3. 多次元空間における角運動量の量子化について（第2報）

鳴海　元・中右太爾宏

On the Quantization of Angular Momentum in Multi-Dimensional Space. (II)

Hajime Narumi and *Tanehiro Nakau*

(Yukawa Laboratory)

In the preceding paper of the present subject we have generally formulated the representations of the infinitesimal rotation in the multi-dimensional space, whose fundamental form is real-definite. The second part of the present subject is composed of the representation by polynomials and an application of the general theory to the problem in regard to the angular momentum in the four- and five-dimensional degenerate vibrations. In addition the formulation of the Schrödinger solution of the multi-dimensional harmonic oscillator and the structure of the group of the Schrödinger equation of the system are given in appendices.

§ 1. 多項式による表現

前報で示したように，表現が一般に積表現を簡約して得られる既約表現の直和の形をとるから，多次元の場合にも一般に多項式によつて表わされることが期待出來る．事實5次元表現の $t=0$ の場合，即ち $\alpha\mathfrak{X}$, $\beta\mathfrak{X}$ がそれぞれ0である場合には，5次元ベクトルを用いて多項式で表わすのが便利である．一方4次元の場合は，3次元の多項式の積で表わす方が都合がよい．

5次元のスピンを含む場合，Γ_0 の固有値の最も簡單な値は

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & 0 \\ & \frac{1}{2} & & \\ & & -\frac{1}{2} & \\ 0 & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

である．その積表現を簡約して得られる $\alpha\mathfrak{X}=0$, $\beta\mathfrak{X}=0$ である場合の行列元素は，

$$\left.\begin{array}{r} j,\cdots,-j;\ (j-1),\cdots,\ -(j-1);\ \cdots\cdots;\ 1,0,-1;\ 0\ (j=2q)\\ (j-1),\cdots,\ -(j-1);\ \cdots\cdots;\ 1,0,-1;\ 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 1,0,-1;\ 0\\ 0 \end{array}\right\} \qquad (1.\mathrm{A})$$

となる．又4次元の場合の $p=q$ のときは，

$$j,\cdots,-j;\ (j-1),\cdots,-(j-1);\ \cdots\cdots;1,0,-1;\ 0 \qquad (1.\mathrm{B})$$

で與えられる．それ故に，たとえば一つの軸の周りの角速度1の廻轉を考え，無限小變換の對角元素を a とすれば，廻轉の對角元素は $e^{ia\omega}$，從つて $d\omega/dt=1$ で表わされる．なお前者が0のときには，後者に1が對應することになる．

さて廻轉群の表現の基底としての波動函數は，3次元の場合と同様に多項式で表わすことが出來る．すなわち一般の函數空間 $\mathfrak{F}$ の點 $f(\mathfrak{x})$ が無限小廻轉によつて $f'(\mathfrak{x}+d\mathfrak{x})$ に移つたとすれば，

$$\frac{df}{dt}=-\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}_\lambda}\frac{d\mathfrak{x}_\lambda}{dt},\ [f'(\mathfrak{x})=f(\mathfrak{x}-d\mathfrak{x})]$$

$$\frac{d\mathfrak{x}_\lambda}{dt}=-\mathfrak{x}_\mu,\quad \frac{d\mathfrak{x}_\mu}{dt}=\mathfrak{x}_\lambda$$

は角速度1の廻轉を表わすことになり，

$$(a_{\lambda\mu})=-\left(\mathfrak{x}_\lambda\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_\mu}-\mathfrak{x}_\mu\frac{\partial}{\partial\mathfrak{x}_\lambda}\right)$$

が得られる．この交換關係は前報でのべたように Lie 環をつくり，第1報における (2.1), (2.2), (2.3) を滿足する[1]．そこでいま

$$(a_{\lambda\mu})=-iL_{\lambda\mu}$$

とすれば，

$$-\Omega=\boldsymbol{L}^2=\sum_{\lambda\neq\mu}L_{\lambda\mu}^2$$

に對して

$$-\Omega u=\boldsymbol{L}^2u=k_1(k_1+n-1)u \qquad (1.1)$$

の解は次のように多項式で表わされる．すなわち n 次元の極座標系(追補I)に於て，$x_{n-1}\to x_1$, $x_n\to x_2$, $\theta_{n-1}\to\phi$ でおきかえれば，

$$a_{12}=-\frac{\partial}{\partial\phi}=-iL_{12},\quad L_{12}=-i\frac{\partial}{\partial\phi}=\Gamma_0 \qquad (1.2)$$

