原　　報

1. 多次元空間における角運動量の量子化について(第1報)

鳴　海　　元・中右太爾宏

On the Quantization of Angular Momentum in Multi-Dimensional Space. (I)

Hajime Narumi and *Tanehiro Nakau*

(Yukawa Laboratory)

In general quantum-mechanical investigations, the problem of the degeneracy of energy spectra plays an important role. This degeneracy is associated with the symmetry conditions under which the Hamiltonian is invariant, and is related not only to the 3-dimensional full rotation-reflection group and the symmetric permutation group which produces the so-called permutation degeneracy, but also to the symmetry group in a broad sense. The latter type of degeneracy is based upon the fact that the Schrödinger equation for the hydrogen atom actually has the symmetry of the 4-dimensional rotation group for the negative energy (bound) states, and the symmetry of the Lorentz group for the positive energy (continuous) states. The degeneracy of the system with respect to the quantum number l is due to the invariance under these wider groups, of which the 3-dimensional rotations form a sub-group.[1,2] In this case there is an attempt of generalization of the degeneracy problem, which is related to the existence of groups of contact transformations, developing the correspondence between the transformations in classical and quantum theories.[3]

We have attempted to find a fundamental foundation of this problem, and it is a purpose of the present paper to give one of the preliminaries to them. In the first part the representations of the infinitesimal rotations in the multi-dimensional space have been obtained, and in the second part of the present title the energy levels of the 4- and 5-dimensional isotropic oscillators will be determined in relation to the problem of degeneracy, and it will be shown that the symmetry group of the Schrödinger equation for the n-dimensional oscillator is isomorphic to the n-dimensional unimodular unitary group with (n^2-1)-parameters. The essential part of our investigations will successively appear after this second part.

§ 1. 緒　言

量子力學における縮退の問題は, 一般に Hamiltonian を不變ならしめる特定の對稱條件によつて規定せられ, 3次元の廻轉鏡映群や同種粒子の置換の群に關係する場合と, 更に廣義の群に對する不變性に基ずく場合とがある. 後者の例としては, 水素原子に關する Schrödinger 方程式が負エネルギー狀態に對しては4次元廻轉群に, 正エネルギー狀態(連續領域)に對しては Lorentz 群に屬する對稱性をもつている事實である[1,2]. この場合には Hamiltonian を不變ならしめる接觸變換群の存在にもとずき, 古典論と量子論の變換の間の對應に注目して, この問題を一般化しようという試みがある[3].

我々はこれらを更に廣い見地から群論的に基礎ずけ, あわせてその擴張の可能性を論じるのであるが, 先ずその序論としてこの論文の第Ⅰ部では, 多次元空間における無限小廻轉の表現を求める. しかもその基本形式が先ず real definite な場合に限定しておく. Real indefinite な場合は相對論的に擴張するときに必要であつて, この問題は改めて論じる(尚この主題のスピノール表現については,本文末尾の文献(4)を參照). 以上の數學的準備に續いて,第Ⅱ部では多項式による表現が與えられ,問題を物理的に具体化する. そして一つの應用例として,4次元及び5次元の等方性調和振動子の系をとつて,そのエネルギー準位の決定が見られる. 同時に縮退の問題に立入つて,一般にn次元の等方性振動子に對する Schrödinger 方程式の群が, (n^2-1)箇のパラメーターをもつn次元單模ウニテール群に同型であることを證明する. 縮退の問題に對する本論はこの第Ⅱ部に引續いて報告する.

§ 2. 多次元空間における無限小廻轉の表現

n次元空間の角速度1の無限小廻轉は,

$$a_{\lambda\mu}+a_{\mu\lambda}=0, \qquad a_{\lambda\mu}=0\ (\lambda=\mu) \tag{2.1}$$

の行列元素から成る行列

$$(a_{\lambda\mu})=-(a_{\mu\lambda})$$

で表わすことが出來る. しかもこれらの獨立な數は$\frac{1}{2}n(n-1)$箇あつて, そのすべては Lie 環の條件を滿足するから, 乘法を交換積の意味にとつて環を構成する. 即ち交換關係として,

$$[(a_{\lambda\mu})\,(a_{\mu\nu})]=(a_{\lambda\nu}), \tag{2.2}$$

ならびに Jacobi の關係:

$$[[(a_{\lambda\mu})(a_{\nu\pi})](a_{\rho\sigma})]+[[(a_{\nu\pi})(a_{\rho\sigma})](a_{\lambda\mu})]+[[(a_{\rho\sigma})(a_{\lambda\mu})](a_{\nu\pi})]=0 \tag{2.3}$$

