様相言語に対するもっともな真理論を導かないことを示している，と思う．（Wallace 1970, p. 140）

（強調は筆者）と結論付けている[4]．これに反論するのがグプタである．

§3 グプタのホモフォニック真理論擁護

グプタは，特に物理的・形而上学的必然性と論理的必然性に関して，ウォーレスの批判へと反論する．

3.1 物理的・形而上学的必然性の場合

上でも述べたようにウォーレスは物理的・形而上学的必然性の場合に (1) が偽になる，ということに議論を与えているわけではない．そこで，グプタはウォーレスが展開するであろう批判を構成してみせている（Gupta 1978, p. 452）．

ウォーレスは物理的・形而上学的必然性の読みの場合にも，(1) の一例である (2) を偽というだろう．しかし，その理由は語がその意味を変える可能性のためだ．もしも英語で ‘Lizzy’ が気難しくて茶目っ気のない子供の Martha について語るために使われていたなら，‘Lizzy is playful’ は偽に違いない．しかし名前の変更はもともとの Lizzy という対象自身の茶目っ気には影響を与えないに違いない．すなわち，‘Lizzy’ が英語の話者によって Martha の名前として使われる世界 w では，(2) の左辺 $\overline{\text{Lizzy is playful}}$ is true は偽だが，右辺 Lizzy is playful は真だ．だから w でこれらの同値文は偽となる．w は想像できるので，(2) は形而上学的必然性の読みで偽だ．さらには，この世界 w は物理的にも可能なので，物理的必然性の読みでも偽となるはずだ．

グプタはこの想定批判に二つの真理概念を区別することで反論する（Gupta 1978, section III）．我々は「カンガルー」という語を現実世界の意味に照らして理解することも，カンガルーが尻尾をもたない奇妙な世界の意味に照らしても理解できる．そこでグプタは文に適用される True を，

- 文 α が w で True_1 の外延に属す $\Longleftrightarrow$ ある命題 X が存在し，α は w で X を表

[4] 同様の論点については（Wallace 1975, pp. 56–57）も参照せよ．

し，かつ，X は w で真.

- 文 α が w で True_2 の外延に属す $\Longleftrightarrow$ ある命題 X が存在し，α は現実世界で X を表し，X は w で真.

のように True_1 と True_2 に区別する．グプタによれば，実際我々はこのような二つの真理述語を使い分けている．例えば

$$\text{All contradictions are necessarily false.} \tag{3}$$
$$\text{‘Snow is white or it is not white’ is necessarily true.} \tag{4}$$

はいずれも自然な意味では True_2 の意味で真だろう．また

$$\text{If ‘red’ were to mean what ‘white’ means then ‘Snow is red’ would be true.} \tag{5}$$

は True_1 の意味で真だろう[5].

グプタはこの二つの区別を導入した上で，$\Box$ が形而上学的必然性，物理的必然性を意味していようとも，True_2 の意味の下では，この $\mathrm{True}_2(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ の両辺が異なる真理値をもつような状況を考えるのは不可能なので（例えば $\mathrm{True}_2(\overline{\neg(p \land \neg p)}) \leftrightarrow \neg(p \land \neg p)$ を考えてみよ），$\mathrm{True}_2(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ は形而上学的にも物理的にも必然的になるのはおかしなことではない，と述べる（Gupta 1978, p. 454）．そこで True_2 に関しては命題 2 によりホモフォニック真理論が構築できる，と結論付ける．ウォーレスの想定批判はここには関わらない．何故ならそれが関わるのは True_1 だからだ.

さらにグプタはウォーレスの想定批判への反論をさらに強固なものにするために，たとえ様相論理へのホモフォニック真理論が True_1 による T-同値文 $\mathrm{True}_1(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ を要請するのだとしても，ウォーレス自身が構成した仕方を修正することで想定批判をかわす形で真理論を構成できる，と述べる（Gupta 1978, p. 455）．そのポイントは，True_1 と True_2 は現実世界ではその真理値が一致するが，ほかのすべての世界も含めてその真理値が一致するわけではない，という点にある．具体的には，まず Γ_2 中の True を True_2 で置き換え，さらに新たに

$$\forall x. (\mathrm{True}_1(x) \leftrightarrow \mathrm{True}_2(x)) \tag{6}$$

をひとつだけ加えた集合を考えよう．すると, 命題 2 の証明と同じ戦略で $\mathrm{True}_2(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ を示し，さらに新しい仮定 $\forall x. (\mathrm{True}_1(x) \leftrightarrow \mathrm{True}_2(x))$ を経由することで $\mathrm{True}_1(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$

[5] (4) を記号化するなら $\Box(\mathrm{True}_2(\text{‘Snow is white or it is not white’}))$ となろう．(5) の自然な意味は反事実条件法の結合子 $\Box\!\!\rightarrow$ を使えば ‘red’ means what ‘white’ actually means $\Box\!\!\rightarrow$ $\mathrm{True}_1(\text{‘Snow is red’})$ と書ける（Gupta 1978, p. 454）.

