

新 製
工
649

京大附図

# 指数減衰性を有するモデル規範形 適応制御系の設計法に関する研究

昭和60年

石 飛 光 章



# 指数減衰性を有するモデル規範形 適応制御系の設計法に関する研究

昭和60年

石 飛 光 章



# 目 次

内容梗概	1
第1章 序論	2
1.1 適応制御の歴史的背景	2
1.2 指数減衰的収束性を有するMRACSとその問題点	5
1.3 本研究の目的と研究内容	7
1.4 記号の説明	8
第2章 指数減衰的収束性を有するMRACSの基本構成	9
2.1 結言	9
2.2 問題の記述	11
2.3 適応制御系の構成	12
2.4 信号の有界性と誤差の指数減衰性	18
2.5 数値シミュレーション	27
2.6 結言	28
2.7 付録	28
第3章 重みつき最小2乗法調整則による指数減衰的MRACS	34
3.1 結言	34
3.2 積分次数削減のMRACS	36
3.2.1 問題の記述	36
3.2.2 重みつき最小2乗法調整則の導出	36
3.2.3 適応制御系の構成	38
3.2.4 信号の有界性と誤差の指数減衰性	41
3.3 十分一般性条件によらないMRACS	44
3.3.1 パラメータ調整則とその性質	44

3.3.2	MRACSへの適用	50
3.4	数値シミュレーション	54
3.4.1	積分次数削減のMRACS	54
3.4.2	十分一般性条件によらないMRACS	54
3.5	結言	55
第4章	多入出力系への拡張	65
4.1	結言	65
4.2	指数減衰的多入出力適応観測器の構成	66
4.2.1	問題の記述	66
4.2.2	パラメトリック表現	68
4.2.3	適応観測器	70
4.3	指数減衰的多入出力MRACSの構成	74
4.3.1	問題の記述	74
4.3.2	MRACSの構成	74
4.4	数値シミュレーション	79
4.4.1	多入出力適応観測器	79
4.4.2	多入出力MRACS	79
4.5	結言	80
4.6	付録	80
第5章	離散時間系への拡張	90
5.1	結言	90
5.2	MRACSの構成	91
5.3	不動点定理による有界性と安定性の証明	95
5.4	数値シミュレーション	101
5.5	結言	102
5.6	付録	102
第6章	熱実験系への適用	108

6.1	緒言	108
6.2	実験装置	108
6.3	プラントの状態方程式	110
6.4	規範モデル	112
6.5	適応制御系の構成	114
6.6	実験および実験結果	120
6.7	結言	124
第7章 結論		139
謝辞		142
参考文献		143





## 内容梗概

本論文は、動特性が未知であるか、あるいは変動する制御対象に対する有効な制御方式であるモデル規範形適応制御系の構成方法を、理論的および実験的に研究したものである。

本論文は7章からなっている。第1章は序論であり、第7章は結論である。他の各章の概要は以下のとおりである。

第2章においては、モデル規範形適応制御系が実用上有効となるために必要な性質である、指数減衰的収束性を有するモデル規範形適応制御系の基本的な構成方法を、1入出力連続時間系に対して示し、閉ループ系の全信号の有界性と出力誤差の指数減衰性の証明とを与えている。

しかし、第2章のモデル規範形適応制御系では、積分次数の削減、十分一般性条件成立の仮定の除去、ならびに十分一般性条件成立のための規範入力に対する条件の明確化が大きな課題として残されている。そこで、第3章では、まず、重みつき最小2乗法パラメータ調整則などの使用により、積分次数を削減するモデル規範形適応制御系の構成方法を示す。つぎに、重みつき最小2乗法調整則を拡張することにより、十分一般性条件が成立しないときにも適用できるモデル規範形適応制御系の構成方法を与えている。また、十分一般性条件が成立していれば、指数減衰的収束性が保存されることを証明し、さらに、十分一般性条件成立のための規範入力の条件を明らかにしている。

第4章では、1入出力系より以上に適応制御の必要性が高いと考えられる多入出力系に対して、指数減衰的収束性を有するモデル規範形適応制御系を構成する方法を、適応観測器の構成方法とともに示している。その構成方法は、多入出力系を1出力サブシステムに分割し、そのパラメトリック表現を求めることから導かれている。

第5章では、近年めざましい発展をとげているデジタル計算機での実装が容易な、離散時間形式のモデル規範形適応制御系の構成方法を考察している。そこでは、指数減衰的収束性をもつ、重みつき最小2乗法パラメータ調整則を用いたときに、フィルタの極を任意に指定できるモデル規範形適応制御系の構成方法を与え、その閉ループ系の安定性および全信号の有界性をSchauderの不動点定理によって証明している。

第6章では、第2章から第5章までの設計方法を熱実験系に適用し、理論の実証を行っている。

# 第 1 章 序論

## 1. 1 適応制御の歴史的背景

制御系の設計とは、与えられた制御対象について、所望の出力が得られるように制御装置を構成することである。その手法の多くは、制御対象の動特性を表わす伝達関数や状態方程式などの数学モデルを、正確に知り得ていることを前提としている。しかし、実際の制御対象では、動特性を表わす数学モデルを前もって完全に把握することができる場合は少なく、また周囲環境により、事前に定めた数学モデルとは異なった動特性を示す場合も多い。さらに、その動特性は、しばしば時間の経過とともに変動する。このように、その数学モデルが未知であったり、変動するような制御対象に対しては、多くの制御系設計理論では、満足のいく制御性能を維持することが難しくなる。

適応制御系は、上記のような未知または変動動特性を有するシステムに、良好な制御性能を実現させるのに、有効な手段を与える。すなわち、適応制御系は、制御対象から得られる入出力などの情報にもとづいて、制御装置をオンライン的に自動調整し、制御系としての高い性能を保つ制御方式である(1-15)。

これまで、適応制御系としては、種々提案されてきているが、なかでもモデル規範形適応制御系 (Model Reference Adaptive Control System ; 以後 MRACS と略称する) とセルフチューニングレギュレータ (Self-Tuning Regulator ; 以後 STR と略称する) は、多くの研究発表が行われている(1-15)。

MRACS は図 1. 1 に示すように、望ましい応答を示す規範モデルを与え、その応答に制御対象の出力が一致するように制御装置を構成する制御方式である。MRACS は動作目標選定の難問題を、規範モデルの導入で解決し、取り扱いを比較的容易にしていることから、着実に発

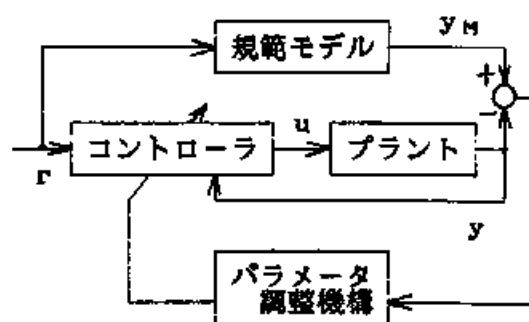


図 1. 1 MRACS の構成概要

展している(1-13)。一方、STRは図1. 2に示すように、制御対象の未知パラメータを逐次推定し、この結果を真値とみなして制御装置のパラメータを決定、調整する制御方式である。このSTRはほとんどの場合、離散時間確率系を対象として、進展している(13-15)。

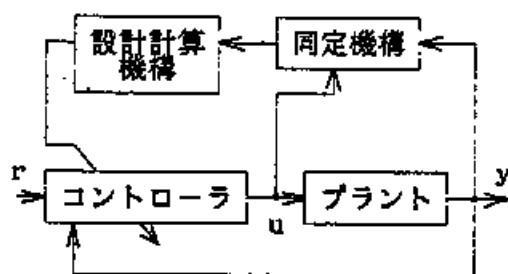


図1. 2 STRの構成概要

MRACSはWhitakerら(16)

によって初めて提案された。彼らはパラメータ調整則を、プラント出力と規範モデル出力の差、すなわち出力誤差の2乗が最小となるように、勾配法を用いて導出した。

しかし、この適応制御系の安定性の解析は非常に難しく、プラントによっては不安定になる場合もあることがParksら(17)によって示された。そして、Parksらは安定論の立場からこの適応制御系を見直し、Lyapunov法を用いて、安定性を保証する調整則を導いた。さらに、プラントの伝達関数が正実であれば、MKY Lemma(18)を使うことによって、出力の微分値を用いない設計が可能であることを証明した。

一方、Landau(19)はPopovの超安定理論(20)を用いることによって、Lyapunov法と同様な調整則が導出できることを示した。

しかし、Lyapunov法、超安定理論にもとづく方法ともに、その伝達関数が正実の場合、すなわち、分母・分子多項式の次数差が1で、安定な最小位相系の場合(20)の、極めて特殊なプラントに対してだけ、出力のみによる適応制御系の構成が可能であり、一般的な場合のプラントに対しては、出力の微分値を必要とした。

この問題を解決したのはMonopoli(21)であった。彼は一般の1入出力系に対しても、MKY Lemmaが適用でき、出力の微分値が不要となることを示した。これは、一種の状態観測器である状態変数フィルタと、新しく定義した拡張誤差信号で働く外部補償器とを導入し、これによってプラントを等価的に正実としたために可能となった。

ところがFeuerら(22)は、Monopoliの設計したMRACSでは必ずしも大域的漸近安定性が保証されないことを指摘した。そして、Feuerら(23)やNarendraら(24)は大域的漸近安定性を保証するMRACSを構成した。しかし、Feuerらが提案したMRACSは対応定数すなわち分母・分子多項式の次数差が大きくなると構成が極めて難

しくなる欠点を有し、Narendra らが提案したMRACSは対応定数が2以下の系だけを扱っていた。そこで、Morse (25)、Narendraら (26, 27)、Goodwinら (28)、Egardt (5) は一般系に対して、大域的漸近安定性を有するとともに、より簡単な構成となるMRACSを発表した。

こうして、MRACS設計のための理論体系がしだいに整ってくるとともに、種々の設計方法の統一化が図られてきた。

まず、直接法と間接法は本質的に同じであることが示された (29-32)。間接法はパラメータ調整則の駆動入力として出力の観測値と出力の推定値との差を用いた、一種の適応観測器を含むのに対して、直接法はパラメータ調整則の駆動入力として出力と規範モデルの差を用いる。ここで適応観測器は、未知動特性を有する制御対象の、パラメータ同定と状態推定とを同時に行うもので、Carroll ら (33) の提案以来、数多くの研究が行われている (34-36)。間接法はまた、規範モデルを表立った形では有しないので、

Implicit MRACSとも呼ばれる。これに対し、直接法はExplicit MRACSと呼ばれる。さらに、間接法はパラメータ調整則の駆動入力として出力と出力の推定値との差を用いる点で、構成の考え方がSTRと同じである。Monopoli 以来の拡張誤差信号導入のMRACSは直接法に属し、間接法MRACSの研究は武藤ら (37)、金井ら (38) によって行われている。

以上述べてきた適応制御方式において、未知パラメータを同定するパラメータ調整則をどのように選定するかは、適応制御系の構造設計問題と不可分であるため、様々な形式の調整則が考えられてきた。これを一般的な形式で表現しようとする試みも行われており、Landau (8) は従来の離散時間形式のパラメータ調整則のほとんどを包含する、一般化パラメータ調整則を提案した。

