新 制
工
876

京大附図

トロイダルプラズマにおける閉じ込め磁場構造及び磁気島の制御に関する理論的研究

1991

長 﨑 百 伸

トロイダルプラズマにおける閉じ込め磁場構造及び磁気島の制御に関する理論的研究

1991

長 崎 百 伸

内容梗概

本研究では、トーラス形状の磁気閉じ込め配位、特にヘリカル系に重点をおいて、磁気面の性質及び周辺領域の磁場構造とプラズマ分布について理論解析を行う。トカマクに関しても調べ、ヘリカル系との比較を行う。また、外部磁場によるプラズマ中の磁気島の制御性についても調べる。

$\ell=2$ ヘリカル系の真空磁気面は、トロイダル調和関数の基本ハーモニクスを用いたモデル磁場で記述することができ、回転変換・比体積といった磁気面の評価量に関して広範囲のパラメータサーベイを行うことが可能である。本研究では $\ell=2$ ヘリカル系の全体的な平衡の描像を追った。外部パラメタとして軸対称性トロイダル磁場、垂直磁場及びトロイダルピッチ数を選び、磁気面評価量に対する影響を詳細に調べた。評価量全てを同時に最適化する事は不可能なので、新たな評価関数を導入して磁気面の最適化をしている。

周辺プラズマは中心プラズマの閉じ込めと密接な関係を持っている。最外殻磁気面（Outermost Magnetic Surface, OMS）またはセパラトリクスから外のスクレイプオフ層（Scrape-off Layer, SOL）領域の微細構造を調べる。評価量として磁力線が壁に到達するまでに進む距離、即ち、接続長を用いる。基本的には、接続長はSOLで対数的に変化するが、本研究においてトカマクとヘリカル系の接続長の分布を具体的に定式化し、接続長の外部磁場やコイルのトロイダルピッチ数に対する依存性を調べた。それらの結果を踏まえ、流体モデルを用いてSOL領域のプラズマの分布の解析を行った。また、周辺領域に部分リミターを入れた場合の熱や温度の分布についても評価した。

外部から磁気島を制御しようとする場合、プラズマの力学的応答を考慮に入れなければならない。最初に、磁場制御に対するプラズマ中の単一ヘリシティ磁気島の応答性について調べる。スラブ形状で簡約化ＭＨ

D方程式を用いて磁気島の時間発展を追った。磁気島が消去される減衰過程は成長過程と異なり、時間変化が遅い。これは理想MHDの時間スケールで形成される有理面における電流層の幅が磁気島自身の構造に依存していることが原因であることを示した。そして、非線形項は磁気島の減衰に対して成長過程の場合のような重要な働きをしていないことがわかった。

プラズマの閉じ込め状態を変えるために、周辺領域の複数の有理面に共鳴するような摂動磁場が加えられる実験がトカマクやヘリカル系において行われている。多くの有理面上に多数の磁気島が存在する周辺領域での磁気島の時間発展は単一磁気島の場合と異なる。これらの磁気島を真空摂動磁場で模擬し、その時間発展を調べた。外部から制御しようとする対象の磁気島近傍に他の磁気島が隣接するとき、対象の磁気島の時間発展は隣接磁気島の影響を受ける。隣接距離や磁気レイノルズ数に対する依存性を調べ、有理面近傍の電流分布が非線形効果による高次の磁気島の影響を受け、隣接磁気島が近いほど注目している磁気島の減衰が遅くなる事を見い出した。

目次

2章　記号

a	:	最外殻磁気面（OMS）の平均小半径
$\mathbf{B}_h$	:	ヘリカル磁場ベクトル
$\mathbf{B}_t$	:	トロイダル磁場ベクトル
$\mathbf{B}_v$	:	垂直磁場ベクトル
$b_{\ell+j}$	:	摂動磁場の r 方向成分
C	:	スカラーポテンシャルの係数
d	:	隣接する磁気島の間隔
F	:	評価関数（$= \pi\iota(0) \cdot a^2$）
f	:	y の関数
$\mathbf{J}$	:	表面電流
J	:	第1種ベッセル関数
ℓ	:	ポロイダルピッチ数
M	:	トロイダル角分割メッシュ数
m	:	トロイダルピッチ数
$\mathbf{n}$	:	境界面の法線ベクトル
N	:	トーラス方向の周回数
R	:	トーラスの主半径
$\langle r \rangle$	:	磁気面の平均半径
S	:	ポロイダル断面で磁気面によって囲まれる面積
S_0	:	OMS の面積
U	:	比体積
(r, ϕ, θ)	:	擬トロイダル座標
(y, ϕ, ψ)	:	トロイダル座標
α, β	:	C を決定する方程式の係数
β_{eq}	:	平衡ベータ限界値
δ	:	磁気軸のシフト量
$\delta_{\ell+j}$	:	磁気島の巾
ε	:	数値誤差

ε_h : ヘリカルリップル率

ε_t : トロイダルリップル率

ι : 回転変換

μ_0 : 真空透磁率

(ρ, ϕ, z) : 円筒座標

τ_E : エネルギー閉じ込め時間

χ_e : 熱伝導係数

Ω : スカラーポテンシャル（$\mathbf{B} = -\nabla\Omega$）

3章 3.1-3.2 記号

b : 壁の位置

b_s : 直線ヘリカル磁場の係数

f : y の関数

I_ℓ : 第1種変形ベッセル関数

L : 接続長

ℓ : ポロイダルピッチ数

m : トロイダルピッチ数

R : トーラスの主半径

(r, θ, z) : 円筒座標

(r, θ, ϕ) : 擬トロイダル座標

(y, ϕ, ψ) : トロイダル座標

α : $= m/(\ell R)$

C_h : スカラーポテンシャル Φ の係数

γ : B_v に関する数値係数

δ : OMS または残留磁気島からの距離

ε : $= a/R$

λ_1, λ_2 : 係数

Φ : スカラーポテンシャル（$\mathbf{B} = \nabla\Phi$）

φ : $\theta + \alpha z$

ξ : $= \frac{1}{2}r^2$

Ψ : 磁気面関数

3章 3.3-3.4 記号

$\mathbf{A}$: ベクトルポテンシャル

B_p : ポロイダル磁場

$\tilde{b}$: 摂動共鳴磁場の係数

C : 対数関数の係数

$E(k)$: 第2種完全楕円積分

G, H : 定数

I_d : ダイバータ電流

I_p : プラズマ電流

$K(k)$: 第1種完全楕円積分

m : ポロイダルモード数

n : トロイダルモード数

q : 安全係数

q_I : 実効q値

$\hat{q}$: $= \int d\theta / \int d\phi$

s : 磁力線に沿った長さ

$\triangle$: セパラトリクスX点からの最小距離

μ_0 : 真空透磁率

Ψ : 磁気面関数

3章 3.5 記号

d ： 部分リミターの巾

h ： 壁からの距離

L_{eff} ： 実効的な接続長

ℓ_d ： 磁力線に沿ったリミターからの距離

n ： プラズマ密度

$P_{\|}$ ： 磁力線に沿って流れるパワー

$P_{\perp}$ ： 磁力線を横切るパワー

P_0 ： コアプラズマから流出するパワー

$\mathbf{q}_{\|}$ ： 磁力線に沿った熱流束密度

$\mathbf{q}_{\perp}$ ： 磁力線を横切る熱流束密度

S ： OMS の表面積

T ： プラズマ温度

T_b ： OMS でのプラズマ温度

T_d ： ダイバータでのプラズマ温度

Δ ： 熱の流れる巾

$\kappa_{\|}$ ： 磁力線に沿った熱伝導係数 $(= n\chi_{e\|})$

$\kappa_{\perp}$ ： 磁力線を横切る熱伝導係数 $(= n\chi_{e\perp})$

4章　記号

a ： 境界の位置

$\mathbf{B}$ ： 磁場ベクトル

$\mathbf{E}$ ： 電場ベクトル

$\mathbf{J}$ ： プラズマ電流密度ベクトル

J ： z 方向の電流密度

k ： 磁気島の y 方向波数

M_f ： y 方向フーリエモード数

M_t	:	1 τ_A 当たりの時間ステップ数
M_x	:	x 方向の差分メッシュ数
P	:	プラズマ圧力
S	:	磁気レイノルズ数
t	:	時間
U	:	渦度
$\mathbf{v}$	:	プラズマ流速
W_i	:	磁気島巾
(x, y, z)	:	デカルト座標
γ	:	境界の摂動振巾を変える係数
δ	:	境界での摂動振巾
Δ	:	電流層の半値巾
ε	:	数値誤差
η	:	プラズマ抵抗率
ρ	:	質量密度
τ_A	:	ポロイダルアルフヴェン時間
τ_f	:	磁気島が反転する時間
τ_h	:	磁気島巾が半分になる時間
τ_R	:	磁気拡散時間
τ_s	:	境界の立ち上げ時間
ϕ	:	流れ関数
ψ	:	磁束関数
(ψ, ϕ, z)	:	磁気島座標

5章　記号

4章と同様の記号を用いるが、下記のものを新たに用いる。

d_H　:　高次磁気島の巾

K　:　ストカスティック・パラメータ

k_y　:　y 方向の波数

k_z　:　z 方向の波数

W_N　:　隣接磁気島の巾

W_T　:　テスト磁気島の巾

x_N　:　隣接磁気島の O 点の位置

Δ_x　:　セパラトリクス X 点における x 方向の電流層の半値巾

省略記号

ELM : Edge Localized Mode

EML : Ergodic Magnetic Limiter

IDC : Improved Divertor Confinement

IOC : Improved Ohmic Confinement

MHD : Magnetohydrodynamics（電磁流体力学）

OMS : Outermost Magnetic Surface（最外殻磁気面）

RL : Radiation Layer（放射層）

SOL : Scrape-off Layer（スクレイプオフ層）

H/T : Heliotron/Torsatron（ヘリオトロン/トルサトロン）

1　緒論

磁気閉じ込め核融合は数十年の世界的な努力の結果、Lawson によって導き出された臨界条件 [1] にまもなく到達しようとしている。世界三大トカマクの一つである JET では、核融合出力と加熱入力の比である Q 値がＤＴ換算で $Q \simeq 0.8$ に到達し、エネルギー閉じ込め時間 τ_E も 1.25 秒という成果を出している [2]。しかしながら、定常核融合炉を考えた場合、多くの問題が未解決のままである。その一つとして、エネルギー閉じ込め時間 τ_E の劣化がある。トカマクの追加熱実験では、一般的に加熱入力の増大に伴い τ_E は低化し、これは L-mode と呼ばれている [3]。L-mode のままで定常的かつ高い Q 値を得ることは困難であり、τ_E の改善が必要であるが、近年 τ_E の改善モードが見いだされた。その一つに ASDEX で発見された H-mode がある [4]。τ_E は L-mode の値よりも 2 倍程度高い。H-mode は他の多くのトカマク装置でも観測され、トカマク一般に起こり得るものであることが示された。ただ、H-mode は不安定な放電であるため、定常炉の場合に使えるかどうかは今後の研究に待つところが大きい [5]。工学的立場から見ると、定常状態を保つためにヘリウム灰を十分排気できたり、壁はプラズマから来る熱に耐え得るように設計されなければならない。例えば JET クラスのトカマクで、コアプラズマから流出し壁に向かうパワーが約 200MW として壁の全面積 ($\sim$400m^2) で支えられれば 0.5MW/m^2 となるが、現在設計されている次期トカマク装置 ITER 等ではダイバータ板が設置され、ダイバータ板に多くの熱が集中するため、この 10 倍以上の熱負荷がかかる [6]。したがって、ダイバータ板の保護等を考える上でもプラズマの配位や壁の形状、材料について十分な検討が必要である。こうした τ_E の改善や壁、ダイバータの問題は周辺プラズマの状態に密接に関連しており、周辺プラズマの最適化や制御を行えることが核融合炉の実現に向けての必要条件である。しかしながら、周辺プラズマの性質が定量的に明確に評価されるようになってきたのは近年になってきてからであり、今後さらなる進展が望まれている。

磁気閉じ込め配位はトカマク以外にも考えられており、その一つがヘ

リカル系である。トカマクはプラズマ中に電流を流し、それによって作り出されるポロイダル磁場と外部から与えられるトロイダル磁場、垂直磁場によって磁気面が形成される。磁気面とは、磁力線をトロイダル方向に追跡し、ある一定の面上に常に存在した場合、その面のことを言う。ヘリカル系ではヘリカルコイルと呼ばれるコイルをトーラスに巻くことでプラズマがない状態でも磁気面を形成することができる。ヘリカル系の近年の実験では、Heliotron-E で平均ベータ値 2% の平均無電流プラズマを閉じ込められたり、ATF 、Wendelstein VII-AS 、CHS といった装置がこの数年で実験結果を出している [7] 。そして、これらの結果をふまえ、日本では新しい大型ヘリカル装置の設計が行われてきた [8] 。ヘリカル系ではコイルの巻き線則に多様性があり、そのため磁気面も種々の形状、性質のものを形成できる。その中で何が最もプラズマの閉じ込めに適しているのか現在の段階では答は得られていない。磁気面の性質を広範囲なパラメータにわたって調べ、その評価量の値及び依存性を解析することは今後のヘリカル系の展望を行う上でも重要な研究である。

トカマクやヘリカル系の様なトーラス形状の磁場閉じ込め配位では中心プラズマの状態が周辺プラズマの条件によって制御され得ることが知られている [9][10] 。'周辺プラズマ' または '境界プラズマ' の統一された定義は明確ではないが、中心プラズマと壁の間に位置し、壁の存在の影響を直接に受けてその性質が決まるプラズマと言うことができる。周辺プラズマは '放射層 (radiating layer　RL) ' と 'スクレイプオフ層 (scrape-off layer　SOL) ' の二領域に分類できる [10] 。RL は最外殻磁気面 (outermost magnetic surface　OMS) またはセパラトリクスの内側にあり、閉じた磁気面は出来ているが、原子分子過程が局所的なエネルギー及び粒子のバランスに強く影響を与えている領域である。SOL は OMS またはセパラトリクスから外側の領域で、磁気面が形成されていない。従って SOL プラズマは開放端系（例えばミラー、カスプ）のプラズマと似た性質を持ち、プラズマは磁力線に沿って壁へ早く逃げてゆく。周辺プラズマを制御することで全体のプラズマ閉じ込めは改善される。改善 mode には前述の H-mode 以外に Supershot [11], IOC [12], IDC [13], IL

[14] 等がある。これらの改善モードでは周辺プラズマの状態、例えばプラズマ温度 T や密度 n の分布が L-mode と比較して大きく変化しており、OMS での温度が高くできると τ_E を長くすることができる [15] 。しかしながら、同時に、不純物の抑制をしたりダイバータ部での熱処理を良好に行うためには、ダイバータ部のプラズマ温度を下げなければならない。これら双方の条件を満足するには SOL で磁力線に沿って大きな温度差を維持する必要があり、磁力線の壁までの長さである接続長（ connection length ）が重要なパラメータである [16] 。

ヘリカル系の SOL 領域の磁力線はストカスティック（ stochastic ）な振る舞いをすることが知られている [17] 。ここでストカスティック（あるいはストカスティシティ（ stochasticity ））とは、一般に乱雑性、不規則性を意味するが、本研究では力学系において初期のずれが時間的に指数関数的に増大し、正確な予測が実質的に不可能になるような力学的性質を表すときに用いる。ヘリカル系の場合、トーラス効果によってセパラトリクス近傍の磁気面は破壊され、磁力線はストカスティックな振る舞いをする。一方、トカマクにおいても、コイルのミスアライメントによる不整磁場やセパラトリクス近傍の有理面に共鳴するように外部から印加された摂動磁場によって SOL 領域はストカスティックになる。ストカスティックな磁力線の性質については定性的にはわかっている [18] が、例えばヘリカル系という具体的な系での SOL 領域の磁力線の長さ及びその分布は明確に示されていない。周辺領域のプラズマの分布を解析する上でも、その構造の評価は重要である。本研究ではモデル磁場を用いることで SOL 領域の磁場構造を解析し、プラズマの分布について評価を行う。

安全係数（または回転変換）が有理値をとる磁気面では磁気島が形成されやすく、磁気面はドーナツ状に閉じた面とは限らない。トカマクでは、安全係数 $q = 1$ の磁気島が sawteeth 振動と、$q = 2$ の磁気島がディスラプション現象と大きく関係していることが知られている [19] 。$q = 2$ の磁気島に関して見ると、磁気島はティアリングモードによって生じる。$q = 2$ 磁気島の制御に関しては実験的にも [20] [21] 、理論的にも [22] [23]

調べられてきた。一方、ヘリカル系においても回転変換 ι が $\iota=1$ の有理面で抵抗性交換不安定性によって磁気島が形成されることが知られている [24] 。強制的にプラズマ中に磁気島を形成させる様な場合もあり、トカマクでの EML (Ergodic Magnetic Limiter) 実験がその一つである。外部から磁場を印加して磁気島を制御しようとするとき、磁気プローブ等で計測した磁場揺動が急激に減少したからと言って磁気島が小さくなっているとは限らない。なぜならプラズマ中の磁気島の発展は磁力線の再結合率 (reconnection rate) と関係しており、抵抗拡散時間に依存するからである。磁気島の成長と減衰では、その物理機構が異なることも予想される。したがって応答の遅れを考慮に入れなければならない。トカマクにおいて磁気島のフィードバック制御の実験が行われており [25] 、理論的な解析も行われてきている [26] 。

EML 実験の様にセパラトリクス近傍に磁気島を形成させる場合、既にエラー磁場やプラズマの MHD 揺動によって、磁気島が小さいながらも存在しているし、トーラス効果によって隣接する有理面にも磁気島が形成される。この場合、隣接磁気島によって磁場構造に変化があり、単一ヘリシティ磁気島の場合とはバックグランドの状態が異なる。また、ストカスティックになっている磁場構造を外部からの制御で閉じた磁気面に回復させる場合も、ストカスティシティのない単一磁気島と物理過程が異なることが予想される。隣接磁気島の効果を入れたモデルで解析を行わなければならない。

本研究はトロイダルプラズマ、特にヘリカル系に重点を置き、閉じ込め領域及び周辺領域の磁場構造を調べることによって全体的な閉じ込め性能を明らかにする。また、プラズマ中に形成される磁気島の外部摂動に対する時間応答性に並びに制御性について評価する。トカマクに関しても解析し、ヘリカル系との比較をする。

本研究は以下の通り、6 章に分けて構成されている。

2 章では、ヘリカル系の真空磁気面を、トロイダル関数を用いたモデル磁場で解析する。トロイダルヘリカル系の真空磁気面は 3 次元構造のため数値計算によって求めなければならないが、トロイダル関数を用い

ることで計算時間を短縮することができ、広範囲なパラメータサーベイを行うことができる。3 章では、ヘリカル系とダイバータトカマクの周辺磁場構造の評価を行う。評価量として磁力線が壁に到達するまでに進む距離である接続長を用いる。SOL 領域での接続長の性質を明らかにし、定式化を行う。また、SOL 領域に残存する磁気島についても調べる。そしてこれらの結果を踏まえ、流体モデルを用いてプラズマ分布の解析を行う。4 章では、簡約化 MHD 方程式を用いてスラブモデルでの単一磁気島の外部磁場摂動による時間発展を調べる。成長過程と減衰過程を比較し、両過程の相違について議論する。特に磁場の再結合率と関係の深いセパラトリクス X 点近傍の電流分布について詳しく調べる。5 章では、外部から制御するテスト磁気島に対する隣接する磁気島の効果について調べる。モデルは 4 章と同じものを用い、隣接磁気島を表す項をつけ加える。隣接磁気島によって磁気面の構造が変化し、テスト磁気島の時間発展が単一磁気島の場合と異なることが示される。6 章は総括として本研究の成果と得られた知見についてまとめる。

2　$\ell = 2$ ヘリカル系の真空磁気面

2.1　序

ヘリカル系装置では磁場はプラズマの外部に置かれたコイルに電流を流すことで形成され、磁力線をトーラス方向に追跡したとき磁力線がドーナツ状に閉じた形状となった場合、その閉じた面のことを磁気面と呼ぶ。強い磁場の下でのプラズマ粒子はドリフト運動を無視した低次の近似で磁力線に沿って動くので、閉じた磁気面を形成することができればプラズマを有限の領域に閉じ込めることが可能となる。ヘリカル対称性のある直線ヘリカル系ではセパラトリクスまで閉じた磁気面の存在を示すことができるが、トーラス形状にした場合にはヘリカル対称性の破れが生じ、一般には三次元問題となるので、セパラトリクスまで閉じた磁気面を形成できるかどうかの数学的証明はなされていないし、また、数値計算によっても見い出されてはいない。しかしながら、数値計算によって磁力線を有限回数トーラス方向に追跡した場合、我々はポアンカレ写像によって、ある領域に閉じた面が形成されていることを見ることができ、磁気面の存在を仮定しても良いであろう。

ヘリカル系装置はトカマクと比較した場合、プラズマの振る舞いにあまり影響を及ぼされないで磁場配位を選択できたり、平均無電流プラズマを閉じ込められることからプラズマ電流に起因する不安定性が抑えられたり、また、電流駆動等をせずにプラズマを定常に閉じ込められるという長所を有している。近年では京都大学の Heliotron-E 、マックスプランク研究所の Wendelstein VII-AS 、オークリッジ国立研究所のＡＴＦといった主要な装置で研究が進められてきている。その結果、イオン温度 $T_i \sim 1$ keV や平均ベータ値 $\beta \sim 2\%$ のプラズマが実験において実現された。また、Heliotron-E や Wendelstein VII-AS での加熱実験では、プラズマの閉じ込めがトロイダル電流を流さないことで改善されることが示された [27]-[29] 。これらの結果を受けて、ヘリカル系でのプラズマ閉じ込めに関する研究が再活性化している [30]-[32] 。理論的にも、計算機

の発達によりＭＨＤ安定性に関する研究が高精度で行える様になったり [33]-[36]、輸送理論においても新古典輸送係数が広範囲なパラメータ領域で評価することが可能となった [37]-[40]。これらの進歩に基づき、より良い閉じ込め配位を実験的に研究すべく、大型ヘリカル系閉じ込め装置の設計も行われている [8]。

真空磁気面の形状は、ヘリカル巻き線則を変化させることで種々のものを考えることができる [41]-[45]。一方、真空磁気面の特性的な量、例えば回転変換、磁気井戸は巻き線則を決めてしまうとその大きさや分布を広く変えることは難しい。また、単に磁力線を追跡して磁気面が存在すれば良いという訳ではなく、ＭＨＤ安定性や高エネルギー粒子の閉じ込めと新古典輸送から要求される条件も満足する様な磁気面を形成しなければならない。既存のものや今後製作される装置の配位は、現在のところ、特性量の観点から４つのグループに分類されている [7]。第１のグループは、大きな回転変換、強いシアーを有する装置で Heliotron-E がその代表例として挙げられる。第２のグループは、回転変換、シアーはそう強いわけではないが、磁気井戸が形成できることで、第１のグループより高いベータ値プラズマを閉じ込める可能性のあるもので、ＡＴＦやＣＨＳが例として挙げられる。第３のグループは、シアーはないが磁気井戸が閉じ込め領域の大部分にあり、Pfirsch-Schlüter 電流を最小化して新古典輸送を軽減させようとする指針をとっている。Wendelstein Ⅶ-AS がその代表例である。そして、第４のグループは、大きな回転変換と深い磁気井戸を有する装置で立体磁気軸配位となるが、現在としては Heliac という装置がある。各グループのそれぞれが長所短所を有しており、どれが一番優れているのかは現在のところ決定づけられていない。これは、ヘリカル系装置の可能性がまだ十分に明らかにされていないということを意味している。

本章では $\ell = 2$ ヘリカル系装置の真空磁気面のパラメータサーベイを広範囲にわたって行い、その可能性を大きな観点から捉えることを目的とする。ポロイダルピッチ数 ℓ には、$\ell = 1, 2, 3$ がよく用いられるが、$\ell = 2$ の場合、磁気軸での回転変換が零ではない有限の値をとることがで

きたり、最外殻磁気面近傍でのシアーを大きくとれることや、低アスペクト比配位が可能であること、そして近年の実験装置にも $\ell = 2$ が多くあることから、本章では $\ell = 2$ を選んでいる。

ヘリカル系は従来、高アスペクト比配位が考えられてきたが、近年では低アスペクト配位に関心が集まっている [46][47] 。その理由の一つとしては、プラズマ体積を一定としたとき、アスペクト比の小さいプラズマの方が装置規模を小さくでき、経済的コストの上で有利となることがある。低アスペクト比配位はトロイダルピッチ数 m を小さくすることで得られるが、閉じ込め体積を増すものの、回転変換を低下させてしまうので、常にポロイダル断面で磁気面によって囲まれた面積の最大配位と回転変換の最大の配位は相容れない。その場合、閉じ込め時間が新古典プラトー領域において ιa^2（a：最外殻磁気面の平均小半径）に比例することから、一例として関数 F（$\equiv \pi\iota(0)\cdot a^2$）を選んで、その最適化を行うことも一つの手段であろう。また、限界平衡ベータ値を用いることもできる。低アスペクト比配位においても限界平衡ベータ値が高アスペクト比配位に比べて劣らない例を示す。

真空中ではラプラス方程式 $\nabla^2\Omega = 0$ が成り立つが、本章ではスカラーポテンシャル Ω をトロイダル関数を用いて変数分離し、基本ハーモニクス成分を用いて磁気面を形成する。基本ハーモニクスだけを用いた解析は、数値計算時間の短縮ができ、磁気面の特性を広く展望することができる。真空磁気面の評価量としては、回転変換 ι、比体積 U、ヘリカルリップル率ε_h、トロイダルリップル率 ε_t、最外殻磁気面によって囲まれる面積 S_0 とその平均小半径 a を選んだ。これらの量を変化させるパラメータとして、軸対称トロイダル磁場 B_t、軸対称垂直磁場 B_v、トロイダルピッチ数 m の 3 つを選んでいる。磁気面量を変化させる外部パラメタとしてこれら以外に四重極磁場があり、磁気面の楕円率を変えることが知られているが、本研究ではその効果については論じない。評価量は互いに独立しておらず、自由に一つ一つ最適な値を選択することができない。評価量のとり得る範囲、あるパラメータを固定した場合の最適値等について述べる。また、高次ハーモニクスの効果についても議論する。

本章の構成は以下の通りである。§2.2 でモデルと方程式について述べ、§2.3 で磁気面の諸量の定義と解析評価を行う。§2.4 で数値計算による磁気面のパラメータサーベイを行う。§2.5 でモデルのスカラーポテンシャルを形成する面電流を求め、高次ハーモニクスの効果について議論する。§2.6 は、結論に当てられる。

2.2 モデルと方程式

真空中の磁場は $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ を満たすことから、スカラーポテンシャルΩ を用いて次のように書くことができる。

$$\mathbf{B} = -\nabla\Omega \tag{2.1}$$

(2.1) をマクスウェルの方程式 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ に代入して、ラプラスの方程式

$$\nabla^2\Omega = 0 \tag{2.2}$$

を得る。この方程式を解く際に、図 2.1 の様なトロイダル座標を用いる [48] [49] 。トロイダル座標 (y, ϕ, ψ) と円柱座標 (ρ, ϕ, z) の関係は

$$\begin{aligned} \rho &= R\frac{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}}{1-y\cos\psi} \\ z &= R\frac{y\sin\psi}{1-y\cos\psi} \end{aligned} \tag{2.3}$$

と表せる。ここで $(\rho, z) = (R, 0)$ はトーラスの副軸の位置であり、ϕ はトロイダル角である。y は必ず $0 \leq y \leq 1$ の範囲にある。$y = 0$ は $(\rho, z) = (R, 0)$ 、$y = 1$ は $\rho = 0$ に対応する。

系全体の磁場は、ヘリカル磁場 $\mathbf{B}_h$ と軸対称トロイダル磁場 $\mathbf{B}_t$、軸対称垂直磁場 $\mathbf{B}_v$ の三成分から構成される。ヘリカル磁場 $\mathbf{B}_h$ を作るスカラーポテンシャルを Ω_h とすると、系全体の磁場 $\mathbf{B}$ の各座標成分は円柱座標系で次のように表せる。

$$\begin{aligned} B_\rho &= -\frac{\partial\Omega_h}{\partial\rho} \\ B_\phi &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\Omega_h}{\partial\phi} + \frac{R}{\rho}B_t \\ B_z &= -\frac{\partial\Omega_h}{\partial z} + B_v \end{aligned} \tag{2.4}$$

ここで、B_t, B_v はそれぞれ $(\rho, z) = (R, 0)$ における軸対称トロイダル磁場、軸対称垂直磁場の大きさを表し、一定の値をとる。

ヘリカル磁場 $\mathbf{B}_h$ を構成する Ω_h はトロイダル調和関数を用いて変数分離できて

$$\Omega_h = \sum_{\ell,m} C_{h,\ell m}(1 - y\cos\psi)^{\frac{1}{2}} f_{\ell,m}(y)\sin(m\phi + \ell\psi) \tag{2.5}$$

で与えられる [49] [50]。ここで ℓ はポロイダルピッチ数、m はトロイダルピッチ数であり、共に整数である。関数 $f_{\ell m}(y)$ は Ω_h がラプラス方程式 (2.5) を満たすために次の常微分方程式を満たさなければならない。

$$y^2(1-y^2)\frac{d^2 f}{dy^2} + y(1-3y^2)\frac{df}{dy} - \left(\frac{3}{4}y^2 + \ell^2 + \frac{m^2 y^2}{1-y^2}\right) f = 0 \tag{2.6}$$

（以下、添え字の ℓm は省略する。）方程式 (2.6) は、2 つの独立な解を持つ。一方は $y = 0$ で正則、他方は $y = 1$ で正則である。$y \ll 1$ のとき (2.6) は

$$y^2\frac{d^2 f}{dy^2} + y\frac{df}{dy} - (\ell^2 + m^2 y^2) f = 0 \tag{2.7}$$

と表せ、f はベッセル関数となる。$y \sim 0$ のとき (2.7) の正則な解は

$$f(y) \sim y^{\ell} \qquad (y \sim 0) \tag{2.8}$$

と書ける。また、$y \sim 1$ のとき (2.6) は

$$(1-y^2)\frac{d^2 f}{dy^2} - 2(1-y^2)\frac{df}{dy} - m^2 f = 0 \tag{2.9}$$

となり、(2.9) の正則な解は

$$f(y) \sim (1-y)^{\frac{m}{2}} \qquad (y \sim 1) \tag{2.10}$$

で与えられる。プラズマ閉じ込め領域等、コイル内部の磁場は、境界条件として (2.8) を用いることで求められた $f(y)$ によって与えられる。また、ヘリカルコイル外部領域の磁場は境界条件として (2.10) を用いることで与えられる。これら 2 つの境界条件によって求められたそれぞれの磁場は、コイル境界面上で不連続となり、このことが境界面上を流れるヘリカル電流の分布を決定する。電流分布の解析については§2.5 で述べることにする。

2.3 磁気面の諸量

真空磁気面の評価量として本研究は以下のものを用いる。

1） S: ポロイダル断面上で磁気面によって囲まれる面積

2） $\langle r \rangle$: 磁気面の平均半径

3） ι: 回転変換

4） U: 比体積

5） ε_h: ヘリカルリップル率

6） ε_t: トロイダルリップル率

$\langle r \rangle$ は

$$\langle r \rangle = \left(\frac{S}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.11}$$

で定義される。また、最外殻磁気面での面積、平均半径はそれぞれ S_0, a とする。回転変換 ι は

$$\iota = \lim_{s \to \infty} \frac{\displaystyle\int_0^s \frac{d\theta}{ds} ds}{\displaystyle\int_0^s \frac{d\phi}{ds} ds} \tag{2.12}$$

で与えられる。ここで θ は擬トロイダル座標 (r, ϕ, θ) のポロイダル角で、(θ, ϕ) は磁力線に沿って測る。（図 2.2 参照）また、ds は磁力線方向に沿ってとられる線素である。

比体積 U は

$$U = \lim_{N \to \infty} \int_N \frac{ds}{B} \tag{2.13}$$

で定義される。N は磁力線のトーラス方向への周回数である。U は $1/B$ の平均という意味をもつ。U が $\langle r \rangle$ の減少関数となっている場合は平均的な意味で B が $\langle r \rangle$ の正方向に向かって増加することを意味し、プラズマ領域で平均最小磁場となっていることを示している。U が $\langle r \rangle$ の単調増加関数のとき、磁気面は磁気丘（ magnetic hill ）を形成していると言い、U が $\langle r \rangle$ の減少関数となっているとき、磁気面は磁気井戸（ magnetic well ）を形成していると言う。$\partial U/\partial\langle r\rangle$ はプラズマ閉じ込めの重要な安定条件となっており、磁気井戸がMHD交換不安定性を安定化する [51] 。

磁力線に沿って B は変化し、ヘリカルリップル率 ε_h はトーラスの外側での B の急速な変化の大きさで定義される。また、トロイダルリップル率 ε_t は磁力線がポロイダル角に関してトーラスを一周したときの B のゆっくりした変化の大きさで定義される。ヘリカル系での磁場の大きさ B は近似的に

$$B \sim B_t\{1 - \varepsilon_t \cos\theta - \varepsilon_h \cos(\ell\theta + m\phi)\} \tag{2.14}$$

で与えられる。

磁力線を追跡して評価量を出すためには、磁力線の方程式

$$\frac{d\rho}{B_\rho} = \frac{\rho d\phi}{B_\phi} = \frac{dz}{B_z} \tag{2.15}$$

を解けばよい。また、(2.5) は線形方程式であるから、評価量を決定する際には、パラメータとして C_h, B_t, B_v の絶対値ではなく、$B_tR/C_h, B_vR/C_h$ といった相対値を用いればよい。。ここで C_h は $C_{h,\ell m}$ の ℓm を省略した記号である。これらの諸量は、ヘリカル磁場の強さとトロイダル磁場、垂直磁場の強さの比に比例する量である。

最外殻磁気面の定義に関連して問題となることは、磁力線を有限の長さまで追跡したとして、トーラスを何周追跡すれば閉じた磁気面を形成していると言えるか、ということである。数値計算では、数値誤差のため磁力線を追跡してゆくと実際の磁気面からずれてくる。そのため、十分に長い距離を追跡することで磁気面を評価しなければならない。一方、ある有限の回数で計算を打ち切る必要がある。そこで本研究では、トロイダル方向に20回周回して磁力線が磁気面上にあった場合、その磁気面を“閉じている”と定義する。20回という周回数は計算効率を考えて選んだものであるが、例えば S_0 を評価する場合、それによって過大評価にはなっていない。実際に20回の代わりに100回周回させたとしても S_0 の変化はたかだか1 % であった。この誤差は表面近傍に生じる磁気面の細かい凹凸に起因するものである。

磁気面は磁力線を追跡することによって得られる。磁力線の追跡の際、トロイダルピッチ角をメッシュで分割し、それぞれのピッチ角での磁場の強さを求めて磁力線の位置を探す。数値計算において、数値誤差は避けられないが、メッシュ数を増大させることで、数値精度を適切なものとすることができる。磁気面を評価する際に数値誤差がその妨げとならないようなメッシュ数として本研究では 10^3 とした。数値計算誤差の評価については、付録2・Aを参照されたい。

数値計算結果を示す前に、解析的に得られる評価を示しておく。解析解は磁気軸近傍でのみ得られる。磁気軸 $\rho = R$ 近傍では

$$\begin{aligned} y &\sim \frac{r}{R} \\ \psi &\sim \theta \\ f(y) &\sim y^{\ell} \end{aligned} \tag{2.16}$$

である。従って、磁気軸近傍でのスカラーポテンシャルΩ_h は

$$\Omega_h \sim C_h \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \sin(m\phi + \ell\theta) \tag{2.17}$$

となる。(2.17) を用いて磁気軸近傍での磁場を求めることができる。磁場 $\mathbf{B}$ を擬トロイダル座標系で表すと

$$B_r \sim -C_h \ell \frac{r^{\ell-1}}{R^{\ell}} \sin(m\phi + \ell\theta) \tag{2.18}$$

$$B_\theta \sim -C_h \ell \frac{r^{\ell-1}}{R^{\ell}} \cos(m\phi + \ell\theta) \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} B_\phi &= \frac{R}{R + r\cos\theta} B_t - \frac{1}{R + r\cos\theta} \frac{\partial \Omega_h}{\partial \phi} \\ &\sim \frac{R}{R + r\cos\theta} B_t - \frac{m}{R + r\cos\theta} C_h \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell} \cos(m\phi + \ell\theta) \end{aligned} \tag{2.20}$$

となる。ここで軸対称垂直磁場 B_v は加えていない。

本節で導出される評価量は、回転変換 ι、ヘリカルリップル率ε_h、トロイダルリップル率 ε_t、磁気軸のシフト量δ/R と比体積 U である。

（１）回転変換 ι

回転変換 ι を求めるために、まず $d\theta/d\phi$ を求める。(2.19)(2.20) より、

$$\frac{d\theta}{d\phi} \sim -\tfrac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \cos(m\phi + \ell\theta) \tag{2.21}$$

ここで

$$\varepsilon_1 = \ell m \left(\frac{C_h}{B_t R}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell-2} \tag{2.22}$$

$$\varepsilon_2 = \ell \frac{C_h}{B_t R} \left(\frac{r}{R}\right)^{\ell-2} \tag{2.23}$$

である。磁力線の方程式 (2.21) の解を

$$\theta \sim a\phi + b\sin(m+\alpha)\phi \tag{2.24}$$

と近似すると、a が求める回転変換となる。(2.24) より

$$\frac{d\theta}{d\phi} = a + b(m+\alpha)\cos(m+\alpha)\phi \tag{2.25}$$

であるから、(2.21)(2.25) より

$$a + b(m+\alpha)\cos(m+\alpha)\phi = -\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2\cos(m\phi + \ell\theta) \tag{2.26}$$

が成り立つ。この恒等式を解いて a を求めれば良い。$\cos(m\phi + \ell\theta)$ は

$$\cos(m\phi + \ell\theta) \sim J_0(\ell b)\cos(m + \ell a)\phi - J_1(\ell b)\cos(\ell a - \alpha) \tag{2.27}$$

で与えられる。ここで $J_0(\ell b)$ と $J_1(\ell b)$ は第一種ベッセル関数である。(2.27) を (2.26) に代入して 、磁気軸近傍での回転変換は、

$$\iota(r) \sim \frac{\ell^3}{2m}\left(\frac{C_h}{B_t R}\right)^2 \left(\frac{r}{R}\right)^{2\ell-4} \tag{2.28}$$

で与えられる。ここで、実際の磁場の比を $B_t R/C_h$ で表現すると

$$\frac{B_\theta}{B_t} \sim -\ell \frac{C_h}{B_t R}\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell-1} \cos(m\phi + \ell\theta) \tag{2.29}$$

となる。例えば $\ell=2, m=8$ 配位で $B_t R/C_h = 2.0, B_v R/C_h = 0.0$ とすると

$$\frac{B_\theta}{B_t} \sim -\frac{r}{R}\cos(8\phi+2\theta) \tag{2.30}$$

であり、このとき

$$\iota(0) \sim 0.125 \tag{2.31}$$

となる。(2.28) の導出においては $\ell \geq 2$ としたので、(2.28) 以下の計算は $\ell \geq 2$ のときに成り立つ。

(２) ヘリカルリップル率 ε_h とトロイダルリップル率ε_t

磁場の大きさの２乗は

$$B^2 \sim B_r^2 + B_\theta^2 + B_\phi^2 \tag{2.32}$$

で与えられる。(2.32) に (2.18) ～(2.20) を代入すると

$$\frac{B}{B_t} \sim 1 - \frac{r}{R}\cos\theta - m\frac{C_h}{B_t R}\left(\frac{r}{R}\right)^\ell \cos(m\phi+\ell\theta) \tag{2.33}$$

となる。(2.33) より $\varepsilon_h, \varepsilon_t$ は

$$\varepsilon_h \sim m\frac{C_h}{B_t R}\left(\frac{r}{R}\right)^\ell \tag{2.34}$$

$$\varepsilon_t \sim \frac{r}{R} \tag{2.35}$$

で与えられる。即ち、$\ell=2$ のとき、ε_hは、小半径の２乗に比例して増大し、トロイダル磁場が大きいほど小さくなる。

(３) 磁気軸のシフト δ/R

系全体に z 方向の一様磁場 B_v を加えたとき、磁気軸のシフトδ/R は次式で与えられる。

$$\frac{\delta}{R} \sim \frac{B_v}{B_t}\frac{1}{\iota(\delta)} \tag{2.36}$$

$\iota(\delta)$ は (2.28) で与えられる。$\ell = 2$ として

$$\frac{\delta}{R} \sim \frac{m}{4}\,\frac{B_t R}{C_h}\,\frac{B_v R}{C_h} \tag{2.37}$$

が得られる。即ち、トロイダル磁場や垂直磁場が大きいほど、磁気軸のシフトは大きい。

（４）比体積 U

磁気軸がシフトしたとき、即ち、垂直磁場 B_v が加わったときの比体積 U を求める。トーラス磁場 (B_t, B_θ, B_ϕ) は近似的に $B_r \ll B_\phi, B_\theta \ll B_\phi, B_\phi = B_t R/(R + \delta\cos\theta)$ としてよいから、磁気軸での比体積 U_0 は

$$\begin{aligned} U_0 &= \oint \frac{ds}{B} \\ &\sim \frac{2\pi R}{B_t}\left(1 + 2\frac{\delta_0}{R}\right) \end{aligned} \tag{2.38}$$

となる。ここで δ_0 は磁気軸のシフト量である。磁気軸近傍の磁気面上での比体積 U は、そのシフト量を用い、同様に

$$U \sim \frac{2\pi R}{B_t}\left(1 + 2\frac{\delta}{R}\right) \tag{2.39}$$

であるから、磁気井戸の深さは

$$\frac{U_0 - U}{U_0} \sim 2\frac{\delta_0 - \delta}{R} \tag{2.40}$$

で与えられる。磁気面のシフトの差が大きいほど、磁気井戸は形成されやすく、その領域も広くなる。

2.4 数値計算結果

2.4.1 磁気面の例

トロイダルヘリカル磁場の場合、磁気面全体を解析的に求めることは困難である。従って、数値計算によって磁力線の方程式を解いて磁気面を求め、評価量を出すことになる。数値計算で磁気面のポロイダル断面を得るには磁力線を追跡して磁力線が、あるポロイダル断面を通過する点をプロットしてゆく。ヘリカル磁場はトーラス方向に周期があり、磁場に非周期成分が加わっていない限りにおいて、同じ位相での磁気面は同一であると考えることができる。これを用いるとトーラスを周回する回数を減らすことができ、数値計算誤差を軽減できる。ヘリカル磁場を考える手法には種々のものがある。一つは、ヘリカルコイルを与え、そこに流れる電流によって磁場を形成し、磁力線を追跡してゆく手法である。この手法は Biot-Savart 則を用いて行われるが、コイルを線電流近似に積分を行ってゆくため誤差が生じ、特にコイル近傍での誤差は大きくなるという欠点があった。近年、等々力によって矩形コイルでの積分計算が行えるようになり、計算精度の向上が見られた [52] 。しかしながら、磁気面を求めるのには、やはり計算時間を多く必要とする。ヘリカル磁場を与える別の手法としては、ヘリカル磁場を作るスカラーポテンシャルを求めて磁気面を形成する手法がある。Dommaschk 等 [53] はヘリカルコイルを作るスカラーポテンシャルを高次の項まで求め、係数を変化させることで、あるプラズマパラメタについての磁気面の最適化を行った。スカラーポテンシャルを用いた手法は、モジュールコイルを考える上でも有利となり、この手法で設計されたのが Wendelstein VII-AS である。本章ではスカラーポテンシャルの基本ハーモニクス成分を用いて磁場計算を行ったが、磁気面の第 0 次の評価をするのには十分である。また、基本ハーモニクス成分のみを利用した解析は Biot-Savart 則を用いた解析に比べて計算時間を短縮できるから、磁気面を広範囲なパラメータ領域で調べることが可能となる。スカラーポテンシャルを用いた解析で問題となることは、実際のコイルの形状であるが、これについては§2.5 で述べ

ることにする。

図 2.3 に真空磁気面のポロイダル断面の一例を示す。この場合、$\ell = 2, m = 8, B_t R/C_h = 2.0, B_v R/C_h = 0.0$ とした。副軸 $(\rho, z) = (R, 0)$ は磁気軸と一致する。図 2.4 はこの真空磁気面の評価量 $\iota, U, \varepsilon_t, \varepsilon_h$ の半径方向の分布である。ここで U は $2\pi R/B_t$ で規格化している。磁気軸近傍では、$\iota(0) \sim 0.125$ となっているが、これは解析的に求めた値 (2.31) と一致する。U は $\langle r \rangle$ の単調増加関数となっているから、この磁気面は磁気丘を形成している。$\varepsilon_t, \varepsilon_h$ も $\langle r \rangle$ の単調増加関数であるが、ε_t は $\langle r \rangle/R$ に比例し、ε_h は $(\langle r \rangle/R)^2$ に比例していることを磁気軸近傍で確かめ、解析解 (2.34)(2.35) との一致がみられた。

2.4.2 軸対称トロイダル磁場 B_t の効果

評価量 $S_0, \iota, U, \varepsilon_t, \varepsilon_h$ がパラメータ B_t, B_v, m にどの様な依存性を示すのかを調べる。まず最初に、パラメータとして B_t をとる。図 2.5 に ι, U の B_t 依存性を示す。$B_t R/C_h$ が増大すると回転変換は減少し、シアーは弱くなる。シアーは$\partial t/\partial \langle r \rangle$ で定義する。S_0 は B_t の増加と共に増大し、また、磁気面は磁気丘を形成したままである。ヘリカルリップル率 ε_h、トロイダルリップル率 ε_t は $B_t R/C_h$ の増加と共に大きくなる。