をも導ける．しかし，これは $\Box(\mathrm{True}_1(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ は導くことは意味しないから，ここにウォーレスの想定批判は適用されない．このようにグプタの立場でも $\Box(\mathrm{True}_1(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ を偽としながら，True_1 に対する T-同値文を導くことが可能だ．ただし，注意しなければならないのは (6) を $\Box\forall x.(\mathrm{True}_1(x) \leftrightarrow \mathrm{True}_2(x))$ のように強めてしまうと，（バルカン式を経由して）$\Box(\mathrm{True}_1(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ が導かれてしまうという点だ．だから $\Box\forall x.(\mathrm{True}_1(x) \leftrightarrow \mathrm{True}_1(x))$ は偽とみなさねばならない[6].

3.2 論理的必然性の場合

前節では少なくとも $\Box$ を物理的必然性，形而上学的必然性とみなす場合には，真理述語 True_2 を使えば，命題 2 で $\Box(\mathrm{True}_2(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ が証明できることには問題がない，というグプタの主張を説明した．それでは，ウォーレス自身が挙げた $\Box$ の論理的必然性の読みの場合はどうだろうか．たとえ，(2) の ‘is true’ の意味を True_2 だと考えてもウォーレスの元々の批判はまだ当てはまるように思える．すると，ウォーレスの批判は少なくとも論理的必然性の読みに対しては，いかなるホモフォニック真理論の構成も不可能だ，ということを明らかにしているのだろうか．グプタの解答はノーだ．グプタは論理的必然性の場合にホモフォニックな真理論を構成する別方法を素描している（Gupta 1978, p. 456）．それは，構造記述名のために引用符 ‘’ を用い，論理定項・非論理定項のカテゴリを変更するという方法だ．引用符 ‘’ の内側でも外側でも量化ができるなら（Belnap and Grover 1973），例えば，構文論を適切に変更した上で Γ_2 中の文をすべて

$$\mathrm{Form}(`x \wedge y\text{'}) \rightarrow \Box(\mathrm{True}(`x \wedge y\text{'}) \leftrightarrow (\mathrm{True}(`x\text{'}) \wedge \mathrm{True}(`y\text{'})))$$

のように書き換える．その上で Form, True, ‘, ’ を**非論理定項ではなく論理定項とみなす**．すると (2) は $\Box$(‘Lizzy is playful’ is true (in English) $\leftrightarrow$ Lizzy is playful) となり，その非論理定項が ‘Lizzy’, ‘is playful’ となり，その論理形式が

[6] こういったグプタの議論から，ホモフォニック真理論について論じる際に結局可能世界を使った非形式言語での議論が必要になるのであれば，結局対象言語とメタ言語の間のギャップがメタ言語とメタ言語について論じる我々の言語の間のギャップに押しやられただけではないか，と疑問をもつ読者がいるかもしれない．本稿では取り上げないがグプタは，可能世界概念や可能世界における真理もその内で表現できる Aldo Bressan による高階様相論理（Bressan 1972）を取り上げ，この様相論理に対してホモフォニック真理論を与えることができるだけでなく，外延的可能世界意味論での真理論がこの様相論理内で再現できることを明らかにしている（Gupta 1978, Section V）．もちろんこの主張自体，稿を改めて検討せねばならないが，上述の疑問に対しては Bressan 流高階様相論理に訴えることで応答できるだろう．Bressan 流高階様相論理については（Belnap 2006）もみよ．

'$Q(c)$' is true (in English) $\leftrightarrow$ $Q(c)$ となるため，Q と c にいかなる解釈を与えてもこれが真となることが理解できる．

3.3 S4 より弱い論理への一般化

グプタは様相論理へのホモフォニック真理論をウォーレスの批判から救った上で，技術的問題として **S4** 以外の論理についても考察している（Gupta 1978, p. 451）．

正規様相論理が **S4** 以上なら命題 2 と同様の結果を与えることができる．何故なら，その証明では最小の正規様相論理 **K** がもつ性質以外には $\Box p \to p$ と $\Box p \to \Box\Box p$ が含まれていれば十分だからだ．逆方向としてどれだけ弱い正規様相論理 Λ にホモフォニック真理論を与えることができるか，と問うこともできる．これに関してグプタは **S4** を弱めた $\mathbf{S4}_n$（ここでは n を 2 以上に一つ固定している）という論理を考慮し部分的解答を与えている．$\mathbf{S4}_n$ とは $\Box p \to \Box\Box p$ を弱めた $\Box^n p \to \Box^{n+1} p$（ここで $\Box^k$ は $\Box$ の k 個の連なりを意味する）と $\Box p \to p$ を公理として加えた正規様相論理である[7]．