このように、理論は着々と進展し、これに伴って、MRACSの実在系への応用に関する報告もみられるようになってきた (6, 7, 12, 13)。

## 1. 2 指数減衰的収束性を有するMRACSとその問題点

実用的MRACSの観点からは、まだ解決しなければならない問題点が多く残されている。なかでも重要なテーマは、収束速度の改善、外乱による影響への対策、モデリング誤差による影響への対策などである。

MRACSは元来、確定系のサーボ問題を対象として開発されてきたため、設計にあたっては、制御対象に加わる外乱の存在は無視できるものとされてきた。しかし、実際の制御対象においては、外乱は多かれ少なかれ存在するのが普通である。そこで外乱の存在を無視できない場合には、外乱を考慮したMRACSの設計手法を開発する必要がある。このようなMRACSについては Peterson ら (39)、Kreisselmeier ら (40) による研究がある。

また、制御対象の次数が高くなるほど、制御装置の構成が複雑になることは、MRACSでも例外ではない。そこで、低次元近似モデルをもとにMRACSを構成することが考えられるが、その際にモデリング誤差の影響を考慮する必要がある。このモデリング誤差の問題を扱った研究は Ioannou ら (41)、Rohrs ら (42) によって行われている。

さらに、従来のMRACSの設計はもっぱら制御系としての漸近安定性の保証に主眼がおかれていた。そのため、設計方法の妥当性確認のために行われるシミュレーションにおいて、出力誤差が0に収束するのにきわめて長い時間を要したり、現実的な収束時間を得るのに、通常使用できないほど大きい設計パラメータを必要とする例がしばしばみられた。そのようなMRACSは実用化にはほど遠いといえる。また、現実の制御対象のパラメータは時変であるにもかかわらず、従来のMRACSの多くは、パラメータが時間に関して一定であることを前提としているため、時変システムに対しては適用効果が低下すると予想される。しかし、制御対象のパラメータ変動に比べて収束速度が早ければ、実用的には時変システムに対してもすぐれた制御性能を期待することができる。そこで、実用可能な収束速度をもつMRACSを構成することに目が向けられてきた。そして、収束速度が指数減衰的であれば、多少のパラメータ変動にも耐えることができ、実用的であることが明らかにされた(43)。また、指数減衰的収束性が成立していれば観測雑音や低次元モデリング誤差に対してロバストになることも指摘されている。すなわち、指数減衰的収束性は現在MRACSに残されている上述の重要な3テーマすべてに

威力を発揮できる。

指数減衰的収束性を有するMRACSについての研究は、連続時間系については Kreisselmeierら(44)、Ichikawa(45)、鈴木ら(46)、天野ら(47)によって、離散時間系については Andersonら(43)、井上ら(48)によって行われている。しかし、これらの研究においてもまだ問題がある。まず、連続時間系のMRACSについてみる。

(1) 希望する早い収束速度を得るにはフィルタや誤差モデルの特性を任意に与えて、指数減衰度を任意に設定できなければならない。また、プラントのゲインが未知の場合でも適用できなければならない。それにもかかわらず、KreisselmeierらのMRACSは誤差モデルが規範モデルと同じ特性をもたなければならない。また、ゲインが既知でなければならない。

(2) MRACSとしては、閉ループ系の信号の有界性が保証されていなければならないが、Ichikawa、鈴木らのMRACSではその有界性が仮定されており、有界性の証明が与えられていない。

(3) 鈴木らのMRACSではパラメータの調整速度が入力の2乗に比例するため、入力依存性の問題が生じる。

(4) 天野らのMRACSは信号の有界性は証明されているが、プラントの不安定度がパラメータ調整則の減衰度より小さいという条件が必要であった。

つぎに、離散時間系について述べる。

(5) AndersonらのMRACSではフィルタとして、プラントの入出力データをそのまま時間を遅らせたもの、すなわち、極が0のフィルタを使っているためノイズ等の影響を受けやすく、制御性能が悪化するおそれがある。

(6) 井上らのMRACSは信号の有界性が明らかにされておらず、また、プラント伝達関数の分母・分子の次数差が1の場合にしか適用できない。

(7) 指数減衰的収束と明言していないが、類似の設計方法がLozano(49)、Landau(8)によって与えられている。しかしその方法では制御経過の滑らかさと調整則へのノイズの影響の軽減とを同時に実現することができない。

(8) 連続時間系、離散時間系共通していえることは、実用面を考えた設計方法を検討しながら、井上らのMRACSを除くと、実システムへの適用による確認が行われていない点である。

### 1. 3 本研究の目的と研究内容

本研究は、実用上重要な指数減衰的収束性を有するMRACSの設計方法を、上記の問題点を考慮しつつ、理論的かつ実験的検討によって、確立することを目的とする。

具体的には以下の構成によって、上記の目的を達成する。

まず、第2章では、連続時間系の指数減衰的収束性を有するMRACSの基本的構成方法を示し、フィードバック制御系の漸近安定性、信号の有界性を証明する。そこでは、プラントのゲインも未知とし、また、フィルタ、誤差モデルの特性を任意に与えることができるような設計方法としているため指数減衰度を任意に設定することができる。さらに、プラントの不安定度とパラメータの減衰度とに関係をもたせずに有界性の証明を与えているため、プラントの不安定度がパラメータの減衰度より大きくても適用可能であり、また、入力依存性が小さいパラメータ調整則を使っているため、入力依存性の問題も生じない。

しかし、第2章のMRACSでは積分次数が高い、十分一般性条件が成立しない場合には適用できない、指数減衰の条件が規範入力に関して与えられていないなどの問題がある。そこで、第3章では、まず、積分次数を減らせる調整則として重みつき最小2乗法調整則を導出し、その調整則を用いるとともに、フィルタ構成でも積分次数を減らして、全体として著しく積分次数を減らしたMRACSを構成する。また、重みつき最小2乗法調整則に微小正定行列を付加することによって、十分一般性条件が成立しない場合にも適用できるようなMRACSを構成するとともに、このように構成すれば指数減衰の条件が規範入力に関して得られることを明らかにする。

第4章では、第2章の基本的構成のMRACSを多入出力系に拡張する方法を述べる。適応制御を必要とする制御対象が航空機、化学プロセスなど大規模なシステムであることを考えると、多入出力系に対するMRACS設計問題はきわめて重要である。特に、多入出力系では1入出力系以上に適切なモデル化が困難であり、不十分なモデル化のもとでも有効な指数減衰的収束性をもつMRACSが、より強く要求される。そこで、ここでは、適応制御系の構成に都合のよいパラメトリック表現を求めることによって、まず多入出力適応観測器を構成する方法を示し、その後、類似のパラメトリック表現を用いて、多入出力MRACSを構成する方法を述べている。

近年めざましい発展をとげているデジタル計算機を用いることを考えると、実装の

容易さの面で離散時間MRACSも重要である。そこで、第5章では指数減衰的収束性をもつ離散時間MRACSの構成方法を論じる。特に、制御経過の滑らかさとノイズの影響の軽減とを同時に達成するためには、減衰度が任意に指定できること望まれるが、そのような構成における信号の有界性の証明には従来の方法を適用することが困難であるため、新しく不動点定理を使ってその証明を行う。

以上、実用上有効と思われるMRACS構成方法を論じているが、あくまで理論研究にとどまっている。実用上の有効性は実システムに適用してはじめて確認ができる。そこで、第6章では、本論文で述べるMRACSの構成方法を2次熱実験系に適用し、有効性を確認する結果を得たことを示す。

#### 1.4 記号の説明

次章以下で用いる記号を説明する。 $\max \Lambda [\cdot]$ 、 $\min \Lambda [\cdot]$ はそれぞれ行列の固有値の実数部の符号反転値の最大値、最小値を表わすとする。また、 $\lambda [\cdot]$ を多項式の実数部の符号反転値の最小値とする。アンダラインはベクトルを表わす。



## 第2章 指数減衰的収束性を有する MRACSの基本構成

### 2.1 緒言

モデル規範形適応制御系 ( Model Reference Adaptive Control Systems, MRACS ) は、動特性を前もって正確に知ることが難しいプラントや、動特性が環境条件などによって変化するプラントに対する有効な制御方式であり、MITでの提案(1)以来、多くの研究成果が発表されている。

ところで、制御系の設計方法には連続時間形式と離散時間形式とがある。MRACSでも、近年のデジタル計算機の発展により、デジタル計算に都合がよい離散時間形式のMRACSが多く研究されているが、連続時間形式のMRACSは離散時間形式のMRACSにない長所を有している。まず、プラントの物理モデルは、普通、連続時間形式の微分方程式で表現することが多いため、連続時間形式のほうが物理モデルとの対応がつけやすい。また、連続時間形式では最小位相系でも、離散時間形式では変換のサンプリングホールドの影響によって、取り扱いが難しい非最小位相系になることがある。さらに、デジタル計算機の計算速度の向上にともなって、数値積分の手法を用いて、デジタル計算機によって連続時間形式のMRACSを構成することが実用的に可能となってきた。このような理由から、本章では1入力1出力連続時間形式のMRACS構成問題を取り扱う。なお、離散時間形式のMRACS構成問題は第5章で扱う。

さて従来、多くのMRACSでは、観測ノイズがないこと、プラントパラメータは時不変であること、プラントの次数は正しく与えられていることを前提としている。しかし、現実にはこのような理想的な条件となることは少ない。そこで、現在では実用上有効なMRACSの構成法を確立することに多くの関心が集められている(2)。そして、収束速度が遅いMRACSは、理想的状況のもとでならともかく、現実のプラントに対してはその適用可能性が疑問視されており、指数減衰的収束性を有するMRACSのみが、その収束速度の早さゆえに、理想的でない条件のもとでもロバストな性能を保証できることが明らかにされている(3)。そこで、本章では指数減衰的収束性を有するMRACSの構成方法を論じる。指数減衰性をもつMRACSを構成するにはまずパラメータ調整則としてどのようなものを用いるかがキーポイントである。ここではパラメータ

調整則として、指数減衰的収束性を有する適応観測器に用いられる調整則を使って、目的のMRACSを構成する。構成においては、適応観測器では状態変数と出力とのパラメトリック表現を求めることが問題であるのに対して、MRACSでは制御入力を決めるために、制御入力を陽に含む誤差方程式を求めることが課題である。また、適応観測器は開ループ系であるため、プラントが安定かつ、印加する入力が有界である限り、信号の有界性は保証されるが、MRACSは閉ループ系であるため、全信号の有界性を保証することが、さらに大きな課題である。そこで、まず制御入力を陽に含む誤差方程式を導き、その誤差方程式にもとづいて構成方法を示し、その後、全信号の有界性と出力誤差の指数減衰性との証明を与える。

連続時間形式の指数減衰形MRACSの研究は、Kreisselmeierら(4)、Ichikawa(5)鈴木ら(6,7)、天野ら(8)によって発表されている。Kreisselmeierら、Ichikawa、鈴木ら、天野らの研究に対して、本研究にはつぎのような特徴がある。