が滿される．これらの關係を滿足するLie環の表現は完閉群の表現に同値であつて，Lie環の一般の構成法に従えば，獨立な各元素は一次ベクトル空間を張り，適當な一次變換によつて正則元素の固有ベクトルに分類することが出來る．この場合，環は半單純であるから，この表現は既約表現である．且つ一般の既約表現のすべては，あらゆる積表現を簡約することによつて得られる[5]．

以上の事實から，すべての可換な元素の一組をとり（これは必ずしも最大可解部分環ではないが），これによつて元素の一次集合をベクトルとみなして固有ベクトルに變換する．この場合，物理的意味を明らかにするために，元素の行列表現の固有値が純虚數であることに注意して，各元素に $i=\sqrt{-1}$ をかけて，すべてHermite行列になるようにしておくと都合がよい．何れかの軸の円りの廻轉を基準にとつて，その廻轉に對する固有値を考える場合，それをたとえば $(a_{\lambda\mu})$ にえらべば，

$$i(a_{\lambda\mu})=\Gamma_0 \tag{2.4}$$

とおくことが出來る．そしてすべての元素を次の二組に分ける．

1°. $$[(a_{\lambda\nu})(a_{\nu\mu})]=(a_{\lambda\mu})$$

を滿足するすべての元素；但し $\nu=1,\ 2,\ldots,\ \lambda-1,\ \lambda+1,\ldots,\ \mu-1,\ \mu+1,\ldots,\ n$ に對して $2(n-2)$ 箇が存在する．

2°. $$[(a_{\lambda\mu})(a_{\nu\pi})]=0$$

を滿足する元素；但し $\nu,\ \pi=1,\ 2,\ldots,\ \lambda-1,\ \lambda+1,\ldots,\ \mu-1,\ \mu+1,\ldots,\ n$ に對する $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ 箇がある．

1°の組のものを

$$\left.\begin{aligned}(a_{\lambda\nu})+i(a_{\mu\nu})&=A_\nu\\ \frac{1}{2}\{(a_{\lambda\nu})-i(a_{\mu\nu})\}&=B_\nu\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

とし，2°の組では

$$(a_{\nu\pi})=C_{\nu\pi} \tag{2.6}$$

とおくと，

$$\left.\begin{aligned}&[A_\nu\,B_\nu]=\Gamma_0,\\ &[A_\nu\,B_\pi]=[B_\nu\,A_\pi]=-C_{\nu\pi},\\ &[A_\nu\,\Gamma_0]=[C_{\nu\pi}\,A_\pi]=A_\nu,\\ &[B_\nu\,\Gamma_0]=-[C_{\nu\pi}\,B_\pi]=-B_\nu,\\ &[A_\nu\,A_\pi]=[B_\nu\,B_\pi]=0,\end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

の交換關係が得られる．

$[(a_{\lambda\mu})(a_{\nu\pi})]=0$ であるから，以上の關係によつて，$\Gamma_0=i(a_{\lambda\mu})$ に對する固有ベクトル

に變換が出來た．更に Γ_0 と可換であり，同時に相互に可換な元素の組をとつて，それに對する固有ベクトルに變換しなければならぬ．それには次元數の奇偶性を區別して取扱うのが便利である．

a°．奇數 $(2m+1)$ 次元の場合．

互に可換な Γ_0 を含む組の一つは，

$$\Gamma_0,\ iC_{\nu\pi}=\Gamma_1,\ iC_{\rho\sigma}=\Gamma_2,\ \ldots,\ iC_{\tau\omega}=\Gamma_{m-1}$$

と取ることが出來る．このとき $\nu,\ \pi;\ \rho,\ \sigma;\ldots,\ \tau,\ \omega$ の添字の組をとれば，最後にたとえば添字 κ が一つ殘る．從つて，

$$\left.\begin{aligned}A_\nu+iA_\pi&=A^+_{\nu\pi}\\A_\nu-iA_\kappa&=A^-_{\nu\pi}\end{aligned}\right\},\qquad\left.\begin{aligned}B_\nu+iB_\pi&=B^+_{\nu\pi}\\B_\nu-iB_\pi&=B^-_{\nu\pi}\end{aligned}\right\},\ \ldots\ldots$$