Γ_2 の True に関する閉論理式群を，たとえば

$$\Box^n(\mathrm{True}(\overline{p}) \leftrightarrow p)$$
$$\mathrm{Form}(x^\frown(\overline{\wedge}^\frown y)) \to \Box^n(\mathrm{True}(x^\frown(\overline{\wedge}^\frown y)) \leftrightarrow (\mathrm{True}(x) \wedge \mathrm{True}(y)))$$
$$\mathrm{Form}(\overline{\Box}^\frown x) \to \Box^n(\mathrm{True}(\overline{\Box}^\frown x) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(x))$$

のように変えた集合を Γ_3 としよう．この Γ_3 が $\mathbf{S4}_n$ の真理論となる．

命題 3 (Gupta 1978)**.** OL の任意の論理式 φ に対して $\Gamma_3 \vdash_{\mathbf{QS4}_n} \Box^n(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$. それゆえ，$\Gamma_3 \vdash_{\mathbf{QS4}_n} \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$, すなわち，$\Gamma_3$ は $\mathbf{S4}_n$ の真理論である．

(証明) 命題 2 の証明と同様に，まず，任意の OL の式 φ について $\Gamma_2 \vdash_{\mathbf{QS4}_n} \mathrm{Form}(\overline{\varphi})$ を示し，その後，φ の構成に関する帰納法で $\Gamma_3 \vdash_{\mathbf{QS4}} \Box^n(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ を示せばよい．最後に公理 **T**: $\Box p \to p$ を n 回使え． **(証明終)**

しかしグプタは $\mathbf{S4}_n$ より弱い正規様相論理については

> しかし (**S4**′)［本稿の $\mathbf{S4}_n$］のない論理に対しては (H)［$\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$］のすべての代入例を推論するためには無限個の公理［Γ に相当］が要請されるように

[7] $n = 2$ とせよ．$\mathbf{S4}_2$ は **S4** よりも弱い．なぜなら，**S4** の下で $\Box\varphi$ と $\Box\Box\varphi$ が同値となることに注意すれば，**S4** で $\Box\Box p \to \Box\Box\Box p$ を導くことができるためだ．しかしこの逆は一般には成り立たない．

> 思える．それゆえ，**(S4′)** のない様相論理は，必要な真理論が有限の仕方では構築できないという議論に屈してしまう． （Gupta 1978, p. 451）

と述べている．そこで，ホモフォニックな真理論をもつ様相論理の特徴づけが興味深い技術的問題となる（Gupta 1978, p. 456）．このグプタの問いを受けて様相論理がどのような場合に（条件付の）ホモフォニック真理論をもつかの必要十分条件を与えたのが次節でとりあげるブロイナーである．

§4　ブロイナーのホモフォニック真理論の特徴づけ

グプタが残した問題に対して，ブロイナーがとった戦略の特徴は，これまでのウォーレス，グプタらの証明体系にこだわるアプローチとは異なり，あえてクリプキ意味論を用いたという点にある．以下では，このブロイナーの戦略とそのホモフォニック真理論の特徴づけを概観しよう．彼は，様相演算子が n 個含まれた多様相論理の場合を考察しているが（Braüner 2002），前節までの先行研究との連続性を尊重し □ のみをもつ一様相論理を考察する．

4.1　量化様相論理に対する定領域クリプキフレーム

まず 2.2 節で与えた対象言語（OL）とメタ言語（ML）に対する，クリプキ意味論を与えておこう．簡単にまとめれば，OL に対しては到達可能性関係をもつ通常のクリプキモデルで解釈を与え，ML に対しては定数記号（函数記号）を rigid に解釈する定領域のクリプキモデルで解釈を与える．

フレーム $\langle W, R\rangle$ とは $W \neq \emptyset$ と $R \subset W^2$ をみたすペアであり，**モデル** $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ とは，フレーム $\langle W, R\rangle$, 個体領域 $D \neq \emptyset$, 次をみたす 付値函数 V からなる三重対だ：

- n 項函数記号 f に $f^V : D^n \to D$ を割り当てる．
- n 項述語記号 P に $w \in W$ ごとに $P^V_w \subset D^n$ を割り当てる．

ただし，ここで定数記号は 0 項函数記号，命題記号は 0 項述語記号として扱う．モデル $\langle W, R, D, V\rangle$ は フレーム $\langle W, R\rangle$ に**基づく**という．モデル $\langle W, R, D, V\rangle$ に対する**割り当て**とは s : Var $\to D$ (Var は変数の集合であった) である．$\mathfrak{M}, w \models \alpha[s]$ （$\mathfrak{M}$ の w

と s の下で α が真）はいつもどおり再帰的に定義する．一部を挙げると：

$$\mathfrak{M}, w \models \forall x. P(t_1, \ldots, t_n)[s] \iff \langle \bar{s}(t_1), \ldots, \bar{s}(t_n) \rangle \in P^V_w;$$
$$\mathfrak{M}, w \models \forall x. \alpha[s] \iff \text{任意の } d \in D \text{ に対し } \mathfrak{M}, w \models \forall x. \alpha[s(x|d)];$$
$$\mathfrak{M}, w \models \Box\alpha[s] \iff \text{任意の } w \in W \text{ に対し } (wRv \text{ ならば } \mathfrak{M}, v \models \Box\alpha[s]),$$