(1) KreisselmeierらのMRACSはプラントのゲインが既知でなければならないとともに、誤差モデルが規範モデルと同じ特性をもたなければならないため指数減衰度が制約されるのに対し、ここで述べる方法はゲインが未知の場合でも適用することができ、かつフィルタと誤差モデルの特性を任意に与えることができるため、指数減衰度を設計者が任意に指定できる。

(2) Ichikawa、中村らは閉ループ系の信号の有界性を仮定しているのに対し、本研究ではその有界性の証明も行っている。

(3) 天野ら是有界性の証明を与えてはいるが、プラントの不安定度がパラメータ調整則の減衰度より小さいという条件が必要であった。しかし本論文ではそのような条件は不要である。

(4) 天野らの証明には出力誤差の指数減衰性は示されていないが、ここではそれも証明されている。

(5) 中村らのMRACSではパラメータの調整速度が入力の大きさの2乗に比例するため、入力依存性の問題が生じるのに対し、本研究のMRACSではその問題が生じない。

以下、第2.2節で問題の記述を行い、第2.3節でMRACSの構成法を与え、第2.4節で閉ループ系の信号の有界性と誤差の指数減衰性とを証明する。そして、第2.5節でシミュレーション結果を示す。

## 2.2 問題の記述

制御対象のプラントは可制御可観測の  $n$  次 1 入力 1 出力系であり

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b} u(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2.1a)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) = x_1(t) \quad (2.1b)$$

$$A = \begin{bmatrix} \underline{a} & I_{n-1} \\ 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1, 0, \dots, 0] \quad (2.1c)$$

なる可観測標準形で表わされているとする。ここに、 $\underline{x}(t)$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $y(t)$  は観測可能なスカラー出力、 $u(t)$  はスカラー入力である。また、 $\underline{a}$ 、 $\underline{b}$  はそれぞれ  $n$  次元の未知定数ベクトルである。ただし、この系は最小位相系すなわち伝達関数の零点はすべて  $s$  平面の左半平面に存在すると仮定する。この仮定は後述するように、全信号の有界性を保証するために要求されるものである。

この系に対対応定数はつぎのように定義される (9)。

$$d = \min \{ j ; \underline{c}^T A^{j-1} \underline{b} \neq 0, j=1, \dots, n \} \quad (2.2)$$

これは、標準形(2.1)式に対して

$$b_1 = \dots = b_{d-1} = 0, \quad b_d = \underline{c}^T A^{d-1} \underline{b} \neq 0 \quad (2.3)$$

なる仮定を設けたことと同値で、伝達関数の分母・分子多項式の次数差が  $d$  であることを表わし、 $d$  は相対次数ともよばれる。また、 $n$  以下のすべての  $j$  に対して  $\underline{c}^T A^j \underline{b} = 0$  となるならば、伝達関数の分子多項式は 0 となるので問題設定が無意味となる。以下では対応定数  $d$  は既知としておく。

プラント(2.1)式に対し規範となるモデルが

$$\dot{\underline{x}}_M(t) = A_M \underline{x}_M(t) + \underline{b}_M r(t), \quad \underline{x}_M(0) = \underline{0} \quad (2.4a)$$

$$y_M(t) = \underline{c}_M^T \underline{x}_M(t) \quad (2.4b)$$

で与えられているとする。ここで、 $r(t)$  は規範入力である。 $r(t)$  は  $d-1$  回連続微分可能または規範モデルの伝達関数の対応定数は  $d$  以上で、 $r(t)$  は一様有界で区分的連続であると仮定し、さらに、 $A_M$  は安定と仮定する。

問題は、以上の設定のもとでモデルの入出力  $r(t)$ 、 $y_M(t)$  およびプラントの出力  $y(t)$  のみを用いて、プラントと規範モデルの出力誤差

$$e(t) = y(t) - y_M(t) \quad (2.5)$$

を指数減衰させ、かつその減衰度を設計者が任意に指定できるような制御入力  $u(t)$  を構成することである。

### 2.3 適応制御系の構成

まず、つぎの安定な  $n \times n$  行列  $K$  を導入する。

$$K = \begin{bmatrix} I_{n-1} \\ \underline{k} \quad 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k}: n \text{次元ベクトル} \quad (3.1)$$

$K$  を用いて、状態変数フィルタを以下のように構成する。

$$\dot{\underline{z}}_1(t) = K^T \underline{z}_1(t) + \underline{c} y(t), \quad \underline{z}_1(0) = \underline{0} \quad (3.2a)$$

$$\dot{\underline{z}}_2(t) = K^T \underline{z}_2(t) + \underline{c} u(t), \quad \underline{z}_2(0) = \underline{0} \quad (3.2a)$$

この状態変数フィルタは、直接得ることができない状態変数のかわりに用いる。

つぎに制御入力を決定するための誤差方程式を導く。(2.1a)式を  $d$  回まで微分し、(2.2)式を用いれば

$$y^{(l)}(t) = \underline{c}^T A^l \underline{x}(t), \quad l=0, \dots, d-1 \quad (3.3a)$$

$$y^{(d)}(t) = \underline{c}^T A^d \underline{x}(t) + \underline{c}^T A^{d-1} \underline{b} u(t) \quad (3.3b)$$

が得られる。(3.3)式に順次  $\alpha_l$  ( $l=0, \dots, d, \alpha_d=1$ ) を乗じ、和をとると

$$D(\varphi) y(t) = \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{c}^T A^i \right) \underline{x}(t) + b_d u(t) \quad (3.4)$$

となる。ここに

$$b_d = \underline{c}^T A^{d-1} \underline{b} \quad (3.5a)$$

$$D(p) = p^d + \alpha_{d-1} p^{d-1} + \cdots + \alpha_1 p + \alpha_0, \quad p = d/dt \quad (3.5b)$$

であり、 $\alpha_i$  ( $i=0, \dots, d-1$ ) は  $D(p)$  が安定多項式となるように選ぶものとする。

(2.4b)式に対しても同様の操作を行うと

$$D(p) y_M(t) = \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{c}_M^T A_M^i \right) \underline{x}_M(t) + \sum_{j=1}^d \sum_{i=j}^d \alpha_i \underline{c}_M^T A_M^{i-i} \underline{b}_M r^{(j-1)}(t) \quad (3.6)$$

を得る。ここで、(3.6)式には  $r(t)$  の微分値の項が現われているが、規範モデルの対応定数が  $d$  以上のときには、微分値の項は消える。また、 $\alpha_d = 1$  である。(3.6)式の右辺を  $-f_M(t)$  とおけば、規範モデルおよび規範入力に対する仮定より  $f_M(t)$  は有界であり、(3.4)式、(3.6)式より

$$D(p) e(t) = D(p) y(t) - D(p) y_M(t) = \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{c}^T A^i \right) \underline{x}(t) + b_d u(t) + f_M(t) \quad (3.7)$$

となる。ここでつぎの【補題 2. 1】を使い、上式の右辺第 1 項が状態変数フィルタ出力で表現できることを示す。

【補題 2. 1】

$\underline{c}^T A^i \underline{x}(t)$  ( $i=0, \dots, d$ ) はある定数ベクトル  $\underline{\rho}_i$ ,  $\underline{\sigma}_i$  によって

$$\begin{aligned} \underline{c}^T A^i \underline{x}(t) &= \underline{z}_1^T(t) \underline{\rho}_i + \underline{z}_2^T(t) \underline{\sigma}_i \\ &\quad + \sum_{k=1}^{i-1} (\underline{c}^T \underline{\rho}_k) \underline{c}^T K^{i-k-1} \exp(Kt) \underline{x}_0 \\ &\quad + \underline{c}^T K^i \exp(Kt) \underline{x}_0, \quad i=1, \dots, d \end{aligned} \quad (3.8a)$$

$$\underline{c}^T \underline{x}(t) = \underline{z}_1^T(t) \underline{\rho}_0 + \underline{z}_2^T(t) \underline{\sigma}_0 + \underline{c}^T \exp(Kt) \underline{x}_0 \quad (3.8b)$$

と表現できる。ただし、

$$\underline{\rho}_k = K \underline{\rho}_{k-1} + (\underline{c}^T \underline{\rho}_{k-1}) \underline{\rho}_0, \quad \underline{\rho}_0 = \underline{a} - \underline{k} \quad (3.9a)$$

$$\underline{\sigma}_k = K \underline{\sigma}_{k-1} + (\underline{c}^T \underline{\rho}_{k-1}) \underline{\sigma}_0, \quad \underline{\sigma}_0 = \underline{b} \quad (3.9b)$$

である。(証明は<付録2.1>に示す。)

そこで

$$\underline{z}_{12}^T(t) = (\underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)) \quad (3.10)$$

$$\underline{\gamma}^T = \left( \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{\rho}_i^T, \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{\sigma}_i^T \right) \quad (3.11)$$

とおき、[補題2.1]を用いれば

$$D(p) e(t) = \underline{\gamma}^T \underline{z}_{12}(t) + b_d u(t) + f_M(t) + g_0(t) \quad (3.12)$$

となる。(3.12)式が誤差方程式である。ここに $\underline{\gamma}$ 、 $b_d$ は未知定数であり

$$g_0(t) = \sum_{i=0}^d \alpha_i \underline{c}^T K^i \exp(Kt) \underline{x}_0 \\ + \sum_{i=1}^d \sum_{k=0}^{i-1} \alpha_i (\underline{c}^T \underline{\rho}_k) \underline{c}^T K^{i-k-1} \exp(Kt) \underline{x}_0 \quad (3.13)$$

である。

つぎに、微分演算子を用いないで適応制御系を構成するために以下のフィルタをおく。

$$\dot{\underline{z}}_i(t) = L \underline{z}_i(t) + \underline{\tilde{b}} z_i(t), \quad i=1, \dots, 2n \quad (3.14a)$$

$$\dot{\underline{u}}(t) = L \underline{u}(t) + \underline{\tilde{b}} u(t) \quad (3.14b)$$

ただし $z_i(t)$ は(3.10)式の $\underline{z}_{12}(t)$ の第 $i$ 番目の要素を表わす。また、各フィルタの初期値は $\underline{0}$ である。さらに

$$L = \begin{bmatrix} -\alpha_{d-1} & I_{d-1} \\ \vdots & \\ -\alpha_0 & 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{b}}^T = [0, \dots, 0, 1] \quad (3.15)$$

であり、 $L$ は安定となるように、その要素が選ばれており、(3.5b)式と(3.15)式から、 $\min \lambda [L] = \lambda [D]$ である。(3.14a)式のフィルタの第1要素を上から並べたベクトルを $\tilde{\underline{z}}$ 、(3.14b)式の $\tilde{\underline{u}}$ の第1要素を $\tilde{u}$ とおいて、同定機構をつぎのように構成する。

$$\hat{y}(t) = \hat{\beta}(t) \tilde{u}(t) + \hat{\underline{\gamma}}^T(t) \tilde{\underline{z}}(t) \quad (3.16)$$

ただし、 $\hat{\beta}(t)$ 、 $\hat{\underline{\gamma}}(t)$ はそれぞれ $b_d$ 、 $\underline{\gamma}$ の同定値である。