閉じ込めの観点から見れば、ι, S_0 が共に大きいことが望まれるが、ι は $B_t R/C_h$ の減少関数、S_0 は増加関数であるから、双方を同時に最適化できない。そこで、適度な回転変換と適度な面積のある磁気面を得るため、次の評価関数を導入する。

$$F \equiv \iota(0) \cdot S_0 \tag{2.43}$$

図 2.6 は F の $B_t R/C_h$ に対する依存性を示す。ここで $\ell = 2, m = 8, B_v R/C_h = 0.0$ としている。関数 F は $B_t R/C_h \sim 1.2$ で最大値をとり、このときの評価量は $R/a \sim 7.41, \iota(0) \sim 0.36, \iota(a) \sim 0.97$ となる。この関数 F を導入する物理的理由は、F が閉じ込めの尺度となり得るからである。ヘリカル系では、新古典論によるとプラズマの中心領域の局所的な熱伝導係数がプラトー領域で $1/(\iota R B^2)$ に比例することが予測さ

れている [54] 。温度、磁場強度、主半径を決めたとすると、熱伝導係数 $\chi_e \sim S_0/\tau_E$ であるから$\tau_E \propto \iota(0) \cdot S_0$ となり、関数 F が閉じ込め時間を決める一つの目安となり得る。

低アスペクト比配位の最外殻磁気面は高アスペクト比配位に比べ、少しの摂動に対して壊れやすい。対称性の破れはベータ値の増大と共に大きくなり、最外殻磁気面から崩れてゆく。低アスペクト比配位において磁気面の破壊が平衡ベータ値を決める主要な原因である。最外殻磁気面が破壊されてゆくと、プラズマ端の回転変換は小さくなり、平衡ベータ値は低下する。真空磁気面から評価されるヘリカル系の平衡ベータ値限界 β_{eq} は

$$\beta_{eq} = \frac{a}{R}\,\iota(a)^2 \tag{2.44}$$

で与えられる [33] 。ここで β_{eq} はトーラスで平均化された磁気軸のシフト δ が$\delta = a/2$ である時の β 値で定義されている。B_tR/C_h に対して a/R と $\iota(a)$ は相反する性質を有するから、図 2.7 に示すようにβ_{eq} は F と同様な曲線を描く。ここで $m = 8, B_vR/C_h = 0.0$ としている。核融合炉としての応用を考えるとき、β 値はある程度以上高くなければならない。β_{eq} 値はそうした要求を満たしていればよく、必ずしも極大値である必要はない。図 2.7 で言えば、$\beta_{eq} \gtrsim 10\%$ を要求するとして、$0.6 \lesssim B_tR/C_h \lesssim 1.6$ が磁気面のとり得る範囲となる。$B_tR/C_h \sim 1.2$ で F は最大値をとるから、この範囲内で F は最大値をとることができる。

2.4.3 軸対称垂直磁場 B_v の効果

次に軸対称垂直磁場 B_v の効果を考える。B_v を加えたときの磁気面の例を図 2.8 に示す。磁気軸がトーラスの外側にシフトしていることがわかる。ここでパラメータは $m = 8, B_tR/C_h = 2.0, B_vR/C_h = 0.02$ である。この磁気面での評価量の値は $\iota(0) \sim 0.16, \iota(a) \sim 0.97, R/a \sim 4.5$ である。図 2.9 に B_vR/C_h を変化させたときの ι, U の径方向分布の変化を示す。ある程度の B_vR/C_h を加えると、U が減少関数となるプラズマ領域が現れ、磁気井戸が形成される。

垂直磁場が z 軸の正方向に加えられていると磁気軸はトーラスの外側にシフトし、負方向であると内側にシフトする。この理由は、トーラスの内側、外側の一方で z 方向の磁場が強められ、他方で弱められるからである。垂直磁場が z 軸の正方向の時、磁気面のそれぞれの幾何中心は $\langle r\rangle$ の減少関数となり、この時、磁気面の間隔はトーラスの内側で広く、外側で狭くなる。即ち、トーラスの外側の磁束は減り、内側の磁束は増える。トーラスの内側の磁束が増えると良い曲率の領域での粒子の滞在時間が増大し、プラズマの閉じ込めは改善される。垂直磁場の印加はプラズマの入る体積にも影響を与える。図 2.10(a) に $\ell = 2, m = 8, B_t R/C_h = 2.0$ の時の S_0, ι の B_v 依存性を示す。磁気面は $B_v R/C_h \sim 0.018$ で $S_0, \iota(a)$ に関して最適化されている。最外殻磁気面を決定するのは磁気島の重なりであるが、垂直磁場が加わることで磁気島の幅が小さくなり磁気島の重なりが小さくなる。これによって S_0 は増大する。$\partial\iota/\partial\langle r\rangle|_{\langle r\rangle=a}$ は大きいので S_0 の少しの増大は $\iota(a)$ の急激な増加をもたらす。図 2.10(a) での磁気軸のシフトは $\delta/R \sim 0.085$ であるから、主半径に比べ 8% 磁気軸をシフトさせることで回転変換は $B_v = 0.0$ の時に比べ、約 1.78 倍大きくなる。また、β_{eq} は R/a と $\iota(a)$ が共に増大していることから、$B_v = 0.0$ の時に比べ、約 1.84 倍大きくなっている。(図 2.10(b)) 図 2.10 の矢印は磁気軸で磁気井戸が発生する B_v の値を示す。S_0 を最適化する B_v 値は、磁気軸で磁気井戸を形成するのに十分な値となっている。この最適化はすべての m に対して適用できる。

$m = 19, B_t R/C_h = 0.65$ とすると、Heliotron-E の磁気面を模擬できる。(この場合の磁気面の様子は次章を参照されたい。) しかしながら、本研究のモデルでは Heliotron-E での標準配位に相当するのは $B_v = 0$ のときではなく、磁気面が外側にシフトしている $B_v R/C_h = 0.005$ のときであることに注意しなければならない。 Heliotron-E では標準配位より内側にシフトすることにより $\iota(a)$ と S_0 は最適化される。これは本研究では $B_v R/C_h = 0.005$ を標準配位と考え、B_v を減らす方向に相当する。

$\ell = 2, m = 8$ 配位での磁気丘と磁気井戸との境界線を図 2.11 に示す。実線が磁気軸での境界、点線が $\langle r\rangle = a/2$ での境界を表している。また、

磁気面が S_0 について最適化されるときの B_v 値も一点鎖線で示しておく。図からわかるように、この B_v 値は B_t に依存性を持っている。

図 2.12 は $\ell = 2, m = 8$ 配位での B_tR/C_h をパラメータとした評価量 R/a, $\iota(a)$, $\iota(0)$, F, β_{eq} の変化を表している。ここで軸対称垂直磁場 B_v は図 2.11 の最適化曲線上を変化している。即ち、$\iota(a)$ と S_0 について最適化されている。このとき、評価関数 F は B_t にほとんど依存しなくなるのがわかる。これは、S_0 が最適化されているとき、F も最適値に近い値をとっていることを意味する。β_{eq} は B_tR/C_h の増加と共に減少している。しかしながら、$B_tR/C_h \lesssim 5.0$ 即ち、$R/a \gtrsim 2.7$ の範囲ではβ_{eq} は 15% 以上を確保できる。尚、$B_tR/C_h \sim 1.3, B_vR/C_h \sim 0.013$ とすると $\iota(0) \sim 0.3, \iota(a) \sim 1.5, R/a \sim 6.2$ が得られ、これらの値は CHS のパラメータ $\iota(0) \sim 0.3, \iota(a) \sim 1.0, R/a \sim 5.0$ に近い [55] 。

2.4.4 トロイダルピッチ数 m に対する依存性

磁気面の特性量を変えるパラメータの一つとして、トロイダルピッチ数 m を考える。トロイダルピッチ数のとり得る範囲として理論的には $m = 1$ から無限大まで選ぶことができるが、現実性の問題から本章では最大値として $m = 16$ を選んだ。m の低い配位 ($m = 2$) については付録 2.B で論じている。図 2.13 に、$B_tR/C_h = 2.0, B_vR/C_h = 0.0$ の時の回転変換の径方向分布を示す。ここで m は 4 、8 、12 、16 の値を選んだ。このときヘリカル系の磁気面の評価にしばしば用いられるパラメタ $\gamma(= m/\ell \cdot a/R)$ は一定でないことに注意しなければならない。γ を一定として評価することも可能であるが、本研究ではトロイダル磁場、垂直磁場及びトロイダルピッチ数に対する依存性という観点から評価をおこなっているため、ここではトロイダル磁場と垂直磁場を一定と考えてトロイダルピッチ数に対する依存性を調べてゆく。m を大きくしてゆくと $\iota(0)$ は小さく、$\iota(a)$ は大きくなる。従ってシアーは強くなる。しかしながら、S_0/R^2 は減少してゆく。一方、F 値は 図 2.14 に示されているように m の増大と共に減少し、F が最適値となる S_0/R^2 も減少する。図

2.14 中の点線は $\iota(0) = 0.3$ の直線である。$\iota(0) \geq 0.3$ という条件を磁気面に対して要求するとしても F の最大値は $m \geq 8$ の場合、減少することはない。また、$m = 4$ の場合にでも F の減少は高々 10% である。

図 2.15 は最外殻磁気面でのヘリカルリップル率 $\varepsilon_h(a)$ 、トロイダルリップル率 $\varepsilon_t(a)$ の S_0 依存性を示している。$\varepsilon_h(a), \varepsilon_t(a)$ は共に S_0 の単調増加関数であり、m が小さい方が $\varepsilon_h(a), \varepsilon_t(a)$ は小さくなる。低 m 配位では、高 m 配位で無視できていたトロイダルリップルの影響がヘリカルリップルの影響を同程度またはそれ以上となってくる。

S_0 と $\iota(a)$ の関係を図 2.16 に示す。白ぬき印（o, $\triangle, \square, \nabla$）は $B_v = 0$ の場合を示し、黒印（$\bullet, \blacktriangle, \blacksquare, \blacktriangledown$）は B_v に関して最適化された場合を示している。磁気面の占める面積が大きくなったとき、S_0 を一定としてみると最適化された$\iota(a)$ は $B_v = 0.0$ のときに比べて 2 倍程度改善されている。また、$B_v = 0.0$ 、最適化 B_v のどちらの配位においても、$\iota(a)$ は S_0 がある程度大きくなった範囲においては m にほとんど依存しない。従って、平衡ベータ限界 β_{eq} は m が小さくなっても劣化することはない。

本章では低アスペクト比配位を重点に調べてきたが、その動機にはヘリカル系の実験における近年の閉じ込め研究の成果がある。グローバルな閉じ込めスケーリングは、プラズマ密度、磁場、加熱入力を一定とすると、 $\tau_E \propto a^{\alpha} R^{\beta} (\alpha \sim 2.0, \beta = 0.75 \sim 1.0)$ であると報告されている [54]。このスケーリングによれば、低アスペクト比配位の方が長い閉じ込め時間を達成できることになる。aRB（全磁束量の尺度）を一定としたときでさえ、τ_E はアスペクト比を小さくすることで改善されることが予想される。

2.5 磁気面を作る電流分布

2.5.1 面電流の決定方法と例

磁場がスカラーポテンシャルで与えられているときのスカラーポテンシャルを作り出す外部電流の分布を求める。本章では、磁気面を形成するため、トーラス状の閉じた面の内部でラプラス方程式を解いた。その閉じた面内部と同様にして、面外部でも遠方 $y \to 1$ での境界条件 $f(y) \sim (1-y)^{\frac{m}{2}}$ を用いてラプラス方程式を解くと、境界面外部の磁場が与えられる。こうして得られた内部の磁場は境界面上では不連続であり、その不連続性と両立して面電流 $\mathbf{J}_s$ を決めることができる。この面電流 $\mathbf{J}_s$ は境界面の汎関数であり、境界面の形を決めるとそれに応じて決定される。境界で満たされなければならない方程式は、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_i = \mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_e \tag{2.45}$$

となる。ここで $\mathbf{n}$ は境界面の法線ベクトル、$\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_e$ はそれぞれ境界面内外の磁場である。$\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_e$ は

$$\mathbf{B}_j = -\nabla\Omega_{hj} + \mathbf{B}_{tj} + \mathbf{B}_{vj} \qquad (j = i, e) \tag{2.46}$$

で与えられる。ここで小文字 i, e はそれぞれ境界面の内部か外部かを意味する。磁場の境界面の法線方向成分は連続となるが、面の接線方向成分は不連続となる。面電流 $\mathbf{J}_s$ は磁場 $\mathbf{B}_i, \mathbf{B}_e$ を用いて

$$\mathbf{J}_s = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{n} \times (\mathbf{B}_i - \mathbf{B}_e) \tag{2.47}$$

で与えられる。ここで μ_0 は真空中での透磁率である。

境界面を選ぶことによって、電流分布は種々の形状のものを作ることができる。ラプラス方程式 (2.2) が境界値問題となって磁気面が形成されるためには、境界面で磁気面が囲まれる必要がある。従って、境界面のトポロジーは必ずトーラス形状となる。本節では、$\ell = 2, m = 8$ 配位での電流分布の例を挙げる。

まず、境界面が $y = \mathrm{const.}$ のときを考える。このとき、境界面は、図 2.17 に示すような、主半径 R'、小半径 r' が次式で与えられるトーラスとなる。

$$
\begin{aligned}
R' &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} R \\
r' &= \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} R
\end{aligned}
\tag{2.48}
$$

軸対称磁場が境界面で連続であるとすると、(2.45) は

$$
\mathbf{n} \cdot \nabla \Omega_{hi} = \mathbf{n} \cdot \nabla \Omega_{he} \tag{2.49}
$$

と書ける。Ω_{hj} $(j = i, e)$ は次式で与えられる。

$$
\Omega_{hj} = \sum_{\ell,m} C^j_{\ell m} (1 - y\cos\psi)^{\frac{1}{2}} f^j_{\ell m}(y) e^{i(m\phi + \ell\psi)} \tag{2.50}
$$

(2.50) を (2.49) に代入して計算すると

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\ell,m} C^i_{\ell m} \{-2\frac{df^j_{\ell m}}{dy} + (f_i + 2y\frac{df^j_{\ell m}}{dy})\cos\psi\} e^{i(\ell\psi + m\phi)} \\
&= \sum_{\ell,m} C^e_{\ell m} \{-2\frac{df^j_{\ell m}}{dy} + (f_e + 2y\frac{df^j_{\ell m}}{dy})\cos\psi\} e^{i(\ell\psi + m\phi)}
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

となる。m に関しては (2.51) は変数分離されているので (2.51) が成り立つには、各々の m に対して、全ての ℓ について

$$
\begin{aligned}
&\alpha^i_{\ell-1} C^i_{\ell-1} + \beta^i_\ell C^i_\ell + \alpha^i_{\ell+1} C^i_{\ell+1} \\
&= \alpha^e_{\ell-1} C^e_{\ell-1} + \beta^e_\ell C^e_\ell + \alpha^e_{\ell+1} C^e_{\ell+1}
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

が成り立たなければならない。(2.52) において小文字 m は省略してある。ここで α^j_ℓ, $\beta^j_\ell (j = i, e)$ は

$$
\begin{aligned}
\alpha^j_\ell &= \frac{1}{2}(f_j + 2y\frac{df^j_{\ell m}}{dy}) \\
\beta^j_\ell &= -2\frac{df^j_{\ell m}}{dy}
\end{aligned}
\tag{2.53}
$$

で与えられる。内部の係数 $C^i_{\ell m}$ が決まれば、(2.52) によって外部の係数 $C^e_{\ell m}$ を決めることができる。

境界面内部の磁場が $\ell=2$ のみのポテンシャルで構成されていると仮定すると、内部係数 $C^i_{\ell m}$ は

$$C^i_{\ell m}=\begin{cases}1 & (\ell=2)\\ 0 & (\ell\neq 2)\end{cases} \tag{2.54}$$

で与えることができる。このとき、$C^e_{\ell m}$ は図 2.18 の o 印の分布となる。ここで y は $y=0.5$ 即ち $R'/R\sim 1.15$, $r'/R\sim 0.58$ としている。$C^e_{\ell m}$ は ℓ が 2 から遠ざかるにつれて指数関数的に減少する。

このときの面電流分布を図 2.19(a) に示す。ここで θ,ϕ は擬トロイダル座標である。面電流 $\mathbf{J}_s$ はステラレータ配位を形成しており、また、$\nabla\cdot\mathbf{J}_s=0$ を満たしている。図 2.19(a) の面電流分布のままであると、実際にコイルとして巻くことは困難であろうから、(ℓ,m) の高次成分を加えて面電流をさらに改善することが必要となる。高次成分の影響については §2.5.2 で述べる。

境界面が $y=$ const. 以外の場合においても、(2.49) を (2.51) の様な形にして $C^e_{\ell m}$ を求めることは可能であるが、途中の計算が複雑である。従って、(2.49) を ψ,ϕ に関するフーリエ分解によって解かず、境界面上の N 点において磁場の法線成分が連続となるように係数 $C^e_{\ell m}$ を決める。この手法は、フーリエ分解による手法での誤差と同程度となるように N を十分大きくとった。境界面としては、磁気軸とトーラスの中心が一致するものを選び、ポロイダル断面が円形（半径 $r'/R=0.4$）であるとした。

図 2.18 の Δ 印は、ポロイダル断面が円形の境界面での $C^e_{\ell m}$ の値である。境界面が $y=$ const. のときに比べ、$\ell=2$ 以外の成分が多く混じってくる。図 2.19(b) がこの場合の面電流分布である。

境界面には種々のものが考えられ、ポロイダル断面が円形以外の形状も選ぶこともできる。例えば、磁気面の形状に合わせた楕円形のものを選ぶことも可能であろう。近年、コンピュータ制御によるコイル製作が可能となったので、精度はもちろん、コイルの巻き方は現実的にも多様

性を見いだせるようになってきた [57]。本節では数例の電流分布を考えただけであり、より良い磁気面を形成するために境界面をさらに検討してゆかなければならない。

2.5.2 面電流の変形、整形とそれに伴う磁気面への影響

§2.5.1 で求めた面電流分布はステラレータ配位となっているが、境界面全体に一様電流を加えると、ヘリオトロン／トルサトロン配位にすることができる。この一様電流はトーラス内部にトロイダル磁場と垂直磁場に相当する磁場を形成する。§2.5.1 で求めた面電流分布はトーラス全面に流れているが、実際には、これを集中したコイル電流で近似しなければならない。$\theta = \pi$ 近傍では面電流分布は十分に近似できそうだが、$\theta = 0$ 近傍では電流が面に一様に広がっているため、一本のコイルで近似することは、このままでは困難である。従って、電流分布に高次のフーリエ成分を加えて、面電流を整形してゆく必要がある。

面電流に高次のフーリエ成分を加えると、磁気面はその影響を受け評価量は変化する。この影響を解析的に評価する。有理面 $\iota(r_0) = m/(\ell+j)$ での磁気島の幅 $\delta_{\ell+j}/R$ は次式で与えられる [58]。

$$\frac{\delta_{\ell+j}}{R} \sim 4\frac{r_0}{R}\sqrt{\frac{b_{\ell+j}}{\overline{B_\theta}}\frac{1}{\ell+j}\frac{\iota}{r_0\iota'}} \tag{2.55}$$

ここで r_0 は磁気軸から有理面までの平均半径、$b_{\ell+j}$ は $(\ell+j, m)$ モードの B_r 成分、$\overline{B_\theta}$ は $r = r_0$ での平均ポロイダル磁場で

$$\overline{B_\theta} = \frac{\iota(r_0)B_t r_0}{R} \tag{2.56}$$

で与えられる。また、$\iota' = dt/dr|_{r=r_0}$ である。有理面 $m/(\ell+j)$ と $m/(\ell+j-1)$ の回転変換の差 $\Delta\iota$ は

$$\begin{aligned} \Delta\iota &= \frac{m}{\ell+j-1} - \frac{m}{\ell+j} \\ &\sim \frac{\iota^2}{m} \end{aligned} \tag{2.57}$$

であるから隣接する磁気島の間隔 d/R は

$$\begin{aligned}\frac{d}{R} &\sim \frac{\Delta\iota}{\iota' R} \\ &\sim \frac{\iota^2}{m\iota' R}\end{aligned} \tag{2.58}$$

で与えられる。次の条件のとき磁気島は重なり、磁気面は破壊される。

$$\delta_{\ell+j} \gtrsim d \tag{2.59}$$

(2.59) に (2.55)(2.58) を代入すると

$$\frac{b_{\ell+j}}{B_\theta} \gtrsim \frac{1}{16}\frac{1}{m}\frac{\iota^2}{r_0\iota'} \tag{2.60}$$

が得られる。$b_{\ell+j}$ は

$$b_{\ell+j} \sim (\ell+j)B_t\frac{C_{\ell+j}}{B_t R}\left(\frac{r}{R}\right)^{\ell+j-1} \tag{2.61}$$

で与えられ、近似コイルの電流分布を矩形と考えると、漸近的に

$$\frac{C_{\ell+j}}{C_\ell} \sim \frac{\ell}{\ell+j} \tag{2.62}$$

であるから、

$$\left(\frac{r_0}{R}\right)^{\ell+j-2} \gtrsim \frac{1}{16\ell m}\frac{B_t R}{C_\ell}\frac{\iota^3}{r_0\iota'} \tag{2.63}$$

が磁気面破壊の条件となる。

さて、$\ell = 2, m = 4$ 配位 $(B_tR/C_h = 1.5, B_vR/C_h = 0.03)$ の場合を考えてみる。$(\ell + j, m) = (5, 4)$ モードの電流成分が矩形コイルにすることで加わったとすると、$r_0/R \sim 0.1535$, $\iota' \sim 2.83$, $\iota(r_0) = 0.8$, $\iota(0) \sim 0.22$ より、(2.63) の左辺は 3.16×10^{-3} 、右辺は 1.38×10^{-2} で左辺と右辺の比は 0.23 となり、磁気面破壊が問題となり得るパラメータである。(5, 4) モードの磁気島の幅が 2 倍になったとすると、磁気島は $\langle r\rangle/R \sim 0.15$, $\iota \sim 0.75$ の位置まで影響を及ぼすと考えられる。最大の劣化は面積にし

て約 13%、回転変換にして 14% の減少が概算として出される。次に図 2.3 の $\ell = 2, m = 8$ 配位を考えてみると、$\iota_0 = 8/12$ の磁気島が最外殻磁気面を決定しているが、近似コイルによって (12, 8) モードの高次成分が加わった場合、$r_0/R \sim 0.206$, $\iota' = 8.42$, $\iota(r_0) = 8/12$, $\iota(0) = 0.125$ より (2.63) の左辺は 1.38×10^{-8}、右辺は 1.33×10^{-3} となり、左辺と右辺の比は約 10^{-5} となるから、この場合には、電流分布の整形による影響はあまりないと思われる。

2.6 結論

本章では、ラプラス方程式を満たすトロイダル関数によって記述されるスカラーポテンシャル Ω_h を用いて $\ell = 2$ ヘリカル系プラズマ閉じ込め配位における真空磁気面の評価を行った。スカラーポテンシャルを用いる解析は、コイルの巻き線則から考えて行う解析と異なり、ヘリカル系の真空磁気面のとり得る範囲を広く見渡すことができる。外部パラメータとして、軸対称磁場 B_t, B_v と、トロイダルピッチ数 m を用いた。そしてこれらの磁場を実現する様な電流分布をいくつかの境界面で求めた。また、面電流を整形したときの磁気面への影響を解析的に評価した。

ヘリカル磁場に加えられる軸対称トロイダル磁場 B_t が大きくなると、回転変換ι は小さく、シアーは弱くなるが、最外殻磁気面によって囲まれる面積 S_0 は大きくなる。ι と S_0 が共に適当な値をとるような磁気面を選ぶために、関数 $F \equiv \iota(0) \cdot S_0$ を定義すると、ある B_t 値で F は最適化される。軸対称垂直磁場 B_v を加えることにより磁気面を改善することができる。第一に、B_v がある閾値を越えると磁気面は磁気井戸を形成することができる。第二に、$\iota(a), S_0$ が改善できる。我々のモデルでは、$\iota(a), S_0$ が改善されるとき、磁気軸で磁気井戸は形成されている。最外殻磁気面で囲まれている面積がある程度大きいとき、S_0 を一定とすると、$B_v = 0$ のときの $\iota(a)$ はトロイダルピッチ数 m にほとんど依存しない。B_v によって最適化された $\iota(a)$ の場合にも同様のことが言える。このことから、F, β_{eq} 等を共通な値にできる低アスペクト比配位が得られる。m を小さくすると S_0/R^2 を大きくすることができる。

本章で議論してきた配位にプラズマが入った場合、磁場が受ける影響や MHD 安定性について検討する必要がある。プラズマが磁場中に存在すると、プラズマの効果、例えば反磁性電流や force-free 電流等を考慮にいれなければならない。

スカラーポテンシャルを構成する面電流は計算できたが、最適化が行えるときのような電流分布に実際にコイルとして巻くことは現在の段階では困難であろう。(ℓ, m) の高次成分を加えて、さらに、電流分布を整え

る必要がある。実際のコイルとして可能な範囲でどこまで最善の場合に近づき得るか十分に検討しなければならない。

付録 2.A

この付録では数値計算誤差をトロイダルピッチ角を分割するメッシュ数 M の関数として評価する。評価方法は以下の通りである。初期条件 $(\rho, \phi, z) = (\rho_0, 0, z_0)$ で出発した磁力線はトロイダル方向に N 周回って $(\rho_1, 2N\pi, z_1)$ の位置に到達する。この点を再び出発点にして磁力線を逆方向に N 周追跡する。終点を $(\rho_f, 0, z_f)$ とすると $(\rho_f, 0, z_f)$ は $(\rho_0, 0, z_0)$ とは数値誤差のために一致しない。数値誤差 ε は

$$\varepsilon = \frac{1}{R}\{(\rho_0 - \rho_f)^2 + (z_0 - z_f)^2\}^{1/2}$$

で定義される。

図 3.A.1 に N と ε の関係を示す。当然のことながら、N の増大と共に ε は増大する。(2.15) を積分する際に 3 次スプラインを行っているので ε は $1/M^3$ に比例することが予想され、数値計算によっても確認されている。$M \geq 100$ の時、周回数が少ない（$N \lesssim 20$）場合には $|\rho_0 - \rho_f|$ が支配的となり

$$\varepsilon \propto \frac{N}{M^3}$$

となり、周回数が大きい（$N \gtrsim 20$）場合には $|z_0 - z_f|$ が支配的となり

$$\varepsilon \propto \frac{N^2}{M^3}$$

となる。数値誤差の絶対評価をしてみると、本章の解析では $M = 10^3$, $N = 10^2$ としたから $\varepsilon \sim 10^{-5}$ である。この誤差は磁気面の解析をする上ではほとんど影響を及ぼすことはない。

磁力線を追跡する際に (2.6) の常微分方程式を解いて $f(y)$ を求めなければならないが、計算速度を進めるためにテーブルルックアップ法を使う。テーブルルックアップ法とは $f(y_i)$, $f'(y_i)$, $f^{(2)}(y_i)$, $f^{(3)}(y_i)$, $y = i/n$ $(i = 1, \cdots, n-1)$ をあらかじめ求めてテーブルを作成しておき、4 次のスプライン補間をして $f(y)$ を

$$f(y) = f(y_i) + f'(y_i)\Delta_y + \frac{1}{2}f^{(2)}(y_i)\Delta_y^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(y_i)\Delta_y^3$$

から計算する。ここで$\Delta_y = y - y_i$である。このテーブルルックアップ法を用いれば磁力線を追跡するのに、いちいち (2.6) を解く必要はなく、かなり計算速度を上げられる。補間から求められた解 $f(y)_s$ と真の解 $f(y)$ との誤差 ε_f は $n = 10^4$ で

$$\varepsilon_f = \left| \frac{f(y)_s - f(y)}{f(y)} \right| \leq 10^{-11}$$

であるので全体に与える誤差としては十分に小さい。

付録 2.B

トロイダルピッチ数 m を小さくしてゆくと、低アスペクト比配位を得ることができる。極度に m の低い配位、例えば $\ell = 2, m = 2$ 配位の真空磁気面が存在することは吉川によって見出されている [56]。図 2.B.1 は $\ell = 2, m = 2$ 配位の真空磁気面の一例である。ここで $B_t R/C_h = 4.0, B_v R/C_h = 0.036$ としている。トロイダル角は $\phi = 0$ とした。この磁気面の評価量は $\iota(0) \sim 0.11, \iota(a) \sim 0.14, R/a \sim 1.97$ である。これは吉川の結果と一致する。アスペクト比は $R/a \lesssim 2.0$ と小さな値をとることができ、R 一定とするとプラズマ閉じ込め体積を十分に大きくすることができる。しかし、$\iota(0) \sim 0.1$ は現在の高温プラズマ閉じ込め実験のデータベースにはなく、MHD安定性と言った観点からみても十分な値とはいえないと考えられる。関数 F は $B_t R/C_h = 2.0, B_v R/C_h = 0.0$ の場合 $F/R^2 \sim 0.09$ となり、$\ell = 2, m = 8$ 配位に比べ、4 倍程度大きくとれる。

$\ell = 2, m = 2$ においても真空磁気面が形成でき、プラズマの閉じ込めに対して、その可能性を示せたが、MHD 安定性、粒子輸送等に関する検討は今までになされていない。$R/a \leq 2.0$ ということから装置規模を十分に小さくできるという長所は有しているし、τ_E も増大できる可能性を有していることから、さらにこの配位の特性を検討してゆく意義はあると思われる。

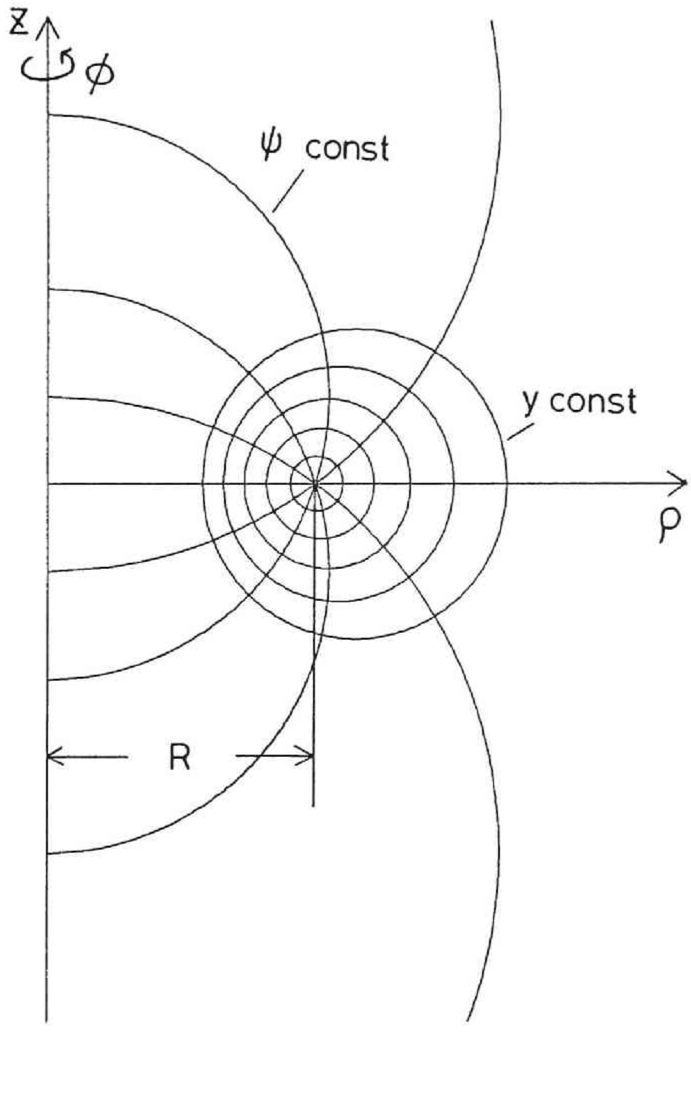


図 2.1 トロイダル座標

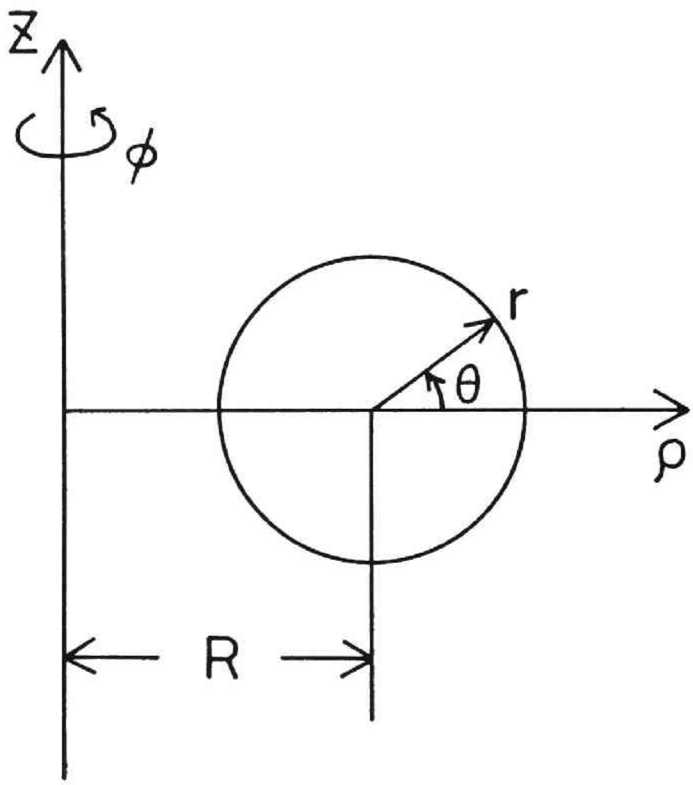


図 2.2 擬トロイダル座標

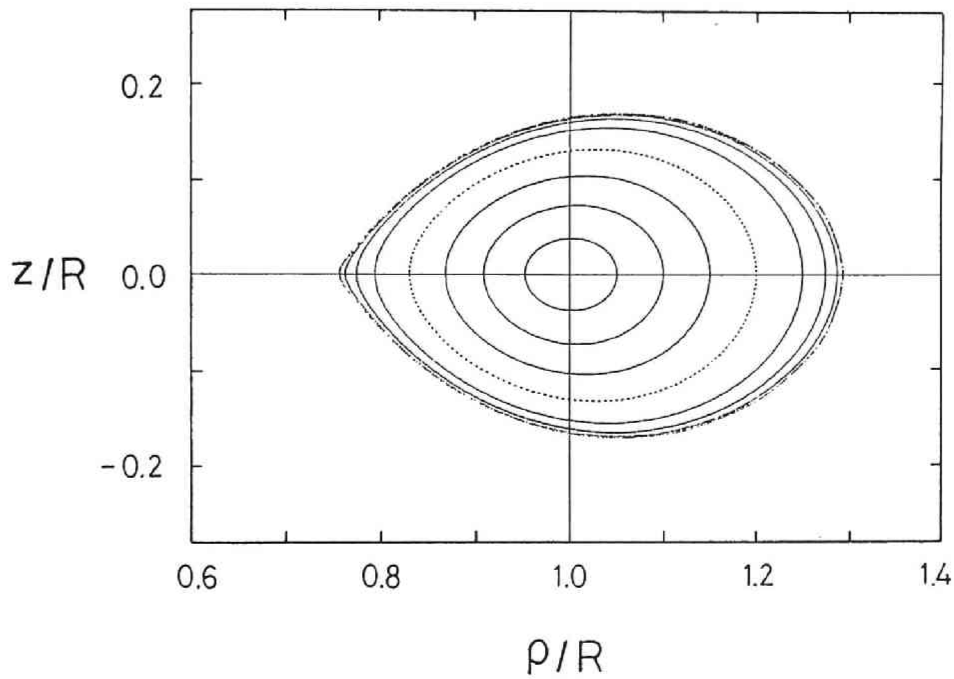


図 2.3 $\ell = 2$, $m = 8$ の真空磁気面のポロイダル断面。パラメータは $B_t R/C_h = 2.0$, $B_v R/C_h = 0.0$ である。

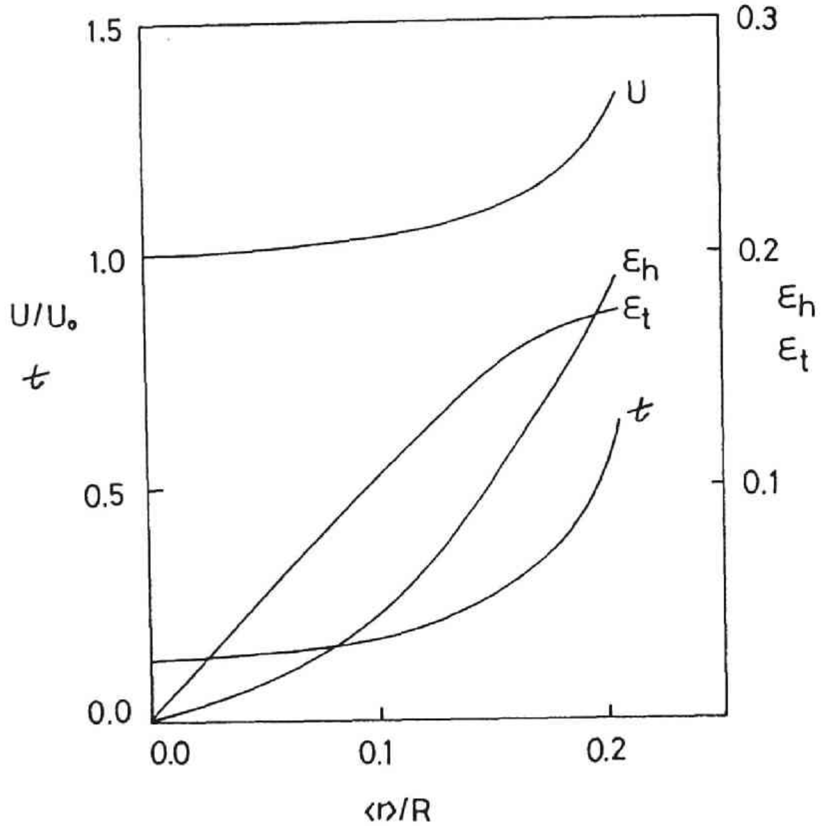


図 2.4 磁気面評価量 $\iota, U, \varepsilon_h, \varepsilon_t$ の径方向分布。パラメータは図 2.3 と同じである。

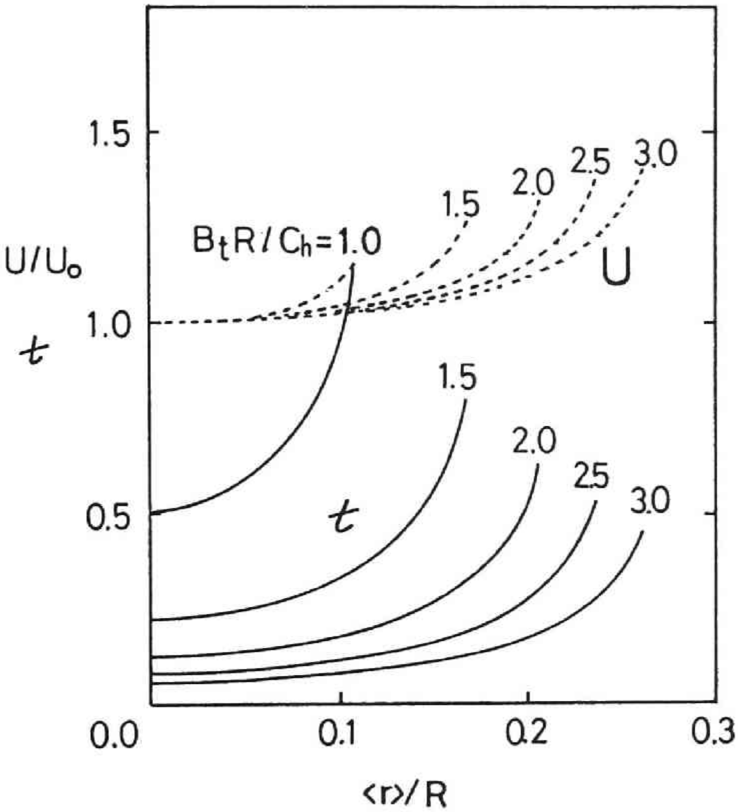


図 2.5 トロイダル磁場 B_t を変化させたときの ι, U の径方向分布。B_t が大きくなるほど、全体の ι とシアーが小さくなる。

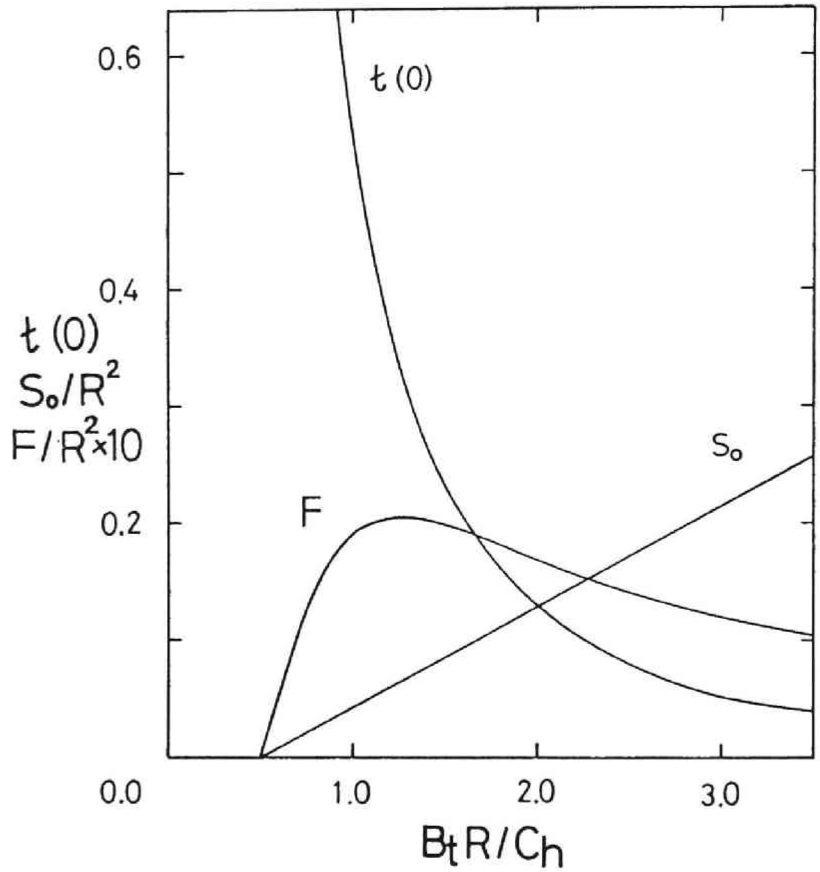


図 2.6 評価関数 $F(=\iota(0)\cdot S_0)$ の B_t依存性。F は $B_tR/C_h = 1.25$ $(a/R = 0.14)$ で最大値をとる。

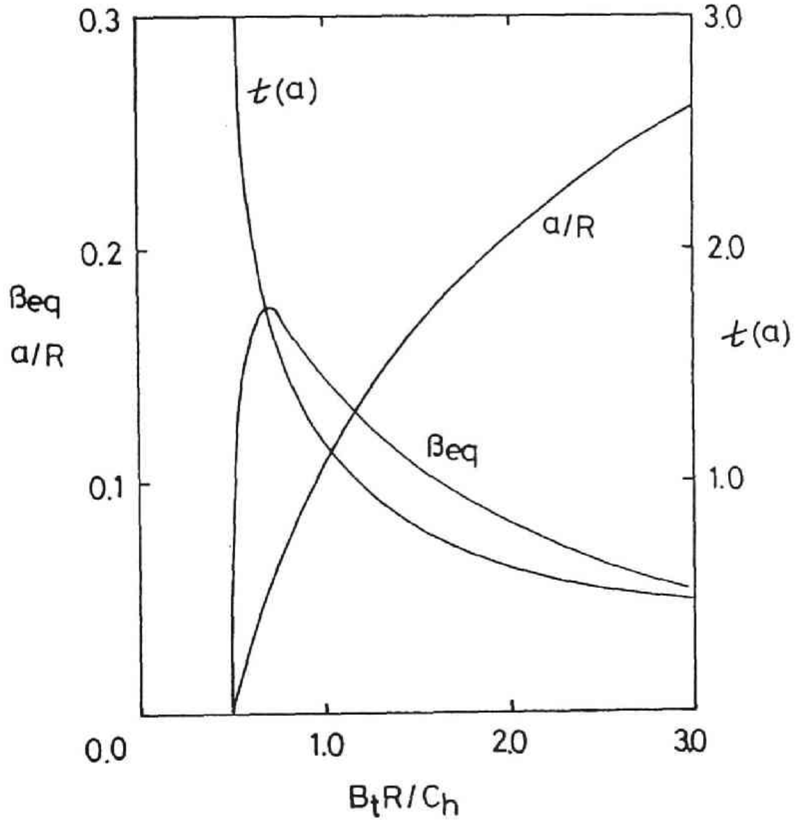


図 2.7 限界平衡ベータ値 β_{eq} の B_t依存性。β_{eq} は $B_tR/C_h = 0.73$ $(a/R = 0.06)$ で最大値 $\beta_{eq}^{max} = 17.5\%$ をとる。