ただし，$\bar{s}$ は 割り当て s の項全体への拡大，$s(x|d)$ は x に $d \in D$ を割り当てる以外は s と同じ割り当て（**s の x に関する変種**），である．諸々の妥当性は次のように定義される：$\mathfrak{M} \models \alpha[s]$ （**$\mathfrak{M}$ と s の下で α が妥当**）であるのは，任意の $w \in W$ に対し $\mathfrak{M}, w \models \alpha[s]$ となる場合である．また，$\mathfrak{M} \models \alpha$ （**$\mathfrak{M}$ で α が妥当である**）のは，任意の s に対し $\mathfrak{M} \models \alpha[s]$ となる場合である．また，**α が $\langle W, R \rangle$ で妥当である**のは，α が $\langle W, R \rangle$ に基づくいかなるモデル $\mathfrak{M}$ についても $\mathfrak{M} \models \alpha$ となる場合であり，**α がフレームからなるクラス F で妥当**となる（これを $\mathsf{F} \models \alpha$ とかく）のは，任意の $\langle W, R \rangle \in \mathsf{F}$ について α が $\langle W, R \rangle$ で妥当となる場合である，とする．これらの定義の様相命題論理版も適宜使う．次の事実（Braüner 2002, Lemma 2.1） が成立する．

事実 1. $\psi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n / r_1, \ldots, r_n]$ を命題記号 $r_1, \ldots, r_n$ への論理式 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ への同時代入とせよ．このとき，OL の式 ψ がフレームのクラス F で妥当ならば，ML の式 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ について $\psi[\alpha_1, \ldots, \alpha_n / r_1, \ldots, r_n]$ も F で妥当．

さてブロイナーの戦略では，正規様相論理 Λ ではなく，フレームのクラス F が真理論をもつ，といわれる．この定義のために必要なのが次の局所的帰結の概念である．ψ が φ の F での**局所的帰結**であるのは，F のフレームに基づく任意のモデル $\mathfrak{M}$, 任意の w, $\mathfrak{M}$ 上の任意の割り当て s について（$\mathfrak{M}, w \models \psi[s]$ ならば $\mathfrak{M}, w \models \varphi[s]$），をみたす場合である．

定義 4. メタ言語の閉論理式の有限集合 Γ がフレームのクラス F に対する**真理論**であるのは，OL の任意の式 φ に対して $\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ が $\bigwedge \Gamma$ からの F での局所的帰結である場合である．

ψ が φ の F での局所的帰結であることと $\psi \to \varphi$ が F で妥当であることが同値になることに注意すれば，有限集合 Γ がフレームのクラス F に対する真理論であるのは，任意の対象言語の論理式 φ に対して $\bigwedge \Gamma \to (\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ が F で妥当である場合だといってもよい．

ブロイナーが特徴づける真理論はさらに次の「固有」［proper］条件をみたす．

定義 5. フレームのクラス F に対する真理論 Γ が**固有**であるのは，F 中のフレームに基づく OL のモデル $\langle W, R, V\rangle$ が $\mathfrak{M} \models \bigwedge\Gamma$ をみたす ML のモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ へと拡大できる場合である[8].

このような条件をブロイナーが課す一つの理由は，$\Gamma = \{\bot\}$ といったトリヴィアルな真理論を排除するためである．何故なら，いかなる ML のモデルをもってきても $\langle W, R, D, V\rangle \not\models \bot$ となるからだ（Braüner 2002, p. 367; 2001, p. 70）．さらに，ブロイナーはこの条件が自然だという．$\mathfrak{M} \models \bigwedge\Gamma$ から $\mathfrak{M} \models \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$ がいえることに注意すれば，後者は φ の構造記述名が True^V_w に入る世界 w と φ が真になる世界 w が一致することを意味している．固有性の条件はこの条件をみたすように Form, True などを解釈せよ，と要請するに等しいため自然だ，というのがブロイナーの主張だ（Braüner 2002, p. 367）．

4.2 クリプキ意味論を介した特徴づけ

この節では，フレームのクラス F が固有な真理論をもつためのブロイナーの特徴づけを説明しよう．彼は，フレーム中の世界 w から R で有限ステップ（0 ステップも含める）で到達できるすべての世界で φ が真のとき，w で $\mathrm{L}\varphi$ を真にする様相演算子 L（以下では**反射推移閉包様相**[9] という）の定義可能性による特徴づけを与えた．この特徴づけに至るために，ブロイナーは R で有限ステップで到達できるどの二つの世界を考えても一方の世界からもう一方の世界へと R で n ステップ以内で到達できる，という n-**有界性**の概念を援用する．まずは反射推移閉包様相からみていこう．