未知パラメータは指数減衰的収束性を有する調整則(10)を用いて、つぎのように調整する。

$$\dot{\underline{\eta}}(t) = -\phi R^{-1}(t) \underline{\eta}(t), \quad \phi > 0 \quad (3.17)$$

$$\dot{\underline{\eta}}(t) = -(\phi + \psi) \underline{\eta}(t) + \epsilon(t) \tilde{\underline{z}}(t), \quad \phi > 0 \quad (3.18)$$

$$\dot{R}(t) = -\phi R(t) + \tilde{\underline{z}}(t) \tilde{\underline{z}}^T(t), \quad R(0) > 0 \quad (3.19)$$

ここで、 $\epsilon(t)$ は拡張誤差であり

$$\epsilon(t) = \hat{y}(t) - y(t) \quad (3.20)$$

で定義され、さらに

$$\underline{\zeta}^T(t) = [\hat{\beta}(t) - b_d, (\hat{\underline{\gamma}}(t) - \underline{\gamma})^T] \quad (3.21a)$$

$$\tilde{\underline{z}}^T(t) = [\tilde{u}(t), \tilde{\underline{z}}^T(t)] \quad (3.21b)$$

である。また、後述の制御入力の与え方に関連し、 $\hat{\beta}(t)$ が0に近い値をとるとき、制御入力が大きくなることを回避するため、十分小さい正数 $b_m$ を決め、 $|\hat{\beta}(t)| < b_m$ のときには $\hat{\beta}_0(t) = b_m \operatorname{sgn}(\hat{\beta}(t))$ 、 $|\hat{\beta}(t)| \geq b_m$ のときには $\hat{\beta}_0(t) = \hat{\beta}(t)$ とする。

なお、 $\tilde{\underline{g}} = [1, 0, \dots, 0]^T$ とおき

$$\dot{\underline{k}}(t) = L \underline{k}(t) + \tilde{\underline{b}} g_0(t), \quad \tilde{\underline{g}}(t) = \tilde{\underline{c}}^T \underline{k}(t), \quad \underline{k}(0) = \underline{0} \quad (3.22a)$$

$$\dot{\underline{f}}(t) = L \underline{f}(t) + \tilde{\underline{b}} f_M(t), \quad \tilde{\underline{f}}(t) = \tilde{\underline{c}}^T \underline{f}(t), \quad \underline{f}(0) = \underline{0} \quad (3.22b)$$

なるフィルタを考えれば  $\tilde{f}(t)$  は  $-y_M(t)$  に等しくなり、(3.12)式より

$$e(t) = \underline{\gamma}^T \underline{\tilde{z}}(t) + b_d \tilde{u}(t) - y_M(t) + \tilde{g}(t) + \varepsilon_0(t) \quad (3.23)$$

であるから

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) = & (\hat{\beta}(t) - b_d) \tilde{u}(t) + (\hat{\underline{\gamma}}(t) - \underline{\gamma})^T \underline{\tilde{z}}(t) \\ & - \tilde{g}(t) - \varepsilon_0(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

となる。ここに、 $\varepsilon_0(t)$  は

$$D(p) \varepsilon_0(t) = 0 \quad (3.25)$$

となる  $e(t)$  の初期値の項である。また、 $\varepsilon_1(t) = \tilde{g}(t) + \varepsilon_0(t)$  とおくと、(3.13)、(3.25)式より  $\varepsilon_1$  は任意の  $\lambda$  ( $0 < \lambda < \lambda_1$ ) に対し、ある正定数  $M_1$  が存在して、次式で評価される。

$$|\varepsilon_1(t)| \leq M_1 \exp(-\lambda t) \quad (3.26a)$$

$$\lambda_1 = \min \{ \min \Lambda [K], \min \Lambda [L] \} \quad (3.26b)$$

このとき、 $\varepsilon_1$  は減衰度  $\lambda_1$  で指数減衰するという。

最後に制御入力  $u(t)$  は(3.12)式右辺の未知パラメータを同定パラメータでおきかえ、 $\varepsilon_0(t)$  を0とした式が0となるように、すなわち

$$\hat{\beta}_0(t) u(t) + \hat{\underline{\gamma}}^T(t) \underline{z}_{12}(t) + f_M(t) = 0 \quad (3.27a)$$

より、次式で与える。

$$u(t) = - \frac{\hat{\underline{\gamma}}^T(t) \underline{z}_{12}(t) + f_M(t)}{\hat{\beta}_0(t)} \quad (3.27b)$$

以上まとめると、本章で提案するMRACSは状態変数フィルタ(3.2)式、フィルタ(3.14)式、同定機構(3.16)式、パラメータ調整機構(3.17)～(3.19)式、制御入力(3.27)式で構成される。その構成を図2.1に示す。



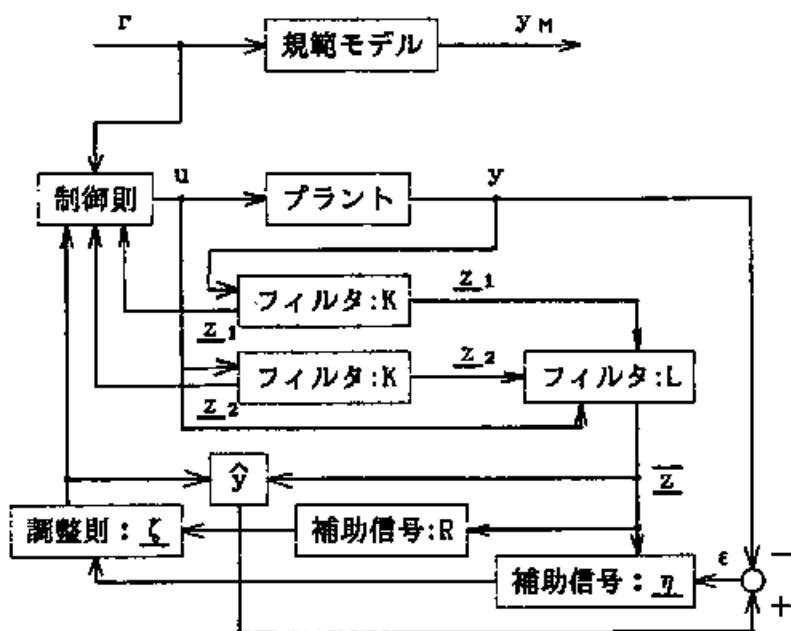


図 2. 1 MRACS の構成概要

## 2.4 信号の有界性と誤差の指数減衰性

本節ではゲイン行列  $R^{-1}(t)$  に関する2つの補題を示し、それを使って  $u(t)$ 、 $\underline{z}(t)$  の有界性と出力誤差  $e(t)$  の指数減衰性を証明する。

証明をわかりやすくするよう伝達関数表記をとっているため、はじめにプラントの伝達関数を  $B(p)/A(p)$ 、規範モデルの伝達関数を  $B_M(p)/A_M(p)$ 、状態変数フィルタの特性多項式を  $K(p)$  と表わしておく。

まず、信号  $\underline{z}(t)$  は十分一般的であると仮定する。すなわち、ある  $T > 0$ 、 $\omega > 0$  が存在して、すべての  $t \geq T$  に対して

$$\int_{t-T}^t \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau > \omega I \quad (4.1)$$

が成立すると仮定する。これは、制御入力  $u(t)$  が十分一般的、すなわち、周波数成分を  $(n+1)$  個以上含んでいれば満足される条件である（証明は〈付録 2.2〉に示す）。この仮定のもとでゲイン行列  $R^{-1}(t)$  に関する2つの補題が成立する。

### [補題 2.2]

$t \geq T$  でゲイン行列  $R^{-1}(t)$  は存在しかつ有界である。

(証明)

$R(0) > 0$ 。すなわち正定値のとき、(3.19)式より  $t \geq T$  で

$$\begin{aligned} R(t) &= \exp(-\phi t) R(0) \\ &\quad + \int_0^t \exp(-\phi(t-\tau)) \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau \\ &> \int_{t-T}^t \exp(-\phi(t-\tau)) \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau \\ &> \omega \exp(-\phi T) I \end{aligned} \quad (4.2)$$

よって  $t \geq T$  で  $R(t)$  は正定で、ゲイン行列  $R^{-1}(t)$  が存在する。

また、ゲイン行列  $R^{-1}(t)$  は正定な対称行列であるから (4.2)式より

$$\|R^{-1}(t)\| = \max A [R^{-1}(t)] = \frac{1}{\min A [R(t)]}$$

$$< \frac{1}{\omega \exp(-\phi T)} \quad (4.3)$$

である。よって  $\|R^{-1}(t)\|$  は有界である。■

つぎに、[補題 2.4] を証明するために必要な [補題 2.3] を示す。

[補題 2.3]

$h(t) \geq 0$  が減衰度  $\mu_2$  で指数減衰するとする。すなわち、任意の  $\mu$  ( $0 < \mu < \mu_2$ ) に対し、正定数  $C_1$  により  $h(t) < C_1 \exp(-\mu t)$  が成り立つとする。さらに  $V(t) > 0$  がつぎの不等式を満たすとする。

$$\dot{V}(t) < -\mu_1 V(t) + h(t), \quad \mu_1 > 0 \quad (4.4)$$

このとき、 $V(t)$  は減衰度  $\mu_3 = \min\{\mu_1, \mu_2\}$  で指数減衰する。すなわち、任意の  $\mu < \mu_3$  に対し定数  $C_2$  で次式が成り立つ。

$$V(t) \leq C_2 \exp(-\mu t) \quad (4.5)$$

(証明)

$$q(t) = \dot{V}(t) + \mu_1 V(t) \quad (4.6)$$

とおくと、 $\mu_3 \leq \mu_2$  だから、任意に与えられた  $\mu < \mu_3$  に対して、 $\mu < \bar{\mu}_2 < \mu_2$  となる  $\bar{\mu}_2$  が存在して  $q(t) < h(t) < C_1 \exp(-\bar{\mu}_2 t)$  となり、(4.6)式の解は

$$V(t) = \exp(-\mu_1 t) V(0) + \int_0^t \exp(-\mu_1(t-\tau)) q(\tau) d\tau$$

$$\leq \exp(-\mu_1 t) V(0)$$

$$+ C_1 \int_0^t \exp(-\mu_1(t-\tau)) \exp(-\bar{\mu}_2 \tau) d\tau \quad (4.7)$$

となる。  $\mu_1 \neq \bar{\mu}_2$  のとき、上式右辺第2項は

$$\frac{C_1 \{ \exp(-\bar{\mu}_2 t) - \exp(-\mu_1 t) \}}{\mu_1 - \bar{\mu}_2}$$

となり、

$$C_2 = 3 \times \max \left\{ V(0), \frac{C_1}{\mu_1 - \bar{\mu}_2} \right\}$$

とおくと (4.5)式は満たされる。  $\mu_1 = \bar{\mu}_2$  のときは、第2項は

$$C_1 t \exp(-\mu_1 t)$$

となり、やはり適当な定数  $C_2$  により (4.5)式は満たされる。 ■

#### 【補題 2.4】

同定誤差ベクトル  $\underline{\zeta}(t)$  を使い、  $\underline{\delta}(t)$  を

$$\underline{\delta}(t) = \underline{z}(t) - R(t) \underline{\zeta}(t) \tag{4.8}$$

とおくと、  $R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)$  は減衰度  $\lambda_2 = \min \{ \lambda_1, \phi/2 \}$  で指数減衰する。

(証明)