をそれぞれの $iC_{\nu\pi}$, $iC_{\rho\sigma}$, …, $iC_{\tau\omega}$ に對してとれば，最後に A_κ, B_κ が殘る．そこでこの $A^\pm_{\nu\pi}$, $B^\pm_{\nu\pi}$, A_κ, B_κ を夫々 Γ_0 に對して

$$\begin{aligned}&A^0_\kappa,\ A^{0+}_{\nu\pi},\ A^{0-}_{\nu\pi},\ A^{0+}_{\rho\sigma},\ A^{0-}_{\rho\sigma},\ \ldots,\ A^{0+}_{\tau\omega},\ A^{0-}_{\tau\omega}\\&B^0_\kappa,\ B^{0+}_{\nu\pi},\ \ldots\ldots\qquad\qquad\ ,\ B^{0+}_{\tau\omega},\ B^{0-}_{\tau\omega}\end{aligned}$$

の $2(n-2)$ 箇をとれば，これらはすべて Γ_0 の固有ベクトルになり，同時に Γ_1, …, Γ_{m-1} の固有ベクトルになる．$iC_{\nu\pi}=\Gamma_1$ に對しては，

$$\begin{aligned}&A^1_\kappa=C_{\nu\kappa}+iC_{\pi\kappa},\ B^1_\kappa=\frac{1}{2}(C_{\nu\kappa}-iC_{\pi\kappa})\\&A^{1\pm}_{\rho\sigma}=(C_{\nu\rho}+iC_{\pi\rho})\pm i(C_{\nu\sigma}+iC_{\pi\sigma})\\&B^{1\pm}_{\rho\sigma}=\frac{1}{2}[(C_{\nu\rho}-iC_{\pi\rho})\pm i(C_{\nu\sigma}-iC_{\pi\sigma})]\end{aligned}$$

に變換したものを用いると，今度は κ の添字の次は $\rho\sigma$ から始まり，Γ_1 に對して

$$\begin{aligned}&A^1_\kappa,\ A^{1\pm}_{\rho\sigma},\ \ldots,\ A^{1\pm}_{\tau\omega}\\&B^1_\kappa,\ B^{1\pm}_{\rho\sigma},\ \ldots,\ B^{1\pm}_{\tau\omega}\end{aligned}$$

の $2(n-4)$ 箇が得られる，

このようにして，$\Gamma_2=iC_{\rho\sigma}$, …, $\Gamma_{m-1}=iC_{\tau\omega}$ に對して同樣の組を作れば，最後に

$$\begin{aligned}&\Gamma_{m-1}=iC_{\tau\omega}\\&A^{m-1}_\kappa=C_{\tau\kappa}+iC_{\omega\kappa}\\&B^{m-1}_\kappa=\frac{1}{2}(C_{\tau\kappa}-iC_{\omega\kappa})\end{aligned}$$

が得られる．これらの各組のベクトルはすべて Γ_0, Γ_1, …, Γ_{m-1} の固有ベクトルに外ならない．

b°．偶數 $(2m)$ 次元の場合．

奇數次元の場合と異なり，可換な組を作ると殘る添字はないから，同樣の變換によつて

$$
\begin{array}{lllll}
\Gamma_0 \ldots A^{0+}_{\nu\pi}, & A^{0-}_{\nu\pi}, & \ldots\ldots & , & A^{0+}_{\tau\omega}, \quad A^{0-}_{\tau\omega} \\
\qquad B^{0+}_{\nu\pi}, & B^{0-}_{\nu\pi}, & \ldots\ldots & , & B^{0+}_{\tau\omega}, \quad B^{0-}_{\tau\omega} \\
\Gamma_1 \ldots\ldots & & A^{1+}_{\rho\sigma}, \quad A^{1-}_{\rho\sigma}, & \ldots, & A^{1+}_{\tau\omega}, \quad A^{1-}_{\tau\omega} \\
& & B^{1+}_{\rho\sigma}, \quad B^{1-}_{\rho\sigma}, & \ldots, & B^{1+}_{\tau\omega}, \quad B^{1-}_{\tau\omega} \\
\vdots & & \ldots\ldots\ldots & & \\
\Gamma_{m-1} = iC_{\tau\omega} & & & &
\end{array}
$$

