する核振動構造が吾々の理論から分析される．其際 ε の適當な値が定められるだろう．

文　　献

1) M. Born und J.R. Oppenheimer: Ann. d. Phys. **84** (1927), 457
2) R. Renner: Zeits. f. Phys. **92** (1934) 172.
3) W. H. Shaffer: Rev. Mod. Phys. **16** (1944) 245.

(昭和 24 年 2 月 28 日受理)

スピン函數の變換性に就て (I)

On the Transformation Properties of Spin Functions. I

鳴　海　元

Hajime Narumi

量子力學に於て幾つかの同種粒子を含む系の狀態(準位)を決定するためには，それら粒子の置換縮退，並びにその粒子に固有な統計的性質に關連して，この同種粒子系のスピン函數を求めておく事が本質的に要求される．(この場合スピンの相互作用は省略する)．スピンが½の場合には既に多電子問題に於て，主として Slater, Dirac, Van Vleck, Serber, 並びに山内氏等によつて定式化されていることは周知の如くである．[1]

吾々の問題はスピンが任意の整數又は半奇數の場合に，その同種粒子系のスピン函數の變換性を決定することである．そのためには，スピン函數を基底とする廻轉群並びに對稱置換群の表現を同時に簡約すると云う方法を採つた．[2]

今スピンが s なる粒子のスピン空間に於ける廻轉群の表現を ϑ_s とし，この粒子の f 箇の集合に注目すれば，この系の獨立なスピン函數として，

$$U_\lambda^{(1)} U_\mu^{(2)} \cdots\cdots U_\nu^{(f)}, \text{ 但し } \lambda, \mu, \cdots\cdots, \nu = s, s-1, \cdots\cdots, -s \qquad (1)$$

なる $(2s+1)^f$ 箇の基底が $(2s+1)^f$ 次元ベクトル空間 R を作り，この空間の廻轉，及び同種粒子の總ての置換によつて，一次變換を受ける．かくして R に於て廻轉群及び對稱群の表現が同時に得られる．前者を $[\vartheta_s]_f$ (Kronecker の f 乘積)，後者を π_f で表わす．スピン函數に對する演算子としては，兩群は可換であるから，R に於ける兩表現は同時に簡約することが可能である(定理)[3]．この事實は基底ベクトルに關して次の形の矩形の組に分割し得ることを意味する：

$$\begin{matrix} V_{11}, \cdots\cdots, & V_{1n} \\ \vdots & \vdots \\ V_{k1}, \cdots\cdots, & V_{kn} \end{matrix} \; ; \quad \begin{matrix} V'_{11}, \cdots\cdots, & V'_{1n'} \\ \vdots & \vdots \\ V'_{k'1}, \cdots\cdots, & V'_{k'n'} \end{matrix} \; ; \cdots\cdots \qquad (2)$$

スピンが½の場合にはこの各行及び各列に屬する基底の組は夫々の群の一つの既約表現に屬する．併しスピンが任意の場合には必ずしも其關係は成立たない．卽ち廻轉群の積表現の簡約；

$$[\vartheta_s]_f=\sum_S c_{(s,f)}\vartheta_S,\ (S=fs-g) \tag{3}$$

但し $g=0, 1, 2, \cdots\cdots fs$, 又は $fs-\frac{1}{2}$; c_{sf} は ϑ_S に同値な表現の數）によつて得られる合成スピン S で指定される既約表現 ϑ_S が，(2) の矩形の一つに對應するとすれば，これに屬する對稱群の表現は必ずしも既約ではないと云う點が注意される．

この場合の基底はどうなるか．今各粒子のスピン空間のウニテール基底を

$$U_\lambda^{(i)}=(u_1^{(i)})^{s+\lambda}(u_2^{(i)})^{s-\lambda}/\sqrt{(s+\lambda)!(s-\lambda)!} \tag{4}$$