リアプノフ関数を

$$V_1(t) = \frac{1}{2} \underline{\delta}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t) + \frac{1}{2} \int_t^\infty \varepsilon_1^2(\tau) d\tau \tag{4.9}$$

とおくと、  $\varepsilon_1$  は(3.26)式より指数減衰するから右辺第2項は

$$\int_t^\infty \varepsilon_1^2(\tau) d\tau < \frac{M_1^2 \exp(-2\lambda t)}{2\lambda}, \quad \lambda < \lambda_1 \tag{4.10}$$

より、減衰度  $2\lambda_1$  で指数減衰するので、  $V_1(t) \geq 0$  は定義可能である。

さて、(3.17)~(3.19), (4.8)式より

$$\dot{\underline{\delta}}(t) = -\phi \underline{\delta}(t) - \varepsilon_1(t) \underline{z}(t) \tag{4.11}$$

となる。また、 $R^{-1}(t)$  が存在するから、 $R^{-1}(t) \cdot R(t) = I$  を  $t$  で微分して、(3.19)式を代入すると

$$\dot{R}^{-1}(t) = \phi R^{-1}(t) - R^{-1}(t) \underline{z}(t) \underline{z}^T(t) R^{-1}(t) \quad (4.12)$$

である。そこで、(4.11)、(4.12)式を使うと

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &= -\phi \frac{\underline{\delta}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)}{2} \\ &\quad - \frac{(\underline{z}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t) + \epsilon_1(t))^2}{2} \\ &= -\phi V_1(t) + \frac{1}{2} \int_t^\infty \epsilon_1^2(\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{(\underline{z}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t) + \epsilon_1(t))^2}{2} \quad (4.13) \end{aligned}$$

である。よって  $\dot{V}_1(t)$  はつねに負だから  $V_1(t)$  は単調減少となり、かつ正だから収束し有界である。上式の右辺の第2項は(4.10)式より  $2\lambda_1$  で指数減衰し、また第3項はつねに負だから、右辺は第1項と第2項の和より小さい。よって、[補題 2.3]より、 $V_1(t)$  は減衰度  $2\lambda_2 = \min\{\phi, 2\lambda_1\}$  で指数減衰する。(4.9)式より  $\underline{\delta}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)$  も  $2\lambda_2$  で指数減衰する。

さて、 $R^{-1}(t)$  は正定対称行列だから  $S^2(t) = R^{-1}(t)$  となる正定対称行列  $S(t)$  が存在する。したがって、(4.3)式より

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \max \Lambda [S(t)] \\ &= \sqrt{\max \Lambda [R^{-1}(t)]} \\ &< \frac{1}{\sqrt{\omega \exp(-\phi T)}} \quad (4.14) \end{aligned}$$

である。これを使うと

$$\|R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)\| \leq \|S(t)\| \|S(t) \underline{\delta}(t)\|$$

$$< \frac{\sqrt{\underline{\delta}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)}}{\sqrt{\omega \exp(-\phi T)}} \quad (4.15)$$

となる。よって、 $\|R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)\|$  は  $\lambda_2$  で指数減衰する。■

この2つの補題を用い、 $\underline{\zeta}(t)$  の指数減衰性が示される。

### 《定理 2. 1》

パラメータ同定誤差  $\underline{\zeta}(t)$  は、信号が十分一般的、すなわち (4.1) 式が成り立つとき  $t \geq T$  において減衰度

$$\lambda_0 = \min \{ \phi, \phi/2, \min \Lambda [K], \min \Lambda [L] \}$$

で指数減衰する。

### (証明)

$V_2(t) = \|\underline{\zeta}(t)\|$  とおく。すなわち

$$\frac{V_2^2(t)}{2} = \frac{\underline{\zeta}^T(t) \underline{\zeta}(t)}{2} \quad (4.16)$$

とおく。上式の両辺を  $t$  で微分して

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{V_2^2(t)}{2} \right) &= V_2(t) \dot{V}_2(t) \\ &= \underline{\zeta}^T(t) \dot{\underline{\zeta}}(t) \\ &= -\phi \underline{\zeta}^T(t) \underline{\zeta}(t) - \phi \underline{\zeta}^T(t) R^{-1}(t) \underline{\delta}(t) \\ &\leq -\phi V_2^2(t) + \phi V_2(t) \|R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)\| \quad (4.17) \end{aligned}$$

を得る。 $V_2(t) = 0$  のときは  $\underline{\zeta}(t) = \underline{0}$  であるから除くことができ、 $V_2(t) > 0$  としてよいから両辺を  $V_2(t)$  で割ることができ、また [補題 2. 4] から  $\|R^{-1}(t) \underline{\delta}(t)\|$  が減衰度  $\lambda_2 = \min \{ \lambda_1, \phi/2 \}$  で指数減衰するから、[補題 2. 3] が

適用できて  $V_2(t)$  は減衰度

$$\lambda_0 = \min\{\phi, \lambda_2\} = \min\{\phi, \phi/2, \min \Lambda[K], \min \Lambda[L]\}$$

で指数減衰し、 $\underline{z}(t)$  の減衰度  $\lambda_0$  で指数減衰性が示された。■

以上の議論により MRACS を表現する微分方程式の解に沿って、 $\underline{z}(t)$  の指数減衰性が示され、 $\hat{\beta}(t)$ 、 $\hat{\gamma}(t)$  の有界性が示された。また  $[\underline{x}^T(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  は  $\hat{\beta}(t)$ 、 $\hat{\gamma}(t)$  を係数に含み、 $r(t)$  を入力とする線形常微分方程式系の解とみなすことができるから、 $0 \leq t < \infty$  で解  $[\underline{x}^T(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  が存在する(1)。

また、制御入力(3.27)式において、 $\hat{\beta}(t) \neq 0$  の場合には  $\hat{\beta}(t)$  を  $b_m \operatorname{sgn}(\hat{\beta}(t))$  で代用したが、 $\hat{\beta}(t)$  は  $b_d$  に減衰度  $\lambda_0$  で指数減衰するので、定数  $M'$  により

$$|\hat{\beta}(t) - b_d| \leq M' \exp(-\lambda_0 t), \quad \lambda_0 < \lambda_0 \quad (4.18)$$

となる。また、 $b_m$  は十分小さいので  $b_m < |b_d|$  と考えてよく、ある時刻  $T'$  があって  $t > T'$  では

$$\hat{\beta}(t) > b_d - M' \exp(-\lambda_0 t) > b_m, \quad (b_d > 0 \text{ の場合}) \quad (4.19a)$$

$$\hat{\beta}(t) < b_d + M' \exp(-\lambda_0 t) < -b_m, \quad (b_d < 0 \text{ の場合}) \quad (4.19b)$$

となり、いずれの場合も  $|\hat{\beta}(t)| > b_m$  が成立し、 $\hat{\beta}_0(t) = \hat{\beta}(t)$  となる。

以下の  $\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  の有界性の証明は  $t > T'$  で考える。

### 《定理 2. 2》

$\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  は有界である。

(証明)

$$\tilde{y}(t) = D(p) y(t) \quad (4.20)$$

とおくと(3.12), (3.21), (2.4) 式より

$$\tilde{y}(t) = \underline{y}^T \underline{z}_{12}(t) + b_d u(t) - D(p) y_M(t) + D(p) y_M(t)$$

$$\begin{aligned}
& + g_0(t) \\
& = -\underline{f}^T(t) \underline{z}(t) + D(p) A_M^{-1}(p) B_M(p) r(t) + g_0(t)
\end{aligned} \tag{4.21}$$

となる。ここで、 $\underline{f}(t)$  は  $\lambda_0$  で、 $g_0(t)$  は  $\min \Lambda [K]$  で指数減衰し、 $r(t)$  は一様有界だから、任意の  $\lambda_3$  ( $0 < \lambda_3 < \lambda_0$ )、 $\lambda_4$  ( $0 < \lambda_4 < \min \Lambda [K]$ ) に対し、定数  $M_2 \sim M_4$  により  $\tilde{y}(t)$  が次式で評価される。

$$\| \tilde{y}(t) \| \leq M_2 \exp(-\lambda_3 t) \| \underline{z}(t) \| + M_3 + M_4 \exp(-\lambda_4 t) \tag{4.22}$$

さて、 $\tilde{y}(t)$  を用いて、 $\underline{z}(t)$  の各成分  $u(t)$ 、 $\underline{z}_1(t)$ 、 $\underline{z}_2(t)$  は

$$u(t) = A(p) B^{-1}(p) D^{-1}(p) \tilde{y}(t) \tag{4.23a}$$

$$\underline{z}_1(t) = K^{-1}(p) \underline{p} D^{-1}(p) \tilde{y}(t) \tag{4.23b}$$

$$\underline{z}_2(t) = K^{-1}(p) \underline{p} A(p) B^{-1}(p) D^{-1}(p) \tilde{y}(t) \tag{4.23c}$$

と表わされる。ここで

$$\underline{p}^T = [ p^{n-1}, \dots, p, 1 ]$$

である。よって、 $\underline{z}(t)$  は  $\tilde{y}(t)$  を入力とするある線形系の出力である。この線形系を状態方程式で表現すると、適当な行列  $P$ 、 $Q$ 、ベクトル  $\underline{v}$ 、 $\underline{w}$ 、状態変数  $\underline{x}(t)$  を用いて

$$\dot{\underline{x}}(t) = P \underline{x}(t) + \underline{v} \tilde{y}(t) \tag{4.24a}$$

$$\underline{z}(t) = Q \underline{x}(t) + \underline{w} \tilde{y}(t) \tag{4.24b}$$

となり、この解は

$$\begin{aligned}
\underline{z}(t) = & Q \exp(P t) \underline{x}(0) \\
& + \int_0^t Q \exp(P(t-\tau)) \underline{v} \tilde{y}(\tau) d\tau + \underline{w} \tilde{y}(t)
\end{aligned} \tag{4.25}$$



である。この線形系の極、すなわち  $P$  の固有値は (4.23) 式より、 $K(p)$ 、 $B(p)$ 、 $D(p)$  の特性根であり、次式の  $\lambda_5$  は正となる。

$$\lambda_5 = \min\{\lambda[K], \lambda[B], \lambda[D]\} > 0 \quad (4.26)$$

このとき、定数  $M_5$  により、次式が成立する (12)。

$$\|\exp(Pt)\| \leq M_5 \exp(-\lambda_5 t), \quad 0 < \lambda_5 < \lambda_6 \quad (4.27)$$

(4.22), (4.27) 式を用いて (4.25) 式を評価すると、定数  $M_6 \sim M_8$  を使い

$$\begin{aligned} \|\underline{z}(t)\| &\leq M_6 \exp(-\lambda_6 t) \\ &+ \int_0^t M_7 \exp(\lambda_6(t-\tau)) \{M_2 \exp(-\lambda_3 \tau) \|\underline{z}(\tau)\| \\ &\quad + M_3 + M_4 \exp(-\lambda_4 \tau)\} d\tau \\ &+ M_8 \{M_2 \exp(-\lambda_3 t) \|\underline{z}(t)\| \\ &\quad + M_3 + M_4 \exp(-\lambda_4 t)\} \end{aligned} \quad (4.28)$$