で表わされる．この固有値は Γ_0 の固有値に一致することがわかる．さらに

$$x_1\pm i\,x_2=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\,e^{\pm i\phi} \qquad (1.3)$$

は，Γ_0 の固有値を一つゞつ増減するから，これから n 次元空間の波動方程式の群が表わす量子状態の選擇規則が導かれる．

追補に與えたように，波動方程式の解の角部分は，一般化された Gegenbauer の函數[2] $C^{\nu}_{\lambda\mu}$ の積の形で表わされる：

$$C^{\frac{1}{2}[(n-1)-1]}_{k_1k_2}\,C^{\frac{1}{2}[(n-2)-1]}_{k_2k_3}\cdots C^{\frac{1}{2}}_{k_{n-2}m}\,e^{im\phi},\ (C^{\frac{1}{2}}_{lm}\equiv P^m_l). \tag{1.4}$$

そして同時に

$$\sum a_{\underbrace{\alpha\beta\cdots\gamma}_{n}}\ x_1^{\alpha}\,x_2^{\beta}\cdots x_n^{\gamma}\ (\alpha+\beta+\cdots+\gamma=k_1) \tag{1.5}$$

で表わすことが出來る．これは (1.1) を滿足するから，(1.5) は

$$\sum_{\alpha}^{k_1}\sum_{\beta}\cdots\sum_{\delta}(k_1-\underbrace{\alpha-\beta-\cdots-\delta}_{n-2}+1)-\sum_{\alpha'}^{k_1-2}\sum_{\beta'}\cdots\sum_{\delta'}(k_1-2-\alpha'-\beta'-\cdots-\delta'+1) \tag{1.6}$$

箇の獨立な多項式で表わされることになる．從つて5次元の場合には

$$\frac{1}{6}(k_1+1)(k_1+2)\{2(k_1+1)+1\}, \tag{1.7}$$

4次元の場合には

$$(k_1+1)^2 \tag{1.8}$$

箇のそれぞれ獨立な解をもち，その固有値及び獨立な解の數は丁度前述の表現と一致している．すなわちベクトルの積表現を簡約したもので表わし得ることがわかる．

たとえば4次元空間では

$$\left.\begin{aligned}&x_1=r\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\phi,\quad x_2=r\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\phi\\&x_3=r\sin\theta_1\cos\theta_2,\quad x_4=r\cos\theta_1\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

でその極座標系を定義すれば，次の諸關係が容易に得られる：

$$\left.\begin{aligned}-a_{12}&=\frac{\partial}{\partial\phi}=iL_1\\-a_{13}&=-\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta_2}+\cot\theta_2\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}=-iL_2\\-a_{14}&=-2\sin^2\theta_1\sin\theta_2\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta_1}-\cot\theta_1\cos\theta_2\cos\phi\frac{\partial}{\partial\theta_2}\\&\quad+\cot\theta_1\sin\phi(\sin\theta_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\phi}=-iL_3\\-a_{23}&=-\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta_2}-\cot\theta_2\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}=iL_4\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\left.\begin{aligned}
-a_{24} &= -2\sin^2\theta_1\sin\theta_2\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta_1} - \cot\theta_1\cos\theta_2\sin\phi\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\
&\qquad -\cot\theta_1(\sin\theta_2)^{-1}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi} = -iL_5 \\
-a_{34} &= \sin\theta_2\cot\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_2} + 2\cos\theta_2\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1} = iL_6
\end{aligned}\right\}$$

従つて，さらに

$$iL_1 = \Gamma_0,\quad iL_6 = \Gamma_1 \tag{1.11a}$$

$$\left.\begin{aligned}
-A_3 &= iL\ -L_4 = e^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2} + i\cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \\
-2B_3 &= iL_2 + L_4 = e^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_2} - i\cot\theta_2\frac{\partial}{\partial\phi}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{1.11b}$$

$$\left.\begin{aligned}
-A_4 &= iL_3 - L_5 = e^{i\phi}\Big(2\sin^2\theta_1\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cot\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\
&\qquad + i\cot\theta_1(\sin\theta_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big) \\
-2B_4 &= iL_3 + L_5 = e^{-i\phi}\Big(2\sin^2\theta_1\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_1} + \cot\theta_1\cos\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2} \\
&\qquad - i\cot\theta_1(\sin\theta_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\phi}\Big)
\end{aligned}\right\} \tag{1.11c}$$