となる．これですべての變換が完結する．ただこの場合には，$A_\varkappa$, $B_\varkappa$ が含まれないだけ簡單になる．

そこで上に得られたベクトルの積表現を考えればよい．その場合に必要な交換關係は次の式で與へられる（但し $\rho\sigma$ に對して η を $iC_{\rho\sigma}=\Gamma_\eta$ に對して $A_{\rho\sigma}=A_\eta$ と書き，A^ι_η $(\iota<\eta)$ は ι が $\rho\sigma$ に續く $\upsilon\phi$ に對して $iC_{\upsilon\phi}=\Gamma_\iota$ と表わされるようにとつてある)：

$$
\left.
\begin{aligned}
&[A^\eta_\varkappa B^\varkappa_\eta]=\Gamma_\eta,\ [A^\iota_\varkappa B^\varkappa_\iota]=\Gamma_\iota, \\
&[A^\iota_\varkappa A^{\iota\pm}_\eta]=0,\ [B^\varkappa_\iota B^{\eta\pm}_\iota]=0, \\
&[A^{\iota\pm}_\eta B^{\eta\pm}_\iota]=0,\ [A^{\iota+}_\eta A^{\iota-}_\eta]=0,\ [B^{\eta+}_\iota B^{\eta-}_\iota]=0, \\
&[\Gamma_\iota A^{\iota\pm}_\eta]=-A^{\iota\pm}_\eta,\ [\Gamma_\eta A^{\iota\pm}_\eta]=\mp A^{\iota\pm}_\eta, \\
&[\Gamma_\iota B^{\eta\pm}_\iota]=B^{\eta\pm}_\iota,\ [\Gamma_\eta B^{\eta\pm}_\iota]=\mp B^{\eta\pm}_\iota, \\
&[A^\eta_\varkappa B^{(\eta+1)\pm}_\eta]=A^{(\eta+1)+}_\varkappa=[B^\varkappa_\eta A^{\eta\pm}_{\eta+1}], \\
&[A^\eta_\varkappa B^{(\eta+1)-}_\eta]=2B^{\varkappa\pm}_{\eta+1}=2[B^\varkappa_\eta A^{\eta-}_{\eta+1}], \\
&[A^{\eta+1}_\varkappa A^{\eta\pm}_{\eta+1}]=[B^\varkappa_{\eta+1} A^{\eta-}_{\eta+1}]=[A^{\eta+1}_\varkappa B^{(\eta+1)+}_\eta]=[B^\varkappa_{\eta+1} B^{(\eta+1)-}_\eta]=0, \\
&[A^{\eta+1}_\varkappa A^{\eta-}_\eta]=-2A^\eta_\varkappa=2[B^\varkappa_{\eta+1} A^{\eta\pm}_{\eta+1}], \\
&[A^{\eta+1}_\varkappa B^{(\eta+1)-}_\eta]=2B^\varkappa_\eta=2[B^\varkappa_{\eta+1} B^{(\eta+1)+}_\eta], \\
&[A^{\eta+1}_\varkappa A^\eta_\varkappa]=A^{\eta\pm}_{\eta+1},\ [A^{\eta+1}_\varkappa B^\varkappa_\eta]=B^{(\eta+1)+}_\eta, \\
&2[B^\varkappa_{\eta+1} A^\eta_\varkappa]=A^{\eta-}_{\eta+1},\ 2[B^\varkappa_{\eta+1} B^\varkappa_\eta]=B^{(\eta+1)-}_\eta.
\end{aligned}
\right\} \tag{2.8}
$$

偶數次元の場合には κ の添字の項は考える必要がない．以上の交換關係を考慮すれば，前述の變換がすべて獨立な固有ベクトルへの變換であることがわかる．しかも各々のベクトルは無限小廻轉の一つの既約表現であり，從つて廻轉群の既約表現に外ならない．

§3．4次元及び5次元空間における表現の構成

本節では問題を更に具体化するために，奇數及び偶數次元の特殊な場合について表現の構成を進める．

a°．$2m+1=5$ 次元の場合．

5次元空間における積表現の既約な形式を求めるに先立つて，3次元空間の場合と同様に

(2.8)の交換關係を用いて既約表現の一般の形を求める．例えば任意のベクトル $\mathfrak{x}$ に環の元素を作用させることは，

$$A\mathfrak{x}=[A\mathfrak{x}],\quad BA\mathfrak{x}=[B[A\mathfrak{x}]] \tag{3.1}$$