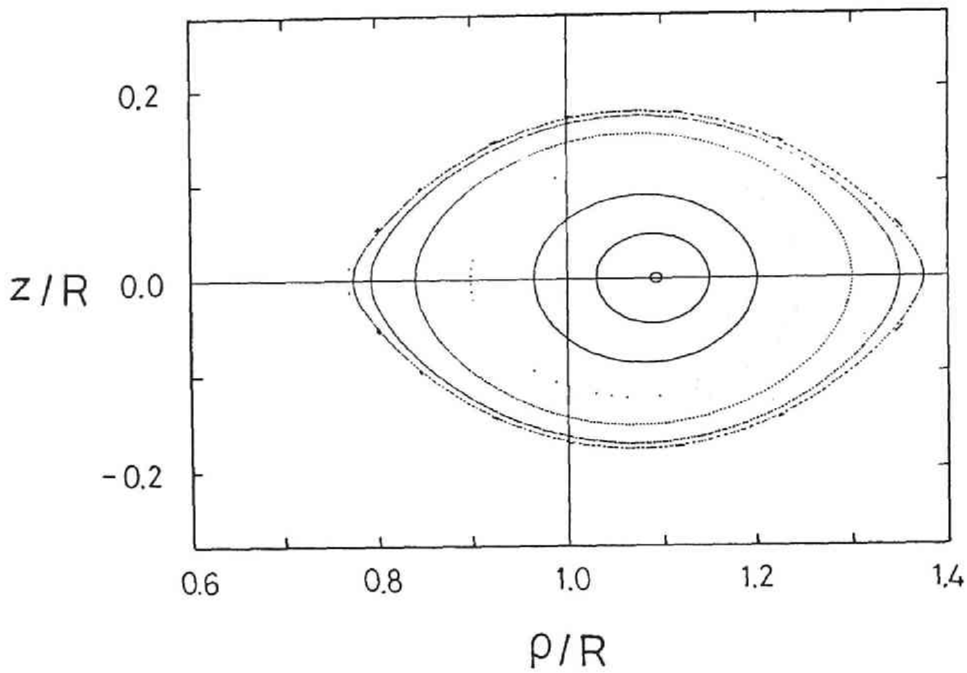


図 2.8 垂直磁場 B_v を加えたときの真空磁気面。パラメータは $m = 8$, $B_t R/C_h = 2.0$, $B_v R/C_h = 0.02$ である。評価量は $\iota(0) = 0.16$, $\iota(a) = 0.97$, $R/a = 4.5$ の値をとる。

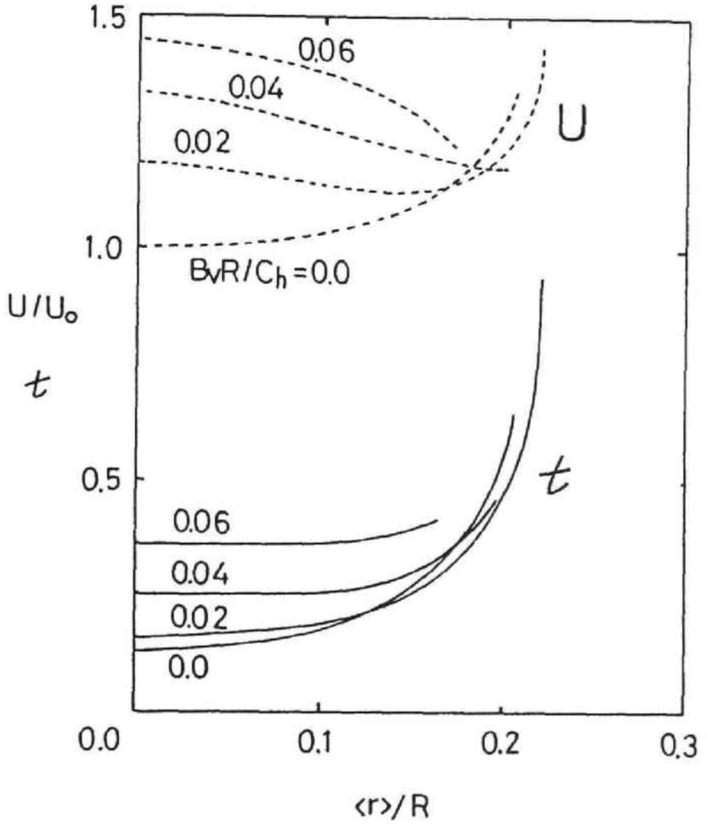
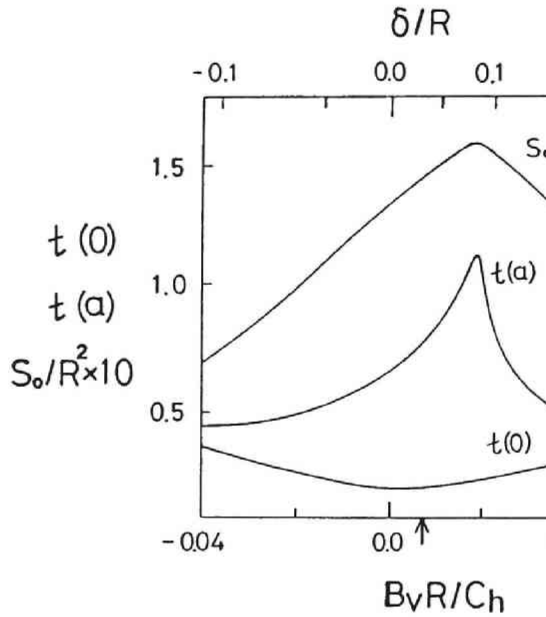


図 2.9 B_vを変化させたときの ι, U の径方向分布。磁気井戸が形成されるのがわかる。



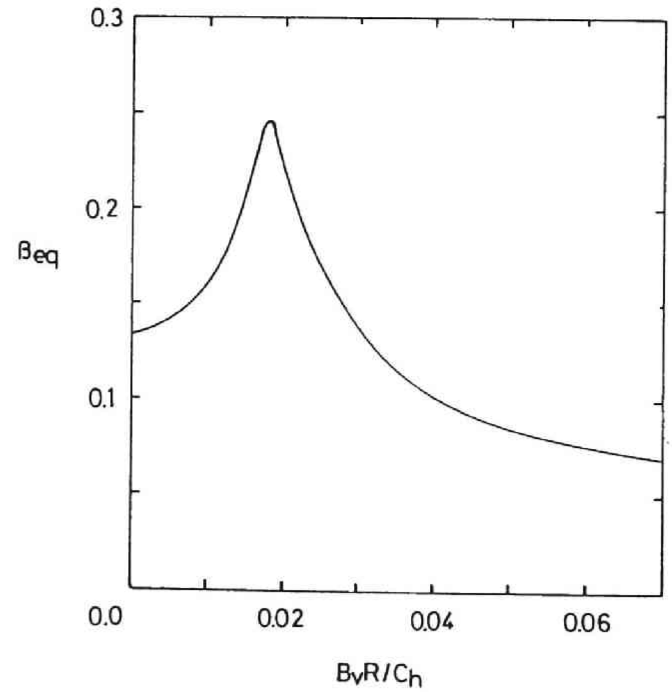


図 2.10 B_vによる評価量の変化　a) S_0, $\iota(a)$ と (b)β_{eq}

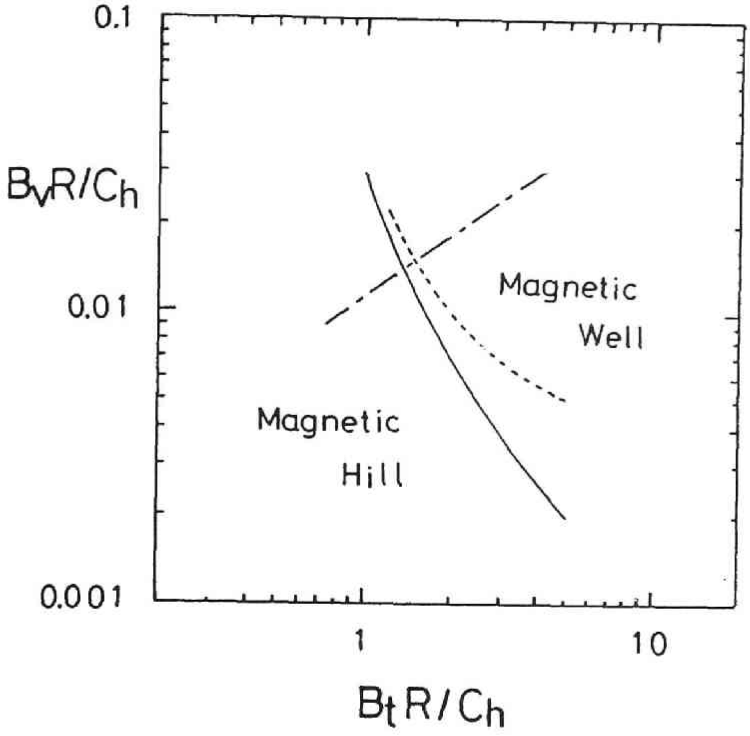


図 2.11 磁気井戸と磁気丘の境界。実線と点線はそれぞれ $\langle r\rangle = 0$, $\langle r\rangle = a/2$ で磁気井戸が形成されるときの値を示す。また、一点鎖線は S_0 を最適化する B_v 値を示す。

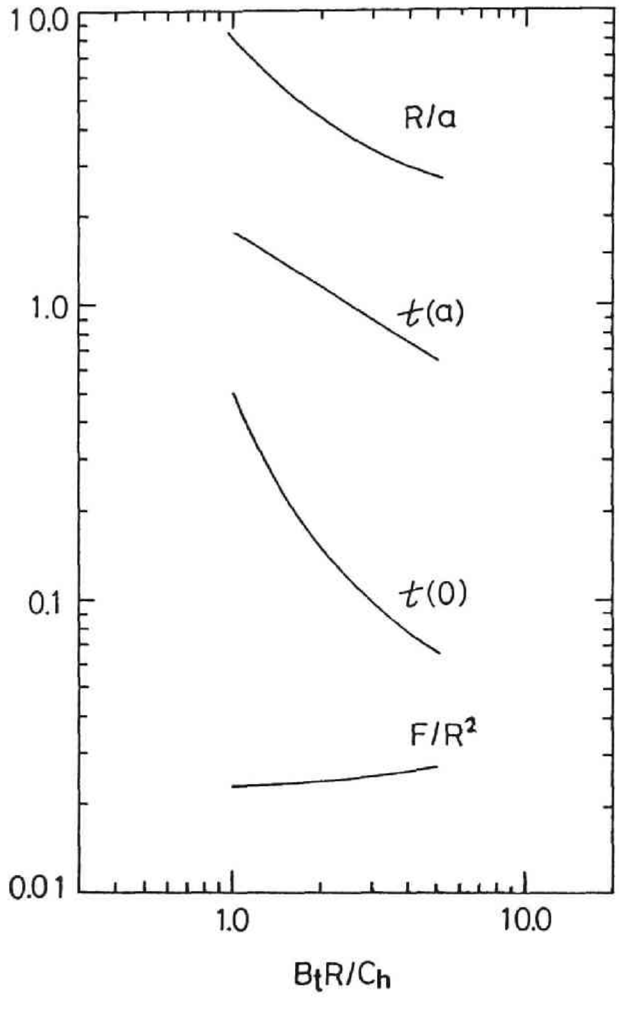


図 2.12 S_0を B_vで最適化したときの評価量、$\iota(0), \iota(a), R/a, F, \beta_{eq}$ の値。F, β_{eq} の B_v依存性は弱い。

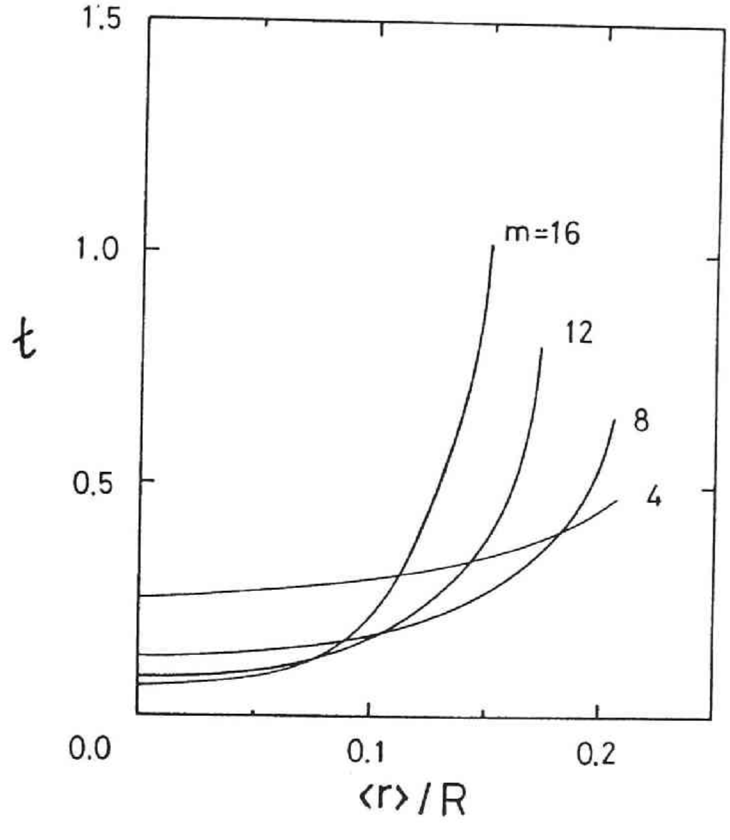


図 2.13 ι の径方向分布。パラメータは $B_t R/C_h = 2.0$, $B_v R/C_h = 0.0$ である。m が大きくなるほど、$\iota(0)$ は下がり、$\iota(a)$ は上がる。

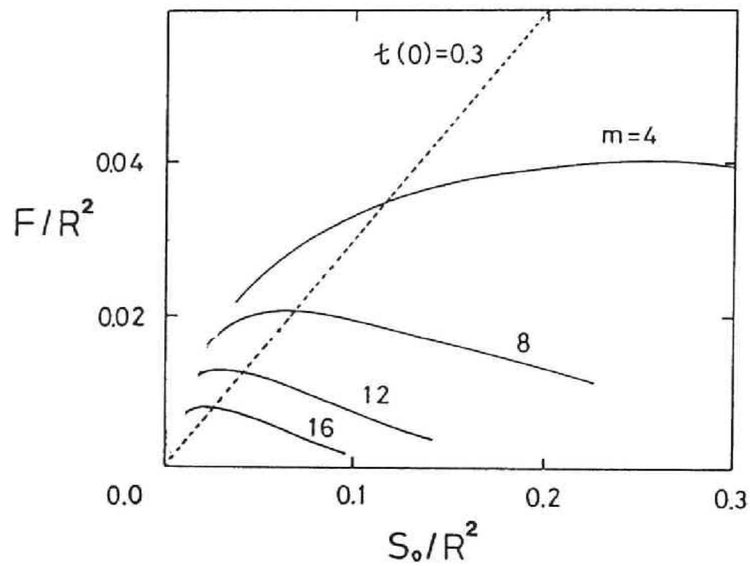


図 2.14 評価関数 F の S_0 依存性。$B_v = 0.0$ としている。点線は $\ell(0) = 0.3$ の直線である。

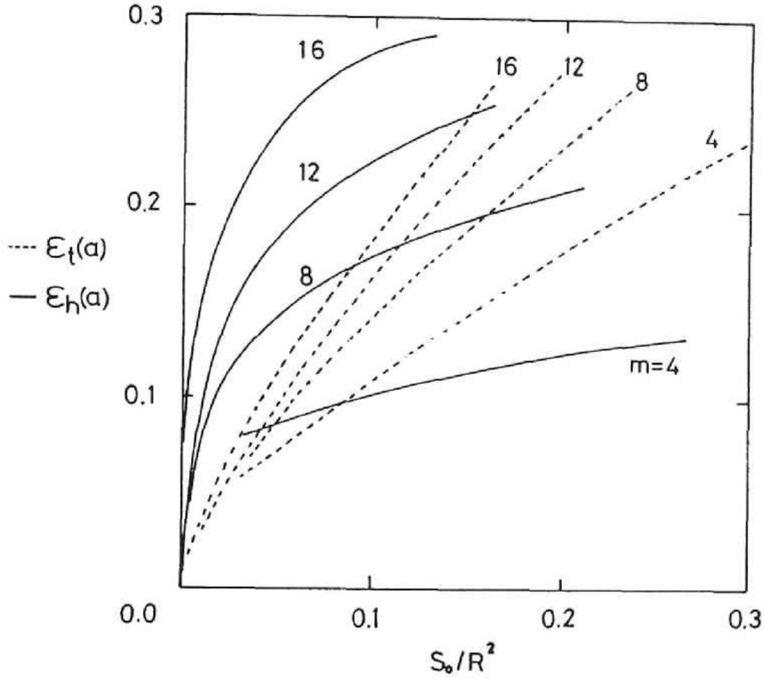


図 2.15 リップル率の S_0 依存性。$B_v = 0.0$ としている。実線が $\varepsilon_h(a)$ 、点線が $\varepsilon_t(a)$ を示す。

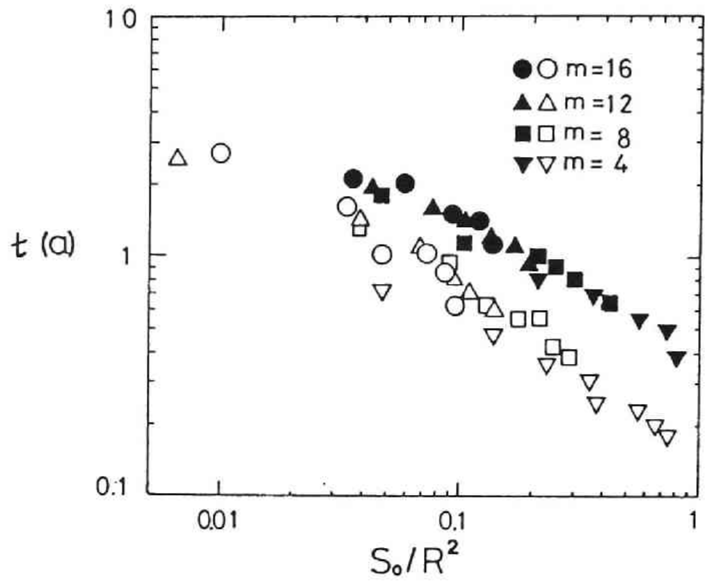


図 2.16 S_0 と $t(a)$ の関係。白印が $B_v=0$ 、黒印が B_v で面積が最適化された場合を表す。

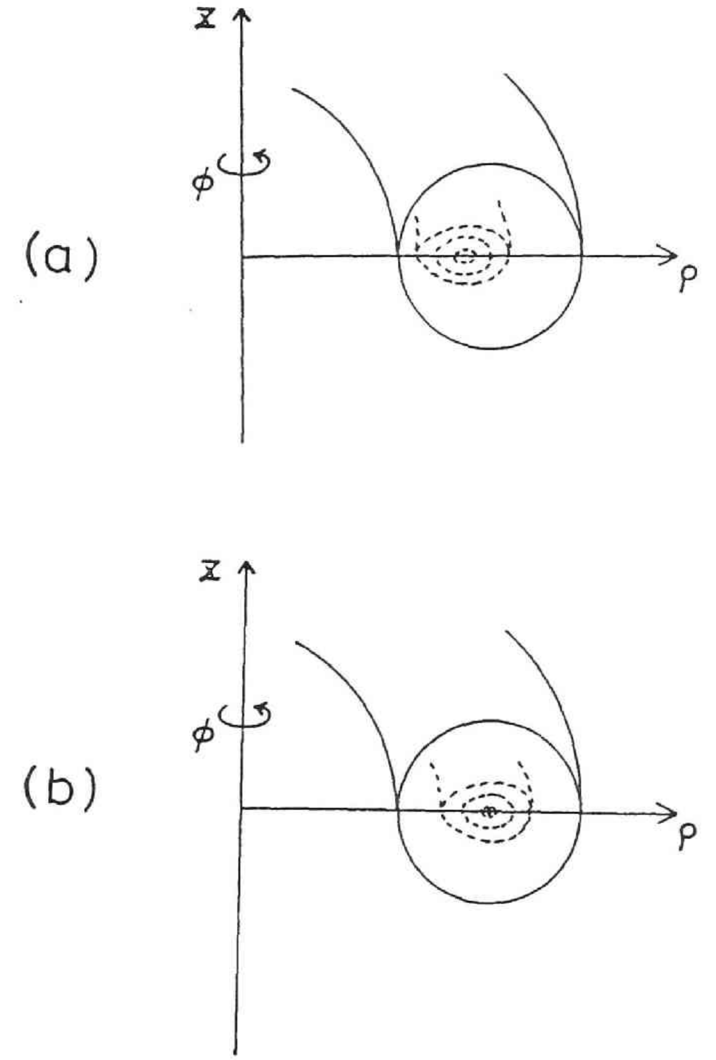


図 2.17　面電流の流れる境界面

(a) y =const. の場合

(b) 中心 $(\rho, z) = (R, 0)$, 半径 $r' = 0.4$ の円の場合

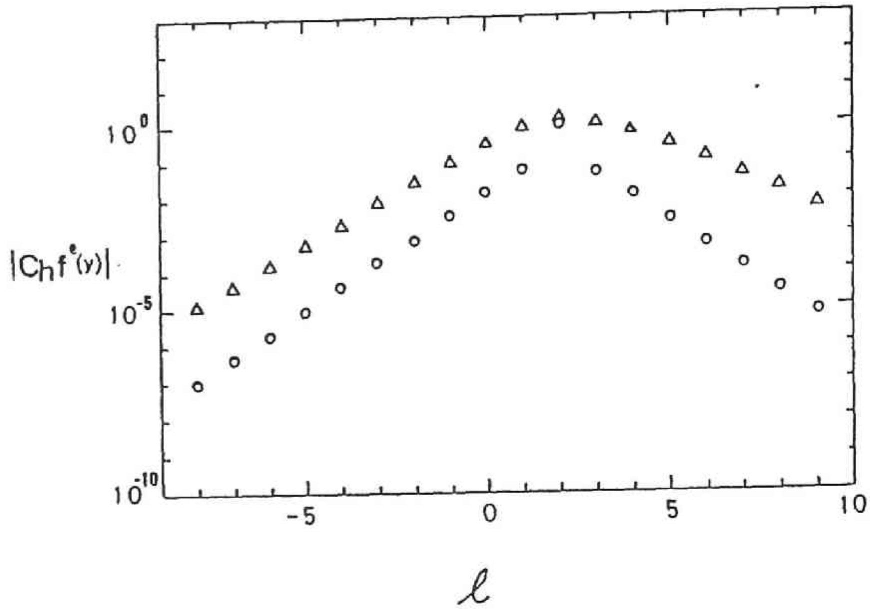


図 2.18 境界外部のポテンシャル係数。o 印が図 2.17(a)、△ 印が図 2.17(b) の場合である。$\ell = 2$ から離れるにつれてポテンシャル係数が指数関数的に減少してゆくことが分かる。

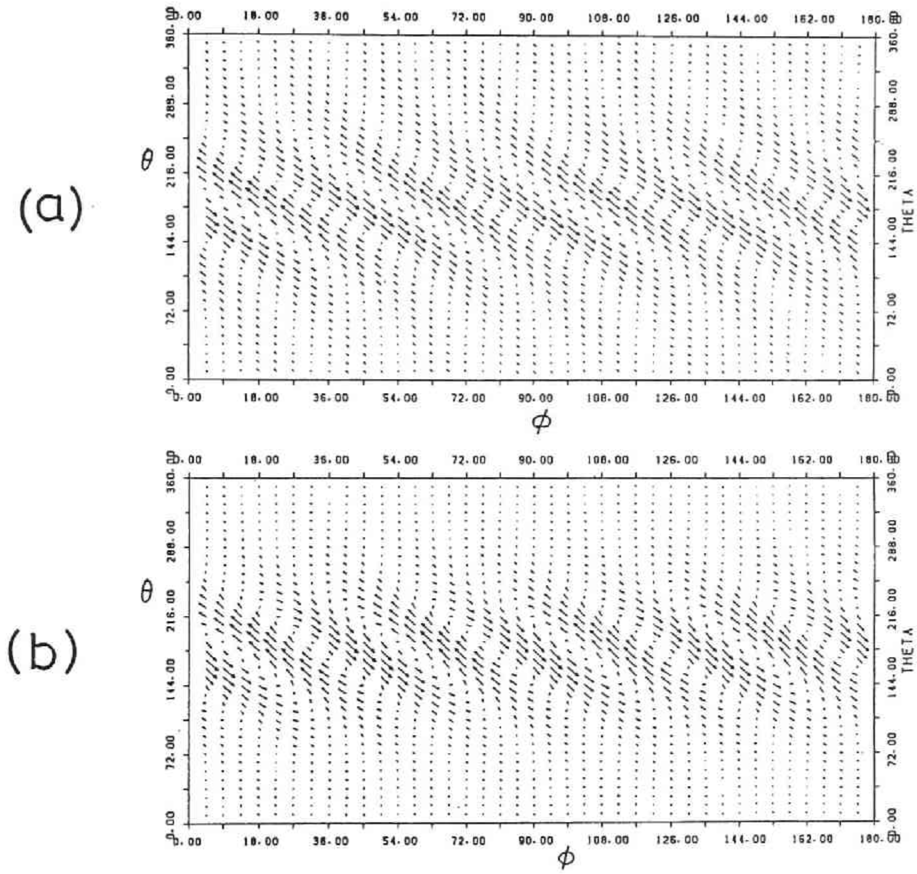


図 2.19 面電流分布の例。(a)(b) はそれぞれ図 2.18(a)(b) に相当する。

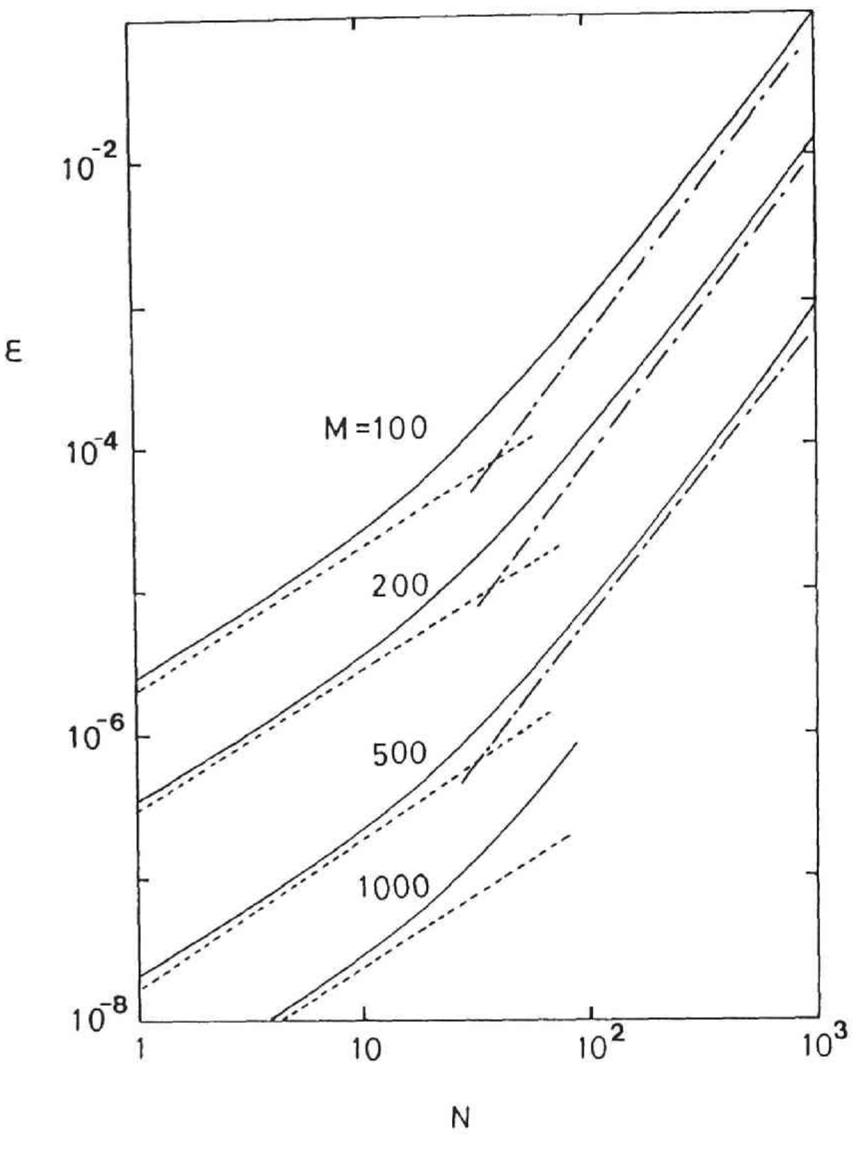


図 2.A.1 磁力線追跡の際に生じる数値誤差。点線と一点鎖線はそれぞれ N, N^2 に比例する直線を表す。

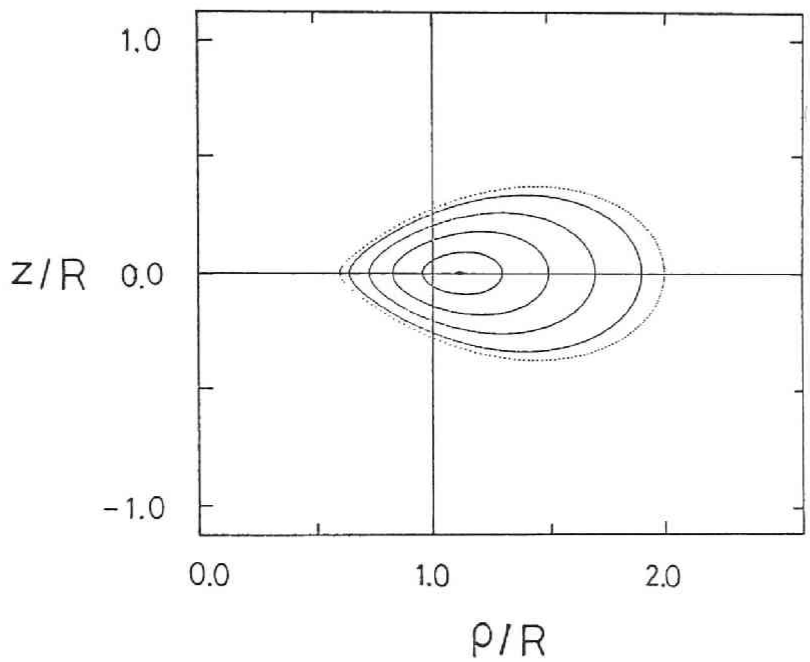


図 2.B.1 $\ell = 2, m = 2$ の真空磁気面。パラメータは $B_t R/C_h = 4.0$, $B_v R/C_h = 0.036$ で、評価量は $\iota(0) = 0.11$, $\iota(a) = 0.14$, $R/a = 1.97$ である。

3 トロイダルシステムの周辺領域の構造

3.1 序

直線ヘリカル系や軸対称トカマクでは、エラー磁場やMHD揺動の様な摂動が無いとしたとき、磁気面は完全に閉じている。このとき、磁場はハミルトニアンで記述できることが知られている[17]。例えば直線ヘリカル系の場合を考えてみると、磁場はスカラーポテンシャル

$$\Phi = B_0 z + \sum_{\ell,m} \frac{b_s}{\alpha} I_\ell(\ell\alpha r) \sin\left(\ell\theta + m\frac{z}{R}\right) \tag{3.1}$$

を用いて $\mathbf{B} = \nabla\Phi$ で与えられる[59]。ここで I_ℓ は第1種変形ベッセル関数で、$\alpha = m/(\ell R)$ である。B_z と b_s は定数とする。シングルハーモニクスだけをもちいると、磁気面 Ψ は

$$\Psi = \frac{B_0}{2\alpha}\left\{(\alpha r)^2 + \frac{2\alpha r b}{B_0} I'_\ell \cos\left(\ell\theta + m\frac{z}{R}\right)\right\} \tag{3.2}$$

で与えられる。ここで、新しい変数 ξ, ζ を

$$\xi = \frac{1}{2}r^2, \qquad \zeta = \theta + \alpha z \tag{3.3}$$

で定義する。そして"時間"変数 t を

$$\frac{dr}{dt} = B_r \tag{3.4}$$

$$r\frac{d\theta}{dt} = B_\theta \tag{3.5}$$

$$\frac{dz}{dt} = B_z \tag{3.6}$$

となるように導入すれば

$$\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\partial\Psi}{\partial\zeta}, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\Psi}{\partial\xi} \tag{3.7}$$

が成り立つ。これは $\Psi(\xi,\theta)$ がハミルトニアンであることを示している。

さて、この磁場形状をトーラスにした場合を考えてみる。このとき、B は $B/(1+\epsilon\cos\theta), (\epsilon = r/R)$ と変形され、ハミルトニアンは

$$\Psi \simeq \frac{R}{R + r\cos\theta}\frac{B_0}{2\alpha}\left\{(\alpha r)^2 + \frac{2\alpha r b_s}{B_0} I'_\ell \cos\left(\ell\theta + m\frac{z}{R}\right)\right\} \tag{3.8}$$

と変形される。テーラー展開によって (3.8) は

$$\begin{aligned}\Psi \;\simeq\; & \frac{B_0}{2}(1-\varepsilon\cos\theta)\alpha r^2 \\ & +b_s r I'_\ell \left[\cos\left(\ell\theta + m\frac{z}{R}\right) + \frac{\varepsilon}{2}\cos\left\{(\ell-1)\theta + m\frac{z}{R}\right\}\right. \\ & \left. +\sum_{j=1}^{\infty}\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)^j \cos\left\{(\ell+j)\theta + m\frac{z}{R}\right\}\right] \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。ここで $\varepsilon = r/R$ である。このトーラス効果によって生じた摂動はセパラトリクス近傍にホモクリニック構造を形成し、セパラトリクスを消滅させる。また、$(\ell+j, m)$ 摂動成分によって $\iota = m/(\ell+j)$ に磁気島が形成され、ε が大きくなると磁気島の幅も大きくなり、磁気島の幅がある値以上となると磁気島同士の重なり合いによって磁気面は消滅し、磁場はストカスティックになる [60]-[62] 。磁場のストカスティック化はセパラトリクス近傍から起こり、ε が大きくなるにつれて磁気軸に向かって進行してゆく。

磁気面の破壊はトーラス閉じ込め装置に置いて異常輸送の原因の一つと考えられている [63] [64] 。ヘリカル系において、Cary と Hanson は系の幾何パラメータを変化させることでストカスティックな領域を系統的に減少できることを示した [65] [66] 。この手法は閉じた領域を拡大するが、ストカスティシティは依然として閉じた領域の外に存在する。

一方、トカマクでもセパラトリクス近傍の有理面に共鳴する様な摂動を外部から加えるとセパラトリクスは消滅し、周辺領域はストカスティックになる。この磁場構造は EML (Ergodic Magnetic Limiter) と呼ばれており、EML は周辺プラズマの挙動を変え、さらにコアプラズマの性質をも変える。EML の役割は実験的にも [67]-[71] 、理論的にも [72] 、調べられている。例えば、トカマクで起きる H モードは境界条件に強く依存しており、EML にすると ELM (Edge Localized Mode) が発生し密度上昇及び放射損失の増大が抑制され、準定常状態が得られる。上記の研究の目的は、粒子や熱を制御したり、不純物を抑制したりすることにあり、実験的にもその可能性を示している。

ダイバータ機能は粒子や熱の制御に重要な役割を果たしており、コア

プラズマの閉じ込めを改善する。種々の改善モード、例えば、H-mode[4]、IOC[12]、IDC[13] がトカマクで観測されている。ヘリカル系においてもダイバータ室をうまく設計することで周辺プラズマの温度と密度を最適化できることが示されている [73]。ダイバータ機能はセパラトリクスの性質から出てくるものであるが、場がストカスティックになってセパラトリクスが消滅した場合でもダイバータ機能が働くのかどうかは依然として研究課題として残っている。トカマクでのストカスティックな SOL（Scrape-off Layer）領域は Neuhauser, *et al.* によって研究されてきた [74]。

本章ではヘリカル系とダイバータトカマクの SOL 領域の真空磁場構造を調べる。最外殻磁気面（OMS - Outermost Magnetic Surface）の外側では磁力線は壁に到達する。磁力線の出発点から壁に到達するまでに進んだ距離を"接続長"という言葉で定義する。接続長を用いて磁場構造の評価を行い、周辺領域の熱分布を求める。真空磁場のモデルとして、ヘリカル系では 2 章と同様にトロイダル関数を、ダイバータトカマクでは磁気軸に集中している円環プラズマ電流を考える。

本章の構成は以下の通りである。§3.2 ,§3.3 で、それぞれ、ヘリカル系とダイバータトカマクの周辺磁場構造について調べ、軸対称性磁場やトロイダルピッチ数に対する依存性の数値計算結果を示す。SOL 領域には、対数関数と関係した特徴的値が存在することを示す。また、EML を作る共鳴摂動磁場のモード数や大きさに対する依存性についても評価する。§3.4 でヘリカル系とトカマクの比較をし、対数的性質の由来について議論する。ヘリカル系とトカマクの SOL 領域の性質が類似していることから、トカマクの SOL 領域の解析に用いられた流体モデルをヘリカル系に適用することができ、§3.5 で、この解析によって SOL 領域の温度と熱の分布、熱流の幅についての評価をする。また、部分リミターによる熱の分布の変化についても論じ、磁場に垂直な熱伝導係数の評価についても行う。§3.6 は結論に当てられる。

3.2 ヘリカル系の周辺磁場構造

3.2.1 接続長の性質

トロイダルヘリカル系の真空磁場のモデルとして本章においても (2.5) を用いる [75]。表記を少し変えて、磁場を

$$\mathbf{B} = \nabla\{C_h f_{\ell m}(y)\sqrt{1 - y\cos\psi}\cos(\ell\psi + m\phi)\} + \mathbf{B}_t + \mathbf{B}_v \tag{3.10}$$

と書く。ここで $\mathbf{B}_t, \mathbf{B}_v$ はそれぞれ軸対称トロイダル磁場、軸対称垂直磁場である。

対称性のあるトカマクや直線ヘリカル系ではセパラトリクスまで磁気面が完全に閉じており、磁力線は無限の距離をその磁気面に沿って進む。セパラトリクスから外の領域では有限の壁がある場合、磁力線は有限の長さで壁に到達することになる。一方、トーラス状になったヘリカル系では、§3.1 でも述べたようにセパラトリクスが消滅し、周辺領域にはストカスティックな場が生じる。この場合、今まであったセパラトリクスより内部の領域においても磁力線は有限の長さで壁に達する。粒子や熱は、磁気面を横切る方向と磁力線に沿った方向の 2 方向に拡散するが、磁力線方向の拡散の方が速いことからスクレイプオフ層での磁力線の長さがプラズマの輸送を考える上で重要な要因と考えられる。

閉じた磁気面の一例を図 3.1 に示す。この場合、Heliotron-E ($\ell = 2, m = 19$) の磁気面に近いパラメータを用いている。この磁気面の特性量は $\iota(0) = 0.5$, $\iota(a) = 2.44$, $a/R = 0.07$ である。壁の位置は Heliotron-E と同じにして、小半径 $r/R = 0.186$ にあるものとする。

接続長は次のようにして計算される。磁力線の出発点を与え、壁に到達するまで磁力線をトロイダル方向に追跡する。出発点から壁まで磁力線に沿ってトロイダル角の増加する方向に進んだ長さを接続長 L_+ と定義する。また、L_- はトロイダル角の減少する方向に進んだ場合の接続長を意味する。$L_\pm$ は出発点の位置の関数である。

図 3.2 は接続長 L_+ の径方向分布の一例である。パラメータは図 3.1 と同じにとってある。磁力線の出発点は擬トロイダル座標で表して $(r, \theta, \phi) =$

$(r, 0, \pi/2m)$ にとる。磁気面はOMS内部では完全に閉じているので接続長は無限大となる。即ち、磁力線は壁に到達することはない。OMSの外側では磁力線は壁に到達し有限の値となるが、その値はOMSから離れるにつれて急速に減少する。磁気島は有理面上に形成されるが、SOL領域にも残存している。SOL領域では、磁気島は孤立し内部構造を有している。即ち、磁気島のまわりに同様の小さな磁気島が存在する。例を図3.2(b)に示す。接続長は磁気島内部では無限大となり、磁気島外部では急速に減少する。OMSや残留磁気島の表面近傍での接続長の漸近的振舞いを示したのが図3.3である。接続長 L_+ はOMSまたは残留磁気島表面からの距離 δ に対して対数的依存性を有している。この依存性は $\delta/R \sim 10^{-3}$ の範囲内で保たれている。

接続長の値はトーラスの内側と外側でやや異なる。対数的依存性は共通、即ち、$L/\ln\,(R/\delta)$ は等しいが、定数項が異なる。残留磁気島のO点（以下、O点と略す）のある側の方が接続長は長い。例えば図3.2の場合、$\iota = m/(\ell + j)(j = 1, 3, 5, \cdots)$ の O 点がトーラスの外側に現れるが、$\iota = 19/7$ の磁気面近傍から出発した磁力線は $\iota = 19/5$ 磁気面に到達するまでに1.5ヘリカルピッチ分、回転しなければならない。$\iota = 19/5$ の場合には、$\iota = 19/3$ 磁気面に到達するのに1ヘリカルピッチ分、回転しなければならない。従って、この長さの分だけ接続長は伸びる。

異なる (θ, ϕ) に対する接続長も、定数項を除いて同様の依存性がある。図3.4は $\delta/R = 10^{-3}$ での $L_\pm$ の θ, ϕ 依存性を示している。これらの結果から、$L_\pm$ は

$$L_\pm(\theta, \phi) \sim L_0 \mp \left(\frac{\ell}{m}\theta + \phi\right) R \tag{3.11}$$

と近似できる。図3.4では対称性の破れが見出せるが、これはトロイダル効果のためにトーラス内側の接続長の方がトーラス外側の場合よりも短いためである。式(3.11)の右辺第2項は磁力線が低磁場側、$\ell\theta + m\phi = \pm\pi$、即ちセパラトリクスのX点に到達するまでに進む距離を表している。OMS近傍の回転変換はコイルのピッチ数 m/ℓ よりも十分小さいので磁力線が低磁場側に到達するまでに進む距離は $\pi/m \mp (\ell\theta/m + \phi)$ で近似される。

これは磁力線がOMS に沿って動き、セパラトリクスのX点近傍で径方向に大きく進むことを意味している。従って、OMS 近傍の接続長は

$$L_{\pm}(\delta,\theta,\phi) \sim L(\delta) + \frac{\ell}{m}\left\{\frac{\pi}{\ell} \mp \left(\theta + \frac{m\phi}{\ell}\right)\right\} R \tag{3.12}$$

と書ける。ここで θ と ϕ は $0 \le \theta \le 2\pi/\ell$, $-\pi/m \le \phi \le \pi/m$ の範囲にあるものとする。$L(\delta)$ は δ の対数関数となり、

$$L(\delta) = \frac{\ell}{m}\frac{R}{\lambda_1}\ln\frac{b-a}{\delta\lambda_2} \tag{3.13}$$

と書ける。ここで b は壁の半径である。係数 λ_1, λ_2 は図 3.1 の場合、$\lambda_1 \simeq 2.0$, $\lambda_2 \simeq 0.67$ である。

λ_1 の値は、接続長 L の大きさを強く左右するので、重要なパラメータである。図 3.5 は λ_1 の m 依存性を示している。λ_1 は m にあまり依存していないことがわかる。また、λ_1 は b に対して依存性をほとんど有していないことも確認している。λ_1 の軸対称磁場に対する依存性は次節で述べる。

直線ヘリカル系での対数的性質についても調べた（付録 3.A 参照）。λ_1 は $(a/R)^{1/2}$ に比例し、大きさはトーラス系の値に近い。即ち、ヘリカル系ではセパラトリクスの有無に関わらず対数的依存性があり、その性質も類似している。

3.2.2　軸対称磁場の効果

2 章で述べたように、回転変換、プラズマ体積、比体積等の磁気面評価量は外部からの軸対称磁場によって影響を及ぼされる。軸対称磁場の効果は今までにコアプラズマの閉じ込め、例えば MHD 挙動や粒子閉じ込め等の観点から評価されてきた。本節では SOL 領域の磁場構造に対する効果を調べる。

まず最初に軸対称トロイダル磁場について考えてみる。2 章で述べたように、トロイダル磁場の増大と共にプラズマ体積は増えるが、回転変換は低下し、シアーも弱くなる。$\ell = 2$ の場合、磁気軸での回転変換は

(2.28) より

$$\iota(0) \simeq \frac{4}{m}\left(\frac{C_h}{B_t R}\right)^2 \tag{3.14}$$

で与えられ、$\iota(0) = m/(\ell + j)$ となるときのトロイダル磁場は

$$\frac{B_t R}{C_h} \simeq \frac{2}{m}\sqrt{\ell + j} \tag{3.15}$$

で与えられる。

磁気軸近傍ではトロイダル効果は弱く、直線ヘリカル系の結果が利用でき、磁気面の短軸方向の小半径 r_s は

$$r_s = r_0\sqrt{1 - \frac{4}{m}\left|\frac{C_h}{B_t R}\right|} \tag{3.16}$$

で与えられる。ここで r_0 は磁気面の平均半径である。これがトロイダル磁場の下限を決め

$$\left|\frac{B_t R}{C_h}\right| > \frac{4}{m} \tag{3.17}$$

でなければならない。トロイダル磁場がこの値以下であると半径 $\rho = R$ のまわりに閉じ込め領域は形成されない。

図 3.6 はトーラス外側、即ち、$\theta = 0$ での OMS と磁気島の O 点の位置がトロイダル磁場によってどう動くかを示している。トロイダルピッチ数は $m = 19$ とし、垂直磁場は加えていない。磁気軸の回転変換が $m/(\ell + j)(j = 1, 3, 5, \cdots)$ となるときのトロイダル磁場の値は、(3.15) で求めた解析解と一致する。トロイダル磁場が増大すると、OMS での回転変換は下がり、$\iota = m/(\ell + j)$ より下がると $\iota = m/(\ell + j)$ 上にある磁気島の O 点が SOL 領域に現れる。

トロイダル磁場は (3.13) での λ_1 の値も変化させる。図 3.7 に示すように λ_1 は $(a/R)^{1/2}$ に比例する。a/R は $(B_t - B_t^*)^{1/2}$ に比例するから (ここで B_t^* は閉じ込め領域の消滅するときのトロイダル磁場の値)、λ_1 のトロイダル磁場に対する依存性は弱く、$\lambda_1 \propto (B_t - B_t^*)^{1/4}$ となる。

次に垂直磁場の効果について評価する。垂直磁場の印可によって周辺の回転変換とプラズマ体積が大きく変化する。また磁気面は ρ 方向にシフトし、周辺構造も変わる。OMS だけでなく磁気島の O 点もシフトす