を用いて $\Omega = -\sum_{\lambda} L_\lambda^2$ を計算すれば，

$$\begin{aligned}
\Omega = (\sin^2\theta_1)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^2\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right) + (\sin^2\theta_1\sin\theta_2)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_2}\left(\sin\theta_2\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right) \\
+ (\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2)^{-1}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

が得られる（追補Ⅰに於ける $n=4$ の場合にあたる）．

こゝで (1.9) を

$$\left.\begin{aligned}
x_1 \pm i x_2 &= r\sin\theta_1\sin\theta_2 e^{\pm i\phi} \\
x_3 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\
x_4 &= r\cos\theta_1
\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

と書直すことによつて

$$iL_1 = \Gamma_0$$

の固有値 1，−1，0，0 の多項式が得られることになる．すなわち

$$\left.\begin{aligned} x_1 \pm i x_2 &= r C_{11}^1 P_1^{\pm 1} e^{\pm i\phi} \\ x_3 &= r C_{11}^1 P_1^0 \\ x_4 &= r C_{10}^1 \end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

で，C_{kl}^1 は前述の Gegenbauer の函數，P_l^m は Legendre の陪函數を表わす．このように x_λ を(1.13)の形で與えると，一般に l 次の場合の x_1, x_2, x_3, x_4 の多項式は

$$a^l r^k C_{kl}^1 \; Y_{lm}; \quad k \geqq l \geqq 0, \quad l \geqq |m| \geqq 0 \tag{1.15}$$

の形で表わすことが出來る．こゝで Y_{lm} は l 次の球函數である．そしてこれらは $\mathfrak{D}_{\frac{k}{2}\frac{k}{2}}$ の表現をつくる．何故ならば

$$u = \sum_{\alpha+\beta+\gamma+\delta=k} a_{\alpha\beta\gamma\delta} \; x_1^\alpha \, x_2^\beta \, x_3^\gamma \, x_4^\delta \tag{1.16}$$

で表わされる k 次の同次多項式では，獨立なものゝ數は次のようにして與えられる．

すなわち α と β とが決れば，γ は $0 \to k-\alpha-\beta$ の値をとり，このとき δ もきまるから獨立な數は，

$$\sum_{\alpha=\beta=0,\cdots,k-\alpha}^{\alpha=k} (k-\alpha-\beta+1) = \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{2}(k-\alpha+1)(k-\alpha+2) \tag{1.17}$$

箇である．このとき多項式が

$$\Omega u = -k(k+2)u$$

を滿足する條件を考えれば，

$$\Delta u = 0$$

の解であることがわかる．故に $\Delta u \equiv 0$ としたときの $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$ は，$(l-2)$ 次の獨立な多項式の數だけの一次關係式があることになる．その獨立なものゝ箇數は (1.17) を

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2}(k-\alpha+1)(k-\alpha+2) = \sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2}(p+1)(p+2)$$

と變形すれば，

$$\sum_{p=0}^{k} \frac{1}{2}(p+1)(p+2) - \sum_{p=0}^{k-2} \frac{1}{2}(p+1)(p+2) = (k+1)^2$$

箇となり，$\mathfrak{D}_{\frac{k}{2}\frac{k}{2}}$ の場合に等しいことが證明された．

從つてこれらの多項式の獨立なものはそれぞれ獨立な球函數を與え，その球函數による $\mathfrak{D}_{\frac{k}{2}\frac{k}{2}}$ の表現が得られることになる．またこれらの直交關係は3次元空間における2次元のウェテール表現の場合と同様である．

§ 2. 應　用　例

更に一般的な問題に對する應用については後に改めて取扱うことにして，こゝでは次のような簡單な体系を取上げてみよう．一般に12面体群に屬するような對稱性をそなえているとみなされる系には，基準振動として４次元及び５次元のいわゆる縮退振動が含まれていることを知つている．この振動にもとずく角運動量の物理的な意味は前節までの考察で明らかにされた所であるが，この節では更にこの振動の勵起準位を求めるという問題に注目する．この問題は結局調和振動子という模型を選ぶ限り，偶然的縮退として一定のエネルギー固有値に，如何なる角運動量をもつた既約成分が幾つ屬するかという問題に歸着する．