の意味であるとする．この演算の場は $[A\mathfrak{x}]=\text{matrix}\,A\cdot\mathfrak{x}$ である．Jacobi の恒等式を用いると，(3.1)の右邊は(2.8)の交換關係を用いて，演算子 BA を獨立に取出して變形しても差支ないことが判る．

以上の事實を考慮して，

$$\Gamma_0=iC_{12},\quad \Gamma_1=iC_{34},\quad A_{34}^{+},\quad A_{34}^{-},\quad B_{34}^{+},\quad B_{34}^{-}$$

に加えて

$$A_5^1=C_{35}+iC_{45}\equiv\alpha,\quad B_5^1=\frac{1}{2}(C_{35}-iC_{45})\equiv\beta$$

とおく．Γ_0 の最大固有値のベクトルの一つ $\mathfrak{x}$ をとれば，

$$\Gamma_0\mathfrak{x}=\lambda\mathfrak{x},\quad B\mathfrak{x}=0 \tag{3.2}$$

であつて，Γ_1 を Γ_0 と同時に主對角的になるようにベクトル $\mathfrak{x}$ を選べば，

$$\Gamma_1\mathfrak{x}=\mu\mathfrak{x} \tag{3.3}$$

が得られる．α, β を作用させたベクトルに對する Γ_1 の關係は3次元の場合と同様であつて，Γ_0 の固有値は不變であるとする．

このとき p, q, r を正の整數として，たとえば

$$[A_{34}^{+}]^q\mathfrak{x}=\underbrace{[A_{34}^{+}[A_{34}^{+}[\dots}_{q\text{回}}\mathfrak{x}]\dots]$$

と規約すれば，

$$\begin{aligned}B_{34}^{-}[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q\mathfrak{x}=&-q\{2(\lambda+\mu)-2(q-1)-2p\}[A_5]^p[A_{34}^{+}]^{q-1}\mathfrak{x}\\&-\frac{1}{2}p(p-1)[A_5]^{p-2}[A_{34}^{+}]^qA_{34}^{-}\mathfrak{x}-2p[A_5]^{p-1}[A_{34}^{+}]^q\beta\mathfrak{x}\end{aligned} \tag{3.4a}$$

$$\begin{aligned}B_{34}^{+}[A_5]^p[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}=&-r\{2(\lambda-\mu)-2(r-1)-2p\}[A_5]^p[A_{34}^{-}]^{r-1}\mathfrak{x}\\&-\frac{1}{2}p(p-1)[A_5]^{p-2}[A_{34}^{-}]^rA_{34}^{+}\mathfrak{x}-p[A_5]^{p-1}[A_{34}^{-}]^r\alpha\mathfrak{x}\end{aligned} \tag{3.4b}$$

$$\begin{aligned}B_5[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}=&\frac{1}{2}p(p-1)[A_5]^{p-1}[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}\\&-p(\lambda-q-r)[A_5]^{p-1}[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}+q[A_5]^p[A_{34}^{+}]^{q-1}[A_{34}^{-}]^r\alpha\mathfrak{x}\\&+2r[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^{r-1}\beta\mathfrak{x}-2qr[A_{34}^{+}]^{q-1}[A_{34}^{-}]^{r-1}[A_5]^{p+1}\mathfrak{x}\end{aligned} \tag{3.4c}$$

$$\begin{aligned}\alpha[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}=&-2r[A_5]^{p+1}[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^{r-1}\mathfrak{x}\\&+p[A_5]^{p-1}[A_{34}^{+}]^{q+1}[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}+[A\;]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\alpha\mathfrak{x}\end{aligned} \tag{3.4d}$$

$$\begin{aligned}2\beta[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}=&-2q[A_5]^{p+1}[A_{34}^{+}]^{q-1}[A_{34}^{-}]^r\mathfrak{x}\\&+p[A_5]^{p-1}[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^{r+1}\mathfrak{x}+2[A_5]^p[A_{34}^{+}]^q[A_{34}^{-}]^r\beta\mathfrak{x}\end{aligned} \tag{3.4e}$$