フレームのクラス F が反射推移閉包様相 L をもつことは次のように定義できる．

定義 6. $\mathrm{L}(p)$ を p のみが出現する OL の論理式とせよ．$\mathrm{L}(p)$ がフレームのクラス F に対する**反射推移閉包様相**であるのは，F の要素に基づく任意のモデル $\langle W, R, V\rangle$ と $w \in W$ に対して，$\mathfrak{M}, w \models \mathrm{L}(p) \Longleftrightarrow wR^*v$ なる任意の $v \in W$ に対して $\mathfrak{M}, v \models p$, ただし R^* は R の反射的推移的閉包である，となる場合である．

明らかに $\mathrm{L}(p) \to \Box p$ であり[10]，L を様相とみなせば **S4** の公理に従うことがわかる

[8] ここで OL と ML のモデルに同じ付値函数 V を用いているが，ML の V は，OL の V の命題記号（0 項の述語記号）の解釈は同じまま（ここに個体領域の情報は必要ない），1 項以上の述語記号，関数記号の解釈を新たに付け加えたものを意味している．

[9] この様相演算子は（Braüner 2002, Definition 3.1） では ‘master modality’ と呼ばれている．

[10] 意味論的に言えば，有限ステップでたどりつけるどの世界でも p が真なら，1 ステップでたどりつけ

だろう．逆に言えば，L(p) はこのような性質をもつ様相の内で（意味論的に）最小のものを与えている．

ブロイナーはフレームのクラス F がこの反射推移閉包様相をもつ場合に固有な真理論を与えることができることを明らかにした．そのためにはまず固有な真理論となるべき ML の閉論理式の集合を特定する必要がある．まず Form に関する閉論理式群は以前と同様のものを準備する．True の部分に関しては Γ_3 の

$$\mathrm{Form}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \to \Box^n(\mathrm{True}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \neg\mathrm{True}(x))$$

の $\Box^n$ の部分をすべて

$$\mathrm{Form}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \to \mathrm{L}(\mathrm{True}(\overline{\neg}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \neg\mathrm{True}(x))$$

のように L で置き換えた閉論理式群を考えればよい（ここで L(φ) は L(p) の p を φ で置き換えた式）．この閉論理式の集合を Γ_4 としよう．

命題 7 (Braüner 2002)**.** L が F に対する反射推移閉包様相ならば Γ_4 は F に対する固有な真理論である．

(**証明**) ψ を OL の式とせよ．このとき F で $\mathrm{L}(o \leftrightarrow s) \to (\psi[o/r] \leftrightarrow \psi[s/r])$ が妥当となる（o, s, r は命題記号，直観的にいうなら有限の R-ステップ内で o と s の同値性が保障されている場合は OL の式 ψ の $\Box$ の入れ子の深さは有限なので同値式の入れ替えができる，ということ（Braüner 2002, Lemma 3.2)）．このとき F で $\mathrm{L}(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi) \to (\psi[\mathrm{True}(\overline{\varphi})/r] \leftrightarrow \psi[\varphi/r])$ が（量化様相論理の意味で）妥当となる（事実 1 による）．すると任意のフレーム $\langle W, R \rangle$ で $\bigwedge \Gamma_4 \to \mathrm{L}(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ が妥当となるので，結局 F で $\bigwedge \Gamma_4 \to (\psi[\mathrm{True}(\overline{\varphi})/r] \leftrightarrow \psi[\varphi/r])$ が妥当となる．さて，ψ として r をとれば $\mathrm{F} \models \bigwedge \Gamma_4 \to (\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ を得る．これで Γ_4 が真理論になることがわかった．次に，$\langle W, R, V \rangle$（ただし $\langle W, R \rangle \in \mathrm{F}$）を $\mathfrak{M} \models \bigwedge \Gamma_4$ をみたす $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, V \rangle$ へと拡大できることを示す．そのためには，$D = \{t \,|\, t$ はメタ言語の項$\}$ とし，V を次のように拡張せよ：

- $(\overline{\varphi})^V = \overline{\varphi} \in D$.
- $\overline{\varphi}\,\hat{}^V\,\overline{\psi} = \overline{\varphi}\,\hat{}\,\overline{\psi}$.
- $\mathrm{Form}^V_w = \left\{\overline{\varphi} \,|\, \varphi \text{ は対象言語の式}\right\}$.

るどの世界でも p が真，である．これは $\Box$ がどのような性質をみたす様相であっても成立する．

- $\mathrm{True}_w^V = \left\{ \overline{\varphi} \,|\, \varphi$ は対象言語の式 & $\langle W, R, V \rangle, w \models \varphi \right\}$.