これを決定するには，先ず前節までの考察にもとずいて，４次元ならびに５次元空間における廻轉に對する跡の不變性に注目して，これを問題の群の單純指標(第Ｉ表)へ簡約すればよい．

第 Ｉ 表　12面体群の單純指標[3)]

	E	$12C_5^1$	$12C_5^2$	$20C_3$	$15C_2$
A	1	1	1	1	1
T_1	3	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	0	-1
T_2	3	$\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$	$\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$	0	-1
G	4	-1	-1	1	0
H	5	0	0	-1	1

すなわち４次元空間における任意の廻轉 R_φ(φ はその廻轉角）の跡は，一定の角運動量 k_1 に對して(1.B)から容易に次のように與えられる．

$$\chi_{k_1}(R_\varphi)=\frac{1}{2}\frac{1-\cos(k_1+1)\varphi}{(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2}. \tag{2.1}$$

同様に５次元空間では(1.A)から，

$$\chi_{k_1}(R_\varphi)=\frac{1}{2}\frac{(k_1+\frac{3}{2})-\frac{1}{2}\sin(k_1+\frac{3}{2})\varphi\Big/\sin\frac{1}{2}\varphi}{(\sin\frac{1}{2}\varphi)^2} \tag{2.2}$$

となる．ところが一定の全振動量子數 V で指定される固有値には，追補 (I.17) で與えられるすべての角運動量をもつ狀態が屬するから，一般に

$$\Gamma_{G,H}^{(V)}=\sum_{k_1}\Gamma^{(k_1)}, \tag{2.3}$$

すなわち k_1 についての直和を求めればよい．こゝで G, H はそれぞれ4次元及び5次元の縮退振動を表わす．その結果 $V=1$ から5までの既約成分は第II表のようになる．

第II表　G(左)とH(右)との勵起準位

V	A	T_1	T_2	G	H
1	0	0	0	1	0
2	1	0	0	1	1
3	1	1	1	2	1
4	2	1	1	3	3
5	2	3	3	4	4

V	A	T_1	T_2	G	H
1	0	0	0	0	1
2	1	0	0	1	2
3	2	1	1	3	3
4	2	2	2	4	8
5	4	5	5	8	12

この表は，たとえば5次元縮退振動の $V=3$ の固有値には，(2.3)の一般式からわかるように，

$$\Gamma_H^{(3)}=2A+T_1+T_2+3G+3H \tag{2.4}$$

だけの既約表現に屬する副準位が含まれていることを意味している．この結果は Tisza によつて得られたものに一致するが[4]，多次元空間における角運動量の物理的意味がこの論文で始めて明らかにされ，それにもとずいてこのような結果に明確な意味の與えられたことを指摘しなければならぬ．

追　　補

I.　n 次元等方場の Schrödinger 方程式の解

本論文の主題は本質的に Schrödinger 表現の立場をとらなかつたので，この表現との關係を知る意味において，これを追補として加えておく．

n 次元 Euclid 空間の距離が

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\lambda\mu}\, dh_\lambda\, dh_\mu \\ &= dr^2+(rd\theta_1)^2+(r\sin\theta_1 d\theta_2)^2+\cdots\cdots+(r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{n-2}\, d\theta_{n-1})^2 \end{aligned} \tag{I.1}$$

で與えられるような，一般の極座標系：

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= r\cos\theta_1 \\ x_2 &= r\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} &= r\Big(\prod_{\varkappa=1}^{n-2}\sin\theta_\varkappa\Big)\cos\theta_{n-1} \\ x_n &= r\prod_{\varkappa=1}^{n-1}\sin\theta_\varkappa \end{aligned}\right\} \tag{I.2}$$

をとれば，ポテンシャルが V で與えられる系の Schrödinger 方程式は

$$\frac{1}{r^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\Omega\psi+\frac{2}{\hbar^2}(E-V)\psi=0 \tag{I.3}$$

で表わされる．但し

$$\Omega\equiv(\sin^2\theta_1)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin^{n-2}\theta_1\frac{\partial}{\partial\theta_1}\right)+\cdots\cdots$$
$$+\left(\prod_{k=1}^{n-3}\sin^2\theta_\varkappa\sin\theta_{n-2}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\left(\sin\theta_{n-2}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}\right)+\left(\prod_{\varkappa=1}^{n-2}\sin^2\theta_\varkappa\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-1}^2} \tag{I.4}$$