る。図 3.8 にトーラスの内側と外側における OMS と O 点のシフトを示す。パラメータは図 3.1 と同様である。磁気面のシフトは B_v/ι に比例するので磁気軸に近い O 点の方がシフト量が大きい。図 3.8 の場合では、O 点はある垂直磁場の値 B_v^* を境にしてトーラスの外側 $(\theta = 0)$ から内側 $(\theta = \pi)$ へと移動する。また、$B_v = B_v^*$ で閉じ込め領域は最適化される。O 点と X 点の変換は摂動磁場の符号と関係している。ヘリカル共鳴成分 $\widetilde{B}_{\ell+j,m}$ は $B_v = B_v^*$ で、その符号を変える。これは $\widetilde{B}_{\ell+j,m}$ が B_v^* 近傍で展開でき

$$\widetilde{B}_{\ell+j,m} \simeq \gamma(B_v - B_v^*) + \cdots \tag{3.18}$$

となることを意味している。ここで γ は数値係数である。共鳴磁気島の幅は $\sqrt{\widetilde{B}_{\ell+j,m}}$ に比例することが知られており [43] [58] 、B_v^* 近傍では磁気島の幅が $\sqrt{|B_v - B_v^*|}$ に比例する。そして、このことは今回の数値計算によっても確認した。

数値計算から、$\iota = 19/3$ 有理面の挙動は、他の有理面と異なることが分かった。この有理面のシフト量はとても小さく、19/5 有理面のシフト量の 5% 以下であった。また、OMS は、垂直磁場印加によっては、19/3 有理面より大きくなることはなかった。この性質は他のトロイダルピッチ数の場合でも確認されている。この事実は $\iota = m/(\ell+1)$ が境界の回転変換の上限であることを示唆している。さらに最適化を行おうとするならば、$\iota = m/(\ell+1)$ 磁気島の幅をさらに狭くするような共鳴磁場を外部から加えなければならないだろう。

磁気島を形成する共鳴摂動磁場を外部から制御することによってストカスティック領域は減少する。しかしながら、ストカスティック領域は OMS 外部に依然残存しており、そこでは接続長は対数的性質を示す。(3.13) の λ_1 の垂直磁場に対する依存性を調べたところ、その依存性は弱いことが分かった。$-0.005 \leq B_v R/C_h \leq 0.01$ の範囲内で λ_1 は±3% 以下の変化しかしないが、$\iota(a)$ は 2 倍程度の変化をする。これは垂直磁場によるプラズマ体積の増大は、λ_1 の増加をもたらさないことを意味しており、トロイダル磁場の場合と対照的である。

3.2.3 実際のコイルによる計算結果との比較

本章では磁場を計算する際にトロイダル関数の単一成分だけを利用しているので、場を記述するのには単純すぎるかもしれない。実際のコイルシステムにおいても対数的性質が現れるのかどうかを調べる必要がある。図 3.9 は水内氏等が求めた実際の Heliotron-E での接続長の径方向分布である。[76] [77] 。周辺領域に残留磁気島の構造が見られ、図 3.2 と同様に OMS から外では接続長は急激に減少している。トロイダル磁場が大きくなると OMS は大きくなり残留磁気島の大きさも変化している。図 3.9 ではどの磁気島がどの有理面に相当するのか、という情報までは得られていないが、図 3.2 の結果と類似している。図 3.10 は接続長の急激に減少する領域での斬近的振る舞いを示している。図 3.3 と同様に接続長が OMS からの距離 δ の対数関数となっていることがわかる。即ち、実際のコイルによる計算においても SOL 領域は対数的性質を有している。この場合の λ_1 は、Heliotron-E の標準配位で$\lambda_1 \simeq 1.1$ となりモデルから求められた値と 2 倍の範囲内で一致する。本章でのモデルから求めたλ_1は、高次のハーモニクスを加えることで、より実際のコイルの値に近づく。

3.3 ダイバータトカマクの周辺磁場構造

3.3.1 セパラトリクス近傍の対数的性質

ヘリカル系と同様にして、接続長を用いてポロイダルダイバータトカマクの周辺磁場構造を調べる。磁気軸近傍にプラズマ電流が集中しているモデルを考える。実際のプラズマはセパラトリクスのまわりにも電流は流れているが、本節では、周辺に流れるプラズマ電流はコアプラズマに流れる電流に比べて十分小さいとして無視する。

プラズマ電流を形成するために磁束関数 $\Psi = \rho A_\phi$ を導入する。ここで A_ϕ は磁場 $\mathbf{B}$ を形成するベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ のトロイダル成分である。系全体の磁場 $\mathbf{B}$ は円柱座標系で

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \\ B_z &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\phi) + B_v \\ B_\phi &= \frac{R}{\rho}B_t \end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

と書き表せる。完全楕円積分 $K(k)$ と $E(k)$ を用いると、磁気軸に沿って流れる円環電流を形成する A_ϕ は

$$A_\phi = \frac{\mu_0 I_k}{2\pi}\sqrt{\frac{R}{\rho}}\left\{\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(k) - E(k)\right\} \tag{3.20}$$

と記述される。ここで k は

$$k^2 = \frac{4\rho R}{(\rho+R)^2+z^2} \tag{3.21}$$

であり、I_p はプラズマ電流である。(3.20) を (3.19) に代入して

$$\left.\begin{aligned} B_\rho &= \frac{\mu_0 I_p}{2\pi}\frac{1}{\rho}\frac{z}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left\{-K(k)+\frac{\rho^2+R^2+z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(k)\right\} \\ B_z &= \frac{\mu_0 I_p}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left\{K(k)+\frac{R^2-\rho^2-z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(k)\right\} + B_v \\ B_\phi &= \frac{R}{\rho}B_t \end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

を得る。磁気軸近傍では

$$\Psi \simeq \frac{\mu_0 I_p}{2\pi} R \left(\ln \frac{8R}{\sqrt{(\rho - R)^2 + z^2}} - 1 \right) \tag{3.23}$$

であるから、この円環電流の形成する磁気面は円形となり、円環電流から十分離れた位置では

$$\Psi \simeq \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \frac{\pi R^2 \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \tag{3.24}$$

であるから、ダイポール磁場が形成されることがわかる。また、z 軸近傍では磁気面は

$$\Psi = \frac{\mu_0 I_p}{4\pi} \frac{\pi R^2 \rho^2}{\{(\rho + R)^2 + z^2\}^{3/2}} \tag{3.25}$$

と近似される。

ダイバータ形状となる磁気面の方程式は $\Psi = \Psi_p + \Psi_d + \Psi_v$ と書ける。ここで Ψ_p, Ψ_d, Ψ_v はそれぞれプラズマ電流、ダイバータ電流、、垂直磁場による磁束関数に対応している。ダイバータ電流は $(\rho, z) = (R, \pm z_d)$ に位置しており、また、Ψ_v は $(1/2)\rho^2 B_{v0}$ で与えられる。本節では、セパラトリクスのX点が $\rho = R$ に位置するように垂直磁場を加える。X点の位置はプラズマ電流 I_p とダイバータ電流 I_d の比と関係しており、両電流間の距離 z_d を $I_p : I_d$ の比に内分する点である。

ポロイダル磁場はセパラトリクスのX点でゼロとなるので、セパラトリクスでの安全係数を評価するために、実効 q 値を導入する。実効 q 値は $q_I = |(\rho_s - R)B_{t0}/RB_z(\rho_s)|$ で定義される。ここで ρ_s はトーラス外側での $z = 0$ に位置におけるセパラトリクスの小半径であり、$B_z(\rho_s)$ は $(\rho, z) = (\rho_s, 0)$ での磁場の z 成分である。

図3.11にダブルヌル形状の磁気面の一例を示す。パラメータは $q_I = 3$, $z_d/R = 0.45$, $I_d/I_p = 1/2$ と選んでいる。この形状での接続長を評価しよう。ヘリカル系の場合と同様に、接続長は出発点からダイバータ板（$\rho = R$, $|z| \geq z_d$ に設置する）までに進んだ磁力線の長さで定義される。出発点はトーラスの外側で、$z = 0$ を選んだ。接続長はセパラトリクスの内部では無限大となり、SOL 領域で有限の値をとるが、数値計算の結果、セパ

ラトリクス近傍で対数的性質を有することを確認した。対数関数の係数 C は形状パラメータに依存しており、次の様な形で書ける。

$$\left.\begin{array}{rcl} L & = & C\ln\dfrac{R}{\delta} \qquad (\delta\to 0) \\ C & \sim & Gq_I R\left(1+H\dfrac{z_d}{R}\right)\dfrac{I_d}{I_p} \end{array}\right\} \tag{3.26}$$

G, H は定数で我々のモデルでは $G=1.3$, $H=0.42$ であった。形状がシングルヌルであったり、セパラトリクスまわりのプラズマ電流を考慮に入れると、これらの定数の値は変わるものと予想される。トーラス内側での接続長も同様の性質を示したが、その大きさは外側より、やや大きい。これはトロイダル磁場がトーラス外側より内側で強いためである。

3.3.2 共鳴摂動磁場の効果

セパラトリクス近傍の有理面に共鳴する摂動を加えると、セパラトリクスは消え SOL 領域はストカスティックになる。ストカスティック層の幅は摂動のモード数と大きさに依存している。本節では、ダイバータトカマクにおける外部摂動の接続長に及ぼす影響について調べる。

摂動磁場 $\mathbf{B}$ は

$$\left.\begin{array}{rcl} \widetilde{B_r} & = & \dfrac{\tilde{b}R}{R+r\cos\theta}\dfrac{\mu_0 I_p}{2\pi R}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{m-1}\sin(m\theta-n\phi) \\ \widetilde{B_\theta} & = & \dfrac{\tilde{b}R}{R+r\cos\theta}\dfrac{\mu_0 I_p}{2\pi R}\left(\dfrac{r}{R}\right)^{m-1}\cos(m\theta-n\phi) \end{array}\right\} \tag{3.27}$$

で与えられるものとする。ここで (r,ϕ,θ) は準トロイダル座標で、 m, n はそれぞれポロイダル、トロイダルモード数である。この摂動は共鳴ヘリカル磁場を表している。

図3.12は接続長と $\hat{q}$ の径方向分布の一例である。ここで $\hat{q}$ は $\int d\theta/\int d\phi$ で定義され、積分は磁力線の出発点から壁までで行われる。パラメータは $m/n=5/1, \tilde{b}=0.1$ とした。残留磁気島が有理面にある事が分かる。この図の場合、$m/n=5/1$ 磁気島は完全に破壊され、トロイダル効果によって派生した 4/1 磁気島が見い出せる。また、$\hat{q}$ 分布に SOL 領域で鋭い、がたつきがある。トロイダルヘリカル系の場合と同様に、接続長は残

留磁気島から離れる急激に減少する。図 3.13 は図 3.12(a) の A， B点での漸近的振る舞いを示しており、対数的性質があることがわかる。対数関数の係数Cは、共鳴摂動磁場を加えない場合とほぼ同じ値をとり、また、モード数 m/n にも依存しない事を数値計算により見出した。これはSOL 領域の接続長の対数的性質がどの様な摂動を加えられたとしても保たれている、ということを意味している。言い換えれば、ポロイダルセパラトリクス形状が破壊されたとしても、接続長の対数的性質は破壊されない。このことは種々の運転条件、例えばコイルのミスアライメントが大きい場合などでもダイバータ機能が有効に働く理由の一つであろう。

3.4　ヘリカル系とダイバータトカマクの比較

ヘリカル系ダイバータトカマクの双方において、対称性保存の有無に関わらずSOL 領域は対称的性質を有することを示した。しかしながら、対称系と非対称系ではその原因が異なると思われる。対称系では、セパラトリクスのX点の性質に関係している。X点近傍の接続長は

$$L \sim \int \frac{B}{B_p} ds \tag{3.28}$$

と書ける。ここで B と B_p はそれぞれ全体の磁場、相対的ポロイダル磁場を表し、積分は磁力線に沿って行う。相対的ポロイダル磁場 B_p はX点でゼロとなるからX点近傍では

$$B_p \sim B_{p0} x \tag{3.29}$$

と近似される。ここで x はX点からの距離である。X点からの最小距離を Δ で与えると、x は $x \sim \sqrt{s^2+\Delta^2}$ で近似される。(3.29) を (3.28) に代入すると接続長の対数的性質 $L \propto \ln R/\Delta$ が得られる。

一方、対称性の破れが生じた系ではセパラトリクスは消滅している。また、対数的性質は残留磁気島の近傍でも見出せることからセパラトリクスの性質から生じるものではない。この場合の原因として、ストカスティックな場の本来の性質が考えられる。即ち、正のリアプノフ指数と関係している [78] [79] 。微小距離だけ離れた2本の磁力線はストカスティックな場を進むと、その間隔は指数関数的に増大する。初期の間隔を δ、最終的な間隔を $b-a$ とすると、$b-a \propto \delta \exp(L/R)$ となり、L が δ に対して対数的依存性を示すことが分かる。

SOL 領域の性質はヘリカル系とダイバータトカマクで似ているが、接続長の絶対値はかなり異なる。ヘリカル系とダイバータトカマクの接続長をそれぞれ L_h, L_t とすると、この比は (3.13) と (3.26) から

$$\frac{L_h}{L_t} \simeq \frac{\ell}{m} \frac{1}{q_I} \frac{1}{G\lambda_1} \frac{1}{1+Hz_d/R} \frac{I_p}{I_d} \tag{3.30}$$

で与えられる。典型的な値、$\ell=2$, $m=12$, $q_I=3$, $z_d/R=0.45$, $I_d/I_p=1/2$ を代入すると、この比が 1/10 以下であることが分かる。これは、ヘ

リオトロン／トルサトロン(H/T) 配位では、SOL で粒子や熱が早く逃げてしまうことを意味している。

トロイダル磁場に対する依存性も異なる。H/T ではトロイダル磁場が増大すると λ_1 が $B_t^{1/4}$ に比例することから、接続長は短くなる。一方、ダイバータトカマクでは C は q_I に比例することから、接続長はトロイダル磁場の増大と共に長くなる。この様に、トロイダル磁場の依存性が2つの系で対照的であることに注意しておかなければならない。

3.5 SOL 領域でのプラズマの分布

3.5.1 ヘリカル系での熱の分布

SOL 領域のプラズマは接続長の分布を与えることによって解析することができる [80]。本節では流体モデルを用いることによって OMS から外側の温度分布を調べる。(3.13) と (3.26) から分かるように、ヘリカル系での L の δ 依存性はトカマクの場合と類似しているので、トカマクのダイバータプラズマで用いられた評価方法を用いることができる [16] [81]。

仮定として電子とイオンは等温であるとし、平行方向の熱伝導係数は古典輸送によって与えられるものとして $\kappa = \kappa_{\|0} T^{2.5}$ とする [82]。磁力線に沿った熱流束密度 $\mathbf{q}_\|$ は $\mathbf{q}_\| = -\kappa_\| \nabla_\| T$ であるから、平行方向の熱流束は

$$\begin{aligned} P_\| &= \int \mathbf{q}_\| \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int dr\ 2\pi R \frac{\langle B_p \rangle}{B} \frac{2}{7} \kappa_{\|0} \frac{T^{\frac{7}{2}} - T_d^{\frac{7}{2}}}{L_{eff}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

となる。ここで L_{eff} は実効的な接続長であり

$$L_{eff} \sim \frac{\ell}{m} \frac{R}{\lambda_1} \ln \left\{ \frac{b-a}{\lambda_2 \delta} \right\} \tag{3.32}$$

で与えられ、T_d はダイバータ板でのプラズマ温度、δは OMS からの距離である。

また、$\langle B_p \rangle$ は平均ポロイダル磁場で、$\langle B_p \rangle / B \sim \pi a / L$ で定義される。熱の流れる幅を Δ とすると OMS でのプラズマ温度は

$$T_b \simeq \left[T_d^{\frac{7}{2}} + \frac{7 P L_{eff}}{4\pi \kappa_{\|0} \Delta a} \right]^{\frac{2}{7}} \tag{3.33}$$

となり [83] 、T_d が十分に小さいことを考えると、Δ が大きくなるか L_{eff} が短くなるほど T_b が下がることが分かる。

熱の流れる幅 Δ 及び周辺のプラズマ温度 T_b は熱拡散方程式を解くことで評価できる。磁場を横切る熱流束密度 $\mathbf{q}_\perp$ は $\mathbf{q}_\perp = -\kappa_\perp \nabla_\perp T$ である

から、垂直方向の熱流束は

$$P_{\perp} = -\int dV\ \nabla\cdot(\kappa_{\perp}\nabla_{\perp}T)$$
$$= -4\pi^2 Rr\kappa_{\perp}\frac{dT}{dr} \tag{3.34}$$

で与えられる。コアプラズマから流出する熱は一定として

$$P_{\perp}+P_{\parallel}=P_0 \tag{3.35}$$

が成り立つものとし、(3.31) と (3.34) を (3.35) に代入して r で微分すると熱拡散方程式

$$\pi R\frac{d}{dr}\left(r\kappa_{\perp}\frac{dT}{dr}\right)=\frac{\kappa_{\parallel 0}}{7}\frac{\langle B_p\rangle}{B}r\frac{T^{\frac{7}{2}}}{L_{eff}} \tag{3.36}$$

が得られる。$\kappa_{\perp}$ の T 依存性は実験的も理論的にも十分に解明されていないが、ここでは

$$\kappa_{\perp}=\kappa_{\perp 0}T^{\alpha} \tag{3.37}$$

として評価をする。$\alpha=0$ のとき Alcator 則となり、$\alpha=1$ のとき Bohm 拡散となる。$\Delta\ll a$ であるとし、$\hat{T}=T/T_0,\ u=(r-a)/\Delta_1,\ \hat{P}=P_{\perp}/P_0$ で規格化すると (3.36) は

$$\frac{d^2}{du^2}\hat{T}^{\alpha+1}=\left\{\ln\left(\frac{u_0}{u}\right)\right\}^{-2}\hat{T}^{\frac{7}{2}} \tag{3.38}$$

となる。ここで T_0,Δ_1,u_0 は

$$T_0 = \left\{\frac{7(\alpha+1)\ell^2P_0^2}{16\pi^4a^2\kappa_{\perp 0}\kappa_{\parallel 0}m^2\lambda_1^2}\right\}^{\frac{2}{2\alpha+9}} \tag{3.39}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \frac{4\pi^2aR}{\alpha+1}\kappa_{\perp 0}T_0^{\alpha+1}P_0^{-1}\\ &= \left\{7^{2\alpha+2}(4\pi^2)^{-2\alpha+5}(\alpha+1)^{-7}\left(\frac{\ell}{m\lambda_1}\right)^{4\pi+4}a^{-2\alpha+5}R^{2\alpha+9}\right.\\ &\quad\left.\kappa_{\perp 0}^{7}\kappa_{\parallel 0}^{-2\alpha-2}P_0^{2\alpha-5}\right\}^{\frac{1}{2\alpha+9}}\end{aligned} \tag{3.40}$$

$$u_0 = \frac{b-a}{\lambda_2\Delta_1} \tag{3.41}$$

で定義される。$\widehat{P}_\perp$ は

$$\widehat{P}_\perp = -\frac{d}{du}\widehat{T}^{\alpha+1} \tag{3.42}$$

で与えられる。

まず $\alpha = 1$ 、即ち、ボーム拡散と仮定した場合を考える。図 3.14 に $\widehat{T}(u)$ と $\widehat{P}(u)$ の径方向分布を示す。$10 \leq u_0 \leq 1000$ の範囲で $\widehat{T}(0)/2$ となる径方向の幅Δ_T は $2\Delta_1 \leq \Delta_T \leq 6.5\Delta_1$ の範囲にある。そして垂直方向の熱流束は $u \sim 2\Delta_1$ で半分に減少し、温度に比べて閉じた磁気面と壁との距離に対する依存性が弱い。また、温度勾配よりもパワー分布の勾配の方が大きい。このSOL 領域内の薄い層でコアプラズマから流出してきたパワーの半分がダイバータ板へと向かうことになる。コアプラズマとSOL の境界の温度 T_b は (3.39) から分かるように λ_1 の減少関数であるから、λ_1 を小さくすることが T_b を上げることに役立つ。しかしながら§3.3 で論じたように、プラズマ体積を保ちながら λ_1 を減少させることはヘリカル系では難しいかもしれない。また λ_2 に対する依存性についても考えてみると、λ_2 は対数関数の中に入っているので λ_1 ほどSOL の温度分布に影響を及ぼすことはないであろう。パワーに対する依存性を見ると T_0 は $P_0^{\frac{4}{11}}$ 、Δ_1 は $P_0^{-\frac{3}{11}}$ にスケールし、入力パワーが上がるほど境界温度は上がり、熱流の幅は狭くなる。Heliotron-E の実験パラメータ ($\ell = 2, m = 19, \lambda_1 = 2, a = 0.2, R = 2.2, \kappa_{\|0} = 1416[W/m(eV)^{-7/2}], \kappa_{\perp 0} = 0.05[W/m(eV)^{-2}]$) を用いてみると、境界の電子温度を推測できる。(3.39) から ECH による入力パワー $P_0 = 500$ [kW], $n = 10^{19}$ [m^{-3}] 、$B = 2$ [T] のとき $T_b \sim 30$ [eV] が得られる。これは実験で観測される範囲内である。また、$\Delta_1 \simeq 1.4 \times 10^{-4}[m]$ となり、かなり幅の薄い層中にパワーの大部分が流れることがわかる。また、この熱流幅の値はイオンのラーマー半径と同程度であり、流体モデルの限界に近い。

次に $\alpha = 0$ 即ち、$\kappa_\perp$ が温度に依存しないとした場合を考える。$\alpha = 1$ の場合と同様に $\widehat{T}(u)$ と $\widehat{P}(u)$ の径方向分布を図3.15 に示す。$\alpha = 1$ の場合に比べて温度の減少が早く、$10 \leq u_0 \leq 100$ の範囲で $1.5\Delta_1 \leq \Delta_T \leq 2.5\Delta_1$ となる。そして $P_\perp$ も早く減少する。従って、$\kappa_\perp = \mathrm{const.}$ とした場合の

方が、より薄い層でダイバータ板へ熱が向かう。パワーに対する依存性を見ると T_0 は $P_0^{\frac{2}{9}}$ 、Δ_1 は $P_0^{-\frac{5}{9}}$ にスケールし、$\alpha = 1$ に比べて依存性はやや強くなる。

トカマクでのスクレイプオフ層の解析では、ダイバータの2次元数値解析からは $T_b \propto P_0^{0.4}$, $\Delta_1 \propto P_0^{-0.3}$ が得られているし [84] 、解析評価からは $T_b \propto P_0^{\frac{4}{11}}$, $\Delta_1 \propto P_0^{-\frac{1}{3}}$ が得られている [16] 。従って、ヘリカル系のSOL の性質はトカマクの場合に類似していると言える。しかしながら、ヘリカル系での T_b は、同じ a,B,Rの値の時のトカマクの場合と比べると低い。これはここで例にとったヘリカル系の接続長が短いからである。

3.5.2 部分リミター挿入時の熱の分布

周辺プラズマの熱伝導係数の性質は部分リミターを用いることによっても調べることができる [85] 。OMS の内側にまで部分リミターを挿入して、熱分布及び温度分布についてのデータを得ることができる。例えばTEXT では周辺をエルゴディックにしたときと、そうしないときでの観測を行っている [69] [70] 。その結果によれば、周辺領域がエルゴディックになっていない場合、メインリミターに囲まれたプラズマ中にプローブリミターを挿入すると、メインリミターへ向かう熱が急激に減少しプローブリミターへ熱が集中する。一方、共鳴ヘリカル磁場によって周辺領域をストカスティックにすると、プローブリミターへの熱の流入は減少し、リミターを挿入していってもメインリミターへの熱の急激な減少は見られない。Heliotron-E や Wendelstein VII-AS 等のヘリカル系においても、部分リミターの実験は行われており、それによれば、トカマクほど部分リミターがプラズマに大きな影響を及ぼさない [86] 。ヘリカル系では周辺領域が本質的にストカスティックであるから、これらの結果は周辺でも熱伝導係数が影響を及ぼされているということを示唆している。本節では簡単なモデルを用いて、部分リミター挿入時の熱の流れの変化及び$\kappa_\perp$ の評価について論ずる。

図3.16 に円柱プラズマモデルを示す。部分リミターの幅を d とし、壁

から距離 h だけプラズマ中に挿入されているものとし、h はプラズマ小半径よりも十分小さいものとする。リミターのヘッドは平坦であるとし、磁気面と接しているとする。有効ラーマー半径効果等の運動論的効果は無視する。また、リミター表面に形成されるシースの効果は考えない。

リミターへの熱流束 $P_{\parallel}$ は

$$P_{\parallel} = \int_0^h dx\ q_{\parallel} d \tag{3.43}$$

で与えられる。ここで $q_{\parallel}$ は磁気面に沿った熱流束密度である。§3.5.1. と同様に $\kappa_{\parallel}$ は古典的であると考え、$q_{\parallel}$ を

$$\begin{aligned} q_{\parallel} &= \kappa_{\parallel} \frac{dT}{d\ell_d} \\ &= \frac{2}{7} \kappa_{\parallel 0} \frac{d}{d\ell_d} T^{\frac{7}{2}} \end{aligned} \tag{3.44}$$

で与える。ここで ℓ_d は磁力線に沿った部分リミターからの距離である。(3.44) を (3.43) に代入し、部分リミター上の温度はプラズマ表面に比べて十分小さいとすると、$P_{\parallel}$ は

$$P_{\parallel} \simeq \int_0^h dx \frac{2}{7} \kappa_{\parallel 0} \frac{T^{\frac{7}{2}}}{\ell_d} d \tag{3.45}$$

と書くことができる。温度勾配はリミター近傍の磁束管に局在化しているとして、ℓ_d は漸近的な値 $\ell_d \simeq S/2d$ で近似する。ここで S は OMS の表面積で $S = 4\pi^2 aR$ で与えられる。この時 $P_{\parallel}$ は

$$P_{\parallel} \simeq \int_0^h dx \frac{4\kappa_{\parallel 0} d^2}{7S} T^{\frac{7}{2}} \tag{3.46}$$

で与えられる。

OMS から壁への向かう熱流束 $P_{\perp}$ は

$$P_{\perp} = -\int \kappa_{\perp} \nabla_{\perp} T \cdot d\mathbf{S} \tag{3.47}$$

で与えられる。ここで積分は磁気面上での面積分である。$\kappa_{\perp}$ と T は共に一つの磁気面では一定の値をとるものとすると

$$P_{\perp} \simeq -S\kappa_{\perp} \frac{dT}{dx} \tag{3.48}$$

となる。入力パワーはプラズマ中心に集中するものとし、放射損失や対流損失は考えない。このとき全体のエネルギーバランスは

$$P_{\parallel}(x) + P_{\perp}(x) = P_0 \tag{3.49}$$

となる。ここで P_0 はコアプラズマから OMS へ流出する熱流束の総量である。(3.46) と (3.48) を (3.49) に代入すると、解くべき熱拡散方程式は

$$- S\kappa_{\perp}\frac{dT}{dx} + \int_0^h dx\frac{4\kappa_{\parallel 0}d^2}{7S}T^{\frac{7}{2}} = P_0 \tag{3.50}$$

となる。

初期条件は $P_{\parallel}(0) = 0,\ P_{\perp} = P_0$ であり、壁での温度がゼロであるとして数値計算によって温度分布を求める。$\kappa_{\perp}$ は

$$\kappa_{\perp} = \kappa_{\perp 0}T^{\alpha} \tag{3.51}$$

という温度依存性を持つとする。$\widehat{T} = T/T_*,\ \widehat{x} = x/h_*$ で規格化すると (3.50) の規格化された方程式は

$$- \frac{d\widehat{T}^{\alpha+1}}{d\widehat{x}} + \int_0^h \widehat{T}^{\frac{7}{2}} d\widehat{x} = 1 \tag{3.52}$$

となる。ここで $T_*, h_*, \widehat{h}$ は

$$T_* = \left(\frac{7P_0^2}{4\kappa_{\perp 0}\kappa_{\parallel 0}d^2}\right)^{\frac{2}{2\alpha+9}} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} h_* &= \frac{1}{\alpha+1}S\kappa_{\perp 0}T_*^{\alpha+1}P_0^{-1} \\ &= \left\{\left(\frac{7}{4}\right)^{2\alpha+2}(\alpha+1)^{-2\alpha-9}S^{2\alpha+9}d^{-4\alpha-4}\right. \\ &\qquad \left.\kappa_{\perp 0}^{7}\ \kappa_{\parallel 0}^{-2\alpha-2}\ P_0^{2\alpha-5}\right\}^{\frac{1}{2\alpha+9}} \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\widehat{h} = h/h_* \tag{3.55}$$

である。両辺を r で微分して

$$\frac{d^2}{d\widehat{x}^2}\widehat{T}^{\alpha+1} = \widehat{T}^{7/2} \tag{3.56}$$

を得る。この方程式は (3.38) に類似しているが、指数関数が含まれていない。これは、リミターにあたる磁力線の接続長が対数的性質を有していないからである。壁及び部分リミターへの熱流束はそれぞれ

$$\widehat{P}(lim) = -\frac{d}{d\widehat{x}}\widehat{T}^{\alpha+1} \tag{3.57}$$

$$\widehat{P}(wall) = \int_0^{\widehat{h}} d\widehat{x}\widehat{T}^{\frac{7}{2}} \tag{3.58}$$

と書ける。

§3.5.1. の場合と同様に $\kappa_\perp = \mathrm{const.}(\alpha = 0)$, $\kappa_\perp = \kappa_{\perp 0}T(\alpha = 1)$ の 2 通りの場合を考えてみる。図 3.17 に $\alpha = 0$ の場合を示す。$h \gtrsim h_*$ で部分リミターが熱の分配に大きな影響を及ぼすことが分かる。また、h が $2h_*$ に達するまでにリミターのヘッドの温度はある一定の値に到達する。図 3.18 は $\alpha = 1$ の場合である。$\alpha = 0$ の場合に比べて短いリミター挿入長で熱は減少する。これは温度分布がより急峻になったためである。Heliotron-E のパラメタ ($d = 0.22[m]$) では $\alpha = 1$ の場合 $h_* = 1.22 \times 10^{-2}[m], T_* = 75[eV]$ となり、これは実験の観測範囲内である。

h_* を求めることによって $\kappa_\perp$ の T 依存性を調べることができるが、$P_\parallel$ の h 依存性もその手がかりを与える。h が小さいとき $P_\parallel$ は

$$P_\parallel \sim \frac{4}{7}(1+2\alpha)^{\frac{1}{1+2\alpha}}\kappa_{\parallel 0}d^2\left(\frac{h}{S}\right)^{\frac{9+2\alpha}{2+2\alpha}}\left(\frac{P_0}{\kappa_{\perp 0}}\right)^{\frac{7}{2+2\alpha}} \tag{3.59}$$

と書ける。$P_\parallel$ の h 依存性を実験的に調べることによって $\kappa_\perp$ の T 依存性についての情報を得ることができる。

EML 実験やヘリカル系の実験結果ではリミターを挿入しても効果が十分に出ないことは本節のモデルでは $\kappa_\perp$ が大きく、さらには T 依存性が弱いということに相当する。但し、今回の計算では全ての磁気面は閉じており、リミターがその面を横切るというモデルを用いているのでストカスティシティを正確に考慮に入れたものではない。今後、より良いモデルによる計算をしなければならない。

3.6 結論

ヘリカル系とダイバータトカマクのSOL領域の磁場構造について調べ、流体モデルを用いることで熱及び温度の分布についての評価を行った。磁場構造の評価には磁力線が壁に到達するまでに進む距離、接続長を用いた。SOL領域では接続長は対数的依存性を有していることを見出した。

SOL領域で接続長は対数的性質を特徴づけるパラメータ λ_1 と大きく関係している。λ_1 の軸対称性磁場やトロイダルピッチ数 m に対する依存性を数値計算によって調べた。その結果、ヘリカル系では λ_1 は m にほとんど依存しないことが分かった。また、λ_1 はトロイダル磁場に対して $\lambda_1 \propto B_t^{1/4}$ の依存性があり、トロイダル磁場によるプラズマ体積の増加は接続長の減少をもたらす。一方、垂直磁場は λ_1 にほとんど影響を与えないことがわかった。

ダイバータトカマクの接続長はヘリカル系と同様にSOL領域で対数的性質を示す。この性質はセパラトリクス構造を破壊する共鳴摂動磁場の有無に関わらず存在し、対数関数の係数は摂動磁場のモード数や大きさにほとんど依存しないことを示した。このことはダイバータ機能が多くの装置で種々の運転条件の下で観測されている理由の一つと考えることができる。対称系と非対称系では対数的性質の要因は異なるが、その性質は類似している。そして、ヘリオトロン／トルサトロンの接続長の値は典型的なパラメータの場合、トカマクの１／１０以下であることが分かった。

本章のモデルによって求めた接続長を用いてヘリカル系の周辺領域の熱や温度の分布についての評価を行った。リミターを挿入した場合の分布についても議論している。トカマクにおける周辺領域の分布は Neuhauser, *et al.* によって評価されいるが、本章ではヘリカル系での温度と熱の分布について評価を行った。ヘリカル系での熱流の幅はトカマクのそれと同程度かまたは狭いと考えられる。また、最外殻磁気面での温度は低く、これは接続長が短いことに起因している。

周辺領域の改善という立場から見ればトロイダル磁場よりも垂直磁場の方が優れているのかもしれない。λ_1 の低下は接続長の増大をもたらすので、他の印加磁場による最適化を今後検討しなければならない。また、数値計算により、$\iota = m/(\ell+1)$ 有理面は垂直磁場によってほとんど動かされず、OMS での回転変換は $m/(\ell+1)$ を越えることができないことを示しが、もし OMS での回転変換をさらに大きな値にしようとする場合には、例えば四重極磁場等を用いて他の共鳴成分を加えなければならないかもしれない。なぜ $\iota = m/(\ell+1)$ 有理面が他の有理面の性質と異なっているのだろうか。この疑問に対する答は本章で得られていない。等々力は周辺での磁気面を破壊する磁場成分は磁気面のシフトによっても残ることを示した [87] 。$(\ell+1, m)$ 磁気島の挙動はこの残留磁場と関連しているのかもしれない。これらとの比較は今後の課題として残っている。

Heliotron-E のパラメタで得られた熱流の幅はイオンラーマー半径と同程度であり、流体モデルの限界に近い。熱流の正確な幅の評価は運動論的効果を考慮に入れる必要があるかもしれない。過去の研究においても詳しい解析はなされておらず、今後の課題として残されている。また、Heliotron-E でのパラメタを用いて得られた理論的な温度勾配は実際の値よりも大きい。周辺領域では放射や原子分子過程が重要な役割を果たしており、これらの効果を導入することによって、より実際の値に近づけられると考える。

ヘリカル系の T_b のパワー依存性はトカマクに類似しているが接続長の短さの分だけ T_b は低下する。この T_b/T_d の低下はダイバータの機能を悪化させることにつながる。従って、T_b を上げるように努力するか、または高い粒子束が必要とされる。これの改善方法については、今後さらに研究されねばならない。部分リミターによる周辺領域の評価も行った。$\kappa_\perp$ の h, P_0 に対する依存性を求めることができた。このモデルではリミターによって周辺プラズマの性質が変わらないとしたが、リミターから不純物の混入等によってプラズマが変わると思われる。また、リミターにできるシースや有限のリミター温度を考慮してより定量的な評価をする必要がある。

付録 3.A

直線ヘリカル系を記述するスカラーポテンシャル Φ は

$$\Phi = \sum_{\ell,m} \alpha^s_{\ell m} I_\ell \left(m\frac{\rho}{R} \right) \cos \left(\ell\theta + m\frac{z}{R} \right) + B_z z$$

と書くことができる。ここで I_ℓ は第1種変形ベッセル関数で、B_z は一様な軸対称磁場である。トロイダルヘリカル系と同様に、シングルハーモニックだけを用いて磁場計算をし、接続長を求める。直線ヘリカル系ではセパラトリクスが存在し、セパラトリクス内では磁気面は閉じているので接続長は無限大となる。セパラトリクスから外では接続長は有限の値をとり、数値計算により

$$\frac{L}{R} \sim \frac{\ell}{m} \frac{1}{\lambda^s_1} \ln \frac{R}{\delta}$$

を得た。ここで δ はセパラトリクスX点からの距離である。図 3.A.1 に λ^s_1 の B_z 依存性を示す。λ^s_1 は $(a/R)^{1/2}$ に比例し、その値もトロイダル系に類似している。例えば Heliotron-E のパラメータ $(\iota(0) = 0.5, m = 19)$ であると $\lambda^s_1 \sim 2.2$ である。このことは、ヘリカル系がセパラトリクスの存在の有無に関わらず対数的性質を有し、また、軸対称磁場に対する依存性も似ていることを意味している。

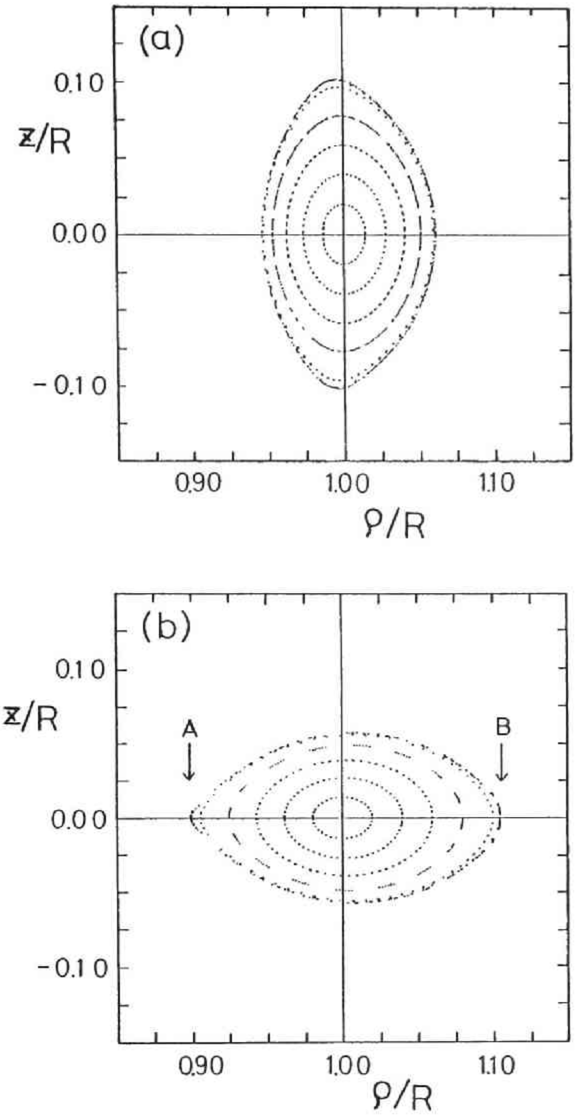


図 3.1 真空磁気面の例。Heliotron-E ($\ell = 2, m = 19$) を模擬している ($B_t R/C_h = 0.65, B_v = 0$) 。(a) が $\phi = 0$ 、(b) が $\phi = \pi/2m$ のポロイダル断面図である。

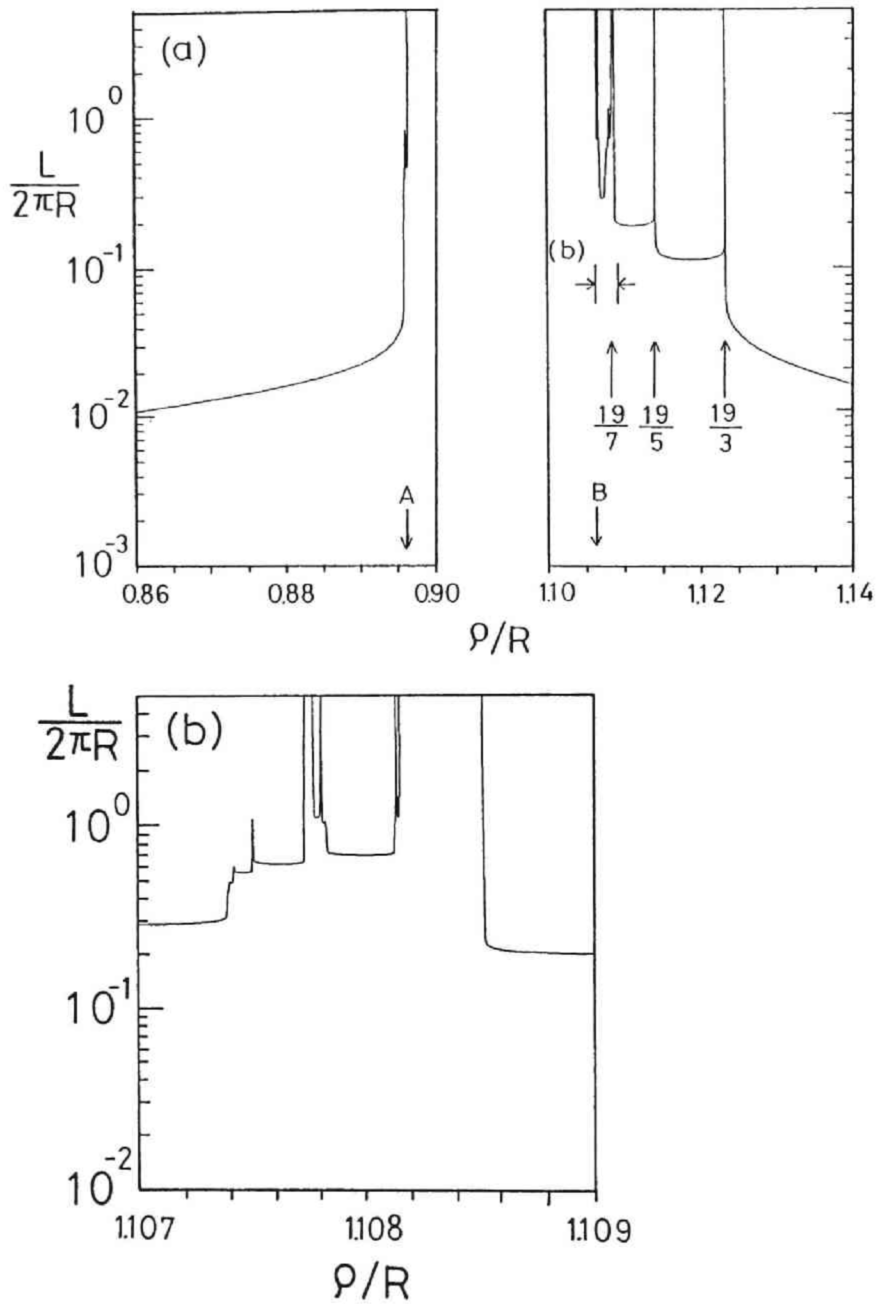


図 3.2 接続長 L_+ の径方向分布 ($\theta = 0, \zeta = \pi/2m$)。パラメータは図 3.1 と同じである。(a) 全体図、(b) $\iota = 19/7$ 近傍の拡大図。

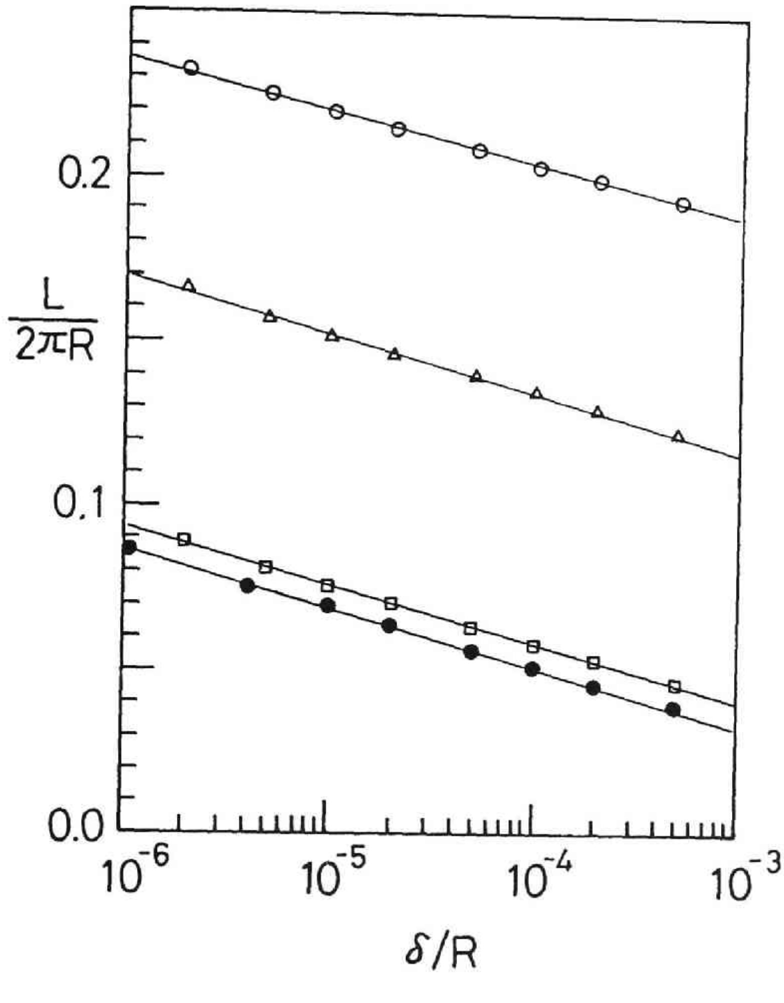


図 3.3 接続長の漸近的振る舞い。δ は表面からの距離である。$\bullet$, $\Box$, $\triangle$, $\circ$ 印はそれぞれトーラス内側の OMS 、トーラス内側の $\iota = 19/3, 19/5, 19/7$ の場合である。