が得られる．これらの環の表現の一次ベクトル空間を考えた場合に，固有値の最大のベクトルの一つ，たとえば$\mathfrak{x}$に A_{34}^{+} を作用させてゆくと，

$$[A_{34}^{+}]^{q}\mathfrak{x}\neq 0$$

で $[A_{34}^{+}]^{q+1}\mathfrak{x}$ は他のベクトルの和になる場合が考えられる．その場合には Γ_0，Γ_1 の固有値の異なるものは獨立であるとみなされ，$[A_{34}^{+}]^{q+1}\mathfrak{x}$ は Γ_0，Γ_1 に對する固有値の同じものの和：

$$[A_{34}^{+}]^{q+1}\mathfrak{x}=\sum_{xyz}[A_{34}^{+}]^{x}[A_{34}^{-}]^{y}[A_5]^{z}\mathfrak{x}+\sum_{x'y'z'}[A_{34}^{+}]^{x'}[A_{34}^{-}]^{y'}[A_5]^{z'}\begin{Bmatrix}\alpha^{u}\beta^{v}\mathfrak{x}\\ \beta^{u}\alpha^{v}\mathfrak{x}\end{Bmatrix}$$

となる．従つて固有値の條件から容易に右邊第2項の α を含む項のみが殘ることが判る．そこで $\alpha\mathfrak{x}=0$ となるように $\mathfrak{x}$ を選べば，

$$\Gamma_1\mathfrak{x}=\mu\mathfrak{x},\quad \beta^{t}\mathfrak{x}\neq 0,\quad \beta^{t+1}\mathfrak{x}=0,\quad \mu=-\frac{1}{2}t$$

を満足する整數 t が存在する．このとき α の巾は含まれておらず，結局

$$[A_{34}^{+}]^{q+1}\mathfrak{x}=0 \tag{3.5}$$

が得られる．B_{34}^{-} を左乘しても恒等的に0であるから，

$$\lambda+\mu=q \tag{3.5a}$$

となる．A_{34}^{-} の巾についても同様に

$$[A_{34}^{-}]^{r+1}\beta^{t}\mathfrak{x}=0 \tag{3.6}$$

及び

$$\lambda-\mu=r+t,\quad q=r;\quad \mu=-\frac{1}{2}t. \tag{3.6a}$$

このとき(3.5)に β を左乘して

$$[A_{34}^{+}]^{q+1}\beta\mathfrak{x}-(q+1)A_5[A_{34}^{+}]^{q}\mathfrak{x}=0. \tag{3.5$'$}$$

更に β を左乘し，B_{34}^{+} を作用させると，

$$q(q+1)A_5[A_{34}^{+}]^{q-1}\beta\mathfrak{x}=0 \tag{3.5$''$}$$

が得られる．$q\neq 0$ のときは

$$A_5[A_{34}^{+}]^{q-1}\beta\mathfrak{x}=0,\quad A_5[A_{34}^{+}]^{q}\beta\mathfrak{x}=0$$

であるから，B_{34}^{-} を左乘すると

$$[A_{34}^{+}]^{q}\beta^{2}\mathfrak{x}=0$$

となる．$[A_5]^2[A_{34}^{+}]^{q}\beta\mathfrak{x}=0$ も明らかであるから，B_{34}^{+} をかけて，

$$[A_{34}^{+}]^{q+1}\beta\mathfrak{x}=tA_5[A_{34}^{+}]^{q}\mathfrak{x}$$

を得る．これを(3.5$'$)と組合わせると，$q\neq 0$，$t\leqq 1$ で，

$$[A_{34}^{+}]^{q+1}\beta\mathfrak{x}=0$$

の得られることがわかる．故に

$$\beta\mathfrak{x}=0,\ t=0 \tag{3.7}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lambda-\mu=q,\ \ \alpha\mathfrak{x}=0\\ \lambda-\mu=r,\ \ \beta\mathfrak{x}=0\end{array}\right\} \tag{3.7a}$$