である．こゝでポテンシャル V が r だけの函數である場合には，この解を動徑部分 $\mathfrak{R}(r)$ と角部分 $\mathfrak{A}(\theta)$ との積：

$$\psi=\mathfrak{R}(r)\,\mathfrak{A}(\theta)$$

とおくことにより，一定の係數を λ として

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{r^{n-1}}\frac{d}{dr}\left(r^{n-1}\frac{d}{dr}\right)\mathfrak{R}(r)-\left[\frac{\lambda}{r^2}-\frac{2}{\hbar^2}(E-V)\right]\mathfrak{R}(r)=0\\ \Omega\,\mathfrak{A}(\theta)+\lambda\,\mathfrak{A}(\theta)=0\end{aligned}\right\} \tag{I.3'}$$

が得られる．

そこで先ず角部分に對する解を

$$\mathfrak{A}(\theta)=\prod_{\varkappa=1}^{n-1}\Phi_\varkappa(\theta_\varkappa)$$

とおけば，一般の添字 κ に對して，

$$\frac{d^2\Phi_\varkappa}{d\theta_\varkappa^2}+(n-\kappa-1)\cot\theta_\varkappa\frac{d\Phi_\varkappa}{d\theta_\varkappa}+(\mu_\varkappa-\mu_{\varkappa+1}\operatorname{cosec}^2\theta_\varkappa)\Phi_\varkappa=0. \tag{I.4}$$

特に $\kappa=n-1$ では

$$\frac{d^2\Phi_{n-1}}{d\theta_{n-1}^2}=-\mu_{n-1}\Phi_{n-1}\quad(\mu_{n-1}\geqq 0) \tag{I.4a}$$

が成立する．こゝで

$$\left.\begin{aligned}&\mu_1=\lambda=k_1(k_1+n-2)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mu_\varkappa=k_\varkappa(k_\varkappa+n-\kappa-1)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &\mu_{n-2}=k_{n-2}(k_{n-2}+1)\\ &\mu_{n-1}=m^2\end{aligned}\right\} \tag{I.4b}$$

及び

$$k_1\geqq k_2\geqq\cdots\geqq k_{n-2}\geqq|m|\geqq 0\,. \tag{I.4c}$$

今一般に $\cos\theta_\varkappa=z$ とおき，$k_{\varkappa+1}=\nu$、及び $n-\kappa-2=q$ を導入すれば，(I.4) は

$$(1-z^2)\frac{d^2\Phi}{dz^2}-(q+2)z\frac{d\Phi}{dz}+\left[\mu-\frac{\nu(\nu+q)}{1-z^2}\right]\Phi=0 \tag{I,5}$$

と書かれる．こゝで $\Phi \equiv (1-z^2)^{\frac{\nu}{2}}\Theta_\nu$ とおくことによつて

$$(1-z^2)\frac{d^2\Theta_\nu}{dz^2}-(2\nu+q+2)z\frac{d\Theta_\nu}{dz}+[\mu-\nu(\nu+q+1)]\Theta_\nu=0 \tag{I.6}$$

が得られる．この解は

$$\left.\begin{array}{l}\mu=p(p+q+1)\\ p\geqq\nu\geqq 0\ (p\text{ は正整數})\end{array}\right\} \tag{I.6'}$$

の場合に有限項の多項式となる．

特に $\nu=0$ のときには，

$$(1-z^2)\frac{d^2\Theta_0}{dz^2}-(q+2)z\frac{d\Theta_0}{dz}+p(p+q+1)\Theta_0=0 \tag{I.7}$$

となつて ν 回微分すれば (I.6) の方程式が得られる：

$$\Theta_\nu=\frac{d^\nu\Theta_0}{dz^\nu}.$$

$\nu'=\frac{1}{2}(q+1)$ とおけば，

$$\begin{aligned}\Theta_0&=C^{\nu'}_{p0}(z)\equiv C^{\nu'}_p(z)\\&=\frac{(-2)^p\nu'(\nu'+1)\cdots(\nu'+p-1)}{p!\,(2p+2\nu'-1)\cdots(p+2\nu')}(1-z^2)^{\frac{1}{2}-\nu'}\frac{d^p}{dz^p}(1-z^2)^{p+\nu'-\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{I.8}$$

が得られ，特に $q/2$ が整數のときには，

$$C^{\frac{1}{2}(q+1)}_{p-\frac{1}{2}q}(z)=\frac{1}{(q-1)(q-3)\cdots3\cdot1}\frac{d^{q/2}}{dz^{q/2}}P_p(z) \tag{I.9}$$