すると明らかに $\langle W, R, D, V \rangle \models \bigwedge \Gamma_4$ となる． **(証明終)**

この命題の逆向きは n-有界性という概念を経由することで証明される．

定義 8. $n \in \mathbb{N}$ を一つ固定する．さらに $\langle W, R \rangle$ をフレームとせよ．このとき，$w \in W$ が $v \in W$ に n-**related** であるのは，$\langle w, v \rangle \in \bigcup_{k \leq n} R^k$, すなわち，ある $k \leq n$ が存在して $wR^k v$ である場合である[11]．フレーム $\langle W, R \rangle$ が n-**有界**であるのは，$wR^* v$ をみたす任意の $w, v \in w$ について w が v に n-related である場合である．フレームのクラス F が n-**有界**であるのは，任意の $\langle W, R \rangle \in$ F が n-有界である場合である．

たとえば R が推移的なフレームのクラスは少なくとも 1-有界である．以下の命題で述べるように，n-有界であるフレームのクラスでは反射推移閉包様相を $\Box^{\leq n} p$ （p は n-ステップ以内で到達できるどの世界でも真）という形で具体的に構成できる．これは帰納的に $\Box^{\leq 0} p := p$; $\Box^{\leq n+1} p := \Box^{\leq n} p \wedge \Box\Box^{\leq n} p$ と定義される．たとえば $\Box^{\leq 3} p$ は $p \wedge \Box p \wedge \Box\Box p \wedge \Box\Box\Box p$ だ．$\Box^{\leq n}$ に対応する到達可能関係は $\bigcup_{k \leq n} R^k$ である．

命題 9 (Braüner 2002)**.** F が n-有界ならば $\Box^{\leq n} p$ は F の反射推移閉包様相である．

(証明) F が n-有界としよう．F の要素に基づくモデル $\langle W, R, V \rangle$ を考えよう．このとき $\langle W, R, V \rangle, w \models \Box^{\leq n} p$ は，任意の $\langle w, v \rangle \in \bigcup_{k \leq n} R^k$ について $\langle W, R, V \rangle, v \models \Box^{\leq n} p$, と同値だ．F が n-有界であることを用いて，この式から，任意の $wR^* v$ について $\langle W, R, V \rangle, v \models \Box^{\leq n} p$, を導ける．この逆の含意は明らか． **(証明終)**

これから R が推移的なフレームのクラスの場合は $p \wedge \Box p$ が反射推移閉包様相となる．命題 7, 9 から F が n-有界なら固有な真理論をもつ．この逆もわかる．

命題 10 (Braüner 2002)**.** F が固有な真理論をもつならば F はある $n \in \mathbb{N}$ について n-有界.

(証明) F が固有な真理論 Γ をもつとせよ．$\langle W, R \rangle \in$ F とし $w, v \in W$ を $wR^* v$ をみたす要素とせよ．すると ある m について w は v に m-related である．以下ではこの m が w や v に依存しない形で一様に取りなおせることを示す．ここで，対象言語の付値函数 V を任意の $u \in W$ に対し $p_u^V = 1$ と定めよ．すなわち V の下ではどの p もすべ

[11] R^k は以下のように帰納的に定義される：$R^0 := \{ \langle w, w \rangle \,|\, w \in W \}$; $R^{n+1} := R^n \circ R$, ただし $\circ$ は関係の合成である．

ての世界で真となる．仮定により $\langle W, R, V\rangle$ をメタ言語のモデル $\mathfrak{M} = \langle W, R, D, V\rangle$ へと拡張し，$\mathfrak{M} \models \bigwedge\Gamma$ とできる．s を任意の割り当てとすると，$\mathfrak{M}, w \models \bigwedge\Gamma[s]$, それゆえ，$\mathfrak{M}, w \models \mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p}) \leftrightarrow \Box^{\leq m} p[s]$. このとき，$V$ の決め方から $\mathfrak{M}, w \models \Box^{\leq m} p[s]$ なので $\mathfrak{M}, w \models \mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p})[s]$ だ．ここで一般に ML の式 α の様相演算子の入れ子の最大の深さを depth(α) と書くことにしよう（厳密な定義は（Braüner 2002, p. 372）をみよ)．たとえば α が $\Box\forall x.(\mathrm{True}(x) \wedge \Box\mathrm{Form}(y))$ なら depth(α) = 2 だ．さて V' を量化様相論理版の付値 V と次の点を除いてきっかり同じ付値とせよ：任意の $u \in W$ について

$$p_u^{V'} = \begin{cases} 1 & \text{if } w \text{ は } u \text{ に depth}(\bigwedge\Gamma)\text{-related である} \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$\mathfrak{M}' = \langle W, R, D, V'\rangle$ と置け．すると，$\bigwedge\Gamma$ の充足にかかわるのは高々 depth($\bigwedge\Gamma$)-ステップで w と関係付けられている世界だけなので，V' の定義と $\mathfrak{M}, w \models \bigwedge\Gamma[s]$ より，$\mathfrak{M}', w \models \bigwedge\Gamma[s]$ となり（Braüner 2002, Lemma 3.7)，これから $\mathfrak{M}', w \models \mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p}) \leftrightarrow \Box^{\leq m} p[s]$. ところで $\mathfrak{M}, w \models \mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p})[s]$ であったことと付値 V' の定義より $\mathfrak{M}', w \models \mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p})[s]$ となる（$\mathrm{True}(\overline{\Box^{\leq m} p})$ には命題記号は出現しない．$\overline{p}$ は出現しても問題ない（Braüner 2002, Lemma 3.5))．これは $\mathfrak{M}', w \models \Box^{\leq m} p[s]$ を含意する．だから，$p_v^{V'} = 1$. それゆえ，w は v に depth($\bigwedge\Gamma$)-related. よって F は depth($\bigwedge\Gamma$)-有界． **(証明終)**