但しこの場合，$q=r$ であるとは限らない．又 $[A_{34}^-]^r\mathfrak{x}$ に A_{34}^+ の演算を重ねていつたときの極限は q となり，$[A_{34}^+]^q\mathfrak{x}$ に對して $[A_{34}^-\mathfrak{x}]$ の極限は r となる．更に A_5 を $[A_{34}^+]^q[A_{34}^-]^r$ に作用させたときの極限は，最高巾が $q=r$ となつて，

$$[A_{34}^+]^{q-k}[A_{34}^-]^{q-k}[A_5]^{2k}\mathfrak{x}=[A_{34}^+]^q[A_{34}^-]^q\mathfrak{x} \tag{3.8}$$

$$\lambda+\mu=p,\ \ \lambda-\mu=q;\ \mu=0,\ \ \lambda=\frac{1}{2}(p+q) \tag{3.8a}$$

及び

$$[A_{34}^+]^{q-k}[A_{34}^-]^{q-l}[A_5]^{k+l}\mathfrak{x}=0\ (k\neq l) \tag{3.9}$$

が得られる．

このような制限は最高巾についてゞあつて，最高巾(3.8)を作るように，$\mathfrak{x}$ に A_5, A_{34}^+, A_{34}^- を乘じてゆくと全部の表現が得られる．その獨立な箇數は，

$$1^2+2^2+\ldots+(q+1)^2=\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(2q+3) \tag{3.10}$$

で與えられる．

$q=0$, $t\neq 0$ の場合には，$\alpha\mathfrak{x}=0$ のベクトルに對して

$$A_{34}^+\mathfrak{x}=0,\ \ A_{34}^-\beta^t\mathfrak{x}=0$$

であつて，

$$\lambda=\frac{1}{2}t=-\mu \tag{3.11}$$

が得られる．このときには

$$\left.\begin{array}{l}[A_{34}^+]^l\beta^l\mathfrak{x}\neq 0,\ \ [A_{34}^+]^{l+1}\beta^l\mathfrak{x}=0\\ [A_{34}^-]^l\beta^{t-l}\mathfrak{x}\neq 0,\ \ [A_{34}^-]^{l+1}\beta^{t-l}\mathfrak{x}=0\end{array}\right\} \tag{3.12}$$

となり，最も簡單な場合は

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{x} & \beta\mathfrak{x}\\ A_{34}^+\beta\mathfrak{x} & A_{34}^-\mathfrak{x}\end{pmatrix} \tag{3.13}$$

で，Γ_0，Γ_1 の固有値はそれぞれ

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \tag{3.13a}$$

で與えられる．$\alpha\mathfrak{x}=\beta\mathfrak{x}=0$ の場合の表現，(3.12)の表現もすべて(3.13)の積表現を簡約することによつて得られる．(3.10)における $q=1$ の場合は，5次元空間のベクトルを，(3.12)

の $t=2$ の場合は5次元空間の双ベクトルを與え，直接 Γ_0, Γ_1, A_5, B_5, $A^{\pm}_{34}$, $B^{\pm}_{34}$, α, β の10箇の表現になつている．積表現の簡約は，たとえば

$$\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}\times\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}}=\widetilde{\mathfrak{D}}_1^{+}+\mathfrak{D}_1^{-}+\mathfrak{D}_0^{+}$$

$$\mathfrak{D}_1^{-}\times\mathfrak{D}_1^{-}=\widetilde{\widetilde{\mathfrak{D}}}_2^{+}+\widetilde{\mathfrak{D}}_1^{+}+\mathfrak{D}_0^{+}$$

で與えられる．但し $\mathfrak{D}_1$ はベクトル，$\widetilde{\mathfrak{D}}$ は2階の反對稱テンソル，$\widetilde{\widetilde{\mathfrak{D}}}$ は2階の對稱テンソルを意味する．

以上のようにして任意の奇數次元空間の無限小廻轉の表現が常に構成される．

b°．$2m=4$ 次元の場合．

偶數次元の例として4次元空間の場合をとれば，8組の交換關係から κ の添字に關する部分を除いて，

$$\Gamma_0,\ \Gamma_1,\ A^{+}_{34},\ A^{-}_{34},\ B^{+}_{34},\ B^{-}_{34}$$

の6箇が殘る．交換關係は

$$\left.\begin{aligned}&[\Gamma_0\,A^{\pm}_{34}]=-A^{\pm}_{34},\ [\Gamma_0\,B^{\pm}_{34}]=B^{\pm}_{34}\\&[\Gamma_1\,A^{\pm}_{34}]=\mp A^{\pm}_{34},\ [\Gamma_1\,B^{\pm}_{34}]=\mp B^{\pm}_{34}\\&[A^{\pm}_{34}\,B^{\mp}_{34}]=2(\Gamma_0\pm\Gamma_1),\ [A^{+}_{34}\,A^{-}_{34}]=[B^{+}_{34}\,B^{-}_{34}]=0\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