となる。上式右辺第2項において、 $\lambda_7 = \min\{\lambda_3, \lambda_4, \lambda_6\}$  とおくと

$$\begin{aligned} \text{第2項} &\leq M_7 \int_0^t \{M_2 \exp(-\lambda_7 t) \|\underline{z}(\tau)\| \\ &\quad + M_3 \exp(-\lambda_7(t-\tau)) + M_4 \exp(-\lambda_7 t)\} d\tau \\ &\leq M_7 M_2 \exp(-\lambda_7 t) \int_0^t \|\underline{z}(\tau)\| d\tau \\ &\quad + M_7 M_3 \left(\frac{1 - \exp(-\lambda_7 t)}{\lambda_7}\right) + M_7 M_4 t \exp(-\lambda_7 t) \end{aligned} \quad (4.29)$$

と評価されるので、 $\lambda_8$  を  $0 < \lambda_8 < \lambda_7$  とし、定数  $M_9$ 、 $N_1$ 、 $N_2$  を使えば、

(4.28)式の  $\|\underline{z}(t)\|$  は次式で評価される。

$$\begin{aligned} \|\underline{z}(t)\| &\leq M_0 + N_1 \exp(-\lambda_0 t) \|\underline{z}(t)\| \\ &\quad + N_2 \int_0^t (\exp(-\lambda_0 \tau)) \|\underline{z}(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (4.30)$$

よって、

$$\begin{aligned} (1 - N_1 \exp(-\lambda_0 t)) \|\underline{z}(t)\| &\leq M_0 + N_2 \int_0^t (\exp(-\lambda_0 \tau)) \|\underline{z}(\tau)\| d\tau \end{aligned} \quad (4.31)$$

が成立する。そして、十分大きい  $t$  では定数  $N_0$  により

$$1 - N_1 \exp(-\lambda_0 t) > N_0 > 0 \quad (4.32)$$

としてよいので、(4.31)式の右辺第2項を  $V_0(t)$  とおくと

$$\begin{aligned} \dot{V}_0(t) &= -\lambda_0 N_2 \exp(-\lambda_0 t) \int_0^t \|\underline{z}(\tau)\| d\tau \\ &\quad + N_2 \exp(-\lambda_0 t) \|\underline{z}(t)\| \\ &\leq -\lambda_0 V_0(t) + N_2 \exp(-\lambda_0 t) \frac{\{M_0 + V_0(t)\}}{N_0} \end{aligned} \quad (4.33)$$

となる。さらに、十分大きい  $t$  では

$$-\lambda_0 + \frac{N_2 \exp(-\lambda_0 t)}{N_0} < -\lambda_0 < 0 \quad (4.34)$$

となる  $\lambda_0$  を選ぶことができるから

$$\dot{V}_0(t) \leq -\lambda_0 V_0(t) + \frac{M_0 N_2 \exp(-\lambda_0 t)}{N_0} \quad (4.35)$$

である。よって、 $\lambda_0 < \lambda_*$  だから、[補題2.3]より定数  $N_4$  により

$$V_3(t) \leq N_4 \exp(-\lambda t), \quad 0 < \lambda < \lambda_0 \quad (4.36)$$

を得る。(4.31)式に(4.32)式と(4.36)式を使うと

$$\| \underline{z}(t) \| \leq \frac{M_3 + N_4 \exp(-\lambda t)}{N_3} \quad (4.37)$$

である。 $\| \underline{z}(t) \|$ は連続だから、 $t=0$  から(4.32)、(4.34)式の成立する有限時刻の  $t$  までは有界であり、それ以降の  $t$  については、(4.37)式より有界である。■

最後に、出力誤差  $e(t)$  の指数減衰性を示す。

### 《定理 2. 3》

信号  $\underline{z}(t)$  が十分一般的すなわち(4.1)式が成り立つとき、出力誤差  $e(t)$  は  $t \geq T$  において減衰度

$$\lambda_0 = \min \{ \phi, \phi/2, \min \Lambda [K], \min \Lambda [L] \}$$

で指数減衰する。

(証明)

(3.12)、(3.27)式より

$$D(p) e(t) = \underline{\zeta}^T(t) \underline{z}(t) + g_0(t) \quad (4.38)$$

であり、 $\underline{\zeta}(t)$  は減衰度  $\lambda_0$  で指数減衰し、 $\underline{z}(t)$  は有界だから、 $e(t)$  も減衰度  $\lambda_0$  で指数減衰する。■

## 2. 5 数値シミュレーション

前節までの理論を確認するために行った数値シミュレーションについて述べる。特に、プラントの不安定度が適応調整則の指数減衰度より大きい場合にも、閉ループ系が安定となることを確認するため、このような場合について行った。

制御対象のプラントおよび規範モデルはともに次数  $n = 2$ 、対応定数  $d = 2$  で、

表 2. 1 に示すパラメータ値で、調整則の減衰度が 3.0, 2.0, 1.0 の 3 つの場合について、シミュレーションを行った。プラントは極が  $-2.0, 2.1$  にあって、不安定である。したがって、減衰度が 2.0, 1.0 の場合には、減衰度よりプラントの不安定度が大きく、天野ら(8)の方法では安定性が保証されない。図 2. 2 にプラント出力と規範モデル出力を、図 2. 3 に出力誤差を示す。プラントの不安定度が大きいため、初期に出力誤差が非常に大きくなっているが、調整則の指数減衰度が小さい場合でも、最終的にはプラント出力は規範出力を追従し、閉ループ系の安定性が保証されていることがわかる。また、指数減衰度が大きくなるにしたがって、追従特性も改善されることが確認できる。

## 2. 6 結言

本章では出力誤差が指数減衰し、かつその減衰度が設計パラメータによって指定可能な MRACS の構成方法を示し、閉ループ系の全信号の有界性と出力誤差の指数減衰性を証明した。この MRACS の特徴は、

- 1) フィルタおよび誤差モデルの特性を任意に与えることができ、その結果、出力誤差の減衰度を設計者が任意に設定できること、
  - 2) プラントの不安定度がパラメータ調整則の減衰度より大きくても適用できること、
  - 3) プラントのゲインが未知でも適用できること、
  - 4) 入力依存性の問題が生じないこと、
- などである。

本章の証明ではフィルタ信号の十分一般性を仮定した。この条件は制御入力が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもてば満足される。規範入力に対する条件は明らかではないが、制御入力と同様に  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもつことと推測される。

## 2. 7 付録

### <付録 2. 1>

(補題 2. 1 の証明)

数学的帰納法によって証明する。

1)  $i=0$  のとき文献(10)より明らか。

2)  $i=k-1$  ( $k < d$ ) のとき成立を仮定する。すると、 $i=k$  のとき(3.3a)式より

$$y^{(k)}(t) = \underline{c}^T A^k \underline{x}(t) \quad (A1.1)$$

である。上式と  $i=k-1$  のときの仮定より

$$\begin{aligned} y^{(k-1)}(t) &= \underline{z}_1^T(t) \underline{\rho}_{k-1} + \underline{z}_2^T(t) \underline{\sigma}_{k-1} \\ &+ \sum_{i=1}^{k-2} (\underline{c}^T \underline{\rho}_i) \underline{c}^T K^{k-1-i} \exp(Kt) \underline{x}_0 \\ &+ \underline{c}^T K^{k-1} \exp(Kt) \underline{x}_0 \end{aligned} \quad (A1.2)$$

となる。上式を微分し(3.2)式を代入すれば

$$\begin{aligned} y^{(k)}(t) &= \underline{z}_1^T(t) \underline{\rho}_k + \underline{z}_2^T(t) \underline{\sigma}_k \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} (\underline{c}^T \underline{\rho}_i) \underline{c}^T K^{k-i-1} \exp(Kt) \underline{x}_0 \\ &+ \underline{c}^T K^k \exp(Kt) \underline{x}_0 + \underline{c}^T \underline{\sigma}_{k-1} u(t) \end{aligned} \quad (A1.3)$$

である。[補題A2.1]を使えば上式右辺第5項は0となるので、 $i=k$  のときの成立がいえる。

3)  $i=d$  のときは[補題A2.1]より(A1.3)式の  $\underline{c}^T \underline{\sigma}_{d-1}$  が  $\underline{c}^T A^{d-1} \underline{b}$  に等しくなることと(3.3b)式より成立がいえる。■

[補題A2.1]

$$\underline{c}^T \underline{\sigma}_i = \underline{c}^T A^i \underline{b}, \quad i=0, \dots, d-1 \quad (A1.4)$$

(証明)

$i=0$  のとき  $\underline{\sigma}_0$  の定義より成立は明らか。

$i>0$  のとき  $\underline{\sigma}_i$  の定義と対応定数の定義より

$$\underline{c}^T \underline{\sigma}_i = \underline{c}^T K \underline{\sigma}_{i-1} + (\underline{c}^T \underline{\rho}_{i-1}) \underline{c}^T \underline{b}$$

$$= \underline{c}^T K \underline{a}_{i-1} = \underline{c}^T K^i \underline{b} \quad (\text{A1.5})$$

である。一方、対応定数の定義から

$$\underline{c}^T \underline{b} = \dots = \underline{c}^T A^{d-2} \underline{b} = 0 \quad (\text{A1.6a})$$

$$\underline{c}^T A^{d-1} \underline{b} = b_d \quad (\text{A1.6b})$$

であり、これらは  $\underline{b}$  の要素だけに依存し  $A$  の要素にはよらない。また  $A$  と  $K$  とは構造が一致しているので (A1.5) 式の右辺は (A1.4) 式の右辺に一致する。■

## <付録 2.2>

(制御入力  $u$  が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもてば、(4.1)式が成り立つ。)

(証明)

ベクトル  $\underline{\lambda}^T = [\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{2n}]$  によって、

$$\lambda_0 u(t) + \lambda_1 z_1(t) + \dots + \lambda_{2n} z_{2n}(t) = 0 \quad (\text{A2.1})$$

となったとする。(3.1)式の  $\underline{k}^T = [k_1, \dots, k_n]$  について

$$K(p) = p^n - k_1 p^{n-1} - \dots - k_n \quad (\text{A2.2})$$

とおくと

$$z_1(t) = \frac{p^{n-1} y(t)}{K(p)}, \quad z_{n+i}(t) = \frac{p^{n-i} u(t)}{K(p)}, \quad i=1, \dots, n \quad (\text{A2.3})$$

であり、またプラントの伝達関数から  $\underline{a}^T = [a_1, \dots, a_n]$  について

$$A(p) = p^n - a_1 p^{n-1} - \dots - a_n \quad (\text{A2.4})$$

とおくと

$$y(t) = \frac{b_d p^{n-d} + \dots + b_n}{A(p)} u(t) \quad (\text{A2.5})$$

である。(A2.3), (A2.5) 式を (A2.1) 式に代入し、 $K(p) A(p)$  を乗じれば (A2.1) 式は

$u(t)$  に関する  $2n$  次の微分方程式となり、第  $2n$  次の係数は  $\lambda_0$  である。このとき、 $u(t)$  が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもっていれば上述の  $2n$  次の微分方程式の各係数は 0 であり、 $\lambda_0 = 0$  となる。またそのとき、プラントの可制御性から他の  $\lambda_i$  ( $i = 1, \dots, 2n$ ) も 0 となる (13)。すなわち、 $[u(t), \underline{z}_{12}^T(t)] = [u(t), z_1(t), \dots, z_{2n}(t)]$  の各成分は 1 次独立となる。さらに

$$\tilde{u}(t) = \frac{1}{D(p)} u(t), \quad \tilde{\underline{z}}(t) = \frac{1}{D(p)} \underline{z}_{12}(t) \quad (\text{A2.6})$$