結局ブロイナーは 命題 7, 9, 10 により次の特徴づけを明らかにした．

系 11 (Braüner 2002)**.** F をフレームのクラスとせよ．このとき次の三つは同値．(i) F は反射推移閉包様相をもつ，(ii) F は固有な真理論をもつ，(iii) F はある $n \in \mathbb{N}$ について n-有界．

4.3 ハンバストンの示唆の適用

ホモフォニック真理論の元々の動機が可能世界にコミットせずに様相論理に真理論を与えることができるか，という点にあったことを思い起せばブロイナーの試みはその点を尊重していない，と批判されるかも知れない．しかし，量化様相論理の（定領域フレームのクラスに関する）完全性定理を経由すればブロイナーの結果を経由して特定の意味論にコミットしない，定義 1 の意味での真理論に関する結果が導ける点は見過ごされてはならない：

命題 12. $Q\Lambda$ がクリプキフレームのクラス F に対して完全，すなわち，任意の ML の論理式 α に対して F $\models \alpha$ なら $\vdash_{Q\Lambda} \alpha$, がいえるとせよ．このとき，F に対する真理論は

Λ に対する真理論である.

(証明) Γ を F に対する真理論とせよ. ML の論理式 φ を考える. $\mathrm{F} \models \bigwedge\Gamma \to (\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ だ. 完全性により, $\vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \bigwedge\Gamma \to (\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$. これから $\Gamma \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$. **(証明終)**

とはいえ定領域フレームのいかなるクラスに対しても完全性が成立しない量化様相論理 $\mathbf{Q}\Lambda$ の存在(Hughes and Cresswell 1996, Theorem 14.14)や元々の動機に照らせば,ブロイナーの意味論的特徴づけを証明論的に書き換えることができないか,と問うのは当然である.

ハンバストンは別文脈で **S4** よりも弱い正規様相論理にホモフォニックな **モデル理論**を与えるためには $\blacksquare p \to \Box p$ をみたす新しい **S4** 様相 $\blacksquare$ を**追加演算子**として加えればよい,と示唆している(Humberstone 1996, pp. 231–232).ブロイナーが用いた反射推移閉包様相 L がこのような性質をもつ(意味論的に)最小のものであったことを思い起こせば,ハンバストンの示唆は真理論の文脈にも適用できる[12].$\mathbf{Q}\Lambda$ の定義に,$\blacksquare$ に関する上述の公理 $\blacksquare p \to \Box p$ や $\blacksquare(p \to q) \to (\blacksquare p \to \blacksquare q)$, $\blacksquare$ に関する Nec, $\forall x.\blacksquare\alpha \to \blacksquare\forall x.\alpha$ を加えて定義した新しい二様相量化拡大を $\mathbf{Q}_{\blacksquare}\Lambda$ としよう.これは**一様相**論理の Λ に対して定義される拡大,すなわち,メタ言語 ML を構成する際に $\blacksquare$ を加えているのであって,**対象言語** OL **のレベルで $\blacksquare$ を加えているのではない**ことに注意されたい.このとき Γ_4 の L の箇所をたとえば

$$\mathrm{Form}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \to \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\Box}\,\hat{}\,x) \leftrightarrow \Box\,\mathrm{True}(x)) \tag{7}$$

のように $\blacksquare$ で置き換えた閉論理式の集合を Γ_5 とせよ.すると次がいえる.

命題 13. OL の任意の論理式 φ に対して $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}_{\blacksquare}\Lambda} \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$. それゆえ $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}_{\blacksquare}\Lambda} \mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi$, すなわち,$\Gamma_5$ は Λ に対する真理論である.

(証明) 命題 2 の証明とほぼ同様にできる.ここでは $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\varphi}) \leftrightarrow \varphi)$ の,φ が $\Box\psi$ の場合のみ確認しておく.$\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\Box\psi}) \leftrightarrow \Box\psi)$ を示す.まず帰納法の仮定より $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\psi}) \leftrightarrow \psi)$ だ.公理 $\blacksquare p \to \blacksquare\blacksquare p$ に注意して $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare\blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\psi}) \leftrightarrow \psi)$. 公理 $\blacksquare p \to \Box p$ から $\blacksquare\blacksquare p \to \blacksquare\Box p$ が定理になることが分かるので,$\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare\Box(\mathrm{True}(\overline{\psi}) \leftrightarrow \psi)$ だ.これから,$\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare(\Box\mathrm{True}(\overline{\psi}) \leftrightarrow \Box\psi)$(この推論は $\Box$ が

[12] ハンバストンは(Humberstone 1996, p. 235, 脚注 21)ですでに反射推移閉包様相を述べている.