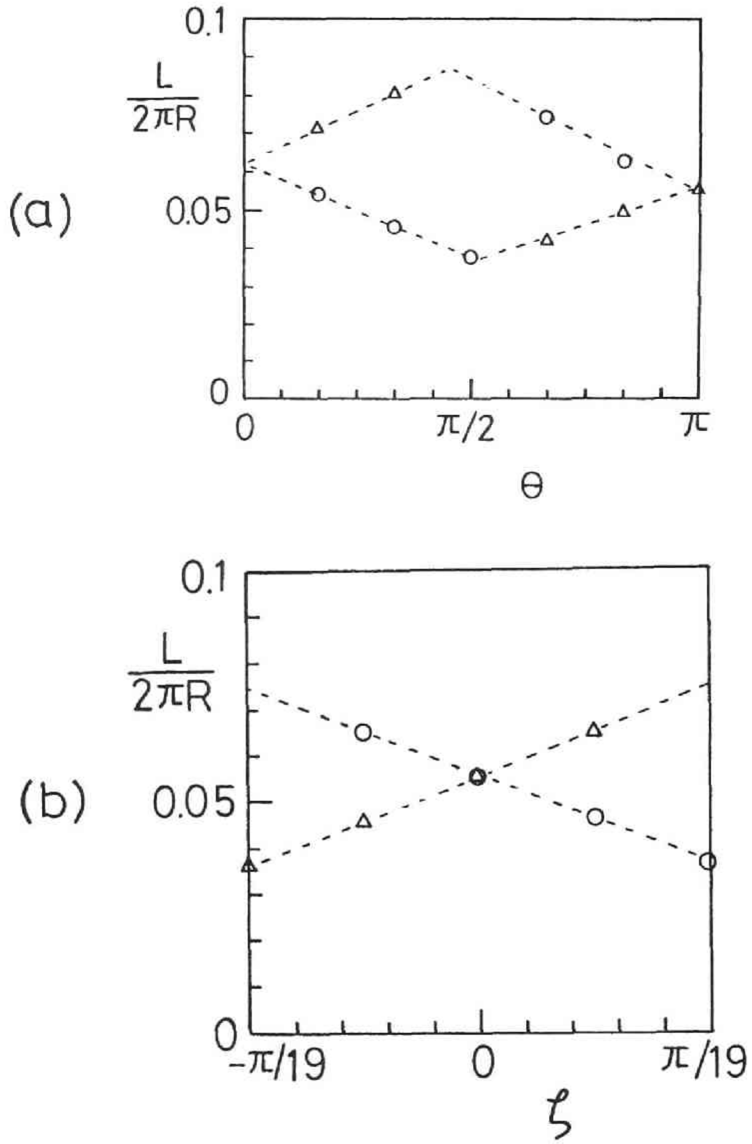


図 3.4 L_+ の θ, ζ 依存性。$\iota = 19/3$ 近傍の $\delta/R = 10^{-3}$ をとっている。o, △ 印は、それぞれ L_+, L_- に対応する。(a) $\zeta = 0$ での θ 依存性、(b) $\theta = 0$ でのζ 依存性。

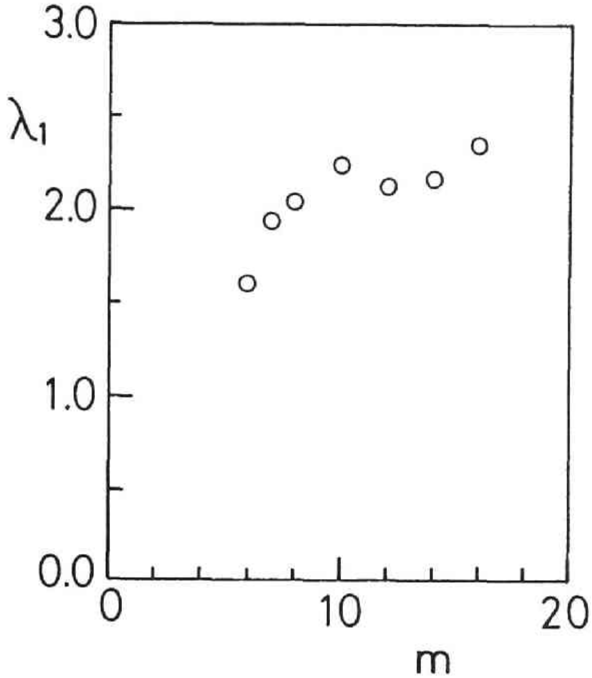


図 3.5 λ_1 の m 依存性。パラメータは $B_tR/C_h = 1.0$, $B_vR/C_h = 0.0$ である。λ_1 は m 依存性が弱い。

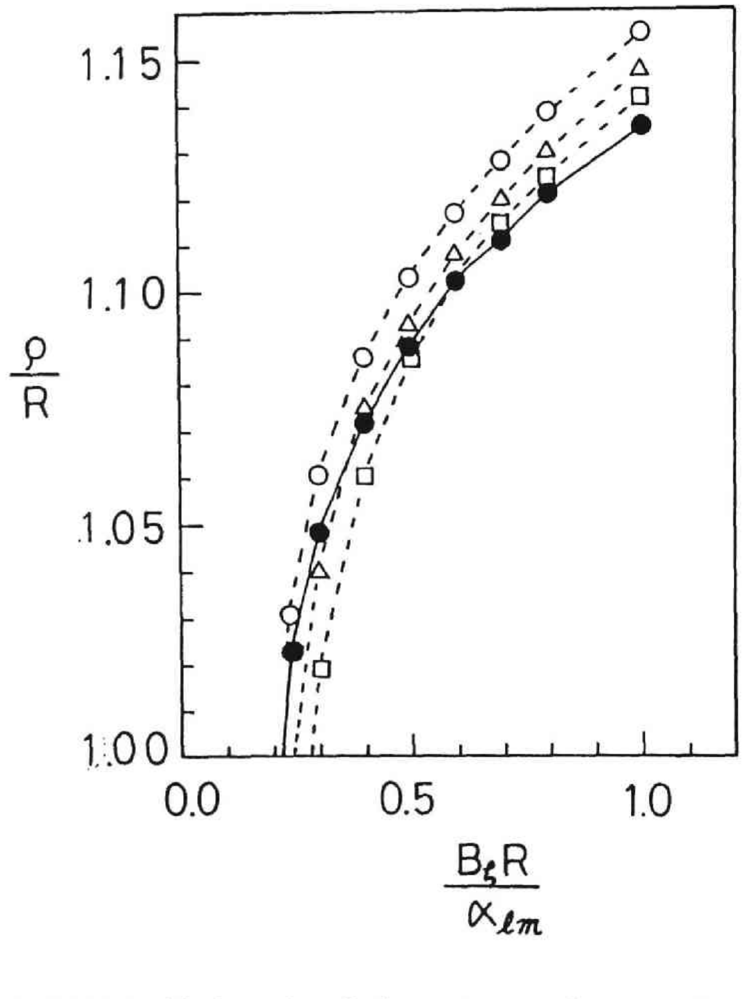


図 3.6 OMS と磁気島 O 点の位置。o, △, □, ● 印はそれぞれι = 19/3, 19/5, 19/7 の O 点、そして OMS に対応する。トロイダル磁場増大と共に径の外方向へ動く。

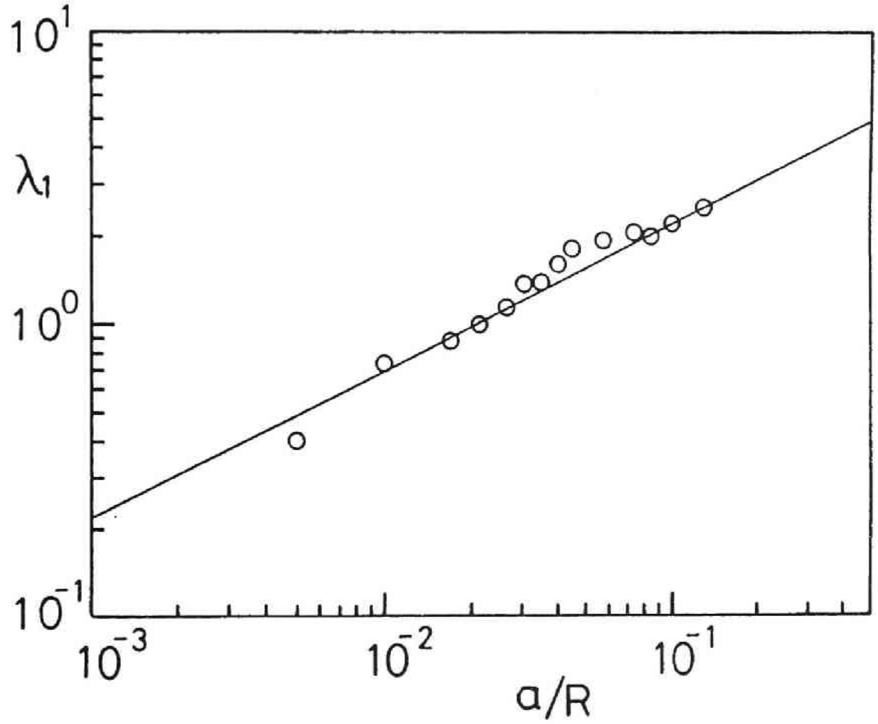


図 3.7 λ_1 の a/R 依存性。λ_1は近似的に $(a/R)^{1/2}$ に比例する。

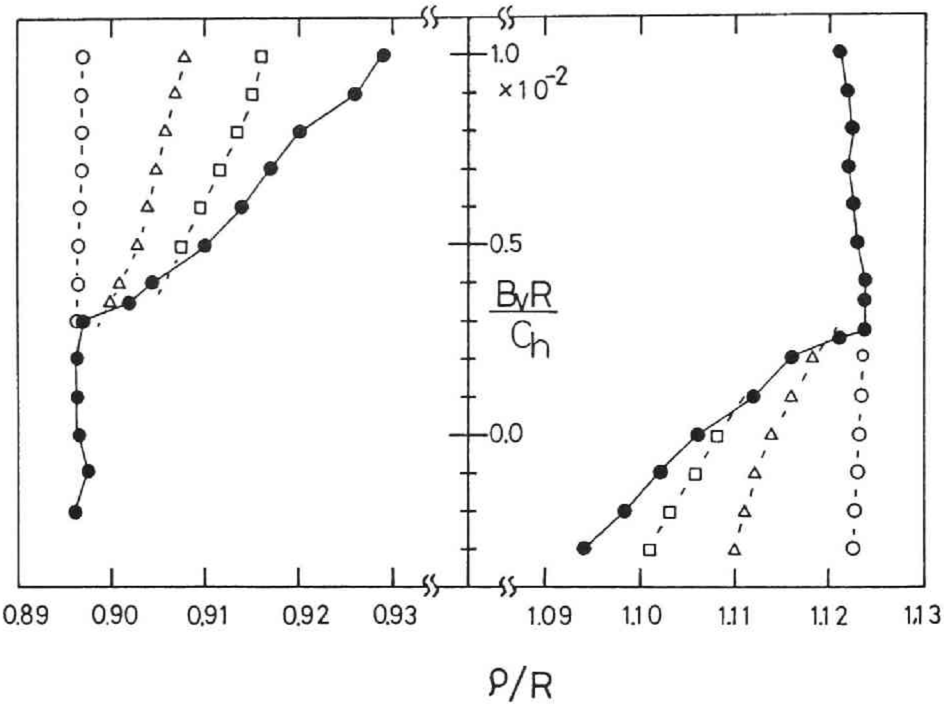


図 3.8 垂直磁場による OMS と磁気島 O 点のシフト。パラメータは $m = 19$, $B_t R/C_h = 0.65$ である。印の対応は図 3.6 と同じである。

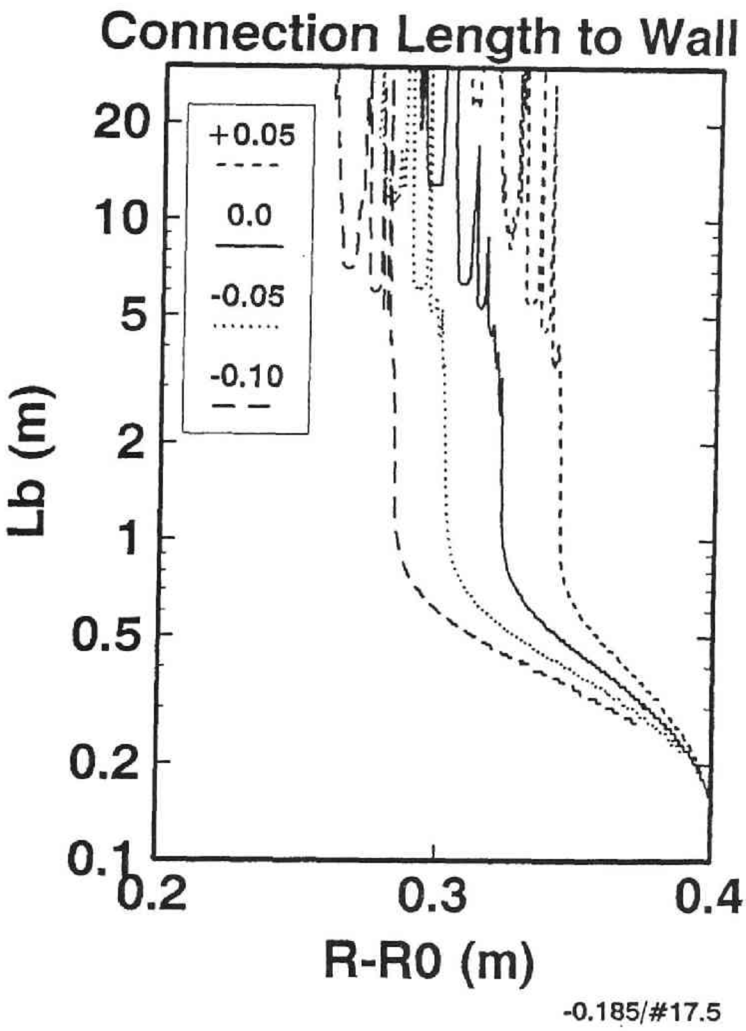


図 3.9 実際のコイルによる計算から得られた接続長の径方向分布。α^* は $\alpha^* = (B_t - B_{t0})/B_{t0}$ (B_{t0} は$\iota(0) = 0.5$ になる値) で定義される。

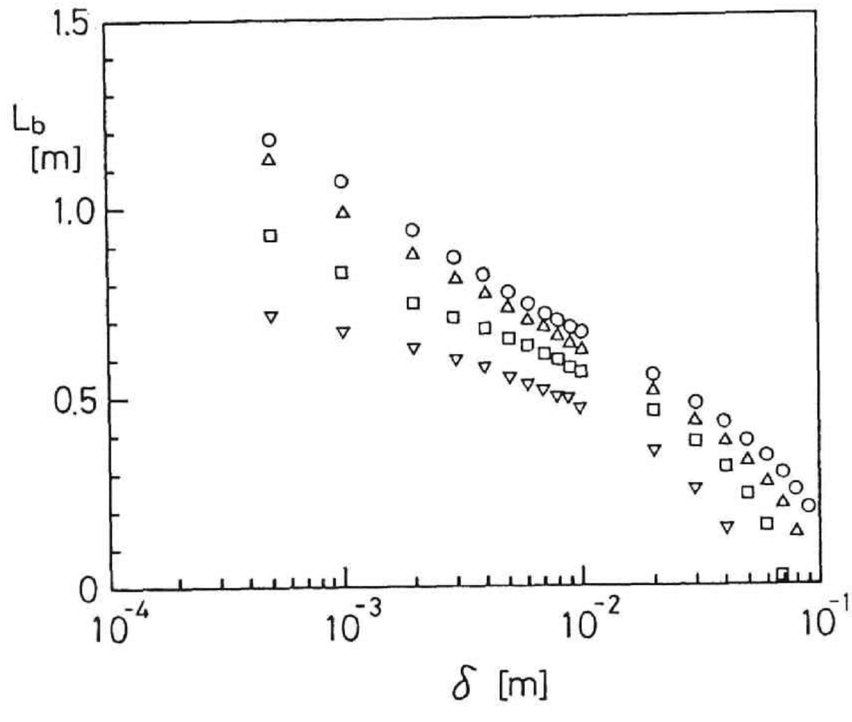


図 3.10 接続長の漸近的振る舞い。o, △, □, ▽ 印はそれぞれ $\alpha^* = -0.1, -0.05, 0, 0.05$ に対応する。

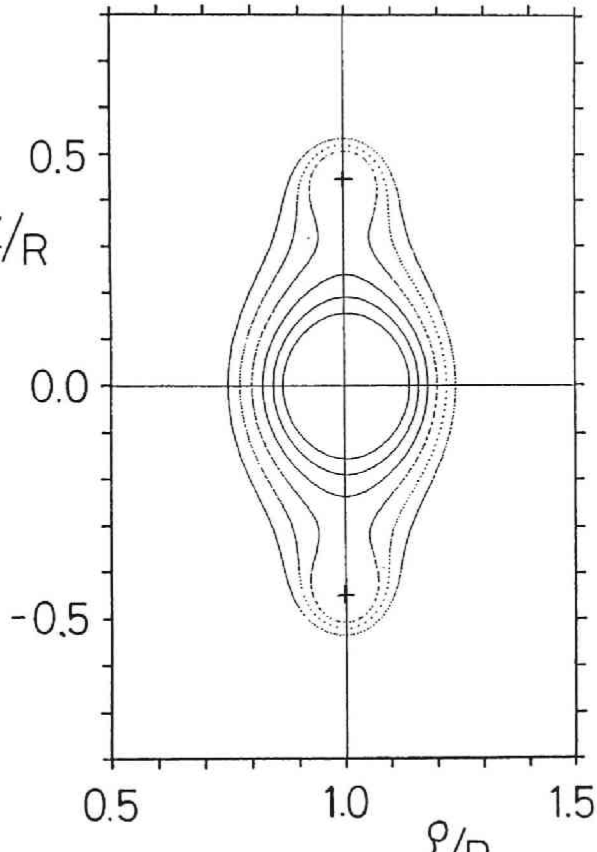


図 3.11 ダブルヌルダイバータトカマク磁気面のポロイダル断面。パラメータは $q_I = 3$, $z_d/R = 0.45$, $I_d/I_p = 1/2$ である。

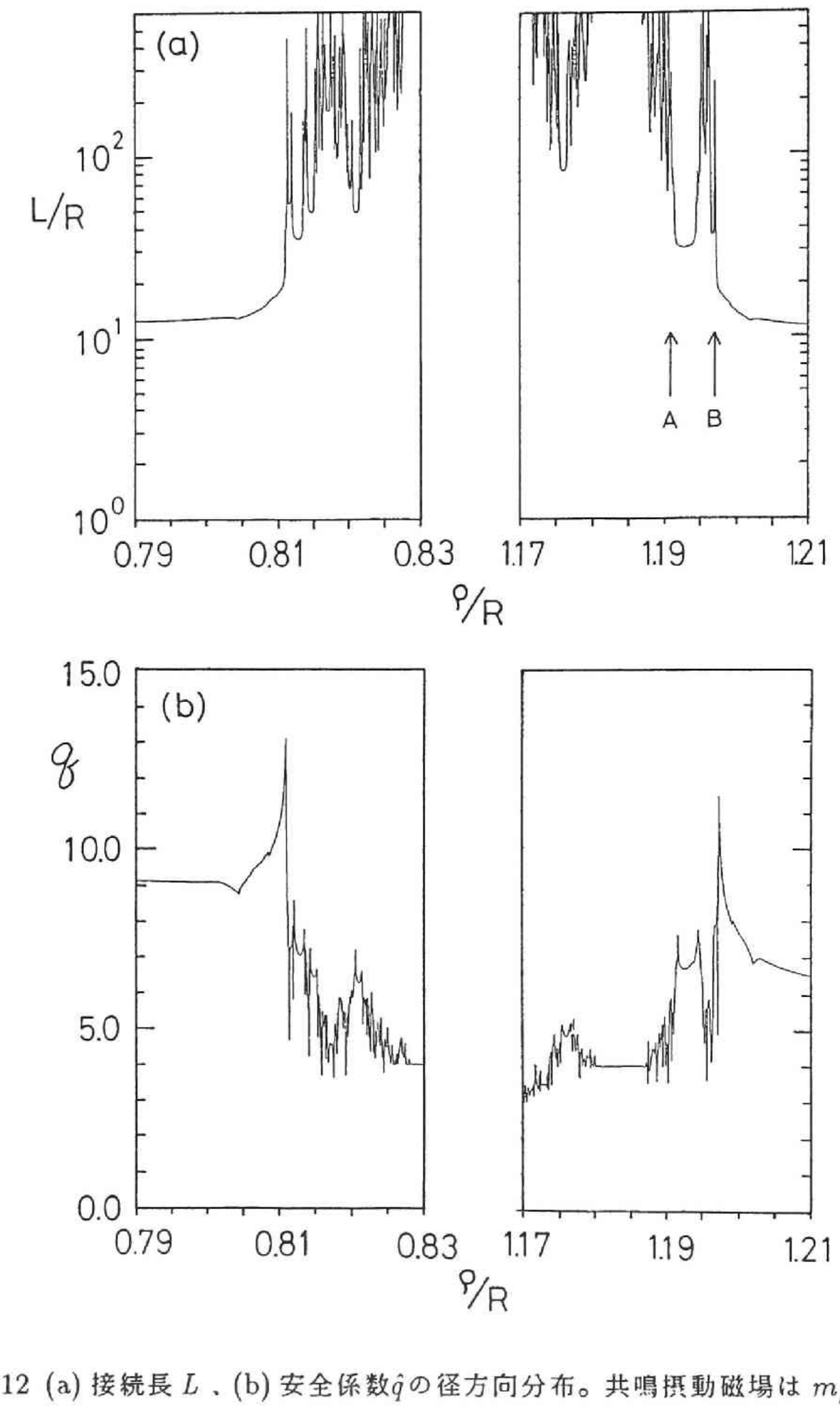


図 3.12 (a) 接続長 L 、(b) 安全係数$\hat{q}$の径方向分布。共鳴摂動磁場は $m/n = 5/1, \tilde{b} = 0.1$ である。

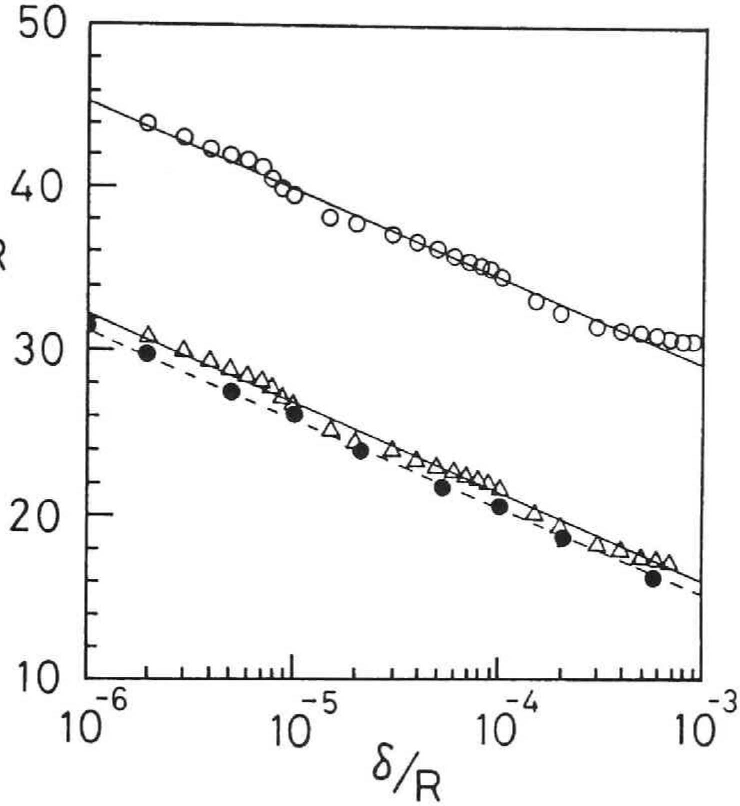


図 3.13 ストカスティック領域での接続長の対数的性質。o, △ 印はそれぞれ図 3.12(a) の A, B 点での評価である。● 印は摂動を加えていない場合である。$\delta/R \sim 10^{-5}$ と 10^{-4} 近傍での小さなゆらぎは $\hat{q}$ 値が有理値をとったために起こるものと思われる。

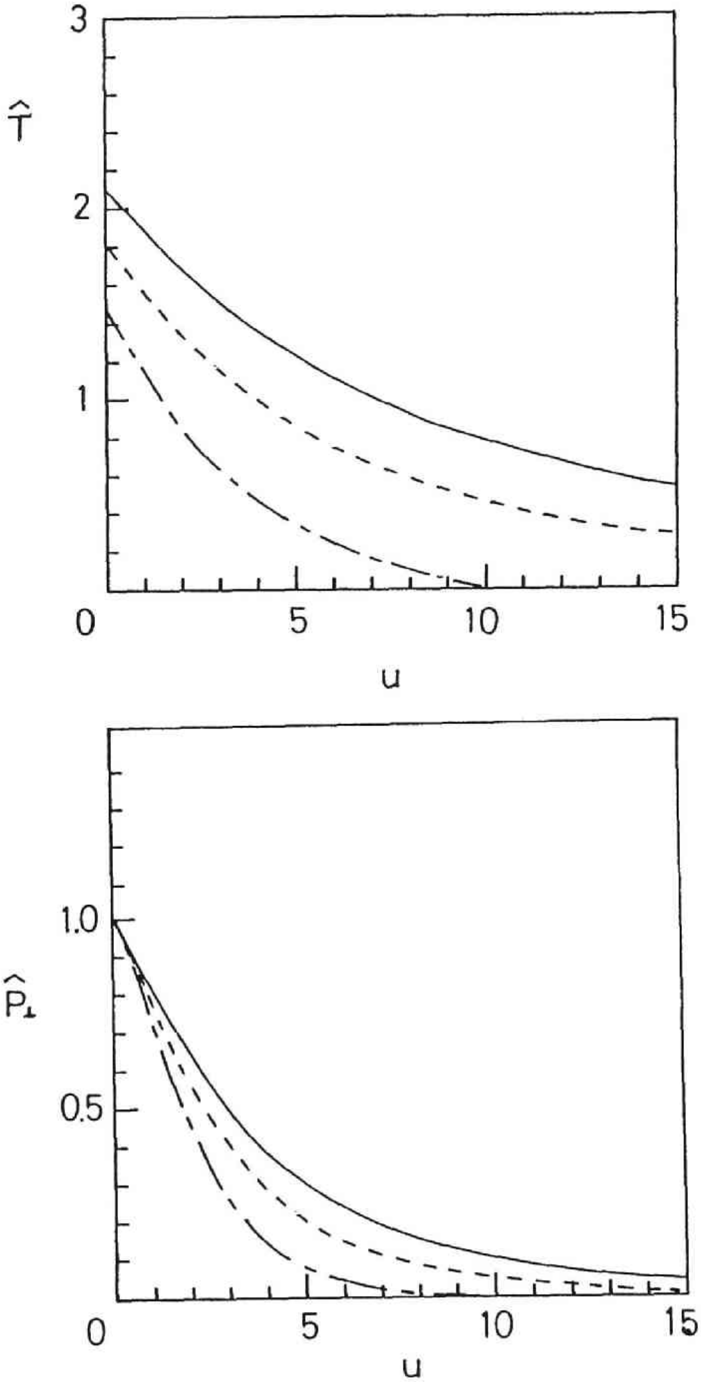


図 3.14 $\alpha = 0$ の場合の SOL 領域での径方向分布。(a) 温度、(b) 垂直方向の熱流束。実線、点線及び一点鎖線はそれぞれ $u_0 = 1000, 100, 10$ のときである。

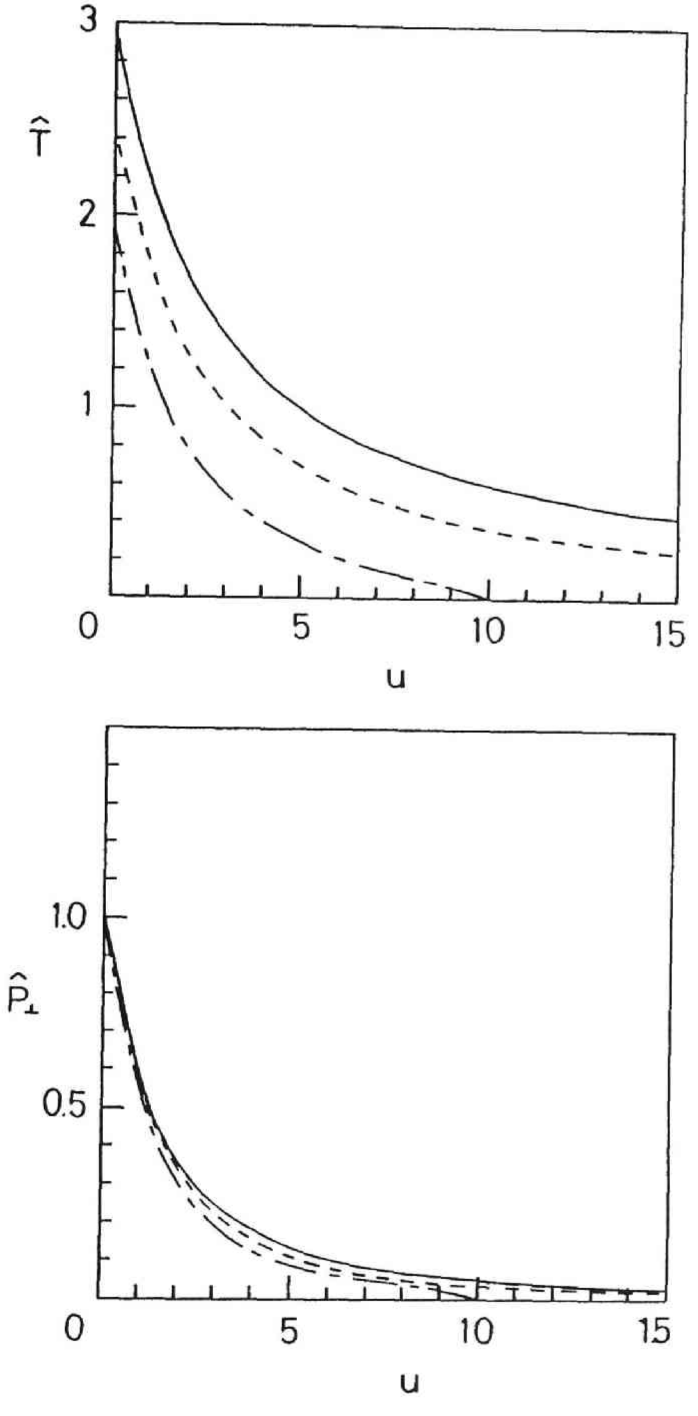


図 3.15 $\alpha = 1$ の場合の径方向分布。パラメータは図 3.14 と同じ。実線、点線及び一点鎖線はそれぞれ $u_0 = 1000, 100, 10$ のときである。

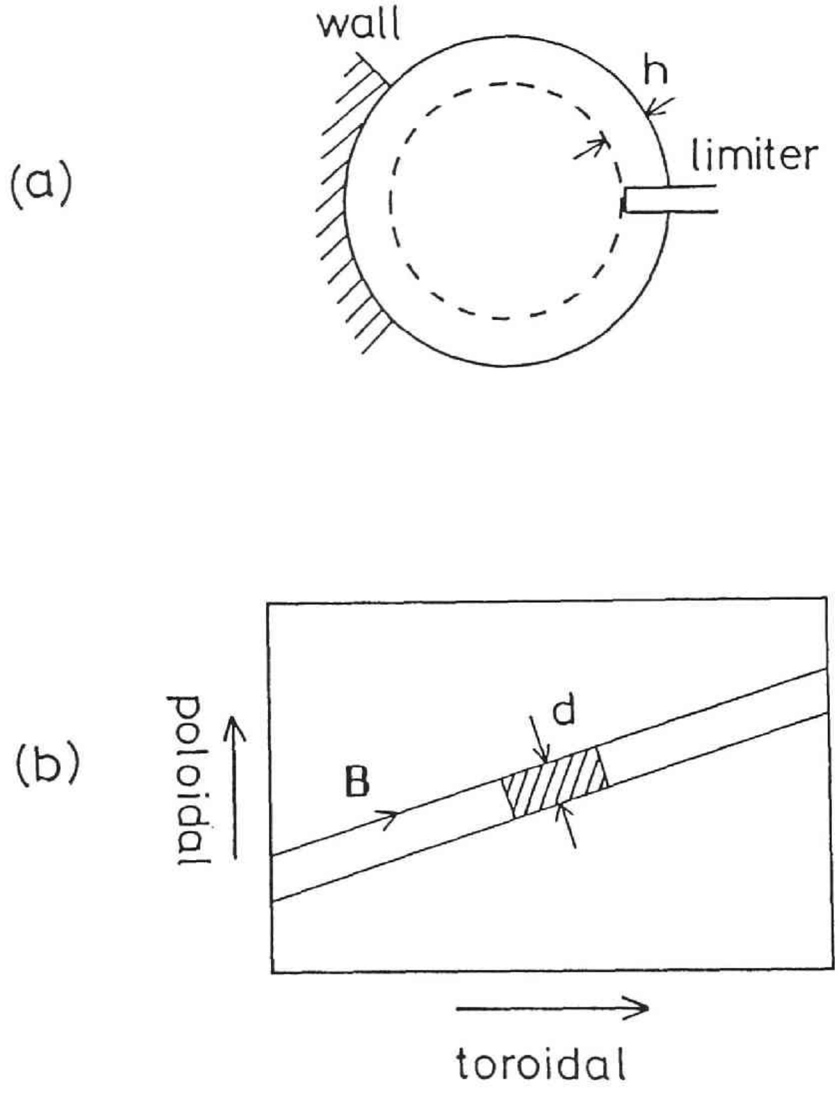


図 3.16 モデルの形状。(a) ポロイダル断面と (b) リミターヘッドでの磁気面の展開図。(b) の斜線部分はリミターヘッドが当たっている箇所を示す。

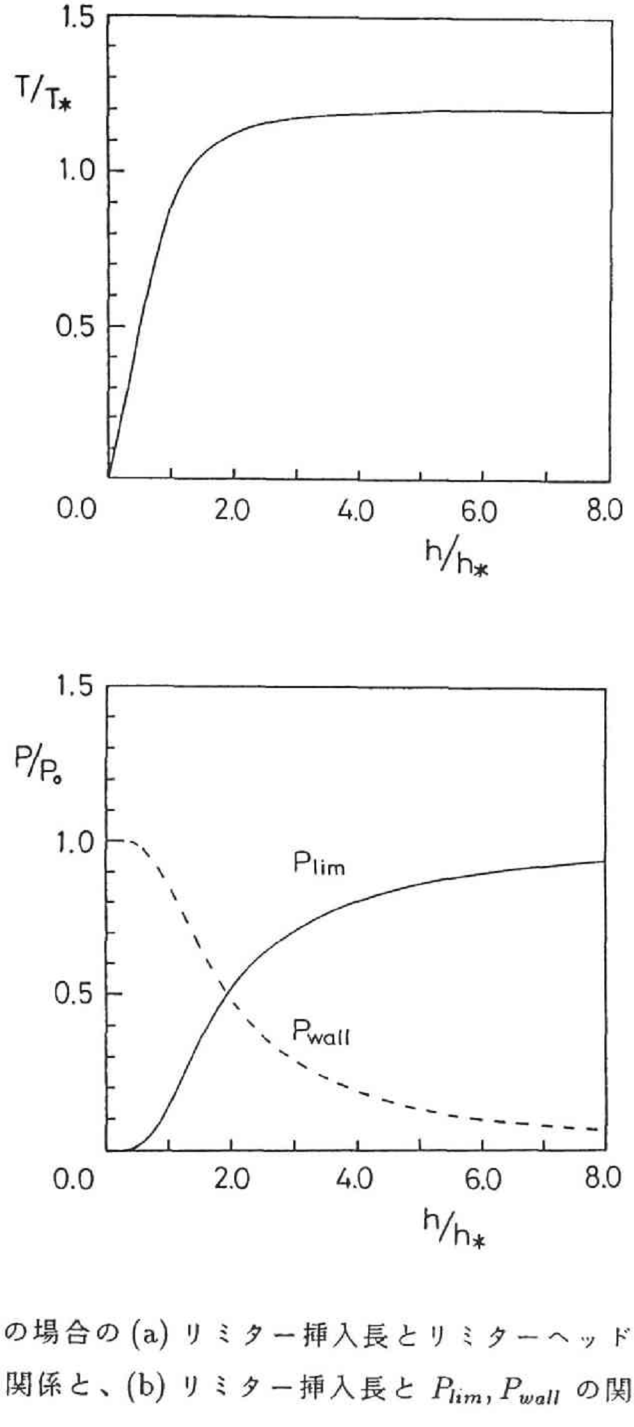


図 3.17 $\alpha = 0$ の場合の (a) リミター挿入長とリミターヘッドでの磁気面の温度の関係と、(b) リミター挿入長と P_{lim}, P_{wall} の関係。

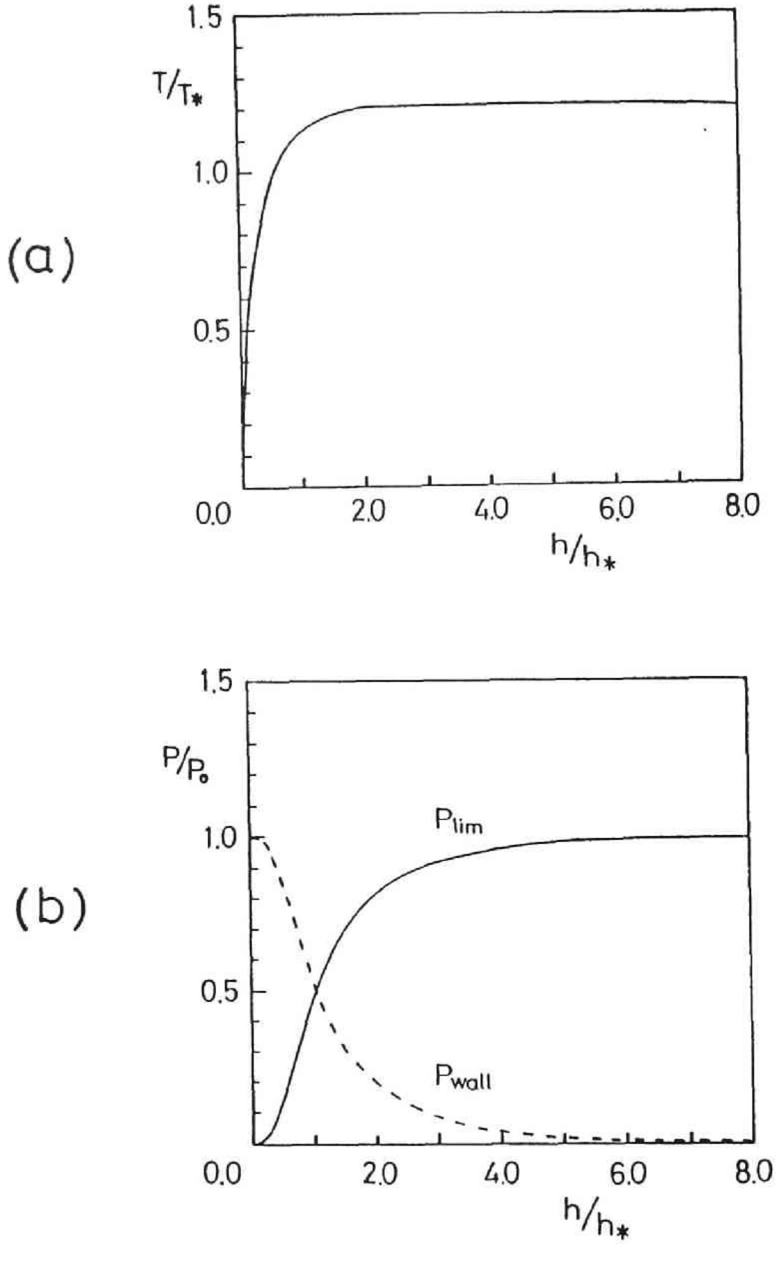


図 3.18 $\alpha = 1$ の場合の (a) リミター挿入長 h とリミターヘッドでの磁気面の温度 T の関係と、(b)h と P_{lim}, P_{wall} の関係。

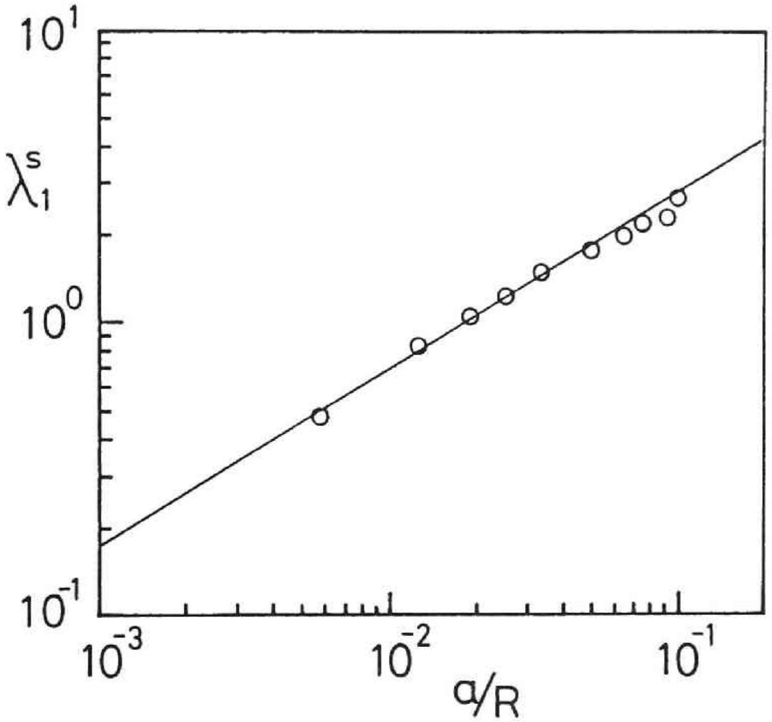


図 3.A.1 直線ヘリカル系での λ_1^s の a/R 依存性 。トーラスの場合と同様、λ_1^s は近似的に $(a/R)^{1/2}$ に比例し、また、その絶対値も近い。

4 外部からの摂動磁場による磁気島の制御

4.1 序

2章と3章ではプラズマの効果を無視した静的なモデルで磁場構造を調べ、その結果を用いてプラズマの分布について議論した。実際の閉じ込め装置においては低ベータの場合であってもプラズマの効果を考慮する必要がある。即ち、外部からプラズマを制御する場合、応答時間がどうであるかが重要である。本章では、外部から摂動共鳴磁場を印加したときのプラズマの応答性について検討する。

トロイダルプラズマの理想MHDモデルでは、対称性のある平衡状態が存在することが証明されている[88]。しかしながら、MHD揺動や誤差磁場の様な摂動が加わると磁気面の一部は閉じた面とはならず磁気島が形成される。初期の対称性のある平衡（平衡（I）と定義する）のプラズマ境界に、有理面に共鳴するような摂動が加えると、系は新しい平衡へと移行する。この新しい平衡には2種類のものが考えられる。一つは有理面に沿って表面電流が流れ、磁場のジャンプが生じる平衡である。この場合、磁気面にトポロジーの変化はない。これはプラズマの抵抗が重要な役割を果たさないとした理想MHDの状態で考えられ得る。もう一つは表面電流が消えトポロジーに変化が起こる平衡で、有理面上には磁気島が形成される。新しい平衡のうち、前者を平衡（II）、後者を平衡（III）と定義しよう。実際のプラズマでは有限の抵抗があるため、系は平衡（II）の状態で滞在できず、最終的には平衡（III）へと移行する。この時間発展を本章では成長過程と呼ぶことにする。外部から摂動を加える強制リコネクションによる磁気島の成長過程についてはHahm [89]やHu [90]によって解析された。

次に、境界条件を平衡（III）から平衡（I）へと戻したとする。このとき、系は平衡（II）から再び、別の平衡へと移行する。成長過程と同様にこの平衡は2種類ある。第1の平衡はトポロジーの変化がなく、有理面には磁気島が依然として形成されている。これを平衡（IV）と定義す

る。第２の平衡は磁気島が消滅し、系は一番最初の軸対称系の平衡（Ｉ）に復起する。平衡（Ⅳ）から（Ｉ）への時間発展を減衰過程と呼ぶことにしよう。問題は減衰過程が成長過程とどう違うかということである。本章では減衰過程についての解析を行い、両過程の相違について議論する。

磁気再結合の問題は過去数十年にわたって広範囲に調べられてきた。歴史的には、外部から駆動される磁気再結合モデルとして２つの有名なものがある。一つは Petschek Model [91]、もう一つは Sweet-Parker Model [92] [93] と呼ばれている。磁気再結合率は Petschek Model で S^0、Sweet Parker Model で $S^{-1/2}$ にスケールする。ここで S は磁気レイノルズ数である。スケールの違いはモデルの相違に基づく。また、数値計算によっても多くのことが調べられてきた [94]-[97]。Petschek や Sweet-Parker のモデルでは有理面に向かう外部から与えられた定常的なプラズマの流れが重要な役割を果たしており、駆動再結合（driven reconnection）と呼ばれている。しかしながら、閉じ込めプラズマ中の磁気島を外部磁場によって制御する場合、外部からの強い定常流はなく、再結合率は磁束の摂動に強く依存している。そこで本章では Hahm 等の手法を用いて、境界の磁束を変化させる強制再結合（forced reconnection）による磁気島の時間発展について解析を行い、その物理機構について調べてゆく。ただし、ティアリングモードや $m = 1$ キンクモード等の電流駆動不安定性は物理機構が異なるので本章のモデルをそのまま適用できないことに注意しなければならない。

単純なスラブモデルを用い、磁気島は単一ヘリシティを有するものとする。トカマクやヘリカル系のようなトーラス閉じ込め装置では、プラズマは低ベータで、運動エネルギーは磁気エネルギーに比べると小さい。従って、プラズマが非圧縮性であると仮定できる。外部領域からのプラズマ流は考えず、境界で磁束のみが摂動を受けるとする。もちろん、摂動を立ち上げる際に有理面に向かうプラズマの流れは形成されるが、その大きさは小さいし定常流ではない。磁気島の時間発展は簡約化 MHD 方程式を用いて解く。理想 MHD フェイズでは解析解を求められるが、抵抗が重要となってくるフェイズでは解析解の導出は減衰過程では難しい。