であるから  $\tilde{\underline{z}}(t)$  の各成分も 1 次独立となる。このとき (4.1) 式が成り立つ (14)。

表 2. 1 シミュレーションにおけるパラメータ値

プラント	$\frac{2.0}{p^2 - 0.1p - 4.2}$ 極： -2.0, 2.1		
規範モデル	$\frac{1.0}{p^2 + 5.0p + 6.0}$ 極： -3.0, -2.0		
規範入力	振幅： 10.0, 周期： 3.0 の矩形波		
シミュレーション 番号	NO. 1	NO. 2	NO. 3
減衰度	3.0	2.0	1.0
調整則： $\phi, \psi$	3.0, 6.0	2.0, 4.0	1.0, 2.0
フィルタ： $K=L$	$\begin{bmatrix} -7.0, 1 \\ -1.2, 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -5.0, 1 \\ -6.0, 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3.0, 1 \\ -2.0, 0 \end{bmatrix}$
固有値	-4.0, -3.0	-3.0, -2.0	-2.0, -1.0
制御則の正数： $b_m$	0.1		
初期値	$\hat{\beta}(0) = 10.0, R(0) = I, \text{他は } 0$		



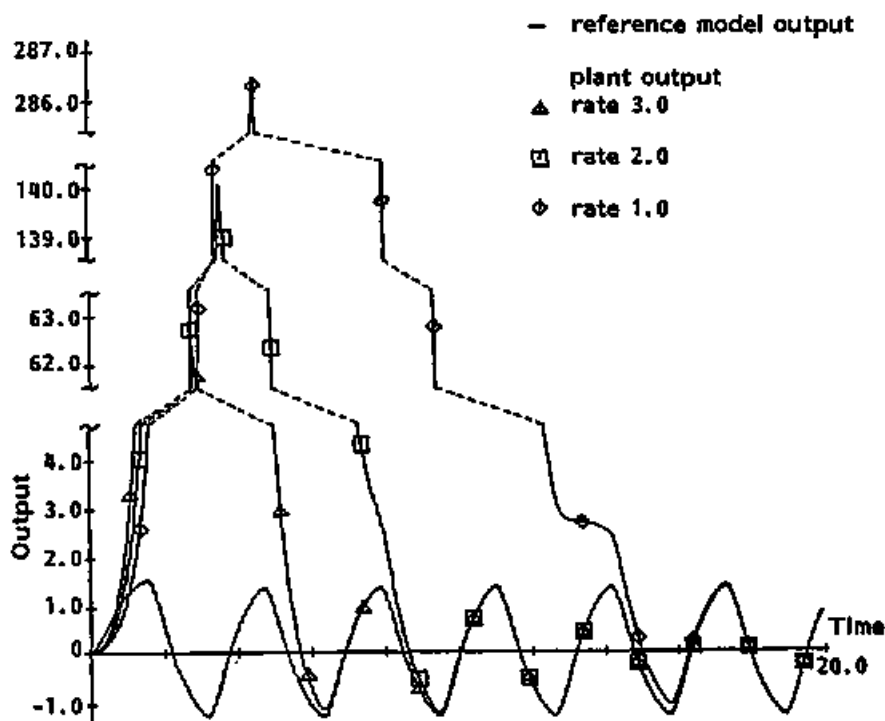


図 2. 2 基本構成のMRACSのプラント出力と規範出力

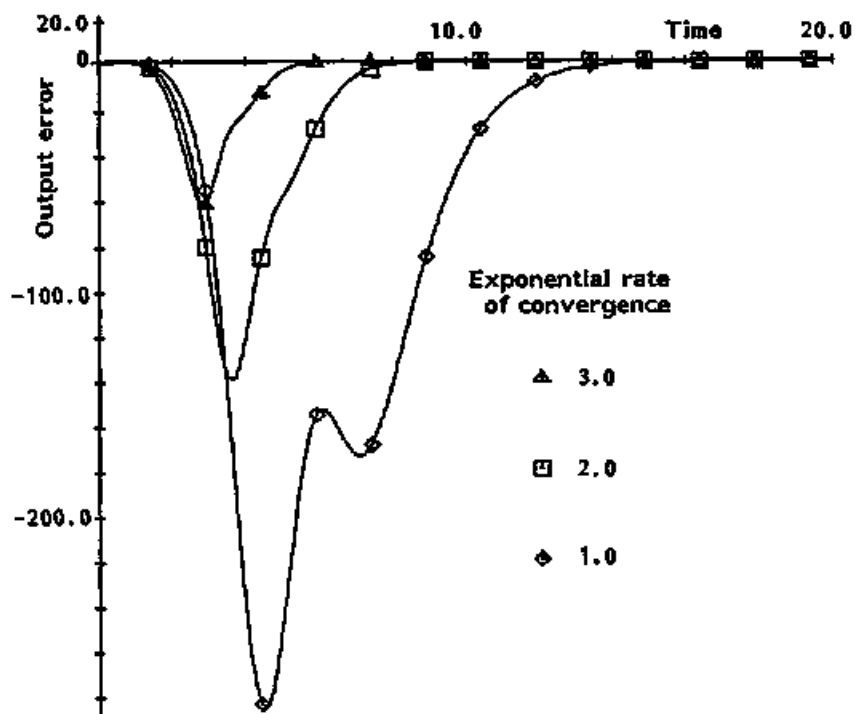


図 2. 3 基本構成のMRACSの出力誤差

### 第3章 重みつき最小2乗法調整則による 指数減衰的MRACS

#### 3.1 緒言

実用的MRACSとしては、指数減衰的収束性を有していることが不可欠であるといわれており、前章では、指数減衰的収束性があるとともに、その減衰度が設計パラメータとして、設計者により指定可能である1入出力連続時間モデル規範形適応制御系の構成方法を示した。

しかし、その構成方法によれば、制御対象の伝達関数の次数が $n$ 、その分母・分子の次数差、すなわち対応定数が $d$ のとき、適応制御系構成において $\{2n^2 + 10n + (2n + 1)d + 3\}$ 回の積分が必要である。たとえば、次数 $n = 2$ 、次数差 $d = 2$ の場合、必要な積分は41回である。実際にMRACSを構成するときには、これらの積分は制御用デジタル計算機による数値積分で行うが、計算時間を短縮し、サンプリング時間を短くして、計算精度を向上させるには、積分回数を減少させることが望ましい。特に、指数減衰形適応調整則では、同定する未知パラメータの個数の2乗に比例する積分を必要とするため、同定パラメータ個数を減らすことができれば、積分回数は大幅に減ることになる。

そこで、まず適応調整則において積分回数を減らすため、前章で必要であった $(2n + 1)$ 次元の補助信号が不要な、指数減衰的調整則を用いる。この調整則は重みつき最小2乗法から導かれる。つぎに、前章のMRACSでは拡張誤差に含まれる $(2n + 1)$ 個のパラメータを同定しなければならなかったが、本来プラントの伝達関数の未知パラメータの個数は分母多項式の $n$ 個と分子多項式の $(n - d + 1)$ 個との $(2n - d + 1)$ 個であるため、 $(2n - d + 1)$ 個だけの未知パラメータを同定する適応観測器を使えば、積分回数が減る可能性がある。そこで、 $(2n - d + 1)$ 個だけの未知パラメータを同定する適応観測器を用いて、MRACSを構成する方法を論じる。また、本章のMRACSでは、前章のMRACSで必要であった、 $d$ 次のフィルタもとりさることができ、積分回数をさらに減らせる。

$(2n - d + 1)$ 個だけの未知パラメータを同定する適応観測器を用いて、連続時間MRACSを構成する方法は、武藤ら(1)、天野ら(2)によっても研究されている。本章のMRACSは他の研究に比べてつぎのような特徴を有している。まず、 $(2n - d$

+ 1) 個だけの未知パラメータを同定する適応観測器を用いた連続時間MRACSでは、同定パラメータと誤差方程式のパラメータとの関係が複雑になるため、信号の有界性の証明が難しくなるが、ここではその有界性の証明も与えている。それに対し、武藤らの論文は有界性の証明が定性的にふれられているだけで、不十分である。また、実用的MRACSに不可欠な指数減衰性については述べられていない。つぎに、天野らの報告では、指数減衰性を有するMRACSを扱い有界性も証明しているが、それは不安定度が調整則の減衰度より小さいプラントに対してだけ有効であった。これに対して、本章のMRACSの有界性は、そのような制約なく証明されている。

また、前章のMRACS、本章の積分次数削減のMRACSいずれも、信号の有界性および出力誤差の指数減衰性を論じるにあたっては、十分一般性条件が成立することを仮定している。十分一般性条件が成り立たないときには、ゲイン行列の有界性が失われ調整則が用をなさない。また、十分一般性条件が成り立つための制御入力の条件は示されているが、規範入力に対する条件は明らかでない。制御入力は適応制御系内で算出するものであって、設計者が与えることはできないため、制御入力で条件の成立を判定することは、事前にはもちろん制御実行中にも難しい。そこで、本章ではつづいて、重みつき最小2乗法調整則に微小正定行列 $\mathbf{P}$ を導入することにより、十分一般性条件が成り立たない場合でも、ゲイン行列の有界性、出力誤差の収束性が保証されることを示し、さらに、十分一般性条件成立のもとでは指数減衰性も保存されることを明らかにする。また、指数減衰性を保証する条件が規範入力に対して与えられることを示す。

ゲイン行列の有界性を保証できる他の連続時間MRACSとしては、まず調整則のゲイン行列を固定する方法がある。しかし、この調整則では収束速度が著しく遅く、指数減衰性も保証されない(3)。収束速度もすぐれ、ゲイン行列の有界性を保証できる、他の調整則としては、漸減ゲイン調整則、固定トレースゲイン調整則がある(3-5)が、前者は逆にゲイン行列が0に漸近するため、その後にパラメータ変動が生じると、調整則が作動しにくいと考えられる。後者はここで示す調整則と類似の性質をもつと思われる。

なお、MRACSの構成方法は、伝達関数でも与えることができるため、本章では伝達関数表示によって定式化する。

以下、第3.2節で積分次数を削減したMRACSの構成方法を与え、第3.3節で十分一般性条件によらない調整則とその調整則を用いたMRACSについて述べる。また、第3.4節で両MRACSについてのシミュレーション結果を示す。