(但し $i=1, 2, \cdots\cdots, f$; $\lambda=s, s-1, \cdots\cdots, -s$) と取り，$u_1^{(i)}$, $u_2^{(i)}$ に反傾な變數 x_1, x_2 を導入すれば，次の不變式が得られる．

$$I=\prod_{i<j}(u_1^{(i)}u_2^{(j)}-u_2^{(i)}u_1^{(j)})^{\sigma ij}\prod_k(u_1^{(k)}x_1+u_2^{(k)}x_2)^{2s-g_k} \tag{5}$$

但し $\sum_{i<j}\sigma_{ij}=g$, $g_k=\Sigma'\sigma_{ij}(k=i$ 又は $j)$, 又は $g_k=0(k\neq i, j)$, 且 Σ' はすべての k に就ての總和を意味する．そうすれば ϑ_S の基底は $M=S, S-1, \cdots\cdots, -S$ に對して，不變式(5)の展開に於ける

$$X_M^S=x_1^{S+M}x_2^{S-M}/\sqrt{(S+M)!(S-M)!} \tag{6}$$

の係數として與えられる．これで (2) の矩形が具體的に得られる．

そこで ϑ_S に屬する對稱群の表現を簡約することによつて吾々の問題は解かれる．その場合には表現行列の構成を必要としない．即ちRに於ける表現の指標が基底の選び方に對して不變であると云う事實から，R に於ける一次變換 AP の指標を (1) 及び(2)の基底に對して求める．茲に A は

$$U_s=\zeta^sU_s,\ U_{s-1}=\zeta^{s-1}U_{s-1},\ \cdots\cdots,\ U_{-s}=\zeta^{-s}U_{-s} \tag{7}$$

なるウニテール變換，P は循環構造 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_\rho)$, 但し $\sum_{i=1}^{\rho}\alpha_i=f$ によつて一意的に定められる置換を意味する．今 $\chi_S(P)$ を ϑ_S に屬する P なる置換の表現の指標とすれば，上記の指標の不變性から，整數のスピンに對しては

$$\sum_S\chi_S(P)(\zeta^S+\zeta^{S-1}+\cdots+\zeta^{-S})=\prod_{i=1}^{\rho}(\zeta^{s\alpha i}+\zeta^{(s-1)\alpha i}+\cdots+\zeta^{-s\alpha i}) \tag{8a}$$

半奇數のスピンに對しては，

$$\sum_S\chi_S(P)(\zeta^{2S}+\zeta^{2s-}+\cdots+\zeta^{-2s})=\prod_{i=1}^{\rho}(\zeta^{2s\alpha i}+\zeta^{(2s-2)\alpha i}+\cdots+\zeta^{-2s\alpha i}) \tag{8b}$$

なる恆等式が得られる．從つて $\chi_S(P)$ は多項式：

$$\prod_{i=1}^{\rho}(\zeta^{2S\alpha i}+\zeta^{(2s-1)\alpha i}+\cdots\cdots+1)(1-\zeta) \tag{9}$$

の ζ^g の係數として決定される．これを對稱群の總ての類 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_\rho)$ について求め，然る後對稱群の單純指標に分解すればよい[4]．斯くして得られた對稱群の表現の簡約の結果から，一般に $2s+1\geqq f$ なる場合に，既約表現のすべてが少くとも一度はその既約成分に含まれると云う定理が具體化されていることが解る．個々のスピンの場合の結果，並びに核スピン函數えの應用に就いては次の報告に讓ることにする．

註及び文献

1) Dirac による特性演算子の方法を高次の置換に擴張した最近の文献は：E. M. Corson, Phys. Rev. **73** (1948), 36.

2) 他の方法の擴張は茲では述べない．

3) B. L. van der Waerden : "Gruppentheoretische Methrode in der Quantenmechanik" (1932).

4) F. D. Murnaghan : "Theory of Group Representations" (1938).

（昭和 24 年 2 月 28 日受理）