で與えられる．このときベクトル B^{-}_{34} を B^{+}_{34} 又は A^{-}_{34} に移す演算子，及び B^{+}_{34} を B^{-}_{34} 又は A^{+}_{34} に移す演算子は環の元素にはないから，一般に表現は二組に分けられる．即ち双ベクトル Γ_0, Γ_1, $A^{\pm}_{34}$, $B^{\pm}_{34}$ は B^{-}_{34} から出發して作ることが出來ないからである．

積表現を簡約したときに現われる既約表現は5次元の場合と同じように最大固有値のベクトル $\mathfrak{x}$ から出發して，

$$A^{r+}_{34}B^{t-}_{34}\mathfrak{x}\ (r=0,\ 1,\ \ldots,\ p\ ;\ t=0,\ 1,\ \ldots,\ q)$$

となり，$(p+1)(q+1)$ 箇の表現の基底を得ることが出來る．固有値は Γ_0, Γ_1 に對して，

$$\lambda+\mu=p,\ \lambda-\mu=q\tag{3.15}$$

或いは

$$\lambda=\frac{1}{2}(p+q),\ \mu=\frac{1}{2}(p-q)\tag{3.15'}$$

が得られる．$p=0$, $q=0$ の場合はそれぞれ3次元の場合と同樣に，

$$q=0:\ A^{+}_{34}\mathfrak{x}\sim\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}0}$$

$$p=0:\ A^{-}_{34}\mathfrak{y}\sim\mathfrak{D}_{0\frac{1}{2}}$$

となり，積表現は

$$\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}0}\times\mathfrak{D}_{0\frac{1}{2}}=\mathfrak{D}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}},$$

即ち $p=q=1$ のベクトルを作ることになる．從つて $p\neq q$ に對して一般に

$$\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}\frac{q}{2}}\sim(au+bv)^{p}(cx+dy)^{q}$$

で表わされる．同様に

$$\mathfrak{D}_{(\frac{p}{2}\frac{q}{2})} \sim (au+bv)^p(cx+dy)^q+(au+bv)^q(cx+dy)^p$$

も既約表現になる．たとえば $p=1$, $q=0$ の場合は双ベクトルであつて，環の直接の表現になつている．又その積表現の簡約は一般に

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_{(\frac{p}{2}\frac{q}{2})} \times \mathfrak{D}_{(\frac{p'}{2}\frac{q'}{2})} &= [\mathfrak{D}_{\frac{p}{2}0} \times \mathfrak{D}_{0\frac{q}{2}} + \mathfrak{D}_{\frac{q}{2}0} \times \mathfrak{D}_{0\frac{p}{2}}] \times [\mathfrak{D}_{\frac{p'}{2}0} \times \mathfrak{D}_{0\frac{q'}{2}} + \mathfrak{D}_{\frac{q'}{2}0} \times \mathfrak{D}_{0\frac{p'}{2}}] \\ &= \sum \mathfrak{D}_{\left(\frac{p+p'}{2}-i,\ \frac{q+q'}{2}-j\right)} + \sum \mathfrak{D}_{\left(\frac{p+q'}{2}-k,\ \frac{q+p'}{2}-h\right)}\end{aligned}$$

で與えられ，正の整数 i, j, k, h はそれぞれ，$0 \leqq i \leqq p, p'$; $0 \leqq j \leqq q, q'$; $0 \leqq k \leqq p, q'$; $0 \leqq h \leqq q, p'$ で限定される．(以下第II部)

文　　献

1) Fock, V., Zeits. f. Phys. **98**, 145 (1935)
2) Bargmann, V., ebenda **99**, 578 (1936)
3) Jauch, J.M. and Hill, E. L., Phys. Rev. **57**, 641 (1940)
4) Cartan, E., *Leçons sur la Theorie des Spineur*, II (1938)
5) Weyl, H., Math. Zeits. **23**, 271 (1925) ; **24**, 328, 377 (1926)

(昭和26年6月29日受理)