数値計算を行って S 依存性や磁気島の大きさで時間発展がどう変わるか調べる。減衰過程では、磁気島の幅が電流層の幅と同程度となると、非線形項（摂動項同士をかけ合わせた項）が重要でなくなる。そして磁場の空間構造が影響を及ぼすことが示される。

本章の構成は以下の通りである。§4.2 でモデルと基礎方程式について記述する。§4.3 で減衰過程との比較のためにも Hahm 等の解析した成長過程について述べる。§4.4 で減衰過程の解析結果と数値計算結果を示す。§4.5 では、境界摂動が大きすぎる場合、磁気島が一度消滅し再び位相を変えて成長してゆく場合の物理機構について議論する。§4.6 は結論に当てられる。

4.2 モデルと方程式

磁気島の時間発展を解析するために図 4.1 の様なスラブモデルを考える。プラズマは非圧縮性であり、境界 $x = \pm a$ で導体壁に囲まれているものとする。磁場は、一様な勾配をもつ y 方向の磁場 B_y と z 方向に一様な磁場 B_z から構成されているとする。このとき平衡磁場 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B} = B_z \nabla z + B_{y0} \frac{x}{a} \nabla y \tag{4.1}$$

と書くことができる。ここで B_{y0} と B_z は定数である。磁束関数 ψ を導入すると $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B} = B_z \nabla z + \nabla z \times \nabla \psi \tag{4.2}$$

と書くこともできる。(4.1)(4.2) より、最初の平衡状態では $\psi = (B_{y0}/2a)$ x^2 となる。

プラズマ境界が摂動を受けると、系は新しい平衡へと移行する。場に抵抗を考慮すると、§4.1 で述べたようにプラズマ中には磁気島が形成されるが、この磁気島の時間発展を追う際に MHD 方程式を用いる。MHD 方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla P \\
&\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \\
&\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J} \\
&4\pi \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}
\end{aligned}\right\} \tag{4.3}$$

で記述される。ここで $\rho, P, \mathbf{v}, \mathbf{J}, \mathbf{E}$ はそれぞれ質量密度、プラズマ圧力、プラズマ流速、電流密度、電場である。流れ関数 ϕ と温度 U を

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{v} = \nabla z \times \nabla \phi \\
&U = \nabla^2 \phi
\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

で定義すると、(4.3) は低ベータ近似下で ψ,ϕ 2 場の簡約化 MHD 方程式

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla z\times\nabla\phi\cdot\nabla\psi=\eta J\\
&\rho\left(\frac{\partial U}{\partial t}+\nabla z\times\nabla\phi\cdot\nabla U\right)=\nabla z\times\nabla\psi\cdot\nabla J\\
&J=\frac{1}{4\pi}\nabla^2\psi\\
&U=\nabla^2\phi
\end{aligned}\right\}\tag{4.5}$$

となる [98] 。ここで J は電流密度の z 方向成分である。

境界に加えた摂動の振巾 δ は a に比べて十分小さい $(\delta/a \ll 1)$ とすると、(4.5) のパラメータは

$$\left.\begin{aligned}
&\psi=\psi_0+\psi_1\\
&\phi=\phi_1\\
&J=J_0+J_1\\
&U=U_1
\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

と近似できる。添え字 0 と 1 はそれぞれ初期平衡量、摂動量を表す。ψ_0 と J_0 は、$\psi_0=(B_{y0}/2a)x^2,\ J_0=B_{y0}/a$ で与えられる。初期状態でプラズマ流速はないとするので ϕ と U には 0 次の量はない。(4.6) を (4.5) に代入して対称性のある平衡から磁気島の形成されている平衡への時間発展を追う。

4.3 成長過程

本章では減衰過程の物理機構を調べることが主たる目的であるが、成長過程と比較をする所が多く、減衰過程の理解を助けるためにも、本節では Hahm 等が詳しく解析した成長過程について簡単に述べる [89]。

境界に

$$x = \pm(a - \delta \cos ky) \tag{4.7}$$

の様な摂動を加えると磁束関数は平衡 (II) (III) で

$$\psi = \psi_0 + \psi_1(x) \cos ky \tag{4.8}$$

となる。摂動量 $\psi_1(x)$ は (4.8) を平衡方程式 $\mathbf{B} \cdot \nabla J = 0$ に代入して得られる方程式

$$\frac{B_{y0}}{a} x \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 - k^2 \psi_1 \right) = 0 \tag{4.9}$$

を解くと得られる。方程式 (4.9) は境界条件 $\psi_1(a) = B_{y0}\delta$ を用いると

$$\psi_1(x) = \psi_1(0) \left(\cosh kx - \frac{\sinh kx}{\tanh ka} \right) + B_{y0}\delta \frac{\sinh kx}{\sinh ka} \tag{4.10}$$

という解をもつ。有理面上の値 $\psi_1(0)$ は 2 つの値を持ち、$\psi_1(0) = 0$ と $B_{y0}\delta / \cosh ka$ である。前者が平衡 (II) 、後者が平衡 (III) の解である。磁気島の幅は $4\sqrt{a\psi_1(0)/B_{y0}}$ で与えられることからわかる様に、境界の摂動の大きさに依存している。

ψ_1 は y に関して周期関数であることを考えると、ϕ は

$$\phi = \phi_1(x) \sin ky \tag{4.11}$$

と記述して良い。

$\psi_1(0)$ はプラズマに抵抗を考慮すると、0 から $B_{y0}\delta / \cosh ka$ 値へと時間発展する。この時間発展は 4 つの段階に分けられる。4 つの段階とは

(A) 理想 MHD ($t \sim 0$)

(B) 理想 MHD から抵抗性 MHD への移行 ($t \ll S^{1/3}\tau_A$)

(C) 抵抗性 MHD ($t \sim S^{1/3}\tau_A$) 、

(D)constant ψ ($t \gg S^{1/3}\tau_A$)

である。これらの段階は時間 $S^\alpha \tau_A$ を用いて特徴づけられる（$0 \le \alpha \le 1, \tau_A$ はポロイダルアルフヴェン時間, $\tau_A = a\sqrt{4\pi\rho}/B_{y0}, S$ は磁気レイノルズ数, $S = \tau_R/\tau_A$、τ_R は拡散時間、$\tau_R = 4\pi a^2/\eta$)。

まず、摂動が十分小さく $\delta/a \ll S^{-4/5}$ のときを考えよう。このとき非線形項が無視できて、線形的取扱いが可能となる。$t \sim 0$ のとき、系は段階 (A) にあり、有理面近傍の ψ_1 は

$$\psi_1(x) = \frac{2}{\pi}\frac{B_{y0}k\delta}{\sinh ka}\, x \int_0^{kxt/\tau_A} du \frac{\sin u}{u} \tag{4.12}$$

で与えられる。また、$x = 0$ での J は

$$J(0) = \frac{1}{2}\frac{k^2\delta B_{y0}}{\sinh ka}\frac{t}{\tau_A} \tag{4.13}$$

となる。電流層の巾は $kx \sim \tau_A/t$ であるから、時間と共に狭くなってゆき、有理面の電流値は上昇する。抵抗がないと巾のない表面電流が形成され、これが平衡 (II) に相当する。$t \ll S^{1/3}\tau_A$ になると抵抗項が効き始め、$\psi_1(0)$ が

$$\psi_1(0) = \frac{2}{\pi}\frac{B_{y0}\delta k^2 a^2}{\sinh ka}\frac{t^2}{\tau_A \tau_R} \tag{4.14}$$

で与えられ、磁気再結合が始まる。これが段階 (B) である。$t \sim S^{1/3}\tau_A$ になると段階 (C) に入り、系の時間発展は FKR (Furth-Killeen-Rosenbluth) 理論を用いて解く [99] 。その結果、$\psi_1(0)$ は (4.14) と同様の式となる。(B) は (C) の初期と言うこともできる。段階 (D) の $t \gg S^{1/3}\tau_A$ になると ψ_1 はほぼ一定の値になり、

$$\begin{aligned}\psi_1(0,t) \;&=\; \frac{B_{y0}\delta}{\cosh ka}\left\{1 - \frac{4}{5}(e^{p_A\tau} + e^{p_B\tau})\right.\\ &\left.\quad + \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi}\int_0^\infty du \frac{u^{1/4}e^{-\tau u}}{1 - \sqrt{2}\lambda u^{5/4} + \lambda^2 u^{5/2}}\right\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

で与えられる。ここで τ, λ, p_A, p_B は

$$\left.\begin{array}{lcl} \tau & = & t/(S^{3/5}\tau_A) \\ \lambda & = & (3/2^{3/2})\{\tanh ka/(ka)^{3/2}\} \\ p_A & = & \lambda^{-4/5}\exp(4\pi i/5) \\ p_B & = & \lambda^{-4/5}\exp(-4\pi i/5) \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

である。

$t \gg S^{3/5}\tau_A$ のとき、(4.15) は

$$\psi_1(0,t) \sim \frac{B_{y0}\delta}{\cosh ka}\left\{1 + \frac{\lambda}{\sqrt{2}\pi}\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\tau^{-5/4}\right\} \tag{4.17}$$

となるから、ψ_1 は過渡現象を起こして一定の値に漸近することがわかる。そして重要なことは、平衡 (Ⅲ) の ψ_1 の値になるにはティアリングモードの時間スケール $S^{3/5}\tau_A$ あれば良いが、過渡現象の後、完全な平衡に到するためには $S^{3/5}\tau_A$ より長い時間が必要であるということである。

最終平衡の磁気島の大きさが抵抗層と同程度、即ち $\delta/a \gtrsim S^{-4/5}$ となったときは、非線形の効果を考慮に入れなければならない [100]。磁気島が大きくなると、かなり大きな非線形渦電流が生じ、プラズマの流れを阻害する方向の力 $\mathbf{J}\times\mathbf{B}$ を生み出すため、線形発展は代数的発展に変わり、磁気島の発展はゆっくりしたものとなる。平衡 (Ⅲ) に到するためには非線形時間スケール$\tau_{NL} \sim (\delta/a)^{1/2}\tau_R$ 必要である。また、ψ_1 の過渡現象は起きない。

4.4 減衰過程

4.4.1 解析評価

減衰過程を解析する際にも方程式 (4.5) を用いるが、平衡量が異なる。磁気島が既に存在している状態からの時間発展を見てゆくわけだから、初期の平衡磁束関数は ψ_0 でなく

$$\psi_{eq} = \psi_0 + B_{y0}\delta\frac{\cosh kx}{\cosh ka}\cos ky \tag{4.18}$$

としなければならない。(4.18) の右辺第 2 項は既存の磁気島によって生じる項である。第 2 項が大きく、即ち、磁気島が無視できないとき、系の時間発展は違ったものになることが予想される。

減衰過程では理想 MHD 段階 $(t \sim 0)$ で解析解を得られる。デカルト座標ではなく、次式で定義される座標系を用いる。

$$\left.\begin{array}{rcl} \psi &=& \dfrac{B_{y0}}{2a}x^2 + \psi_s \cosh kx \cos ky \\ \nabla\zeta &=& \dfrac{4B_{y0}}{4B_{y0} + k^2 a\psi_s}\dfrac{\nabla z \times \nabla\psi}{|\nabla\psi|} \\ z &=& z \end{array}\right\} \tag{4.19}$$

ここで $\psi_s = B_{y0}\delta/\cosh ka$ である。ψ は磁気島のある磁気面を表し、ζ は ψ と z に直交する。この座標系を用いると、境界に磁気島を消すような摂動を加えたときに生ずる磁束関数の摂動量 $\tilde{\psi}$ は、(4.5)(4.6) (4.18) より

$$\frac{4\pi\rho}{k^2}\left(\frac{4B_{y0} + k^2 a\psi_s}{4B_{y0}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\frac{\tilde{\psi}}{|\nabla\psi|} = -|\nabla\psi|\nabla^2\tilde{\psi} \tag{4.20}$$

の解である。$|\nabla\psi|$ は

$$|\nabla\psi|^2 \sim \left(\frac{B_{y0}}{a} + k^2\psi_s \cos ky\right)^2 x^2 + (k\psi_s \sin ky)^2 \tag{4.21}$$

であり、$x^2 = (2a/B_{y0})(\psi - \psi_s \cos ky)$ を用いると

$$|\nabla\psi| \sim \sqrt{\frac{2B_{y0}\psi}{a}} \tag{4.22}$$

が得られる。従って、$\nabla^2 \sim (B_{y0}/a)(2\psi\partial^2/\partial\psi^2 + \partial/\partial\psi)$ となり、$u = \sqrt{\psi}$ とおくと (4.20) は

$$\frac{4\pi\rho}{k^2}\left(\frac{4B_{y0} + k^2 a\psi_s}{4B_{y0}}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}\frac{\tilde{\psi}}{u} = -u\frac{\partial^2}{\partial u^2}\tilde{\psi} \tag{4.23}$$

となる。$\tau_A = \sqrt{4\pi\rho}a/B_{y0}$ を用い、$\tilde{\psi}/u = \tilde{\xi}$ とおくと、(4.22) は解くことができて

$$\tilde{\psi} \simeq C_\psi u \int^{\frac{hut}{\tau_A}} dv \frac{\sin v}{v} \tag{4.24}$$

なる解を得ることができる。ここで C_ψ は定数であり、$h = 4k\sqrt{aB_{y0}}/(4B_{y0} + k^2 a\psi_s)$ である。(4.24) は (4.12) と類似していることがわかる。従って減衰過程の理想 MHD 段階 ($t \sim 0$) での $\tilde{\psi}$ の時間発展は、成長過程の場合と同様である。また、$\tilde{J}$ は $\tilde{J} = \nabla^2\tilde{\psi}/4\pi$ より

$$\tilde{J} \simeq \frac{C_\psi}{8\pi u}\left\{\frac{hut}{\tau_A}\cos\left(\frac{hut}{\tau_A}\right) + \sin\left(\frac{hut}{\tau_A}\right)\right\} \tag{4.25}$$

となる。これは $\tilde{J}$ がセパラトリクスで最大値をとり、ψ に合わせた分布をすることを示している。

プラズマの流れについても考えてみると、流れ関数 $\tilde{\phi}$ を与える方程式は

$$\begin{aligned} 4\pi\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla^2\tilde{\phi} &= f(\nabla\zeta\cdot\nabla)\nabla^2(f\nabla^2\tilde{\phi}) \\ f &= (4B_{y0} + k^2 a\psi_s)|\nabla\psi|/(16\pi B_{y0}) \end{aligned} \tag{4.26}$$

となるから、$\tilde{\phi}$ も $\tilde{J}$ と同様、ψ に合わせた分布となる。成長過程ではプラズマは $x = 0$ の有理面に沿って流れるが、減衰過程では主にセパラトリクスに沿って流れる。

これらの結果は磁気再結合率に大きな関係をもつセパラトリクス X 点における電流分布及びプラズマの流れに変化が生じることを示唆しており、磁気島の発展は成長過程の場合と異なるであろうことが予測される。抵抗を考慮に入れなければならない時間での磁気島の発展は解析的に評価することが難しい。§4.4.2 以降で数値解析の手法とその結果を示す。

4.4.2 数値計算手法

数値計算ではデカルト座標系を用いる。平衡量中の磁気島項によって生ずる高次のフーリエモード数を考慮して、摂動量を

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \sum_{j=0} \tilde{\psi}_j \cos jky \\
\tilde{\phi} &= \sum_{j=1} \tilde{\phi}_j \sin jky \\
\tilde{J} &= \sum_{j=0} \tilde{J}_j \cos jky \\
\tilde{U} &= \sum_{j=1} \tilde{U}_j \sin jky
\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

で表す。(4.7) と (4.16) を (4.5) に代入すると、各モードに対する方程式が得られる。(付録 4.A 参照。) 境界で摂動を立ち上げた後、境界条件は

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\psi}_j(x=\pm a) &= \begin{cases} -B_{y0}\delta & (j=1) \\ 0 & (j\neq 1) \end{cases} \\
\tilde{\phi}_j(x=\pm a) &= 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

で与えられる。対称性 $\tilde{\psi}(x)=\tilde{\psi}(-x)$, $\tilde{\phi}(x)=-\tilde{\phi}(-x)$ を用いると解くべき領域は $0\leq x\leq a$ に減らすことができる。

数値計算手法としては x 方向に差分化し、y 方向にはフーリエ分解する。時間 t に関しては $\tilde{\psi}$, $\tilde{U}$ の時間発展は共に陽解法を用いている。数値計算誤差の評価は付録 4.B を参照されたい。

4.4.3 時間発展の例

図 4.2 はセパラトリクス X 点での磁束関数 $\tilde{\psi}$ の時間発展の例である。パラメータは $S=10^5$, $ak=1$, $\delta/a=10^{-2}$ である。成長過程、減衰過程共にプロットしてある。減衰過程は成長過程と比べて時間発展が抵抗性 MHD 段階になるとゆっくりとなる。そして成長過程の場合には磁気島が半分の巾にまで成長するのに$\tilde{\psi}/\psi_s=0.25$ で良いが、減衰過程の場合には$\tilde{\psi}/\psi_s=0.75$ まで発展しなければならない。従って、空間的に磁気島の

巾で評価するならば、減衰過程では成長過程よりかなり多くの時間を費やさなければ磁気島は小さくならない。

そしてもう1つ注意すべきことは非線形項$\nabla z\times\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla\tilde{\psi}$, $\nabla z\times\nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla\tilde{U}$, $\nabla z\times\nabla\tilde{\psi}\cdot\nabla\tilde{J}$ の効果である。成長過程では磁気島が抵抗層と同程度の大きさになると、非線形渦電流が作るプラズマの流れに対抗する力 $J\times B$ が重要となる。この物理機構により、磁気島はゆっくりとした時間発展に移行し、4.4.1 で述べたように S^1 にスケールする。図4.2 では非線形項がある場合とない場合で大きく異なり、非線形項のない場合には最終平衡に達する前に過渡現象が見られ、4.3 で求められた解析結果と一致する。そして磁気島の巾が半分の値になる時間は、$S^{3/5}$ にスケールする。一方、減衰過程では非線形項を無視した場合を比べると、ほとんど時間発展に変化がなく非線形項が重要な役割を果たしていないことを示唆している。

次節では減衰過程がゆっくりとした発展をする理由及び非線形項が重要でなくなる原因について述べる。なお、非線形項は次節からの数値計算では無視する。この理由には上記以外に次のことがある。非線形項の計算ではフーリエモード間のコンボリュージョンをとるため、多くのＣＰＵ時間が必要となる。非線形項の無視は数値計算の簡易化となり、広いパラメータサーベイを可能にする。

4.4.4 磁気島の効果

セパラトリクス X 点での $\tilde{\psi}$ のゆっくりとした時間発展の原因は有理面近傍のプラズマの挙動にある。減衰過程では、プラズマの流れは主としてセパラトリクスに沿ったものとなり、電流密度の勾配もそこで大きい。図4.3 は $\tilde{\psi},\tilde{J},\tilde{\phi}$ の等高線の例である。磁気島のある磁気面の分布に合わせたものとなっていることがわかる。この場合でもセパラトリクスの X 点近傍の電流分布が重要であることに注意しなければならない。なぜなら $\tilde{J}$ は X 点で依然ピーク値を持つからである。図4.4 はセパラトリクス X 点と O 点での電流密度の時間発展の様子である。$t\lesssim S^{1/3}\tau_A$ までは成長過程と同様に上昇するが、抵抗性 MHD 段階に入るとその値は

抑えられる。またその下降はゆっくりとしていることがわかる。磁力線の再結合率は X 点での電流密度の大きさによって決定されるので、この電流の抑制が時間発展をゆっくりしたものとしている。

図 4.4 では電流密度の振動現象が見られる。この現象は成長過程では起こらず、減衰過程特有のものである。振動現象の一周期での電流密度分布の変化を図 4.5 に示す。波長 $\lambda = 2\pi\tau_A/(kt)$ の波が境界の摂動によって励起され、有理面に向かって進むが、既存の磁気島内部へ伝播できない。そのためセパラトリクスに負の電流層が形成される。電流層の巾 Δ_x が薄くなり、$(t/S)^{1/2}$ にスケールする値になると電流は拡散し波形は崩れる。Δ_x は時間と共に小さくなり、$1/t$ にスケールするから λ と Δ_x が等しくなる条件より緩和現象の時間スケールは $S^{-1/3}$ で与えられる。緩和現象によって電流分布は X 点近傍で一様化し、ピーキングは一度ゼロになる。そして新しい波がセパラトリクスに達すると再び負の電流層が形成されてゆく。

セパラトリクス X 点での電流値、及び x, y 方向の電流層の巾を図 4.6 に示す。ここで Δ は電流層の巾を示し、添え字の x, y は x 方向、y 方向、h 、0 はそれぞれ電流値が半分になる位置、電流値がゼロになる位置を表す。成長過程では解析結果から $\tilde{J}$, Δ_x, Δ_y はそれぞれ $S^{1/3}$, $S^{-1/3}$, S^0 にスケールすることが与えられる。一方、減衰過程では Δ_{xh}, Δ_{yh} が S と共に小さくなるので X 点での電流の勾配は大きくなるものの、全体の巾 Δ_{x0}, Δ_{y0} がほぼ一定であるので $\tilde{J}$ は S の増大と共にピーキングすることができず、$\tilde{J}$ は飽和値をとるようになる。このことは、X 点での電流値が S によってではなく、磁場の形状によって決定されていることを示している。

電流層の巾は磁気レイノルズ数とも関係している。図 4.7 は発展時間の S 依存性である。磁気島巾が半分になるのに必要な時間 τ_h をプロットしてある。パラメータは $ak = 1$, $\delta/a = 10^{-2}$ である。成長過程では、§4.3 で述べた様にティアリングモ--ドの時間スケール $S^{3/5}\tau_A$ に比例している。一方、減衰過程では $\tau_h \sim (1/20)S^1\tau_A$ となっており、非線形項を無視した場合でも平衡に達するのには抵抗性拡散時間が必要であること

がわかる。これは X 点での電流値に上限があり、S に対する依存性が弱いからである。抵抗性 MHD 段階では $1/\tau_h \propto \eta J$ であり、J が S に依存しないことより $\tau_h \propto S$ という関係が得られる。

減衰過程では S よりも磁気島の大きさの方が発展時間に重要な役割を持つ。$S = 10^5$ での τ_h と初期の磁気島の巾 W_i の関係を図 4.8 に示す。W_i が小さいと τ_h は W_i に依存しない。磁気島の存在が電流層中に隠されるからである。W_i が大きくなると磁気島の効果が現れ、X 点での電流層を x 方向に広げるため τ_h は大きくなり、$\tau_h \propto W_i$ なる関係式が成り立つ。

4.5 外部摂動の大きさに対する依存性

外部から摂動を加えて磁気島を制御しようとする場合、実際には摂動の大きさには過不足があり得る。外部から加える摂動磁場が磁気島を形成している摂動と位相が一致し、かつ大きさが同じならば磁気島は完全に消滅する。しかしながら、摂動が小さいと磁気島は完全に消えずに残り、また、大きいと一度消滅しても位相を変え（セパラトリクスの O 点と X 点の位置が逆転して）磁気島は再び成長する。本節では、外部摂動の大きさを変えたときの磁気島の時間発展の変化について解析を行う。

モデルは本章のものを用いるが境界条件を少し変える。境界で摂動を立ち上げた後、境界条件は

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}_j(x=\pm a) &= \begin{cases} -\gamma B_{y0}\delta & (j=1) \\ 0 & (j\neq 1) \end{cases} \\ \tilde{\phi}_j(x=\pm a) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.29}$$

で与えられる。γ は境界の摂動の大きさを変える係数である。$\gamma=1$ のときが磁気島は完全に消滅する 4.4 の場合に相当する。そして、$\gamma<1$ のときが磁気島を消滅させるのに不十分な摂動の場合、$\gamma>1$ のときが摂動を加えすぎた場合に相当する。

図 4.9 は磁気島の時間発展の例である。$\gamma<1$ のとき、外部摂動が小さいために磁気島は残存している。一方、$\gamma>1$ のとき磁気島は減衰するが、、ある時間τ_fを境にして磁気島は再び成長する。$t=\tau_f$前後で磁気島の位相は変わっており、セパラトリクスO点がX点に、X点がO点に変わる。反転時間τ_fはγが大きくなるほど早くなる。最終平衡に到達するために必要な時間はγに依存せず、ほぼ一定であるが、磁気島が消滅するのは$\Psi_s+\tilde{\Psi}=0$ のときであり、γが小さいほど$\tilde{\Psi}$の最終平衡値は上がるので、$\tilde{\Psi}=-\Psi_s$に達するにはより短い時間ですむためである。また 次に、γ を一定（$\gamma=2$）にして τ_f と S の関係を示したのが図 4.10 である。τ_f は S に比例することがわかる。即ち、磁気島が完全に消去される $\gamma=1$ 以外の場合であっても磁気島の減衰には拡散時間に比例する時間が必要である。

プラズマ中に形成された磁気島を急速に消去したいときには、外部から大きな摂動を加えてやれば良い。しかしながら、磁気島は一度消去されても再び位相を変えて成長してしまうので時間スケールを考えながら摂動の大きさの制御を行わなければならない。

4.6 結論

外部から摂動を加える強制リコネクションによる磁気島の時間発展について調べた。モデルはスラブ形状を用いている。磁気島のある平衡（Ⅲ）において境界に摂動を加えると、抵抗のあるプラズマでは磁気島は消滅し平衡（Ⅰ）に回復する。この磁気島の減衰過程は成長過程と物理機構が異なっており、プラズマの挙動は磁気島の影響を受ける。プラズマの流れはセパラトリクスに沿ったものとなり、電流はセパラトリクスで大きな勾配を持つ。そしてセパラトリクス X 点での電流のピーキングは抑制される。

抵抗 η によって支配される電流層の巾 Δ_x が既存の磁気島の巾に比べて大きいと磁気島によって電流の分布は大きくは変えられない。ところが S が大きくなってくると Δ_x は磁気島の影響を受け、S に依存しない一定の値をとるため、X 点での電流値には上限値が存在する。このため磁気島の時間発展はゆっくりしたものとなる。ティアリングモードの時間スケール $S^{3/5}\tau_A$ よりも長い時間 $S^1\tau_A$ が磁気島が十分小さくなるのに必要であることがわかった。抵抗性 MHD 段階での運動エネルギーは抑制され非線形効果は弱い。このため非線形項がある場合とない場合でその時間発展はほとんど変わらなかった。

数値計算では、x 方向に差分化、y 方向にフーリエ分解を行っている。ここで x 方向のメッシュ数を M_x、フーリエモード数 M_f とする電流層が磁気島の構造に合わせたものとなるので、問題はその構造を正確にとらえるためにはどの程度の M_x, M_f が必要であるかである。M_x 及び M_f に関する数値誤差評価は付録 4.B に記した。図 4.2（パラメータ $\delta/a = 10^{-2}$, $S = 10^5$）の結果は $M_x = 1000, M_f = 100$ としており、十分に精度が得られていると考えられる。

本章ではスラブ形状を用いたが現実に近づけるためには円柱形状さらにはトーラス形状に拡張しなければならない。しかしながら、物理機構は大きくは変わらないであろう。但し、トーラス効果が入ってくると他の有理面にも磁気島が形成されるので、磁気島同士の重なり合いによっ

て場がストカスティックになる可能性があり、その効果を考慮に入れなければならない。この問題は次章において議論する。

本モデルでは、境界の摂動はMHD時間（$t \sim \tau_A$）で急速に立ち上げている。MHD時間での立ち上げは可能であろうが、実際のシステムではより長い時間（数十 ～ 数百 τ_A）必要と思われる。そこで立ち上げ時間 τ_s の発展時間に対する影響についても調べた。結果としては $\tau_s \lesssim S^{1/3}\tau_A$ であれば τ_h への影響は弱く、$S^1\tau_A$ という性質に変化はなかった。従って、摂動の立ち上げ方は本モデルでは妥当なものであると考えられる。

プラズマの運動エネルギーが磁場エネルギーに比べ十分小さいとき、非圧縮性が仮定できる。一般には圧縮性の効果も考えるべきであろう。例えば、天体プラズマでは流速は大きく非圧縮性の仮定は破れてしまう[101][102]。また本章で用いた簡約化MHD方程式は低ベータ、非圧縮性、高アスペクト比の条件下で妥当性がある。高ベータの効果、圧縮性によるプラズマの変化等については今後の課題である。

付録 4.A

この付録では数値計算手法について述べる。$x, y, t, \tilde{\psi}, \tilde{\phi}, \tilde{J}, \tilde{U}$ をそれぞれ $a, k, \tau_A, \psi_s, 1/k^2\tau_A, k^2\psi_s/4\pi, 1/\tau_A$ で規格化して、(4.18) と (4.27) を (4.5) に代入すると各フーリエモードに対する MHD 方程式が得られる。

(i) ψ_j の方程式

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_j}{\partial t} &= j\alpha x\phi_j + \frac{(ak)^2}{S}J_j + \frac{1}{2}\cosh x\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{j+1} - \phi_{j-1}) \\ &+\frac{1}{2}\sinh x\left\{(j+1)\phi_{j+1} + (j-1)\phi_{j-1})\right\} \\ &+ \sum_{m+n=j}\frac{1}{2}\left(-m\psi_m\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + m\phi_m\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right) \\ &+ \sum_{m-n=j}\frac{1}{2}\left(m\psi_m\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + m\phi_m\frac{\partial \psi_n}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

(ii) U_j の方程式

$$\begin{aligned}\alpha^2\frac{\partial U_j}{\partial t} &= -j\alpha x J_j \\ &+\frac{1}{2}\cosh x\frac{\partial}{\partial x}(-J_{j+1} + J_{j-1}) \\ &+\frac{1}{2}\sinh x\left\{-(j+1)J_{j+1} - (j-1)J_{j-1}\right\} \\ &+ \sum_{m+n=j}\frac{1}{2}\left(-mU_m\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + m\phi_m\frac{\partial U_n}{\partial x} - mJ_m\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + m\psi_m\frac{\partial J_n}{\partial x}\right) \\ &+ \sum_{m-n=j}\frac{1}{2}\left(mU_m\frac{\partial \phi_n}{\partial x} + m\phi_m\frac{\partial U_n}{\partial x} - mJ_m\frac{\partial \psi_n}{\partial x} + m\psi_m\frac{\partial J_n}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

(iii) J_j の方程式

$$J_j = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - j^2\right)\psi_j$$

(iv) ϕ_j の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - j^2\right)\phi_j = U_j$$

ここで $\alpha = \cosh ak/(ak\cdot\delta k)$ である。ψ_j において $j=0$ 成分の取扱には注意しなければならない。また、x に関する微分では中心差分を用い、

t に関する微分では陽解法を用いた。ϕ_j の方程式はポアソン方程式の形式となっており、この方程式を解く際には recurrence formula を用いている。境界 $x = \pm a$ で数値計算誤差が生じやすく、特にフーリエモードが多くなると数値不安定性が起きるので、境界では重要でない非線形項を重み関数 $f_W = (a^2 - x^2)^2$ をかけて減衰させている。この手続きによる相対誤差は $S = 10^4$, $M_x = 200$, $M_f = 200$, $M_t = 100$ で $t/\tau_A = 100$ ($\tilde{\psi} \simeq 0.25$) で$\tilde{\psi}$ で 1.76×10^{-3}、$\tilde{J}$ で 4.8×10^{-4} であり、セパラトリクス近傍での発展の評価を変えることはない。

付録 4.B

この付録では数値計算誤差について評価する。4.4.4. でも述べている様に減衰過程においてもセパラトリクス X 点において電流密度のピーキングが見られるので、磁力線の再結合率は X 点での電流値$\tilde{J}$ と強く関係している。従って、数値誤差評価をするのには $\tilde{\psi}$及び$\tilde{J}$ の相対誤差を調べるのが最も良い。$\tilde{\psi}, \tilde{J}$それぞれの相対誤差を$\varepsilon_\psi, \varepsilon_J$とする。数値計算手法としては x 方向に差分化、y 方向にフーリエ分解している。時間発展については $\tilde{\psi}, \tilde{U}$ 双方ともに陽解法をい用いている。x 方向のメッシュ数を M_x、フーリエモード数を M_f、時間に関する 1 ステップを τ_A/M_t とする。z 方向には依存性がないのでメッシュによる分割を考える必要はない。

図 4.B.1 は M_x と相対誤差 ε の関係である。パラメータは $S = 5 \times 10^4$, $\delta/a = 10^{-2}$, $M_f = 50$, $M_x = 500$, $M_t = 100$ としている。時間は $t/\tau_A = 400$ で磁束関数が $\tilde{\psi}/\psi \simeq 0.25$ まで発展している。相対誤差は $\varepsilon_\psi \propto M_x^{-3}, \varepsilon_J \propto M_x^{-4}$ で与えられることがわかる。本文中の数値計算では $M_x = 500$ としており、$\varepsilon_\psi \simeq 8.9 \times 10^{-4}, \varepsilon_J \simeq 3.5 \times 10^{-3}$ である。

時間に関する $n+1$ 番目のステップでの $\tilde{\psi}_{n+1}$ と$\tilde{U}_{n+a}$ は

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n+1} &= \tilde{\psi}_n + f_n \Delta t \\ \tilde{U}_{n+1} &= \tilde{U}_n + g_n \Delta t \end{aligned}\right\} \tag{4.B.1}$$

で与えられる。この $\tilde{\psi}_{n+1}$, $\tilde{U}_{n+1}$ から$\tilde{J}_{n+1}$, $\tilde{\phi}_{n+1}$ を求めることができ、f_{n+1}, g_{n+1} の値がわかる。f_n と f_{n+1}, g_n と g_{n+1} を用いて再び$\tilde{\psi}_{n+1}, \tilde{U}_{n+1}$ を求めると、

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi}_{n+1} &= \tilde{\psi}_n + \frac{f_n + f_{n+1}}{2}\Delta t \\ \tilde{U}_{n+1} &= \tilde{U}_n + \frac{g_n + g_{n+1}}{2}\Delta t \end{aligned}\right\} \tag{4.B.2}$$

で与えられる。この手法で求められる $\tilde{\psi}, \tilde{U}$ の数値誤差は M_t^{-2} で与えられる。このことは実際の数値計算においても確かめられている。

有理面には磁気島が既存し、電流の分布が磁気島の影響を受けるため、その構造を正確にとらえるだけの y 方向のフーリエモード数 M_f

が必要となる。図 4.B.2 は M_f と相対誤差の関係である。パラメータは $S = 5 \times 10^4$, $\delta/a = 10^{-2}$, $M_x = 500$, $M_t = 100$, $t/\tau_A = 400$ とする。本文中では $M_f = 50$ としているので $\varepsilon_J \sim 3 \times 10^4$ である。

M_x と M_f に関しては磁気島の構造を把握するだけの大きさが必要である。上記の評価では ε は小さく、図 4.6 で見られる電流の飽和は数値計算誤差ではない。$S = 10^5$ では、より大きな M_x, M_f が必要となり、$M_x = 1000$, $M_f = 100$ としている。

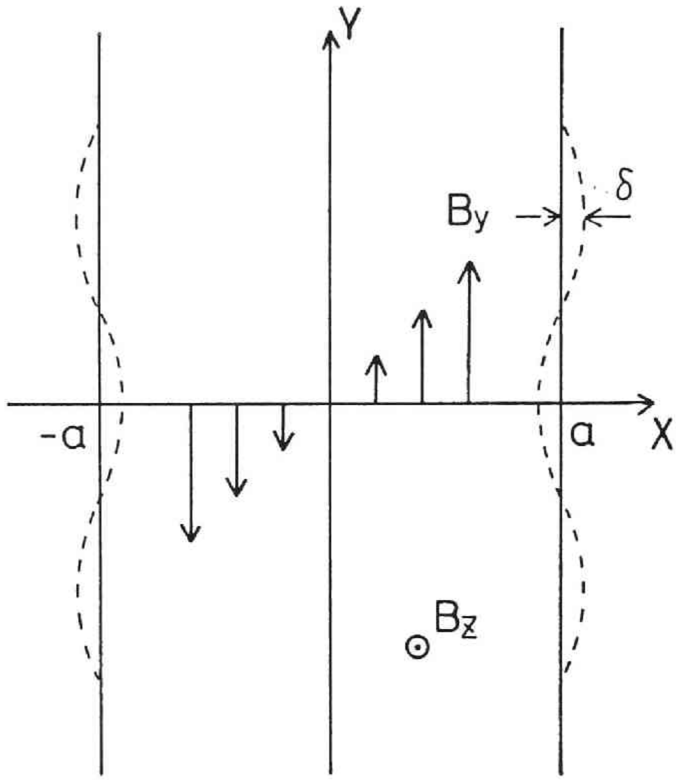


図 4.1 モデルの形状

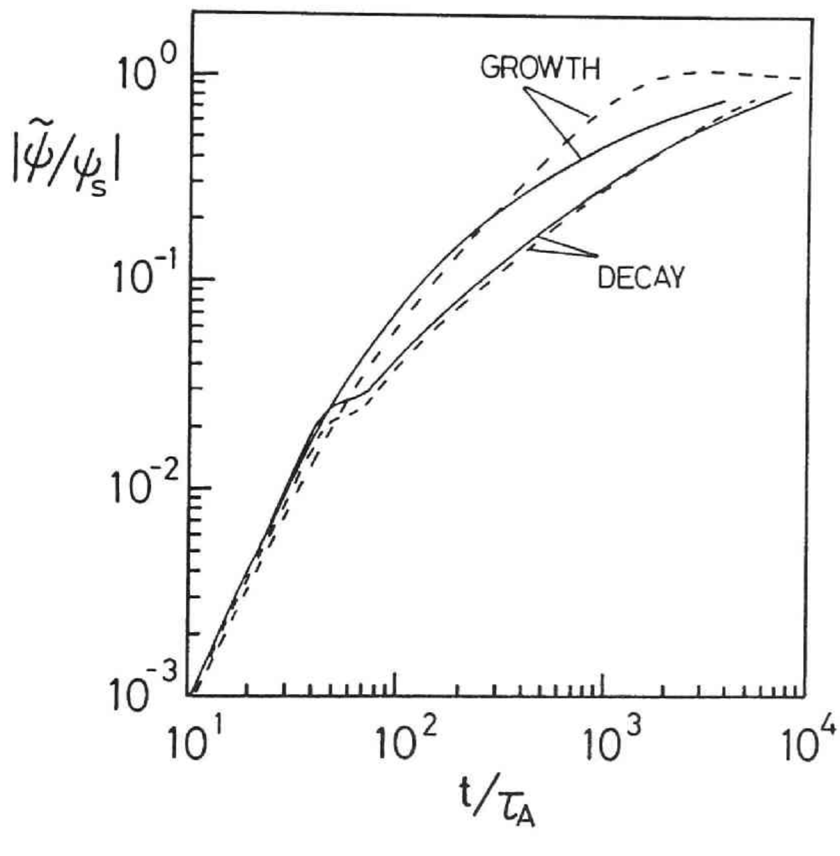


図 4.2 磁束関数$\tilde{\psi}$の時間的発展。実線と点線はそれぞれ非線形項が入っている場合と入っていない場合 を示している。減衰過程では非線形項がない場合でも時間発展が遅いことがわかる。パラメータは $S = 10^5$、$\delta/a = 10^{-2}$ である。

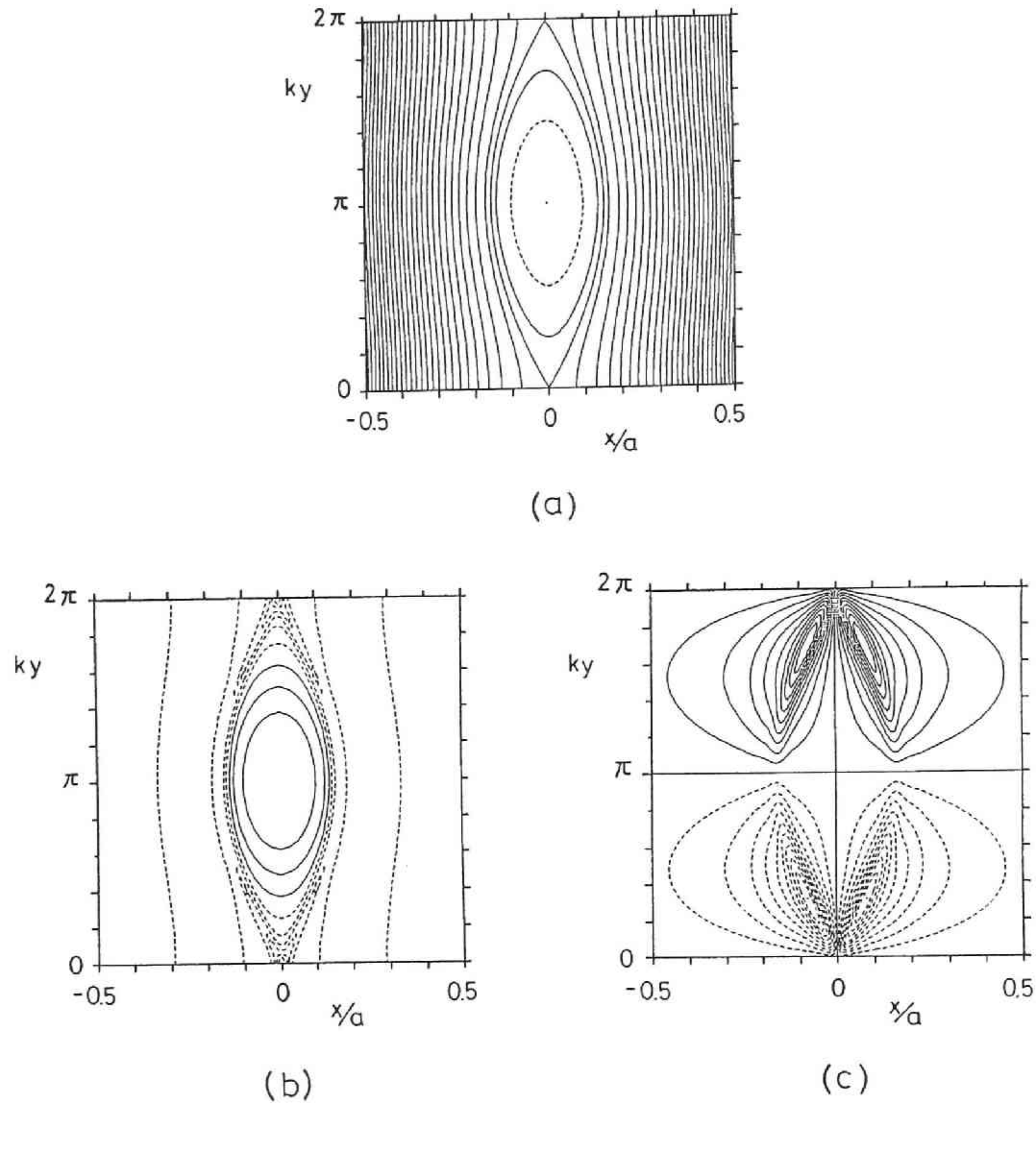


図 4.3 摂動量の等高線。(a) 磁束関数 $\tilde{\psi}$ (b) 電流密度 $\tilde{J}$ (c) 流れ関数 $\tilde{\phi}$ 。パラメータは $S = 10^4$、$\delta/a = 10^{-2}$ で $t = 100\tau_A$ のときの等高線である。

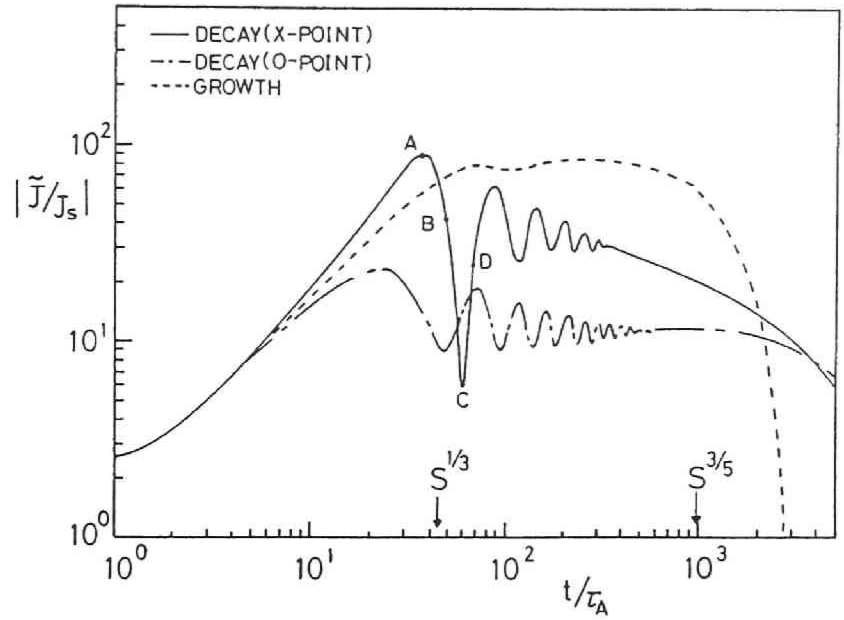


図 4.4 $\tilde{J}$ の時間発展。パラメータは図 4.2 と同じ。実線と一点鎖線はそれぞれ減衰過程の X 点と O 点での値、点線は成長過程の X 点での値を示している。J_s は $J_s = \psi_s k^2/4\pi$ である。