となる．

一方(I.3')の動徑部分の解を得るためには，ポテンシャル V の函數型を具体的に指定する必要がある．いま例として等方性調和振動子の系を選べば，$V=\frac{1}{2}\beta r^2\,(\beta=4\pi^2\nu^2)$ に對し，適當な變數變換：$\sqrt{2\pi\nu/\hbar}\ r\rightarrow\xi$ を行なうことによつて，

$$\frac{d^2\Re}{d\xi^2}+\frac{n-1}{\xi}\frac{d\Re}{d\xi}+\left[\epsilon-\xi^2-\frac{k_1(k_1+n-2)}{\xi^2}\right]\Re=0 \tag{I.10}$$

が導かれる．この場合 $\epsilon\equiv 2E/h\nu$ とおく．E はこの系の固有値，ν はその固有振動の振動數を表わす．いま

$$\Re(\xi)=\frac{e^{-\xi^2/2}}{\xi^{n-2}}\mathfrak{F}(\xi) \tag{I.11}$$

とおけば，

$$\frac{d^2\mathfrak{F}}{d\xi^2}-\left(\frac{n-3}{\xi}+2\xi\right)\frac{d\mathfrak{F}}{d\xi}+\left[\epsilon+n-4-\frac{k_1(k_1+n-2)}{\xi^2}\right]\mathfrak{F}=0 \tag{I.12}$$

となる．こゝで $\xi=0$ は確定特異點となるから

$$\mathfrak{F}(\xi)=\xi^{\gamma}f(\xi)$$

の形の解が得られる．但し $f(\xi)$ は巾級數を意味し，$\gamma=-k_1$ 或いは k_1+n-2 の値が可能であるが，固有函數としては後者だけが許され，

$$\mathfrak{F}(\xi)=\xi^{k_1+n-2}f(\xi) \tag{I.13}$$

とおかれるから，(I.12) は

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}+\left[\frac{2k_1+n-1}{\xi}-2\xi\right]\frac{df}{d\xi}+[\epsilon-2k_1-n]f=0 \tag{I.14}$$

で與えられる．巾級數で表わされるこの解が固有函數となるためには，或る有限項で切斷されなければならないという要請から，N を任意の正の整數として，

$$4N+2k_1+n-\epsilon=0 \tag{I.15}$$

という條件が導かれる．從つてこれから固有値として，

$$E=(V+\frac{n}{2})h\nu \tag{I.15$'$}$$

が得られる．なおこの固有値を指定する量子數：

$$V=k_1+2N \tag{I.16}$$

がいわゆる全振動量子數に外ならず，一定の V の値に對して角運動量を指定する量子數 k_1 は

$$k_1=V-2N=V,\ V-2,\ \cdots,\ 1 \text{ または } 0 \tag{I.17}$$

だけの値をとり得るから，特定の固有値 E_V に屬する縮退度は

$$g(\mathrm{V})=\binom{V+n-1}{n-1} \tag{I.18}$$

で與えられる．

なおこの動徑波動函數を具体的に示せば，簡單な計算の結果，Laguerre 陪函數 L_γ^ζ を用いて

$$\mathfrak{R}_{V,k_1}(\xi)=N_{V,k_1}\xi^{k_1}e^{-\xi^2/2}L^{k_1+\frac{n}{2}-1}_{\frac{1}{2}(V+k_1+n-2)}(\xi^2) \tag{I.19}$$

で表わされ，正規化定數 N_{V,k_1} は

$$N_{V,k_1}=\sqrt{2\left(\frac{V-k_1}{2}\right)!\Big/\left[\left(\frac{V+k_1+n-2}{2}\right)!\right]^3} \tag{I.19a}$$

となる．

II. 等方性調和振動子に對する Schrödinger 方程式の群

この追補では，前節で取扱つた主題の群論的意義を指摘し，量子力學における縮退の問題を基礎ずける準備を與えるのが目的である．

一般に n 次元の直交座標系 q_λ に共軛な運動量を p_λ $(\lambda=1,2,\cdots,n)$ とすれば，我々の注目する系の Hamiltonian は

$$H=\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{1}{2}(p_\lambda^2+\beta q_\lambda^2) \tag{II.1}$$