正規様相論理でさえあれば可能).さて (7) より $\Gamma_5 \vdash_{\mathbf{Q}\Lambda} \blacksquare(\mathrm{True}(\overline{\Box\psi}) \leftrightarrow \Box\mathrm{True}(\overline{\psi}))$ なので,直前の式と合わせてほしい結果を示すことができる. **(証明終)**

命題 2, 3 はこの命題の系となる[13].さらに,Λ が**いかなる正規様相論理であっても**この命題は成立する.しかし,3.3 節の最後のグプタの引用が教えてくれるのは,$\mathbf{S4}_n$ よりも弱い正規様相論理 Λ への $\blacksquare$ の導入は $\blacksquare$ を加えない量化様相論理での「真理論」Γ を無限集合にしてしまうことに相当している,ということだ.

§5 結論

様相論理へのホモフォニック真理論は,必然化された T-同値文に関するウォーレスの批判に,グプタが反論することでその可能性が明らかにされた.グプタ以降に問題となったのはホモフォニック真理論の成立する様相論理の特徴づけであり,これはどのような場合に無限集合の「真理論」をデイヴィドソンの基準をみたす有限集合の真理論に置き換えることができるか,という問いに等しい.ブロイナーはあえてクリプキ意味論を利用することで特徴づけを与えたが,**非トリヴィアルな真理論**に初めて一つの基準(**固有性**)を与えた.デイヴィドソンの真理論で有限性が尊重されていた点や歴史的経緯を踏まえると,非トリヴィアルなホモフォニック真理論をもつ様相論理へ証明論的特徴づけを与えることが望まれる[14].

参考文献

Belnap, N. 2006. Bressan's type-theoretical combination of quantification and modality. In *Modality matters: Twenty-five essays in honour of Krister Segerberg*, ed. H. Langerlund, S. Lindstöm, and R. Sliwinsli, pp. 31–53. Uppsala: Uppsala Universitet.

Belnap, N. D. and D. L. Grover. 1973. Quantifying in and out of quotes. In *Truth, syntax and modality*, pp. 17–47. North-Holland Publishing Company.

[13] 後者については $\Box^n$ をひとつの様相演算子だと考えると $\Box^n p \to p, \Box^n p \to \Box^n\Box^n p, \Box^n p \to \Box p$ が成立することに注意せよ.

[14] 本稿は私の参加する David Lewis 研究会での数回の論文発表を下に書かれた.数回の発表を聞いてくださった皆さんに感謝したい.また,詳細なコメントをいただいた査読者にも感謝したい.しかし依然として残る誤りはすべて著者自身のものである.

Braüner, T. 2001. Homophonic theory for tense logic. In *Advances in modal logic*, ed. M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing, and M. Zakharyaschev, pp. 59–72. Stanford: CSLI publications.

———. 2002. Modal logic, truth and the master modality. *Journal of Philosophcal Logic* 31: 359–386.

Bressan, A. 1972. *A general interpreted modal calculus*. New Haven: Yale University Press.

Davidson, D. 1967. Truth and meaning. *Synthese* 17: 304–323.

———. 1973. In defence of convention T. In *Truth, syntax and modality*, ed. H. Leblanc, pp. 76–86. North-Holland Publishing Company. [野本和幸・植木哲也・金子洋之・高橋要訳『真理と解釈』(勁草書房, 1991 年), 57–72 頁.]

Gupta, A. 1978. Modal logic and truth. *Journal of Philosophcal Logic* 7: 441–472.

Hughes, G. H. and M. J. Cresswell. 1996. *A new introduction to modal logic*. London and New York: Routledge.

Humberstone, L. 1996. Homophony, validity, modality. In *Logic and reality: Essays in the legacy of Arthur Prior*, ed. B. J. Copeland, pp. 215–236. New York: Oxford University Press; Oxford: Clarendon Press.

Kripke, Saul A. 1963. Semantical considerations on modal logic. *Acta Philosophica Fennica* 16: 83–94.

Peacocke, C. 1978. Necessity and truth theories. *Journal of Philosophical Logic* 7: 473–500.

Tarski, A. 1956. The concept of truth in formalized languages. In *Logic, semantics, metamathematics*, pp. 152–278. Oxford: Clarendon Press.

Wallace, J. 1970. On the frame of reference. *Synthese* 22: 61–94.

———. 1975. Nonstandard theories of truth. In *The logic of grammar*, ed. D. Davidson and G. Harman, pp. 50–60. Encino: Dickenson Publishing Company.