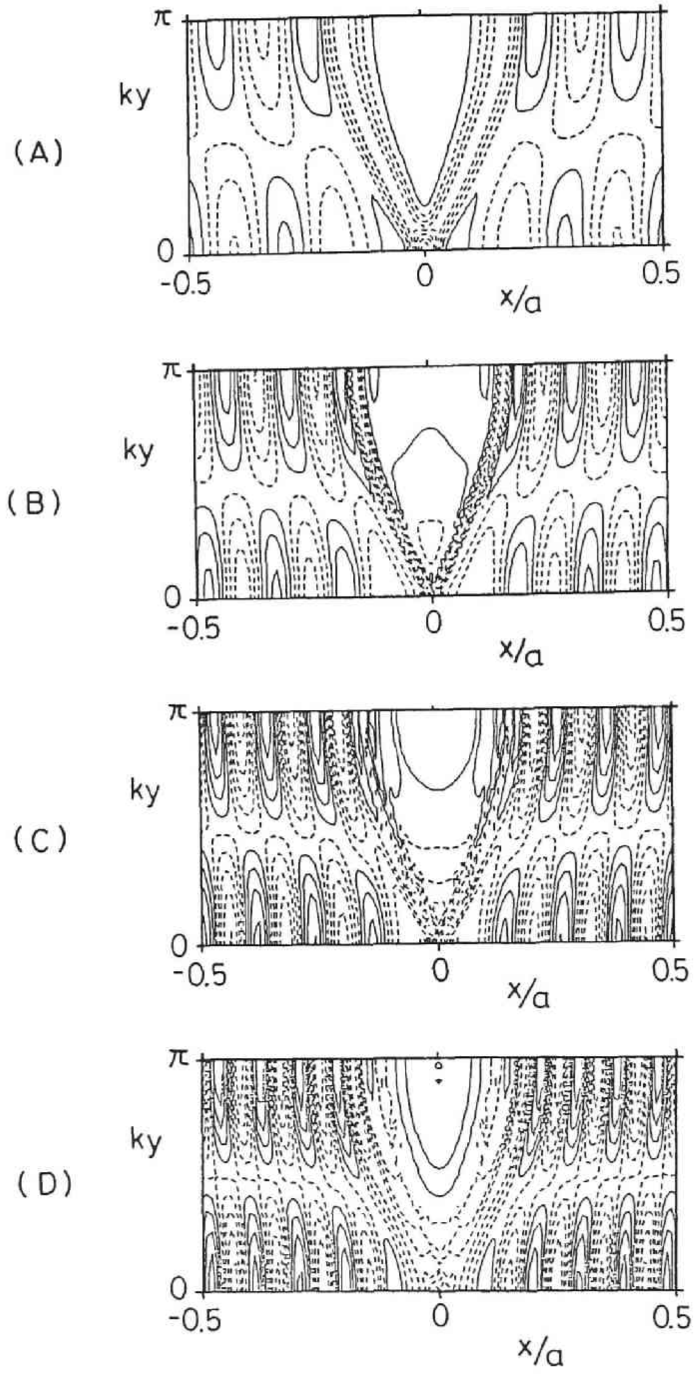


図 4.5 $\tilde{J}$ の緩和振動一周期中の変化。それぞれの図は図 4.5 の A, B, C, D での等高線である。

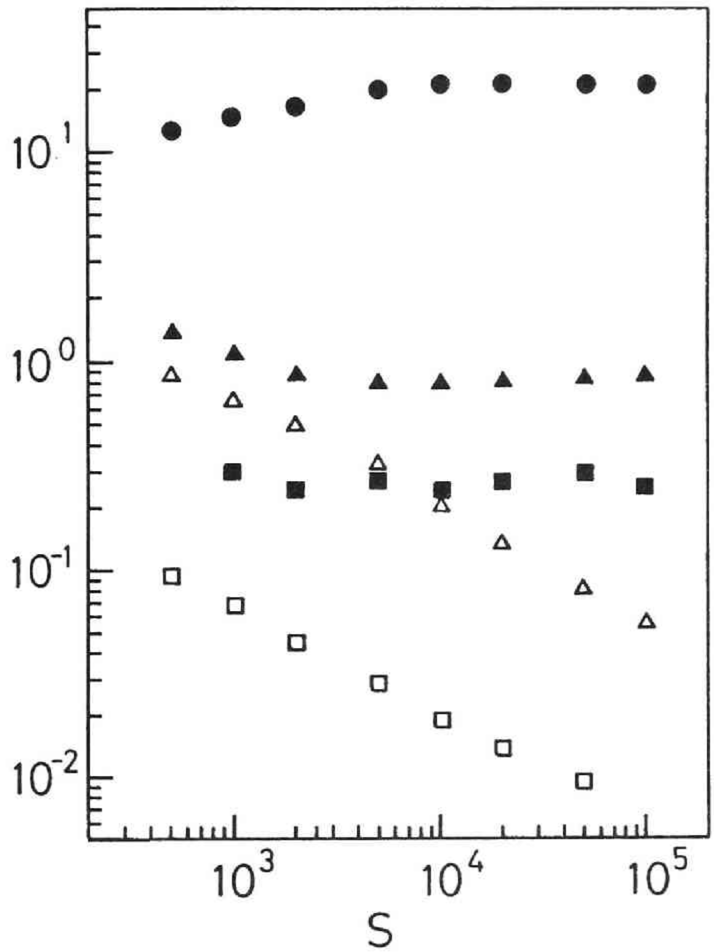


図 4.6 電流層の巾 Δ とセパラトリクス X 点における電流密度 $\tilde{J}$ の S 依存性。Δ の添え字 x, y は x 方向、y 方向の巾を意味し、$h, 0$ はそれぞれ電流値が $\tilde{J}(0)/2, 0$ になる位置を表す。印 ●, ■, ▲, □, △ はそれぞれ $\tilde{J}/J_s$, $\Delta_{x0}k$, $\Delta_{y0}k$, $\Delta_{xh}k$, $\Delta_{yh}k$ に対応する。これらは $\tilde{\psi}/\psi_s = 0.25$ での値である。

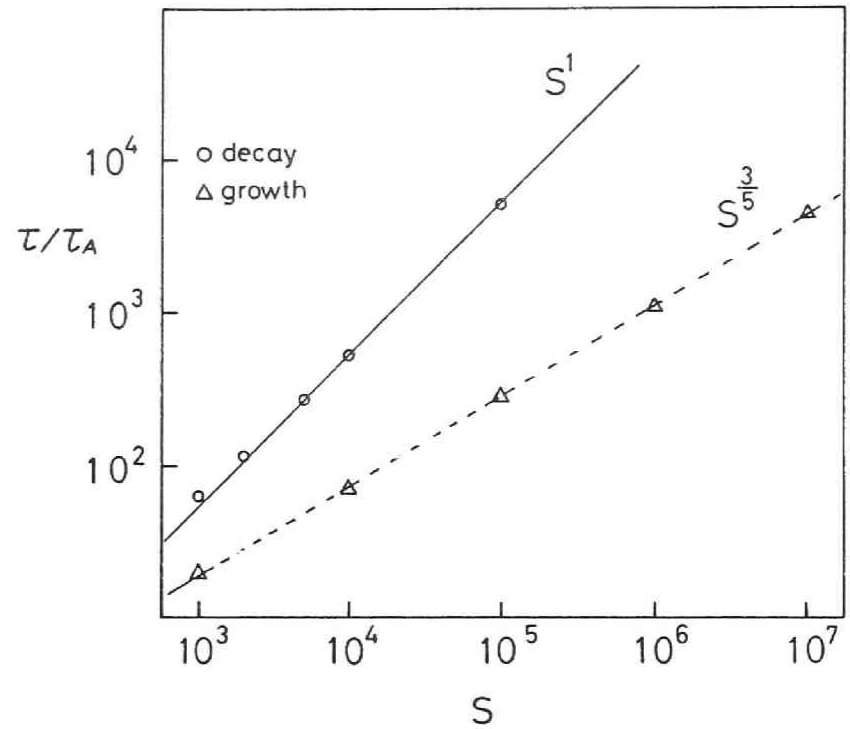


図 4.7 磁気島の巾が半分になるのに必要な時間 τ_h と S との関係。 実線と点線はそれぞれ減衰過程と成長過程に相当する。

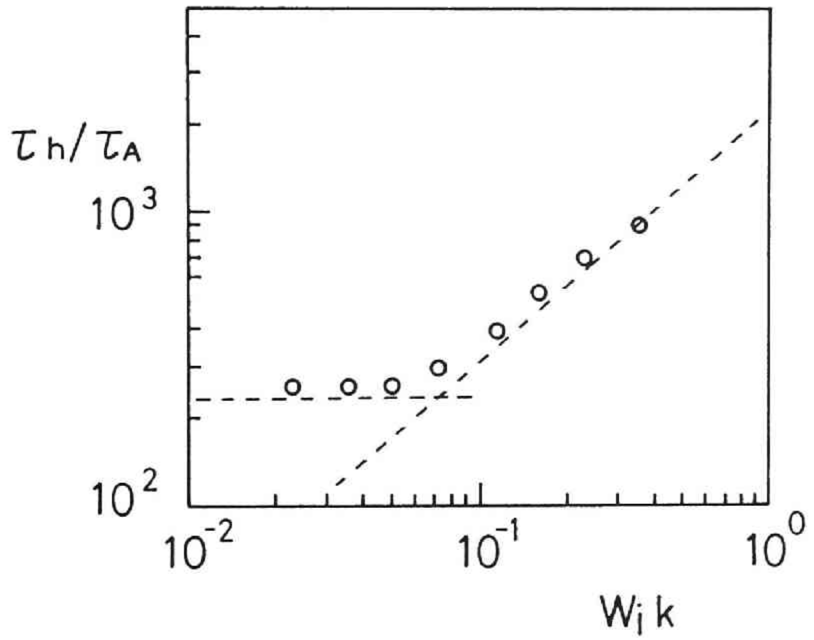


図 4.8 τ_h と磁気島巾 W_i の関係。パラメータは $S = 10^5$ である。W_i が大きくなると、τ_h は W_i に依存する様になり、S に比例する。

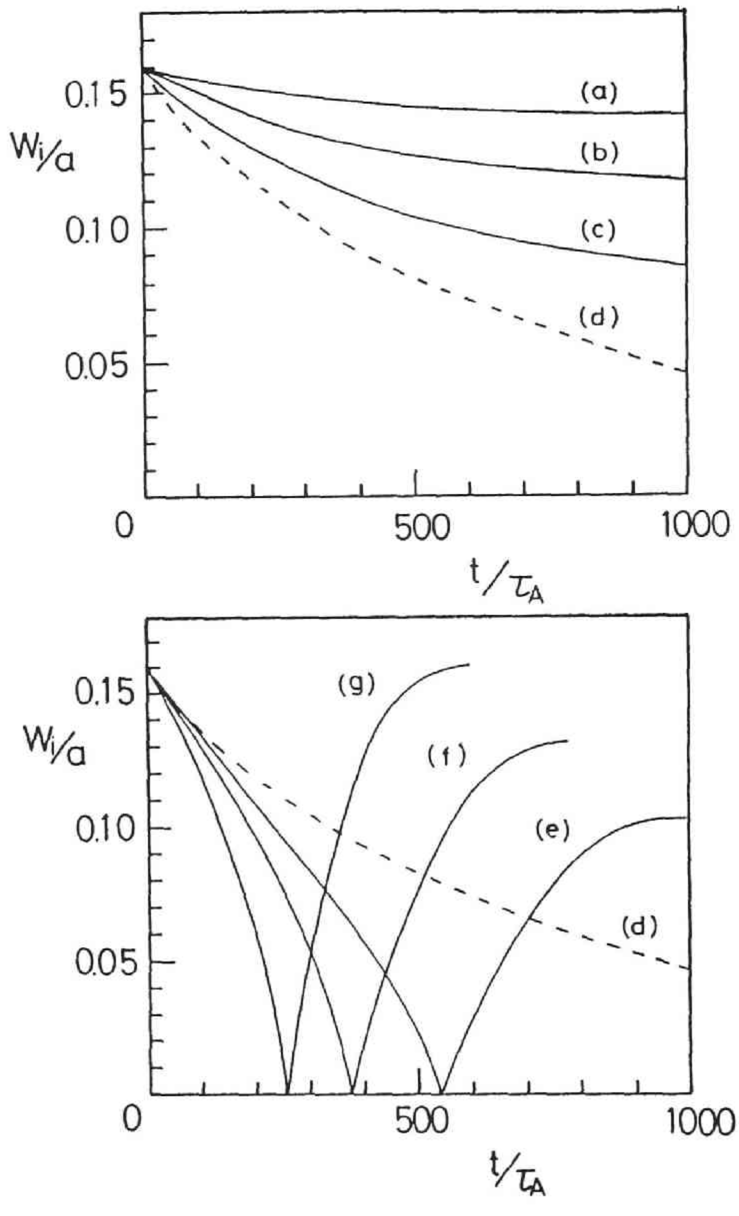


図 4.9 磁気島の時間発展。パラメータは (a) $\gamma = 0.25$, (b) $\gamma = 0.5$, (c) $\gamma = 0.75$, (d) $\gamma = 1.0$, (e) $\gamma = 1.25$, (f) $\gamma = 1.5$, (g) $\gamma = 2.0$ である。磁気レイノルズ数は $S = 10^4$ をとっている。

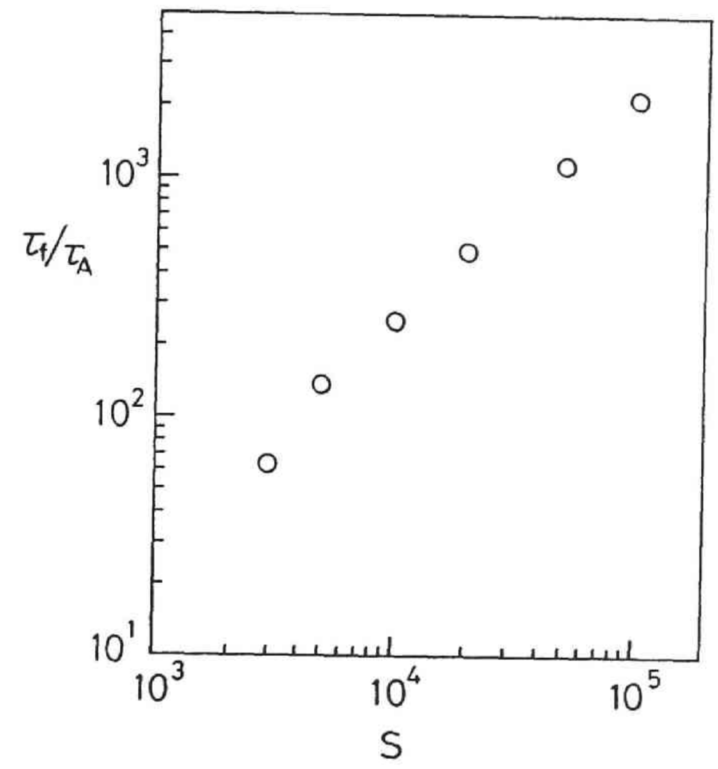


図 4.10 反転時間 τ_f の S 依存性。外部摂動は $\gamma=2$ である。

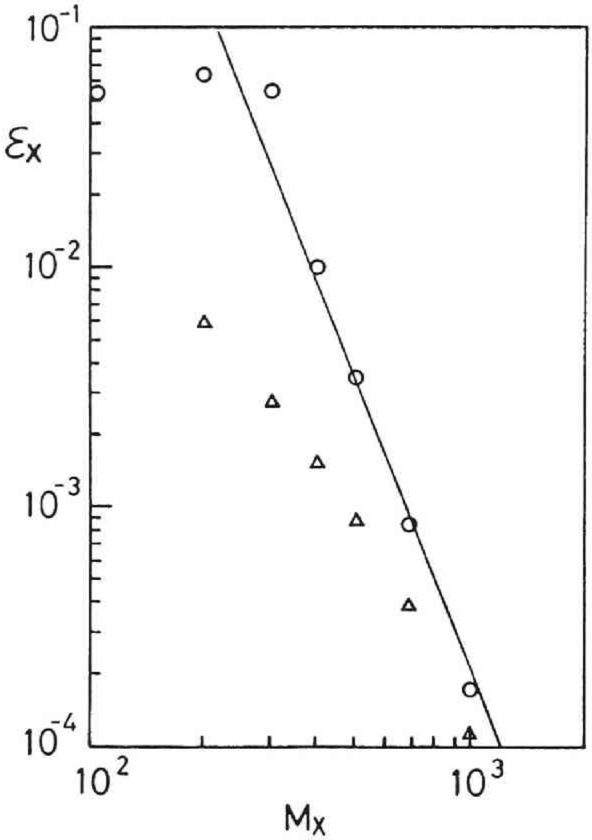


図 4.B.1 メッシュ数 M_x と数値誤差ε_x の関係。o, Δ はそれぞれ $\tilde{J}$と$\tilde{\psi}$ に関する誤差である。

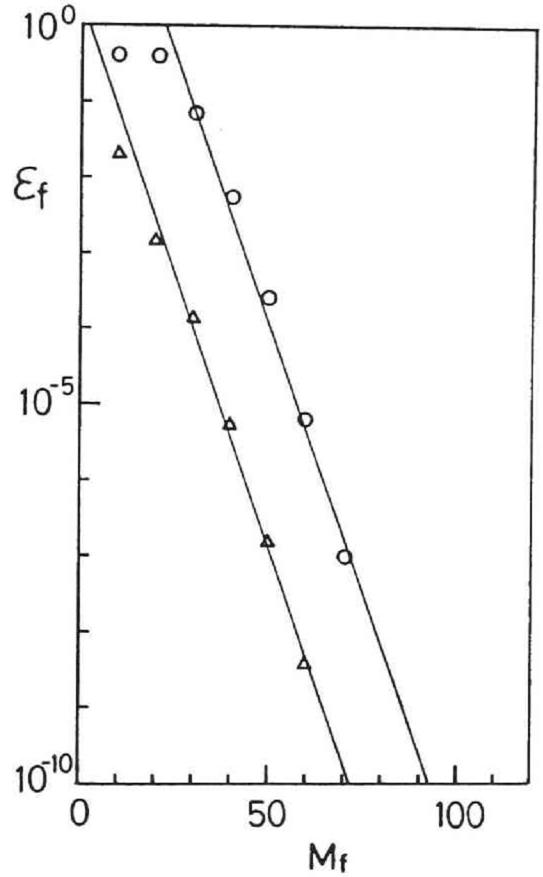


図 4.B.2 フーリエモード数 M_f と数値誤差 ε_f の関係。o, $\triangle$ はそれぞれ $\tilde{J}$, $\tilde{\psi}$ に関する誤差である。

5 テスト磁気島の時間発展に対する隣接磁気島の効果

5.1 序

緒論で述べた様に、トロイダルプラズマにおいて、周辺プラズマはコアプラズマに対して重要な役割を果たしている。ところがトロイダルプラズマの表面近傍の磁場は様々な理由により乱雑、ストカスティックになりやすい。周辺領域では低 m/n の有理面が密接して存在するためその乱れの影響は大きい。しかし逆の考えをして、外部摂動磁場を制御用に重畳して周辺プラズマパラメータを制御し、プラズマ全体の閉じ込めを改善することも可能である。現実にも EML 等による周辺領域のストカスティック化という実験も行われており、周辺プラズマの制御の可能性を示す研究である。JFT-2M では H-mode での粒子輸送を制御する手段として研究されている [103] 。また、ヘリカル系においても外部摂動ヘリカル磁場を印加することで磁気面の構造を変化させ、閉じ込めに対する影響を調べている [104] 。理論的にも、ストカスティックな磁場構造がプラズマの輸送にどのような影響を及ぼすのか解析された [105]-[108] 。これらの研究は発展段階にあり、周辺プラズマの性質及びその制御可能が十分に明らかにされているのではなく、コアプラズマの閉じ込め改善という観点からも今後の進展が期待されている。

外部摂動磁場をプラズマ制御に用いる場合、プラズマの応答（時間遅れ位相の整合等）や周辺プラズマの一般性質を検討し、その制御可能性を探る必要がある。特に、外部磁場による磁力線の再結合は 4 章でも述べた様にプラズマ及び磁場構造の性質に依存しているため、どの様な時間発展をするのかが重要な点の一つである。セパラトリクスで囲まれたプラズマの周辺領域では磁気シアが大きく磁気島の形成される有理面の間隔は狭い。そのため、ある有理面上の磁気島が時間発展する際、他の隣接磁気島の影響を被りやすいと考えられる。単一磁気島の外部磁場による生成・消滅過程については 4 章で解析を行ったが、本章では隣接磁

気島が存在する場合の、その効果について検討する。ここで、注目する磁気島のことをテスト磁気島と定義しよう。テスト磁気島の時間発展の物理機構、S 依存性に重点を置く。そして、テスト磁気島の時間発展が単独の場合とどう違うかについて議論する。

モデルは 4 章と同様、磁気シアのあるスラブモデルを考える。プラズマは非圧縮で低ベータである。系には初期平衡があるとし、スラブ中心に共鳴する摂動を与えることでテスト磁気島の生成・消滅を図る。簡単のため隣接磁気島は初期平衡の段階ですでに静的に存在しており、それを作る摂動磁場は時間的に一定であるとする。隣接磁気島とテスト磁気島の距離は互いに作用する程度の距離にあるとする。ただし、テスト磁気島のない状態で、スラブ中心の有理面全体が既にストカスティックになっている状況は考えない。解析解を得るのは難しいので、系の時間発展は簡約化 MHD 方程式によって数値計算を行って追跡する。

本章の構成は以下の通りである。§5.2 はモデルと方程式について述べる。§5.3 と §5.4 はそれぞれ成長過程、減衰過程について解析する。テスト磁気島と隣接磁気島の位相は一致しているとする。§5.5 は位相のズレがある場合について論ずる。§5.6 は EML 実験結果との比較を行う。§5.7 は結論に当てられる。

5.2 モデル

5.2.1 時間発展方程式

モデルは4章と同様のものを用いる。ただし、異なる点は z 方向に一様性がなくなることである。従って z 方向の依存性も考慮に入れなければならない。初期平衡としては4章と同様に、境界に摂動を加えない対称性のある状態を平衡(Ⅰ)、摂動を加えたが磁気島が形成されずに表面電流が有理面上を流れる状態を平衡(Ⅱ)、摂動を加えて磁気島が形成された状態を平衡(Ⅲ)、有理面上に磁気島が形成されている状態で磁気島を消去しようと境界を平衡(Ⅰ)に回復させたが、表面電流が流れるのみで磁気島は依然存在する状態を平衡(Ⅳ)と定義する。本章でも平衡(Ⅱ)から(Ⅲ)を成長過程、(Ⅳ)から(Ⅰ)を減衰過程と呼ぶ。初期平衡は4章の場合と少し異なり

$$
\begin{aligned}
\psi_{eq} &= \frac{B_{y0}}{2a}x^2 \\
&\quad +\psi_{n0}\cosh(k_{y,n0}x)\exp(ik_{y,n0}y) \\
&\quad +\psi_{n1}\cosh(k_{y,n1}x)\exp\{i(k_{y,n1}y+k_{z,n1}z)\} \\
&\quad +\psi_{n2}\cosh(k_{y,n2}x)\exp\{i(k_{y,n2}y+k_{z,n2}z)\} \qquad (5.1)
\end{aligned}
$$

で与えられる。第1項が磁気シアを形成する。第2項は注目する有理面上に形成される磁気島を表す。成長過程を考える場合、この項はない。第3、4項は隣接する磁気島を表す。テスト磁気島の両側、即ち $x>0, x<0$ 双方の範囲に磁気島が存在するように2つの項をとった。隣接磁気島は初期平衡の手段ですでに静的に存在し、これらを作る摂動磁場は時間的に一定とする。もちろん、実際のプラズマでは隣接磁気島の大きさは制御しようとする対象の磁気島の変化と共に変わり得るが、見通しをはっきりさせるため隣接磁気島を固定する。隣接磁気島の物理的効果を明確にするためテスト磁気島と同程度の大きさをもち、かつ十分近い距離にあるものとする。

時間発展する摂動量は z 方向の依存性も考えて

$$\left.\begin{array}{rcl}\tilde{\psi} & = & \sum_{m,n}\psi_{m,n}(x,t)\exp\{i(k_{y,m}y+k_{z,n}z)\} \\ \tilde{\phi} & = & \sum_{m,n}\phi_{m,n}(x,t)\exp\{i(k_{y,m}y+k_{z,n}z)\} \\ \tilde{J} & = & \sum_{m,n}J_{m,n}(x,t)\exp\{i(k_{y,m}y+k_{z,n}z)\} \\ \tilde{U} & = & \sum_{m,n}U_{m,n}(x,t)\exp\{i(k_{y,m}y+k_{z,n}z)\}\end{array}\right\} \tag{5.2}$$

とする。(5.2) の中には隣接磁気島とのカップリングによって作られる駆動モード（driven modes）も含まれている。

系の諸量は

$$\left.\begin{array}{rcl}\psi & = & \psi_{eq}+\tilde{\psi} \\ \phi & = & \tilde{\phi} \\ J & = & J_{eq}+\tilde{J} \\ U & = & \tilde{U}\end{array}\right\} \tag{5.3}$$

と近似できる。ここで J_{eq} は $J_{eq}=\nabla_\perp^2\psi_{eq}/4\pi$ で与えられる。初期平衡ではプラズマは静止しているとして $\mathbf{v}_{eq}=0$ とするので$\phi_{eq}=U_{eq}=0$ である。

関数 ψ,ϕ は次の簡約化 MHD 方程式の解である [98] 。

$$\left\{\begin{array}{lcl}\dfrac{\partial\psi}{\partial t}+\nabla z\times\nabla\phi\cdot\nabla\psi & = & \eta J+B_z\dfrac{\partial\phi}{\partial t} \\ \rho\left(\dfrac{\partial U}{\partial t}+\nabla z\times\nabla\phi\cdot\nabla U\right) & = & \nabla z\times\nabla\psi\cdot\nabla J+B_z\dfrac{\partial J}{\partial z} \\ J=\dfrac{1}{4\pi}\nabla_\perp^2\psi & & \\ U=\nabla_\perp^2\phi & & \end{array}\right. \tag{5.4}$$

ここで $\perp$ は z に垂直方向を意味する。4 章と異なる点は z に関する微分項が入ってくることである。

解析の一手法として、全ての磁気島の y 方向周期性が等しく同位相であると考える。即ち、

$$\left.\begin{array}{rcccl}k_{y,n0} & = & k_{y,n1} & = & k_{y,n2} \\ k_{z,n0} & = & k_{z,n1} & = & -k_{z,n2}\end{array}\right\} \tag{5.5}$$

とする。簡単のため、この仮定を用いたが実際のプラズマ中の磁気島はそれぞれの有理面で異なる位相を有する。位相のずれによる変化については 5.5 で議論する。また、非線形項（この定義は 4 章と同様である）は本節及び次節では無視する。非線形項の効果については 5.5 で議論する。より詳しい数値計算手法については付録 5.A で述べてある。

図 5.1 はテスト磁気島の時間発展による磁気面の変化である。平衡に達したときのテスト磁気島の巾 W_T は $W_T/a = \sqrt{\delta k_{y,n0}/\cosh ak_{y,n0}}$ で与えられ、隣接磁気島の O 点の位置 x_N は

$$\frac{x_N}{a} = \pm\frac{k_{z,n0}}{k_{y,n0}}\,\frac{\delta k}{\cosh ak_{y,n0}}\,\frac{B_{z0}}{B_{y0}} \tag{5.6}$$

で与えられる。W と x_N はテスト磁気島と隣接磁気島が相互作用する様な値を与える図 5.1 の場合には、パラメータは $\delta/a = 10^{-2}$, $ak_{y,n0} = 1$, $k_{z,n0}B_{z0}/k_{y,n0}B_{y0} = 50$ としており、$W_T/a = 0.322$, $x_N/a = 0.324$ である。図 5.1 において (a) から (d) への時間発展が成長過程、(d) から (a) への時間発展が減衰過程である。テスト磁気島が大きくなるにつれて、隣接磁気島との相互作用により、磁気面が破壊され、磁場がストカスティックになることがわかる。規格化した各フーリエモードに関する方程式は付録 5.A に記す。

5.2.2 *K-S* エントロピー

磁場のストカスティシティを定量的に評価する際に *K-S* エントロピーが用いられる [78]。この *K-S* エントロピーは基本的には、微小距離だけ離れた空間の 2 点から出発した 2 本の磁力線がある距離 L だけ進んだときにどれだけ離れるかを計算して求められる量である。系に周期がある場合、n 周期目の *K-S* エントロピー K_n は次のように定義される。

$$K_N(x,\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\ln\frac{|\varepsilon_i|}{|\varepsilon|} \tag{5.7}$$

ここで x は磁力線の出発点の位置で、$|\varepsilon|$ は出発点の間隔、$|\varepsilon_i|$ は i 周期目の間隔である。2 本の磁力線の間隔は、磁場がストカスティックな

場合、N の増大と共に指数関数的に大きくなるので、2本の磁力線をそのまま追跡すると数値計算が困難となる。ところが、Ref.[78] によれば、$|\varepsilon_i|$ を1周期進むごとに元の $|\varepsilon|$ にもどして計算を行っても K-S エントロピーが得られる。図5.2に K_N を周期 N の関数として示す。磁場がストカスティックでない場合 K_N は N に反比例し小さくなるが、ストカスティックな場合 K_N は有限の値に近づく。即ち、$N \to \infty$ で K_N はストカスティックな場では有限の一定値、ストカスティックでない磁気面の形成されている場ではゼロとなる。したがって K_N を調べることで磁気面の乱れを評価することができる。

図5.3はテスト磁気島の巾と K_N の関係である。K_N は $(x, y) = (0, 0)$ での値である。ある磁気島巾になると磁気島間の相互作用によって磁場がストカスティックになるため K_N はゼロでない値をとる。W_T が大きいほど K_N が増大するのがわかる。即ち、ストカスティックな領域が広がるほど、K-S エントロピーは増える。本モデルでは、W_T が大きい領域で $K_N \propto W_T$ であった。

5.3 成長過程

まず、平衡（II）から（III）への時間発展である成長過程について考えてみる。境界の摂動は4章と同様にMHD時間スケールかつ振巾 δ で立ち上がるとする。隣接磁気島が存在するときのテスト磁気島の時間発展を解析的に追うことは難しい。従って、数値計算を行ってその性質を明らかにする。

隣接磁気島の存在する系でのテスト磁気島の時間発展は単一磁気島の場合と異なる。図5.4はテスト磁気島のセパラトリクス X 点における磁束関数 $\tilde{\psi}$ の時間変化を示している。パラメータは図5.1と同じであり、また $S = 10^5$ としている。単一磁気島の場合の様な単調増加はせず、抵抗MHD段階の初期で振動現象を起こしており、また時間発展もゆっくりしたものとなる。

この時間発展の遅れは有理面上に形成される電流層の分布に変化が生じたためである。単一磁気島の場合には電流層の半値巾 Δ_x は $\Delta_x \propto S^{-1/3}$ となり、S が大きいほど Δ_x は狭くなるが、隣接磁気島が存在すると Δ_x には下限値が存在し、S が大きくなっても Δ_x はある値以上に狭くならない。従って X 点でピーキングする電流の最大値は抑制されるため、磁力線の再結合率は鈍る。電流層の巾が制限されるのは X 点近傍の磁気面が初期平衡の段階、即ち電流層の形成される理想MHD段階で変形を受けることに起因する。図5.5は図5.1(a)での有理面近傍を拡大したものである。初期平衡の段階で、隣接磁気島の非線形効果によって形成された2次の磁気島が有理面に存在する。この2次の磁気島構造に合わせて電流層は形成される。また、$\tilde{\psi}$ の時間発展で振動現象が生じるのもこの2次磁気島によるものである。その物理機構は4章の単一磁気島の減衰過程で生じる振動現象の場合と同じである。

隣接磁気島の隣接距離 x_N が小さくなるほど $x = 0$ に生じる高次アイランドの巾 d_H は大きくなる。磁気面がストカスティックになる条件はChirikov [18] によって求められている。解析的に求められる条件はストカスティック・パラメータ $K(= W/2x_N)$ が $K \gtrsim 1$ である。しかしなが

ら、実際には K が 1 より小さい値でも磁気面のストカスティック化が起こる。(スタンダード・マッピングによる数値計算によれば $K \simeq 0.4$ でストカスティック化が生じる。) この理由には 3 つあり、高次ハーモニクスの磁気島が隣接磁気島間に生じること、磁気島の相互作用によって磁気面が変形を受けてねじれてしまうこと、そして、セパラトリクス自身がホモクリニック構造のため微小の摂動でも有限の巾を有することである。従って $K \ll 1$ でも 2 次の磁気島は形成され、磁気島の時間発展には大きな影響を及ぼすことが予想される。図 5.6 は Δ_x と d_H の x_N に対する依存性を示している。x_N が十分大きいと隣接磁気島の影響が弱いので Δ_x は単一磁気島での値 Δ_{xc} に漸近する。S を一定とすると Δ_{xc} は x_N に依存しない一定の値をとる。x_N が小さくなると $d_H \propto x_N^{-1}$ より、d_H は大きくなる。そして Δ_{xc} と同程度、またはそれ以上となると Δ_x は d_H に合わせた値をとるようになる。このことは隣接距離が近いほど、セパラトリクス X 点での電流のピーク値が $S^{1/3}$ に比例しなくなり、したがってテスト磁気島の成長が遅くなることを意味している。

図 5.7 はテスト磁気島が平衡の半分に達する時間 τ_h の S 依存性を示している。非線形項を無視しているので S が小さいと τ_h は単一磁気島の場合と同様、$S^{3/5}$ にスケールするが、S が大きくなり、Δ_x と d_H が同程度になると τ_h は S^1 にスケールする。そして隣接距離 x_N が近いほど S の低い領域で、その効果が現れやすい。

成長過程では、図 5.1 に見られるようにテスト磁気島が大きくなるにつれて磁場は乱雑になってゆくが、重要なことは、見た目の乱雑さではなく磁気面の変形によって形成された固定された 2 次磁気島によって時間発展が決定されていることである。

5.4 減衰過程

本節では図 5.1 での (d) から (a) へとテスト磁気島を消去し、磁気面を回復させる減衰過程について解析を行う。隣接磁気島が存在する系での減衰過程において重要な点は有理面が破壊されストカスティックになっていることである。したがって磁気再結合を起こすために必要な電流層がどの様な構造になるのかが問題である。初期平衡は (5.1) で与えられ、$\psi_{n0} = \psi_{n1} \neq 0$ である。テスト磁気島を消去するための境界条件は 4 章の (4.28) と同じである。そして本節においても隣接磁気島を形成する摂動は時間的に変化せず、したがって隣接磁気島は静的に存在するものとする。

図 5.8 はセパラトリクス X 点における磁束関数 $\tilde{\psi}$ の時間発展を示している。パラメータは図 5.4 と同じである。理想 MHD 段階での発展の挙動が異なり、この影響を受けて発展時間はやや早くなるが、抵抗性 MHD 段階での $\tilde{\psi}$ の時間発展の様子は類似している。これは、磁気面が破壊され、ストカスティックになったセパラトリクス X 点近傍にあってもピークした電流層が形成され、その巾は単一磁気島の場合と同様に、抵抗の大きさで決まらず、磁気島の空間構造で決まることを意味している。単一磁気島の場合の電流層は既存の磁気島巾と同程度となると、その空間構造に合わせた分布をとることを 4 章で示したが、隣接磁気島が存在する場合、図 5.1 のように有理面の一部がストカスティックになるとテスト磁気島の実効的な巾 W_s は狭くなり、したがって電流層も狭くなると考えられる。図 5.9 に、X 点における電流層の x 方向巾 Δ_x とテスト磁気島の実効的な巾 W_s の x_N 依存性を示す。ストカスティック・パラメータ K が $K \simeq 0.32$ で磁気面の巾が小さくなり始めるとが、この値は $x_N/a \simeq 0.52$ に相当する。そして W_s の減少と共に Δ_x が狭くなってゆくことがわかる。Δ_x の減少は X 点での電流値の増大となり、磁力線の再結合率は上昇する。従って隣接磁気島の距離が近いほど磁気島の減衰は速い。図 5.10 は発展時間 τ_h の S 依存性を示している。隣接距離が小さいほど τ_h は短くなるが、S が大きい範囲（この場合では $S \gtrsim 10^4$）では τ_h は S^1 にス

ケールしており、隣接磁気島の有無に関わらず S 依存性はほぼ同じである。成長過程と比較してみると、$x_N/a = 0.32$, $S = 10^5$ のとき、成長過程は単一磁気島の線形の場合よりも 2 倍の時間がかかり、S 依存性も変わる。それに比べ、減衰過程は 20 % 程度速くなるだけで、いづれも S^1 にスケールする。x_N がより小さくなると減衰過程での発展時間はもう少し短くなるが、大きな変化には至らない。従って、減衰過程での隣接磁気島はテスト磁気島の発展を速くするものの、単一磁気島の場合と比べ、質的変化はこの計算の範囲ではもたらされていない。

5.5 非線形項と位相のずれの効果

5.3, 5.4 の計算では非線形項である対流項を無視した。また、テスト磁気島と隣接磁気島の y 方向の周期性が同じであるとした。ここでは、非線形項及び位相のずれによって生ずる変化について述べる。

まず非線形項について考える。単一磁気島の場合では、成長過程の場合 $\delta/a \gtrsim S^{-4/5}$ とのき非線形項が重要な役割を果たす。一方、減衰過程では電流層が磁気島と同程度の大きさにまで狭くなったとき非線形項はもはや重要な役割を果たさず、磁場の空間構造で時間発展が決定されてしまうことを見い出した。さて隣接磁気島が存在する場合であるが、成長過程では 5.3 で述べた様に 2 次磁気島の空間構造によって電流層の分布が決定されているので非線形項は成長過程においても重要な役割を果たさないことが予想される。数値解析によって、このことを調べたが、非線形項の計算にはかなりの計算時間がかかり、また数値不安定性も起きやすく、S の高い領域で詳しい解析を行うことはできなかった。しかしながら、やや低い S で数例をとって非線形項の効果について調べた。$S = 2 \times 10^4$, $x_N/a = 0.324$ の場合、τ_h は 20 % 程度の差はあるものの発展の傾向はほとんど変わらない。隣接磁気島がより近づくか、または S が大きくなると、電流分布はより磁気面の構造に拘束されることから、S が高い領域では非線形項の効果はさらに重要でなくなるであろう。次に減衰過程の場合でも同様に非線形を入れた数値計算を行ったところ、$S = 2 \times 10^4$, $x_N/a = 0.324$ の場合でほとんど $\tilde{\psi}$ の時間発展に変化は見られなかった。従って減衰過程の場合の方がより非線形項の効果は弱いと思われる。両過程を総合して、隣接磁気島が十分テスト磁気島に近接している場合には非線形項は重要な役割を果たさず、単一磁気島の場合と比較すると、成長過程の場合が特に大きな差異が見られる。

次に位相のずれがある場合を考えてみる。5.3 、5.4 の計算では全ての磁気島の位相が同じであるとしたが、実際のプラズマ巾に形成される磁気島は、それぞれの有理面で異なったポロイダル及びトロイダル方向の周期性を持っている。しかしながら、境界プラズマ近傍での磁気島はポロイ

ダル周期長が短いので、あるポロイダル断面で各有理面上の磁気島の X 点が同じポロイダル角の位置にあった場合、同位相としたモデルは適用できるだろう。もちろん、位相のずれがある磁気島もあるので、その場合の時間発展も吟味しなければならない。位相のずれがあると2次の効果で形成される高次磁気島の構造も変わってくる。ここでは位相のずれが最もあるとき、即ちテスト磁気島と隣接磁気島の X 点の位相差$\Delta k_y y = \pi/2$ の場合について考える。$0 < \Delta k_y y < \pi/2$ の場合は、$\Delta k_y y = 0, \pi/2$ の2つの結果を内挿することで推測できる。成長過程での発展時間 τ_h の S 依存性を調べたところ、$\Delta k_y y = \pi/2$ のときは、今回調べたパラメータの範囲内では S を大きくしても $S^{3/5}$ にスケールしている。これは2次磁気島の X 点が図 5.11 に示すように $(x, y) = (0, 0)$ に位置しているため、O 点の様に電流層に拡がりをもたらさない。より高い S をとると電流層はより狭くなるので $S^{3/5}$ からずれて S^1 にスケールすると思われるが、今回の計算ではその結果は得られていない。一方、減衰過程の場合、$\pi/2$ のずれがあった場合でも大きな変化はなく、τ_h は S^1 にスケールする。ストカスティック領域に相違はあるが、電流層がこの場合でもテスト磁気島の空間構造によって決定されているためである。

5.6 結論

強制リコネクションによるテスト磁気島の時間発展に対する隣接磁気島の効果について調べた。4章と同様のスラブモデルを考え、簡約化MHD方程式を用いてテスト磁気島の時間時間発展を解析した。外部から制御しようとするテスト磁気島に隣接する有理面上に磁気島が既存するときの、隣接磁気島の効果について調べた。周辺プラズマの状態を考える場合に、一般には2章や3章で用いたような静的な平衡状態の下で解析を行っている。しかしながら、コアプラズマの状態に合わせて周辺プラズマを外部から制御しようとする際には、外部摂動に対する応答性についても考慮しなければならない。本章の結果は周辺プラズマのMHD的性質の一つを示唆している。

隣接磁気島はテスト磁気島の成長を遅らせ、成長時間は隣接距離が近ければ近いほど遅れる。そして、その時間スケールは非線形項を無視した場合でも、S が充分大きいと S^1 にスケールする。これは隣接磁気島の非線形効果で作られた2次磁気島がテスト磁気島の形成される有理面上にすでに存在し、電流層がその磁気面の空間構造に合わせた分布をとるからである。この物理機構は単一磁気島の減衰過程の場合に類似している。一方、減衰過程においては、セパラトリクス X 点近傍の磁場がストカスティックになっているのにもかかわらず、分布構造はやや変わりつつも電流層は形成される。したがって、単一磁気島の場合と同様 S^1 にスケールして磁気島は消滅する。

隣接磁気島は初期平衡の段階で静的に存在するとしたが、これは誤差磁場やヘリカル系の周辺近傍をモデルするものである。実際のプラズマでは、隣接磁気島が不安定性によって生じており、時間と共に変化する。さらにはテスト磁気島がその大きさに影響を与えることもあり得る。したがって、具体的な状況に適用するに当たっては、隣接磁気島の起源に応じた、より自己矛盾のないモデルが望まれる。しかしながら隣接磁気島の効果に関する物理機構の定性的な説明は、本章のモデルで可能であると考えられる。ポロイダル及びトロイダル方向の周期性の違いを正確に

取り入れ、各磁気面に形成される磁気面のモード数を模擬できれば、より定量的な評価ができるだろう。実験的な例を見ると、JFT-2M ではセパラトリクス配位に外部から低 m/n の共鳴磁場を加え、H-mode の密度上昇制御を試みている。時間応答を含めてこうした解析の応用を今後行う必要がある。

付録 5.A

この付録では簡約 MHD 方程式 (5.4) の数値計算手法について述べる。x, y, z, t, $\tilde{\psi}$, $\tilde{\phi}$, $\tilde{J}$, $\tilde{U}$ をそれぞれ a, k_y, k_y, τ_A, ψ_{N1}, $1/k_{y,n0}^2$, ψ_{n1}, $k_{y,n0}^2$, $\psi_{n1}/4\pi$, $1/\tau_A$ で規格化すると $(k_y = k_{y,n0})$ 、MHD 方程式は

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial t} &= -\nabla z \times \nabla\tilde{\phi}\cdot\nabla(\psi_{eq}+\tilde{\psi}) + \frac{(ak_y)^2}{S}\tilde{J} + B_z\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial z} \\
\frac{\partial\tilde{U}}{\partial t} &= \nabla z \times \nabla(\psi_{eq}+\tilde{\psi})\cdot\nabla(J_{eq}+\tilde{J}) + B_z\frac{\partial\tilde{J}}{\partial z} \\
\tilde{J} &= \nabla_\perp^2\tilde{\psi} \\
\tilde{U} &= \nabla_\perp^2\tilde{\phi}
\end{aligned}\right\} \quad (5.A.1)$$

と書かれる。ここで B_z は ψ_{n0}/a で規格化しており、ψ_{eq}, J_{eq} は

$$\left.\begin{aligned}
\psi_{eq} &= \frac{1}{2}\alpha x^2 + \cosh x\cos(k_y y) \\
J_{eq} &= \nabla_\perp^2\psi_{eq}
\end{aligned}\right\} \quad (5.A.2)$$

で与えられ、$\tilde{\psi}$, $\tilde{J}$ は cos 成分、$\tilde{\phi}$, $\tilde{U}$ は sin 成分のみで表せるとすると

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \sum_{m,n}\psi_{m,n}\cos(my+n\varepsilon z) \\
\tilde{J} &= \sum_{m,n}J_{m,n}\cos(my+n\varepsilon z) \\
\tilde{\psi} &= \sum_{m,n}\phi_{m,n}\sin(my+n\varepsilon z) \\
\tilde{U} &= \sum_{m,n}U_{m,n}\sin(my+n\varepsilon z)
\end{aligned}\right\} \quad (5.A.3)$$

と書ける。ここで $\alpha = \cosh(ak_y)/(ak_y\cdot\delta k_y)$, $\varepsilon = k_z/k_y$ である。(5.A.2) (5.A.3) を (5.A.1) に代入して次のような各フーリエモード数に対する MHD 方程式を得る。

(i) $\psi_{m,n}$ の方程式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi_{m,n}}{\partial t} = {} & m\alpha x\phi_{m,n} + \frac{(ak_y)^2}{S}J_{m,n} + n\varepsilon B_z \\
& +\frac{1}{2}\cosh x\frac{\partial}{\partial x}(\phi_{m+1,n} - \phi_{m-1,n} + \phi_{m+1,n+1} - \phi_{m-1,n-1} \\
& +\phi_{m+1,n-1} - \phi_{m-1,n+1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2}\sinh x\{(n\phi_{m+1,n}+n\phi_{m-1,n}+(n+1)\phi_{m+1,n+1}+(n-1)\phi_{m-1,n-1} \\
&\qquad\qquad +(n-1)\phi_{m+1,n-1}+(n+1)\phi_{m-1,n+1}\} \\
&+\sum_{i+i'=m}\sum_{j+j'=n}\frac{1}{2}i\left(-\psi_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}+\phi_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}\right) \\
&+\sum_{i+i'=m}\sum_{j+j'=n}\frac{1}{2}i\left(\psi_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}+\phi_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