で表わされる．この H と交換可能な積分が

$$\left.\begin{aligned}
F_{(\lambda)}^{\lambda'}&=\frac{1}{i\hbar}(q_{\lambda'}p_\lambda-q_\lambda p_{\lambda'})\\
\widetilde{F}_{(\lambda)}^{\lambda'}&=\frac{1}{i\hbar\sqrt{\beta}}(p_{\lambda'}p_\lambda+\beta\, q_{\lambda'}q_\lambda)\\
G_{(\lambda)}&=\frac{1}{2i\hbar\sqrt{\beta}}[(p_{\lambda'}^2-p_\lambda^2)+\beta(q_{\lambda'}^2-q_\lambda^2)]
\end{aligned}\right\} \tag{II.2}$$

で與えられるとする．こゝで $1\leqq\lambda'\leqq\lambda-1$ $(\lambda=1,2,\cdots,n)$ である．そして $F, \widetilde{F}, G$ における λ より大きくはない添字に關するすべての積分を $\mathfrak{R}_{(\lambda)}$ で表わせば，先ず $\mathfrak{R}_{(\lambda)}$ が λ 次元單模ウニテール群の無限小變換の演算子であることを證明する．

そのためには，

$$F_{(i)}^{i'},\ \widetilde{F}_{(j)}^{j'},\ G_{(k)}\ (\text{但し}\ 2\leqq i,\ j,\ k\leqq\lambda;\ 1\leqq i',\ j'\leqq i-1,\ j-1)$$

の間のすべての交換關係を求めてみる：

$$[F_{(i)}^{i'},\ F_{(j)}^{j'}]=\delta_{ij}\,F_{(j')}^{i'}+\delta_{i'j'}F_{(j)}^{i}+\delta_{ij'}F_{(i')}^{j}+\delta_{i'j}\,F_{(i)}^{j'} \tag{II.3a}$$

$$F_{(i)}^{i}=0,\ F_{(i)}^{j}=-F_{(j)}^{i} \tag{II.3a$'$}$$

$$[\widetilde{F}_{(i)}^{i'},\ \widetilde{F}_{(j)}^{j'}]=\delta_{ij}\,F_{(j')}^{i'}+\delta_{i'j'}F_{(j)}^{i}+\delta_{ij'}F_{(j)}^{j'}+\delta_{i'j}F_{(j')}^{i} \tag{II.3b}$$

$$[G_{(i)},\ G_{(j)}]=0 \tag{II.3c}$$

$$[F_{(i)}^{i'},\ \widetilde{F}_{(j)}^{j'}]=\delta_{i'j'}\widetilde{F}-\delta_{ij}\,\widetilde{F}_{(j')}^{i'}+\delta_{i'j}\widetilde{F}_{(j')}^{i}-\delta_{ij'}\widetilde{F}_{(j)}^{i'} \tag{II.3d}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\widetilde{F}_{(i)}^{j}=\widetilde{F}_{(j)}^{i}\\
&\widetilde{F}_{(i)}^{i}-\widetilde{F}_{(j)}^{j}=2\,(G_{(i+1)}+G_{(i+2)}+\cdots+G_{(j)}),\ (i<j)
\end{aligned}\right\} \tag{II.3d$'$}$$

$$[F_{(i)}^{i'},\ G_{(j)}]=\delta_{ij}\,\widetilde{F}_{(j)}^{i'}-\delta_{i,j-1}\widetilde{F}_{(j-1)}^{i'}-\delta_{i'j}\widetilde{F}_{(j)}^{i}+\delta_{i',j-1}\,\widetilde{F}_{(j-1)}^{i} \tag{II.3e}$$

$$[\widetilde{F}_{(i)}^{i'},\ G_{(j)}]=-\delta_{ij}\,F_{(j)}^{i'}+\delta_{i,j-1}\,F_{(j-1)}^{i'}-\delta_{i'j}F_{(j)}^{i}+\delta_{i',j-1}F_{(j-1)}^{i}. \tag{II.3f}$$

こゝで δ は Kronecker の δ を意味する．以上の交換關係から明らかであるように，右邊

の添字は必ず左邊の添字より大きくはないことが判る．従つて $\mathfrak{R}_{(\lambda)}$ は Lie 環の基底をつくることが理解される．同時にこれが λ 次元單模ウニテール群の特性行列をつくる Lie 環と同型であることを示そう．

いま一定の行列：

$$M^{r'}_{(r)},\ \widetilde{M}^{r'}_{(r)},\ N_{(r)} \tag{II.4}$$

を考える．これらの行列はその行列元素の中の 0 でない元素がそれぞれ

$$\left.\begin{array}{l} r\text{行}\,r'\text{列が}\ +1,\quad r'\text{行}\,r\text{列が}\ -1, \\ r\text{行}\,r'\text{列が}\ -i,\quad r'\text{行}\,r\text{列が}\ -i, \\ r\text{行}\,r\text{列が}\ +i,\ (r-1)\text{行}\,(r-1)\text{列が}\ -i, \end{array}\right\} \tag{II.4$'$}$$

であるように選ばれている．そのとき添字が λ より大きくはない行列を，

$$\left.\begin{array}{l} M^1_{(2)};\ \widetilde{M}^1_{(2)};\ N_{(2)} \\ M^1_{(3)},\ M^2_{(3)};\ \widetilde{M}^1_{(3)},\ \widetilde{M}^2_{(3)};\ N_{(3)} \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M^1_{(\lambda)},\ M^2_{(\lambda)},\ \cdots,\ M^{\lambda-1}_{(\lambda)};\ \widetilde{M}^1_{(\lambda)},\ \widetilde{M}^2_{(\lambda)},\ \cdots,\ \widetilde{M}^{\lambda-1}_{(\lambda)};\ N_{(\lambda)} \end{array}\right\} \tag{II.5}$$

のようにつくれば，この (λ^2-1) 箇の行列のすべては，λ 次元單模ウニテール群の特性行列になつている．いまこの行列の全体を $\mathfrak{R}'_{(\lambda)}$ で表わせば，これらによつて作られる交換關係のすべては(II.3)と全く同様の結果に導かれることがわかる．すなわち $\mathfrak{R}'_{(\lambda)}$ は $\mathfrak{R}_{(\lambda)}$ と同じ構造定數をもつている．この結果から直ちに，$\mathfrak{R}_{(\lambda)}$ によつて誘起された群が (λ^2-1) パラメーターの λ 次元單模ウニテール群に同型であることがわかる．

従つて $\lambda=n$ の場合を考えれば，n 次元等方性調和振動子系の Schrödinger 方程式の群は (n^2-1) パラメーターの n 次元單模ウニテール群に同型であることが導かれる．

なお λ 次元單模ウニテール群の最大部分群は $(\lambda-1)$ 次元の單模ウニテール群であることを注意しよう．それは $\mathfrak{R}'_{(\lambda)}$ の各元素に $\mathfrak{R}'_{(\lambda+1)}-\mathfrak{R}'_{(\lambda)}$ の元素の一つゞつを組合わせて交換子をつくり，どれだけ附加すれば始めて $\{\mathfrak{R}'_{(\lambda)}\}$ より大きい環を構成するかをしらべればよい．その結果 $\{\mathfrak{R}'_{(\lambda+1)}\}$ であることがわかる．(特に $n=2$ の場合には，2次元廻轉群が最大部分群であることは言うまでもない．) 更にこの群は半單純であつて，各部分環の Casimir 行列は互に交換可能であることが證明される．

この Schrödinger の群の變換に基けば，Hamiltonian の固有空間は以上の對稱テンソルによる表現に従つて變換し，この表現の次元數が結局

$$g(V)=\binom{V+n-1}{n-1},\quad V=\sum_\lambda v_\lambda$$

(v_λ は個々の振動子の量子數)だけの縮退の多重度を與える．これは勿論 Schrödinger 方程式を直接に解くことによつても得られることは前節に述べたところである．

このように縮退の問題を一般化し，その物理的意味を明らかにするためには，結局高階の微係數を含んだ演算子を generator とする Hilbert 空間における analytic group と，Lie group との局所連續同型性を證明することに歸着する．これと Lie group の表現に關する諸定理とを結合すれば，理論として完結するわけである．なお前述の積分を“一般的”に求める方法が未解決であるが，或る程度 Hamiltonian の形から Hilbert 空間の局所的，位相的性質を見出すことが必要である様に思われる．

文　　　獻

1. Narumi, H. and Nakau, T., Bull. Inst. Chem. Res. Kyoto Univ. **26** (1951), 26.
2. Whittaker, E. T. and Watson, G. N., *Modern Analysis* (1936), 329.
3. Speiser, A., *Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung* (1927), 186.
4. Tisza, L., Zeits. f. Phys. 82 (1933), 48.

(昭和26年10月9日受理)