(ii) $U_{m,n}$ の方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial U_{m,n}}{\partial t} &= -m\alpha x\psi_{m,n}+n\varepsilon B_z J_{m,n} \\
&+\frac{1}{2}\cosh x\frac{\partial}{\partial x}(-J_{m+1,n}+J_{m-1,n}-J_{m+1,n+1}+J_{m-1,n-1} \\
&\qquad\qquad -J_{m+1,n-1}+J_{m-1,n+1} \\
&+\frac{1}{2}\sinh x\{(-(m+1)J_{m+1,n}-(m-1)J_{m-1,n}-(m+1)J_{m+1,n+1} \\
&\qquad -(m-1)J_{m-1,n-1}-(m+1)J_{m+1,n-1}-(m-1)J_{m-1,n+1}\} \\
&+\sum_{i+i'=m}\sum_{j+j'=n}\frac{1}{2}\left(-iU_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}+i\phi_{i,j}\frac{\partial U_{i',j'}}{\partial x}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-iJ_{i,j}\frac{\partial\psi_{i',j'}}{\partial x}+i\psi_{i,j}\frac{\partial J_{i',j'}}{\partial x}\right) \\
&+\sum_{i+i'=m}\sum_{j+j'=n}\frac{1}{2}\left(iU_{i,j}\frac{\partial\phi_{i',j'}}{\partial x}+i\phi_{i,j}\frac{\partial U_{i',j'}}{\partial x}\right. \\
&\qquad\qquad \left.-iJ_{i,j}\frac{\partial\psi_{i',j'}}{\partial x}+i\psi_{i,j}\frac{\partial J_{i',j'}}{\partial x}\right)
\end{aligned}
$$

(iii) $J_{m,n}$ の方程式

$$J_{m,n}=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right)\psi_{m,n}$$

(iv) $\phi_{m,n}$ の方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-m^2\right)\phi_{m,n}=U_{m,n}$$

$\psi_{m,n}$ 及び $U_{m,n}$ の方程式中の $\sum\limits_{i+i'=m}\sum\limits_{j+j'=n}$ の項が非線形項である。線形計算をする場合にはこれらの項を落とす。x に関する微分では中心差分を用い、t に関する微分では陽解法を用いる。フーリエモード数は 4

章の場合と比べ、z 方向も考えなければならないので増大する。フーリエモード数を有限で打ち切る事で生じる数値計算誤差は成長過程の場合 $x_N/a = 0.324$, $S = 10^5$, $\delta/a = 10^{-2}$ で $t/\tau_A = 100$ のとき、x 方向のメッシュ数を 100 、t に関する 1 ステップを $10^{-2}\tau_A$ として $(m,n) = (10,5)$ で $\tilde{J}$ の相対誤差は 1 % 前後である。4 章の場合と比べるとやや誤差は大きいが、発展時間を評価するのには十分であると思われる。

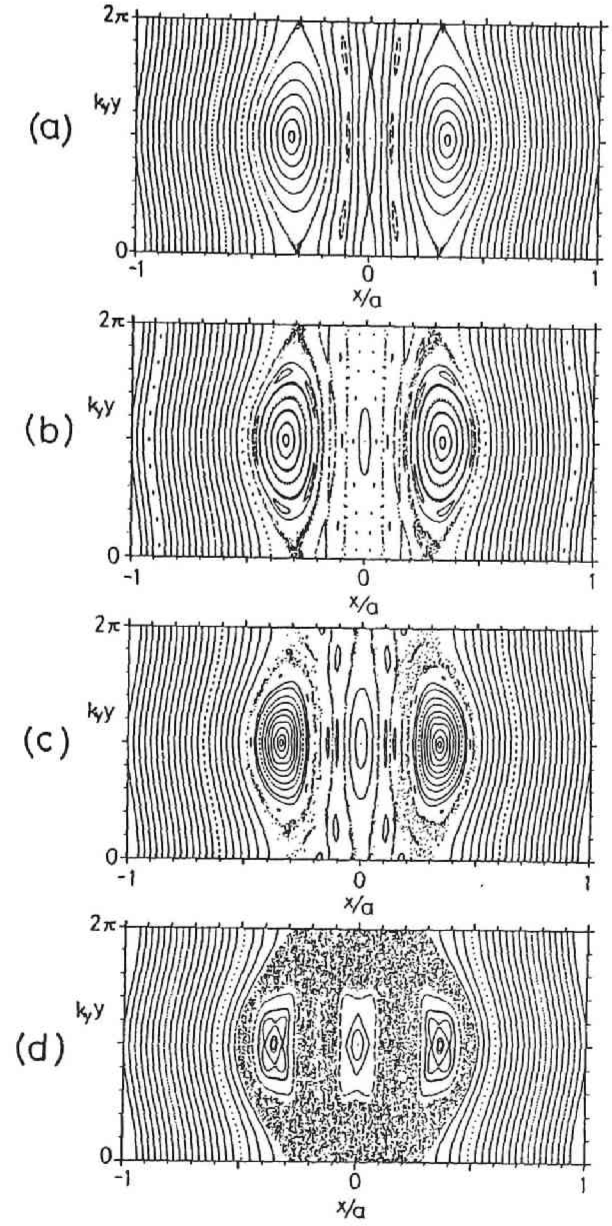


図 5.1 モデルの形状。隣接磁気島の巾 W_N 及び隣接距離は $W_N/a = 0.322$, $x_N/a = 0.324$ である。テスト磁気島の巾 W_T/a は (a) 0, (b) 0.03, (c) 0.25, (d) 1.0 であるテスト磁気島が成長する程、ストカスティックな領域が広がってくるのがわかる。

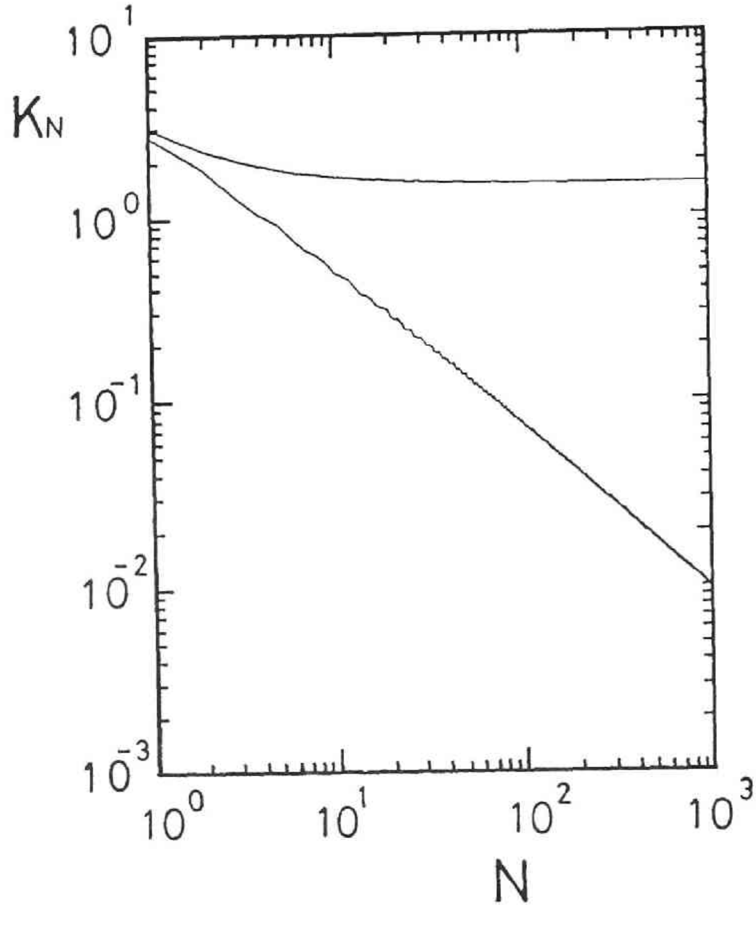


図 5.2 周期 N に対する $K-S$ エントロピー K_N の変化。磁場がストカスティックでない場合 K_N は 0 に近づくが、ストカスティックな場合 0 でない一定の値に漸近する。

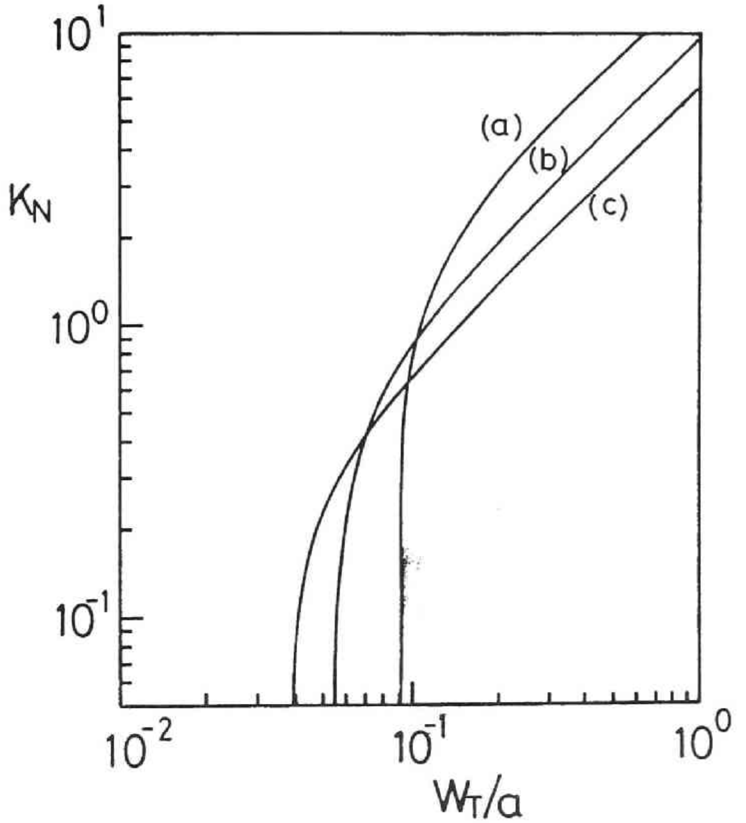


図 5.3 テスト磁気島の巾と K_N の関係。テスト磁気島のＯ点の位置は (a)$x_N/a = 0.194$, (b)$x_N/a = 0.259$, (c)$x_N/a = 0.324$ である。

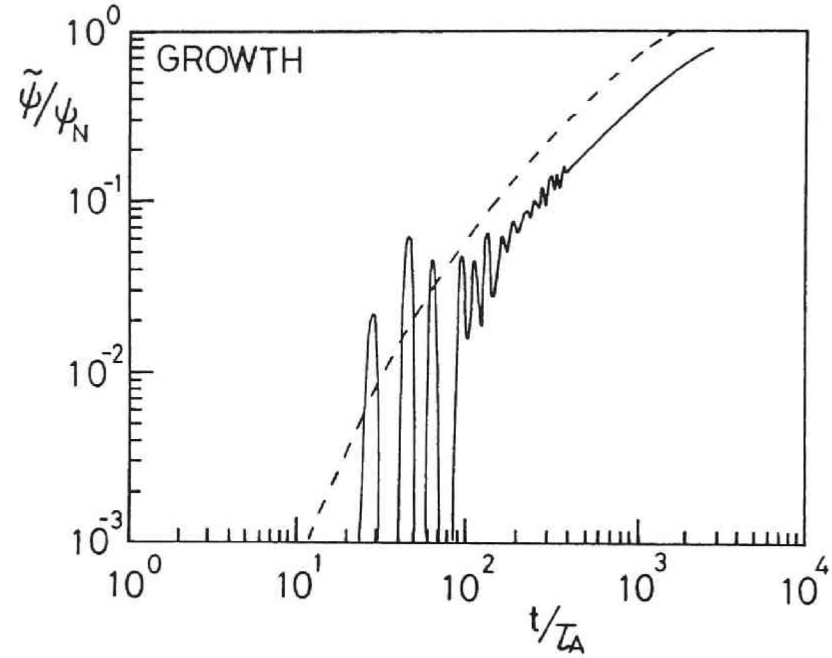


図 5.4 セパラトリクス X 点での磁束関数 $\tilde{\psi}$ の成長。パラメータは $\delta/a = 10^{-2}$, $ak = 1$, $S = 10^5$ であり、隣接磁気島の位置及び巾は図 5.1 と同じである。

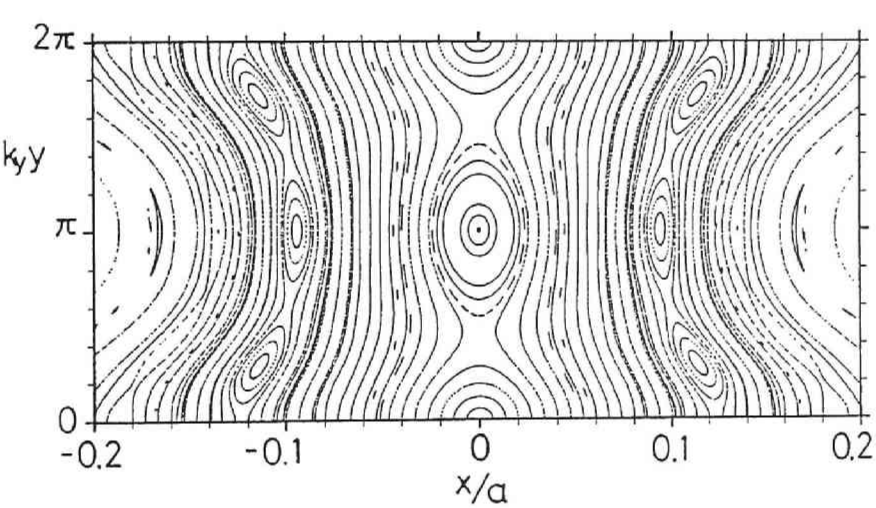


図 5.5 磁気面図 5.1(a) の有理面近傍の拡大図。

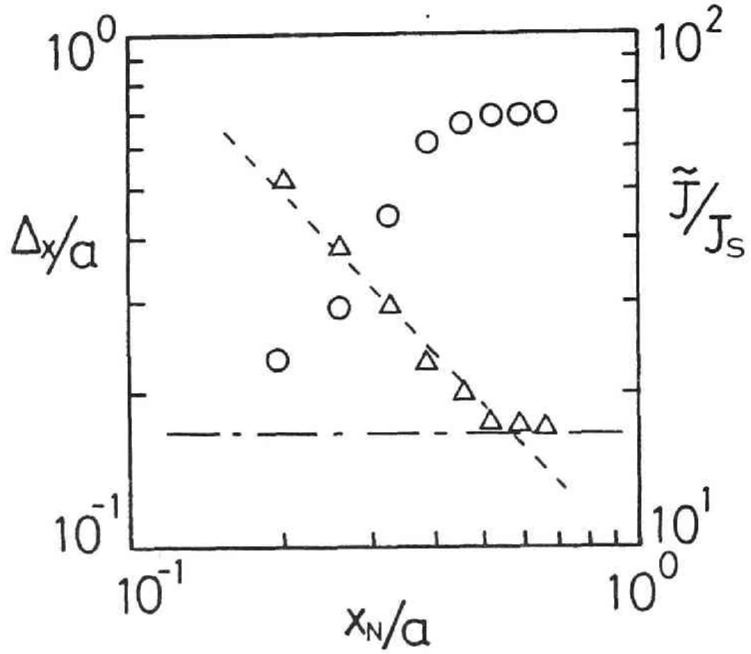


図 5.6 セパラトリクス X 点での電流値及び電流層の巾 Δ_x の x_N 依存性。パラメータは $\delta/a = 10^{-2}$, $ak = 1$, $S = 10^5$ である。印 o, Δ はそれぞれ $\tilde{J}/J_s$, Δ_x/a に対応する。点線は 2 次磁気島の巾、一点鎖線は単一磁気島の場合のΔ_x の値を示している。J_sは $J_s = \psi_s k^2/4\pi$である。

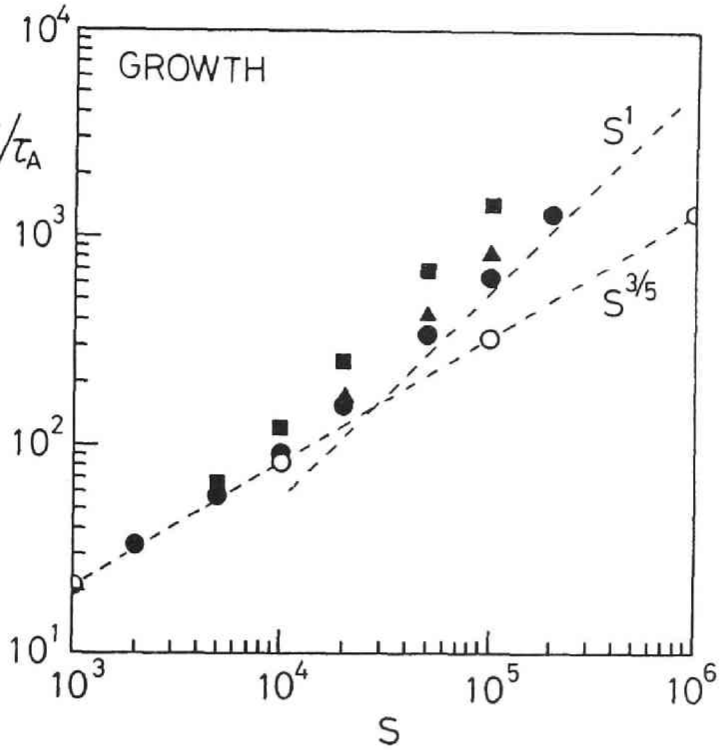


図 5.7 発展時間 τ_h の S 依存性。o は単一磁気島（ $x_N \to \infty$ ）の場合、o, △, □ はそれぞれ x_N/a =0.324, 0.259, 0.194 の場合に対応する。

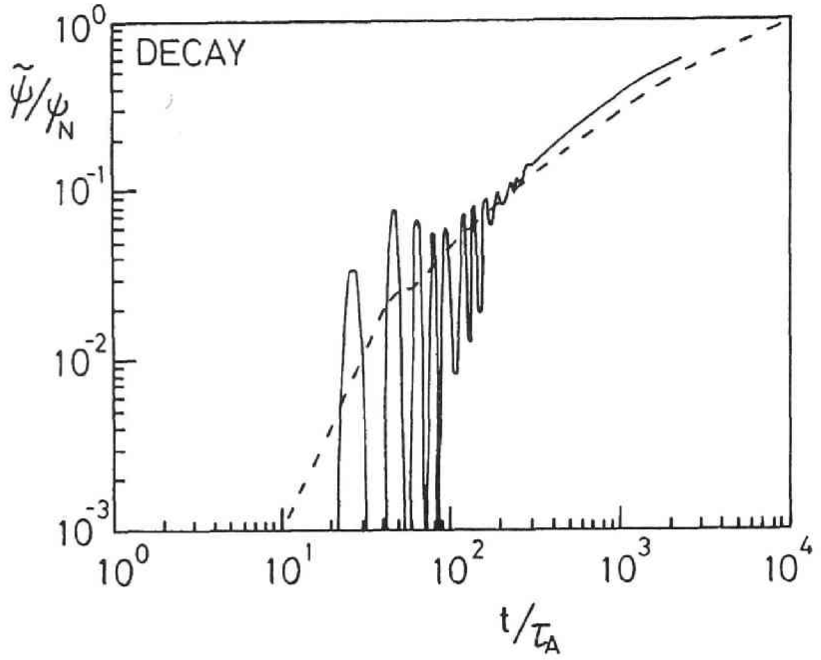


図 5.8 セパラトリクス X 点での磁束関数 $\tilde{\psi}$ の成長。

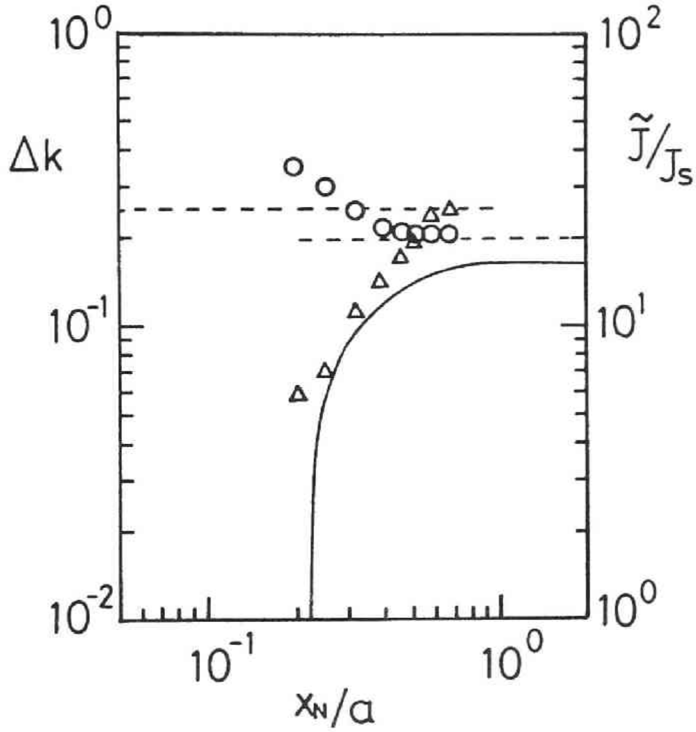


図 5.9 セパラトリクス X 点の電流値 $\tilde{J}$、電流層の巾 Δ とテスト磁気島の実効的な巾 W_s の x_N 依存性。o, Δ はそれぞれ $\tilde{J}$, Δ に対応する。実線は W_s、点線は単一磁気島での $\tilde{J}$, Δ の値を示す。パラメータは図 5.2 と同じである。

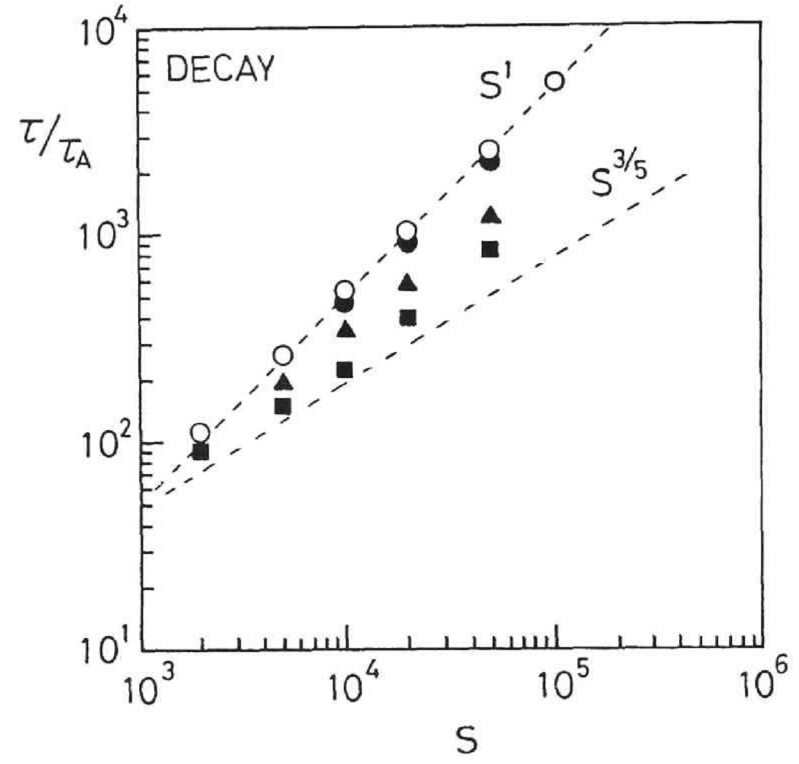


図 5.10 τ_h の S 依存性。o は単一磁気島の場合、o, △, □ はそれぞれ $x_N/a =$ 0.324, 0.259, 0.194 の場合に対応する。

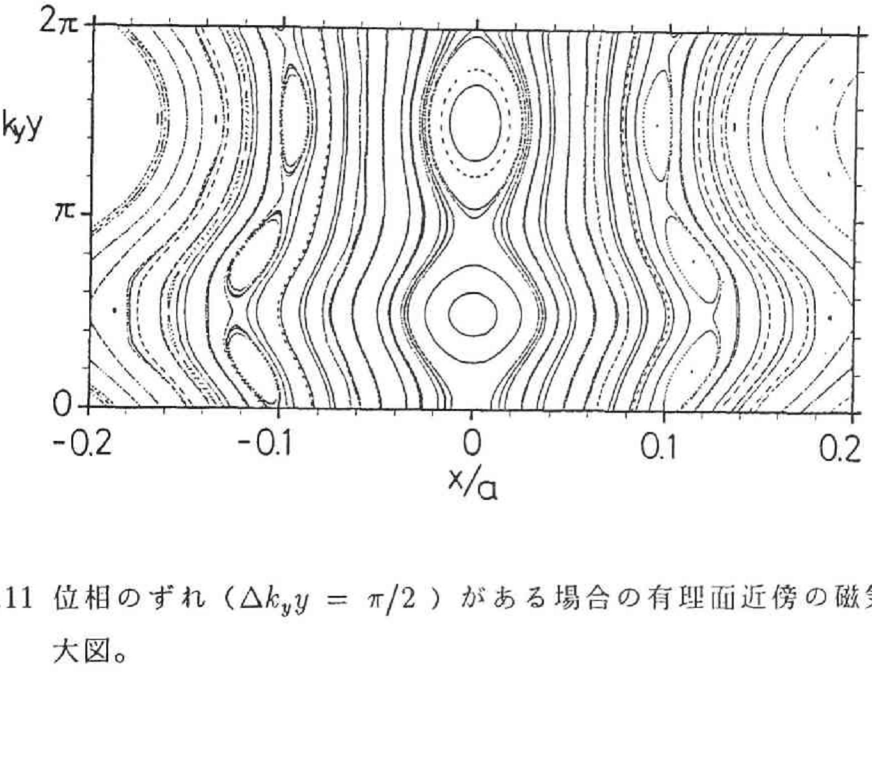


図 5.11 位相のずれ（$\Delta k_y y = \pi/2$）がある場合の有理面近傍の磁気面拡大図。

6　総括

トロイダル形状のプラズマ閉じ込め配位、特にヘリカル系に重点をおいて、磁場構造の解析及びプラズマ中に形成される磁気島を外部から磁場によって制御する際のプラズマの応答について理論解析を行った。トカマクに関しても解析し、ヘリカル系との比較を行っている。磁場構造の解析では、閉じ込め領域の磁気面の性質を広範囲にわたるパラメータサーベイによって評価し、また、最外殻から外側の周辺領域の構造を定式化した。外部から制御によって磁気島を生成したり消去する場合にはすでに形成されている磁気島自身の空間構造が重要な役割を果たしており、減衰過程では非線形項が重要な働きをしないことを示した。

2章ではヘリカル系の真空磁気面をトロイダル調和関数を用いて評価した。磁気面は基本ハーモニクスのトロイダル調和関数でその評価を近似的に行うことが可能であり、ヘリカル系の磁気面の性質を広範囲のパラメタにわたってサーベイすることができる。ここで磁気面の性質を変えるパラメタとして、軸対称のトロイダル磁場、垂直磁場、及びトロイダルピッチ数を用いた。トロイダル磁場の増大はプラズマの閉じ込め領域を増大させるものの、回転変換の大きさと磁気シアーを小さくしてしまう。一方、垂直磁場は磁気井戸を形成したり、閉じ込め体積を増加させ最外殻磁気面での回転変換を改善する。また、トロイダルピッチ数 m を広範囲にサーベイして、磁気面の評価量の変化も調べた。磁気面の評価量である回転変換と閉じ込め体積の改善は相反する（回転変換を上げると閉じ込め体積は減る）ので、新しい評価関数 $F = \iota(0) \cdot S_0$（S_0 は断面積）を導入して磁気面の評価を行った。F は閉じ込め時間 τ_E と関係があり、F の上昇は τ_E の改善をもたらすと思われる。F は m が小さい程、大きな値をとることを示し、m の小さな装置においても τ_E は高 m と同程度またはそれ以上のものが望めると思われる。2章での議論は $\ell = 2$ ヘリオトロン／トルサトロン配位に限定したが、モデルを修正すれば $\ell = 1, \ell = 3$ の場合、また、立体磁気軸の評価も行える。これらの解析を加えられれば、ヘリカル系のより全体的な評価を得ることができる

だろう。

2章と同じモデルを用いて$\ell=2$ヘリオトロン／トルサトロン(H/T)配位の周辺領域構造の解析を行うことができる。3章では、プラズマのない真空磁場でのヘリカル系及びダイバータの周辺磁場構造の評価を行い、SOL領域のプラズマの分布を調べた。磁場の評価には、磁力線が壁に到達するまでの距離として定義された接続長Lを用いた。接続長Lは最外殻磁気面から外側では対数的性質を有する。この性質はトカマクとヘリカル系で類似しており、同様の数式表現が可能である。ヘリカル系ではトロイダル磁場、垂直磁場、トロイダルピッチ数に対する依存性を調べた。その結果、トロイダル磁場B_tに対しては漸近的に$B_t^{1/4}$の依存性をもち、それ以外のパラメータにはほとんど依存性がないことを示した。トカマクではトロイダル磁場に対してB_tに比例し、B_vにはほとんど依存しないことから、トロイダル磁場への依存性が対照的である。またトカマクでは共鳴摂動磁場を加えても対数的性質が変わらず、実際の実験での種々の運転領域でダイバータ機能が働く理論的根拠の一つと考えられる。H/Tとトカマクの接続長の大きさを比較したところ、H/Tの方が短く、スクレイプオフ層で粒子や熱が早く壁へ逃げてしまうことを示唆している。

上記の結果を用いて流体モデルを適用すると、ヘリカル系のSOL領域でのプラズマの分布を得ることができる。入力パワーの増大と共に、SOL領域の温度は上がり、熱流の巾は狭くなる。この依存性は熱伝導係数の温度依存性によって若干変わるが、定性的にはほぼ同じである。そしてこの依存性はトカマクの場合に類似している。また、最外殻磁気面でのプラズマ温度は実験で得られる範囲内であった。しかしながら、ヘリカル系でのSOL領域の温度はトカマクに比べて低い。これは接続長の短さが原因である。もしSOL領域の温度を上昇させたいならば、接続長を何らかの手法で長くする必要がある。また、部分リミタを周辺領域に挿入した場合のプラズマの分布についても解析を行った。これらのモデルでは径方向の熱の流出には熱伝導が支配的であるとしたが、実際のSOLプラズマでは密度勾配は温度勾配より大きい [10] ので対流による効果を入

れなければならない。また、壁の温度はゼロとしシースの効果を無視したが、壁への熱の流入にはシースが重要な役割を果たしている。プラズマのより定量的な評価には、これらの効果を考慮しなければならず、今後の課題として残されている。スラブモデルを拡張して、円柱形状、さらにトロイダル形状へと発展させることが今後の課題である。

4 章ではプラズマ中に生成された磁気島を外部から磁場制御によって消滅させるときの物理機構について解析を行った。簡単なスラブモデルで単一磁気島の場合を考えた。ヘリカル系のプラズマやトカマクの周辺領域において、共鳴摂動磁場を加えることで変化する磁気島の解析に適用できる。磁気島の減衰過程は成長過程と時間発展が異なる。有理面に形成される電流層と磁気島の大きさが同程度となると電流分布は磁気島の構造に合わせた分布をとる。また、プラズマの流れもセパラトリクスに沿ったものとなり、流れの構造は両過程で異なる。磁力線の再結合率はセパラトリクス X 点での電流密度の大きさ $\tilde{J}$ に依存しているが、電流分布が磁気島の構造に合わせた分布となるため、$\tilde{J}$ は磁気レイノルズ数 S に依存しない一定の上限値がある。したがって、減衰過程では磁気島の時間発展は磁場の空間構造が要因となって S^1 にスケールする。そして、成長過程では時間発展に重要な役割をする非線形項が減衰過程では重要でなくなることを示した。

4 章のモデルを拡張し、外部から制御したいテスト磁気島の近傍に隣接する磁気島が存在する場合の時間発展について 5 章で解析した。隣接磁気島が十分近いと、テスト磁気島の形成される有理面は変形を受け、非線形相互作用により 2 次のオーダーの磁気島が形成される。成長過程では S が十分大きいと、この 2 次の磁気島の空間構造に合わせて電流の分布が決定されるため、非線形項を無視した場合でも磁気島の発展は S^1 にスケールするようになる。隣接距離 x_N が近いほど 2 次磁気島は大きくなり、成長時間は遅くなることを示した。減衰過程では磁場がストカスティックになっている状態でも外部からの摂動によって電流層は形成され、磁力線の再結合は起こる。そしてその発展的時間は単一磁気島の場合と同様、S^1 にスケールすることを示した。これらの結果は、ストカス

ティックになりやすいプラズマ周辺領域での磁気島の制御性について定性的な理解を与えると考える。

本研究はトロイダルプラズマの閉じ込め磁場の特性を調べ、その制御性について解析を行ったものであるが、周辺領域の性質はまだ十分に解明されておらず、今後より定量的な解析が望まれている。周辺プラズマの改善はコアプラズマの閉じ込め特性の向上にもつながる。本研究の結果が核融合に向けてのプラズマの改善及びその理解の助けとなれば幸いである。

謝辞

本研究をまとめるにあたり、終始御指導をいただき筆者を暖かく見守ってくださった京都大学ヘリオトロン核融合研究センター長大引得弘教授並びに核融合科学研究所長飯吉厚夫教授に謹んで感謝いたします。若谷誠宏教授並びに須藤滋助教授には本研究に対して御意見、御助言をたまわり、心より感謝いたします。

核融合科学研究所伊藤公孝助教授には研究当初の学部4回生から御指導いただきました。伊藤助教授の厳しい御指導と多くの価値ある御助言に対し、心より感謝の意を表します。

ヘリオトロン核融合研究センターにおいて理論解析を進めるにあたり、図子秀樹助教授、佐野史道助教授、水内亨助手、花谷清助手並びに中村祐司助手の有益な御助言に感謝いたします。また、核融合科学研究所洲鎌英雄助手、市口勝治助手並びに日本原子力研究所矢木雅敏研究員には常に議論を共にしていただきました。深く感謝いたします。

プリンストンプラズマ物理研究所吉川庄一教授、核融合科学研究所伊藤早苗助教授並びに岡山大学福山淳助教授には多くの御助言をいただきました。心より感謝いたします。

本研究の内容を雑誌投稿する際に、ＧＢ翻訳有限会社の J. G. Brockelbank 氏に英文添削をしていただきました。深く感謝いたします。

本論文のタイプにあたり、奥田ますみ嬢の助力を得ました。心より感謝いたします。

最後に、ヘリオトロン核融合研究センターのすべての人々の暖かい励ましと支援に対し、心より感謝の意を表します。

参考文献

[1] J. D. Lawson: Proc. Phys. Soc. (London) **B70** (1957) 6.

[2] JET Team: in Proc. 11th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (IAEA, Nice, 1988) Vol.1, p.41.

[3] B. Goldston: Plasma Phys. Contr. Fusion **26** (1984) 87.

[4] F. Wagner, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 1408.

[5] 伊藤公孝: 核融合研究 **63** (1990) 442.

[6] 川村孝一: 核融合研究 **63** (1990) 235.

[7] B. A. Carreras, *et al.*: Nucl. Fusion **28** (1988) 1643.

[8] 本島修、飯吉厚夫：核融合研究　**59** (1988) 455

[9] G. M. McCracken and P. E. Stott: Nucl. Fusion **19** (1979) 889.

[10] P. C. Stangeby and G. M. McCracken: Nucl. Fusion **30** (1990) 1225.

[11] R. J. Hawryluk, *et al.*: in Proc. 11th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (IAEA, Kyoto, 1986) Vol.1, p.51.

[12] F. X. Söldner, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1105.

[13] S. Tsuji, *et al.*: in Proc. 12th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion* (IAEA, Nice, 1988) Vol.1, p.265.

[14] M. Mori, *et al.*: Nucl. Fusion **28** (1988) 1892.

[15] 伊藤公孝、伊藤早苗: 核融合研究 **62** (1989) 112.

[16] F. Wagner and K. Lackner: *Physics of the Plasma Wall Interactions in Controlled Fusion* ed. D. E. Post and H. Behrisch, NATO ASI Series B131 (Plenum Press, 1984) p.931.

[17] G. M. Zaslavsky:「カオス－古典及び量子力学系」 第5章

[18] B. V. Chirikov: Phys. Rep. **52** (1979) 263

[19] G. Bateman: MHD Instabilities (MIT Press).

[20] J.J. Ellis, *et al.*: Proc. 10th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, London, 1984, (IAEA, Vienna, 1985) Vol.1, p.363

[21] K. Yamazaki, *et al.*: in Proc. 5th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, (IAEA, Kyoto, 1986) Vol.1, p.309

[22] J.A. Holms, B.A. Carreras, H.R. Hicks, S.J. Lynch and B.V. Waddell: Nucl. Fusion **19** (1979) 1333

[23] T.C. Hender, *et al.*: in Proc. 11th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, (IAEA, Kyoto, 1986) Vol.1, p.291

[24] 若谷 誠宏 他: 核融合研究 **63** (1990) 334.

[25] A. W. Morris, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **64** (1990) 1254.

[26] E. Lazzaro and M. F. F. Nave: Phys. Fluids **31** (1988) 1623.

[27] A. Iiyoshi, *et al.*: Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 745.

[28] G. Cattanei, *et al.*: in Proc. 9th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Baltimore, 1982) Vol.2, p.241.

[29] K. Uo, *et al.*: in Proc. 10th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* **18** (IAEA, London, 1984) Vol.2, 383.

[30] K. Miyamoto: Nucl. Fusion **18** (1978) 243.

[31] Proc. 6th Int. Stellarator/Heliotron Workshop, 1986, Kyoto (Kyoto Univ., 1986) PPLK-5,6.

[32] Proc. US-Japan Workshop on New Generation Experiments and Reactors, 1988, Kyoto (Kyoto Univ., 1988) PPLK-10

[33] V. D. Shafranov: Phys. Fluids **26** (1983) 357.

[34] G. Rewolt and J. L. Johnson: Plasma Phys. **27** (1985) 1203.

[35] B. A. Carreras, *et al.*: Phys. Fluids. **29** (1986) 3356.

[36] M. Wakatani, *et al.*: Nucl. Fusion **26** (1986) 1359.

[37] L. M. Kovrizhnykh: Nucl. Fusion **24** (1984) 435.

[38] D. E. Hastings: Phys. Fluids **27** (1984) 939.

[39] H. E. Minick: Phys. Fluids **27** (1984) 2086.

[40] K. Itoh, *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **55** (1986) 3101.

[41] L. Spitzer, Jr.: Phys. Fluids **1** (1958) 253.

[42] L. S. Soloveev and V. D. Shafranov: in Rev. Plasma Physics (ed. M. A. Leontvich, Consultant Bureau, 1970) Vol.5, p.1.

[43] G. Gourdon, *et al.*: in Proc. 2nd Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research* (IAEA, Novosibirsk, 1969) Vol.1, p.847.

[44] K. Uo: Plasma Phys. **13** (1971) 243.

[45] S. Rehker and H. Wobig: in Proc. 7th Symp. Fusion Technology (Grenoble. 1972) 345.

[46] B. A. Carreras, *et al.*: ORNL/TM-10482, Oak Ridge National Lab. (1987).

[47] J. F. Lyon, *et al.*: Fusion Technology **10** (1986) 179.

[48] S. Yoshikawa: "Analytic Representation of Three-Dimensional Stellarator Field", Research Report PPPL-2038 (1983).

[49] P. M. Morse and H. Feshbach: *Methods of Theoretical Physics* (McGraw-Hill, New York 1953).

[50] K. Nagasaki, *et al.*: J. Phys. Soc. Jpn. **57** (1988) 2000 .

[51] 宮本健郎:「核融合のためのプラズマ物理」 第 9 章.

[52] 等々力二郎: 核融合研究 **57** (1987) 318.

[53] W. Dommaschk: Z. Naturforsch. **37** (1982) 867.

[54] S. Sudo, *et al.*: Bull. Phys. Soc. Jpn. (1987, Nagoya) 29, p.3.

[55] M. Fujiwara, *et al.*: in Proc. Int. Stellarator/Heliotron Workshop (Kyoto, 1986) Research Rep. PPLK-5 Vol.1, 288.

[56] S. Yoshikawa: private communication.

[57] C. Beilder, *et al.*: Annual Report (Max-Plank-Institut Fűr Plasmaphysik) IPP AR/1989, p.159.

[58] S. Matsuda and M. Yoshikawa: Jpn. J. App. Phys. **14** (1975) 87.

[59] A. I. Morozov and L. S. Soloveev: Review of Plasma Phys., ed. M. A. Leontvich (Consultants Bureau, New York, 1966) Vol.2, p.1.

[60] M. N. Rosenbluth, *et al.*: Nucl. Fusion **6** (1966) 297.

[61] N. N. Filonenko: Nucl. Fusion **7** (1967) 253.

[62] F. M. Hamzeh: Phys. Rev. Lett. **29** (1972) 1492.

[63] H. Wobig and R. H. Fowler: Plasma Phys. Cont. Fusion **30** (1988) 721.

[64] R. B. White: in *Statistical Physics and Chaos in Fusion Plasmas* (Eds. C. W. Horton and L. E. Reichl, New York, 1984).

[65] J. R. Cary: Phys. Fluids **27** (1984) 119.

[66] J. R. Cary: Phys. Fluids **29** (1986) 2464.

[67] A. Samain, *et al.*: J. Nucl. Mater. **128 & 129** (1984) 395.

[68] N. Ohyabu and J. S. DeGrassie: Nucl. Fusion **27** (1987) 2171.

[69] S. C. McCool *et al.*: Nucl. Fusion **29** (1989) 547.

[70] S. C. McCool *et al.*: Nucl. Fusion **30** (1990) 167.

[71] Y. Shen,*et al.*: J. Nucl. Mater. **168** (1989) 295.

[72] T. J. Martin and J. B. Taylor: Plasma Phys. Contr. Fusion **26** (1984) 321.

[73] N. Ueda, *et al*: Jpn. J. App. Phys. **28** (1989) 2597.

[74] J. Neuhauser, *et al.*: Plasma Phys. Contr. Fusion **31** (1989) 1551.

[75] K. Nagasaki and K. Itoh: Jpn. J. App. Phys. **29** (1990) 1336.

[76] T. Mizuuchi, *et al.*: J. Nucl. Mater. **121** (1984) 3.

[77] K. Kondo, *et al.*: in Proc. 17th EPS Conf. on Contr. Fusion and Plasma Phys.(Amsterdam, ECA, 1990) Vol.2, p.459.

[78] G. Benettin and L. Galgani: in *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, eds. G. Laval and D. Gresillon (Edition de Physique, 1979) p.93 .

[79] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth and R. B. White: in *Intrinsic Stochasticity in Plasmas*, eds. G. Laval and D. Gresillon (Edition de Physique, 1979) p.239 .

[80] K. Itoh, K. Nagasaki, *et al.*: Nucl. Fusion **29** (1989) 1299.

[81] S. I. Itoh, *et al.*: "Scaling Study of SOL and Divertor Plasmas", Res. Rep. HIFT-160, Hiroshima Univ. (1988)

[82] S. I. Braginskii: Review of Plasma Phys., ed. M. A. Leontvich (Consultants Bureau, New York, 1966) Vol.1, p.205.

[83] M. Keilhacker, *et al.*: Phys. Scr. **T2/2** (1982) 443.

[84] N. Ueda, *et al.*: Nucl. Fusion **29** (1989) 173.

[85] K. Itoh, K. Nagasaki, *et al.*: Jpn. J. App. Phys. **29** (1990) 1829.

[86] H. Zushi: private communication.

[87] J. Todoroki: "Extension of Stellarator Approximation in Magnetohydrodynamic Equilibrium and Stability of Toroidal Helical Systems", IPPJ-905 (1989).

[88] M. D. Kruskal: Phy. Fluids **1** (1958) 265.

[89] T. S. Hahm and R. M. Kulsrud: Phys. Fluids, **28** (1985) 2412.

[90] P. N. Hu: Phy. Fluids **26** (1883) 2234

[91] H. E. Petschek: Proc. AAS-NASA Symposium on Physics of Solar Flares (NASA SP-50, Washingfton, D. C., 1964) p.425.

[92] P. A. Sweet: in *Electromagnetic Phenomena in Collisional Physics*, IAU Symposium No.6, edited by B. Lehnert (Cambridge University Press, London) (1958) p.123.

[93] E. N. Parker: J. Geophys. Res. **62** (1957) 509.

[94] B. V. Waddell, *et al.*: Nucl. Fusion**16** (1976) 528.

[95] D. Biskamp and H. Welter: Phys. Rev. Lett. **44** (1980) 1069

[96] D. Biskamp: Phys. Letters **87A** (1982) 357

[97] M. Ugai and T. Tsuda: J. Plasma Phys. **17** (1977) 337

[98] H.R. Strauss: Phys. Fluids, **19** (1976) 134

[99] H.P. Furth, J. Killeen and M.N. Rosenbluth: Phys. Fluids, **6** (1963) 459

[100] P.H. Rutherford: Phys. Fluids **6** (1973) 1903

[101] T. Sato and T. Hayashi: Phys. Fluids **22** (1979) 1189

[102] R.B. White: Rev. Mod. Phys. **58** (1986) 183

[103] T. Shoji and JFT-2M Group: paper SaJ13 presented in Jpn. Phys. Soc. Meeting (Kagoshima, 1989)

[104] S. Morimoto, *et al.*: paper 27 ac5 presented in the Meeting of the Japan Soc. Plasma Sci. and Nucl. Fusion Research (Nagaoka, 1990).

[105] A. B. Rechester and M. N. Rosenbluth: Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 38.

[106] B. B. Kadomtsev and O. P. Pogutse: in Proc. 7th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, (IAEA, Innsbruck, 1978) Vol.1, p.649.

[107] T. H. Stix: Nucl. Fusion **18** (1978) 353.

[108] P. H. Rebut and M. Hugon: in Proc. 10th Int. Conf. on *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion*, (IAEA, London, 1984) Vol.2, p.197.