### 3. 2 積分次数削減のMRACS

#### 3. 2. 1 問題の記述

制御対象は連続時間1入出力系で伝達関数により

$$A(p) y(t) = B(p) u(t) + X_0(p) \quad (2.1)$$

と記述されているとする。ここで、 $y(t)$  は出力、 $u(t)$  は入力であり、 $A(p)$ 、 $B(p)$ 、 $X_0(p)$  は作用素ベクトル  $p_{-1}^T = [p^{l-1}, \dots, p, 1]$ 、 $p = d/dt$  を用いて、それぞれ  $p^n + p_{-n}^T \underline{a}$ 、 $p_{n-d+1}^T \underline{b}$ 、 $p_{-n}^T \underline{x}_0$  と表わされる  $n$  次、 $n-d$  次、 $n-1$  次多項式で、その係数ベクトル  $\underline{a}^T = [-a_1, \dots, -a_n]$ 、 $\underline{b}^T = [b_d, \dots, b_n]$ 、 $\underline{x}_0^T = [x_{10}, \dots, x_{n0}]$  は未知であるが、次数  $n$ 、対応定数すなわち分母・分子の次数差  $d$  は既知とする。 $X_0(p)$  は初期値  $\underline{x}_0$  による項である。 $B(p)$  は安定、すなわち、制御対象は最小位相系であるとする。

規範モデルは次式で与える。

$$A_M(p) y_M(t) = B_M(p) r(t) \quad (2.2)$$

ここで、 $y_M(t)$  は規範出力、 $r(t)$  は規範入力であり、有界かつ区分的連続とする。分母  $A_M(p)$  は安定多項式であり、分母・分子の次数差  $d_M$  は  $d$  以上とする。

本章では、出力誤差  $e(t) = y(t) - y_M(t)$  が、設計者が任意に指定する減衰度で指数減衰するように、制御入力  $u(t)$  を規範入出力  $r(t)$ 、 $y_M(t)$ 、プラント出力  $y(t)$  のみを用いて構成することが問題である。その際、積分次数を減らす構成にすることが課題である。

#### 3. 2. 2 重みつき最小2乗法調整則の導出

本節ではまず、制御対象のパラメトリック表現を導き、この表現式に含まれる未知パラメータを同定する調整則を連続時間の重みつき最小2乗法から導く。

ベクトル  $\underline{k}^T = [k_1, \dots, k_n]$  を係数にもつ、安定な  $n$  次多項式  $K(p) = p^n + p_{-n}^T \underline{k}$  を特性多項式とする状態変数フィルタ

$$K(p) \underline{z}_1(t) = \underline{p}_n y(t), \quad K(p) \underline{z}_2(t) = \underline{p}_n u(t) \quad (2.3)$$

を考える。 $\underline{z}_1(t)$ ,  $\underline{z}_2(t)$  はそれぞれ  $y(t)$ ,  $u(t)$  を入力とする  $n$  次元フィルタの  $n$  次元状態ベクトルである。 $2n$  次元ベクトル  $[\underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  から  $\underline{z}_2(t)$  のはじめの  $d-1$  成分  $z_{21}(t), \dots, z_{2d-1}(t)$  を除いて構成した  $2n-d+1$  次元ベクトル  $\underline{z}_d(t)$  と  $2n-d+1$  次元未知パラメータベクトル  $\underline{\delta}$  とを

$$\underline{z}_d^T(t) = [\underline{z}_1^T(t), z_{2d}(t), \dots, z_{2n}(t)]$$

$$\underline{\delta}^T = [(\underline{k} - \underline{a})^T, \underline{b}'^T]$$

とおき、関係式  $K(p) = A(p) + (\underline{k} - \underline{a})^T \underline{p}_n$ ,  $B(p) = \underline{b}'^T \underline{p}_{n-d+1}$  を使うとつぎのようにパラメトリック表現が得られる。

$$\begin{aligned} K(p) y(t) &= (\underline{k} - \underline{a})^T \underline{p}_n y(t) + \underline{b}'^T \underline{p}_{n-d+1} u(t) + X_0(p) \\ &= (\underline{k} - \underline{a})^T K(p) \underline{z}_1(t) \\ &\quad + \underline{b}'^T K(p) [z_{2d}(t), \dots, z_{2n}(t)] \\ &\quad + K(p) \varepsilon_0(t) \\ &= K(p) \{ \underline{\delta}^T \underline{z}_d(t) + \varepsilon_0(t) \} \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$y(t) = \underline{\delta}^T \underline{z}_d(t) + \varepsilon_2(t) \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_2(t) = \varepsilon_0(t) + \varepsilon_1(t), \quad K(p) \varepsilon_0(t) = X_0(p) \quad (2.6)$$

$$K(p) \varepsilon_1(t) = 0 \quad (2.7)$$

ここで、 $\varepsilon_0(t)$  は初期値  $\underline{x}_0$  による項であり、 $\varepsilon_1(t)$  は関係式 (2.4) 式の初期値による項で (2.6)、(2.7) 式を満たす。したがって、 $\varepsilon_2(t)$  は任意の  $\varepsilon > 0$  に対し、ある正定数  $M_1$  によって次式で評価される。

$$|\varepsilon_2(t)| \leq M_1 \exp(-\lambda t), \quad \lambda[K] - \varepsilon < \lambda < \lambda[K] \quad (2.8)$$

すなわち、 $\varepsilon_2(t)$  は減衰度  $\lambda[K]$  で指数減衰する。

未知パラメータ  $\underline{\delta}$  の同定値を  $\hat{\underline{\delta}}(t)$  とおくと、定数  $\phi$  による重みつき評価関数

$$J(t) = \int_0^t \{ \hat{y}(t, \tau) - y(\tau) \}^2 \exp\{-\phi(t-\tau)\} d\tau \quad (2.9)$$

$$\hat{y}(t, \tau) = \hat{\underline{\delta}}(t)^T \underline{z}_d(\tau) \quad (2.10)$$

を最小とすることにより、 $\hat{\underline{\delta}}(t)$  を求める調整則が導出できる。すなわち、 $J(t)$  を  $\hat{\underline{\delta}}(t)$  で偏微分した値が0となる式から正規方程式

$$R(t) \hat{\underline{\delta}}(t) = \underline{r}(t) \quad (2.11)$$

$$\dot{R}(t) = -\phi R(t) + \underline{z}_d(t) \underline{z}_d^T(t) \quad (2.12)$$

$$\dot{\underline{r}}(t) = -\phi \underline{r}(t) + y(t) \underline{z}_d(t) \quad (2.13)$$

が得られる。ここで  $R(t)$  は  $(2n-d+1) \times (2n-d+1)$  対称行列、 $\underline{r}(t)$  は  $(2n-d+1)$  次元ベクトルである。 $R^{-1}(t)$  が存在するものとして、 $R(t) \cdot R^{-1}(t) = I$  を微分して

$$\dot{R}^{-1}(t) = \phi R^{-1}(t) - R^{-1}(t) \underline{z}_d(t) \underline{z}_d^T(t) R^{-1}(t) \quad (2.14)$$

を得る。これを使って、(2.11)より得られる式  $\hat{\underline{\delta}}(t) = R^{-1}(t) \underline{r}(t)$  を微分すると、調整則

$$\dot{\hat{\underline{\delta}}}(t) = -R^{-1}(t) \underline{z}_d(t) \{ \hat{y}(t) - y(t) \} \quad (2.15)$$

$$\hat{y}(t) = \hat{\underline{\delta}}^T(t) \underline{z}_d(t) \quad (2.16)$$

が得られる。この調整則は文献(6)と同じ形式であり、また、前章の調整則同様、Kreisselmeierの調整則(7)に比べ、入力の変幅の影響を受けない構造となっている。前章の調整則に比べ、(2.13)式の  $\underline{r}(t)$  に対応する補助信号が不要であり、より少ない微分方程式系で構成される。また、後述するように、指数減衰的収束性を保証する。

### 3.2.3 適応制御系の構成

まず、誤差方程式を導き、これから入力を決定する制御則を求め、上の調整則とあわせてMRACSを構成する。

$\underline{d}^T = [d_1, \dots, d_d]$  を係数とする安定な  $d$  次多項式  $D(p) = p^d + \underline{d}^T \underline{p}_d$  を導入する。さらに、以下の2つの多項式方程式を満たし、それぞれ、 $\underline{r}^T = [r_1, \dots, r_n]$ 、 $\underline{s}^T = [s_1, \dots, s_d]$ 、 $\underline{t}^T = [t_1, \dots, t_n]$  を係数とする  $n-1$  次、 $d$  次、 $n-1$  次多項式  $R(p) = \underline{r}^T \underline{p}_n$ 、 $S(p) = s^d + \underline{s}^T \underline{p}_d$ 、 $T(p) = \underline{t}^T \underline{p}_n$  を考える。

$$D(p) K(p) = A(p) S(p) + R(p) \quad (2.17)$$

$$S(p) B(p) = b_d K(p) + T(p) \quad (2.18)$$

また、 $2n+1$  次元ベクトル  $\underline{z}(t)$ 、 $\underline{\theta}$  を

$$\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$$

$$\underline{\theta}^T = [b_d, \underline{r}^T, \underline{t}^T]$$

とおき、関係式 (2.1)、(2.3)、(2.17)、(2.18) を用いると、出力誤差  $e(t) = y(t) - y_M(t)$  を表わす拡張誤差方程式が求まる。

$$K(p) D(p) e(t) = K(p) (\underline{\theta}^T \underline{z}(t) + S(p) \varepsilon_0(t) - D(p) y_M(t)) \quad (2.19)$$

$$D(p) e(t) = \underline{\theta}^T \underline{z}(t) - D(p) y_M(t) + \varepsilon_4(t) \quad (2.20)$$

$$\varepsilon_4(t) = S(p) \varepsilon_0(t) + \varepsilon_3(t), \quad K(p) \varepsilon_3(t) = 0 \quad (2.21)$$

ここで、 $\varepsilon_0(t)$ 、 $\varepsilon_3(t)$  は (2.6)、(2.7) 式の場合と同様であり、ともに減衰度  $\lambda [K]$  で指数減衰する。この拡張誤差方程式は前章と同じである。

さて、この拡張誤差方程式より、制御則をつぎのように定める。まず、(2.17)、(2.18) 式において係数  $\underline{a}$ 、 $\underline{b}$  は未知だから、 $\underline{\theta}$  も未知である。その同定値  $\hat{\underline{\theta}}^T(t) = [\hat{b}_d(t), \hat{\underline{r}}^T(t), \hat{\underline{t}}^T(t)]$  をつぎのようにして求める。すなわち、(2.17)、(2.18) 式における係数  $\underline{a}$ 、 $\underline{b}$  のかわりに同定値  $\hat{\underline{a}}(t)$ 、 $\hat{\underline{b}}(t)$  を代入して、方程式 (2.17)、(2.18) 式を  $R(p)$ 、 $S(p)$ 、 $T(p)$  について解き、得られる各係数を同定値  $\hat{\underline{r}}(t)$ 、 $\hat{\underline{s}}(t)$ 、 $\hat{\underline{t}}(t)$  とする。係数  $\hat{r}_k(t)$ 、 $\hat{s}_k(t)$ 、 $\hat{t}_k(t)$  は方程式 (2.17)、(2.18) 式の両辺の  $p$  の係数比較により容易に求まり、次式のように、順次  $\hat{a}_k(t)$ 、 $\hat{b}_k(t)$  を代入

することにより計算できる。

$$\hat{s}_k(t) = \sum_{i=0}^k d_i k_{k-i} + \sum_{i=0}^k \hat{s}_i(t) \hat{a}_{k-i}(t), \quad k=1, \dots, d \quad (2.22a)$$

$$\hat{r}_k(t) = \sum_{i=0}^d d_i k_{d+k-i} + \sum_{i=0}^d \hat{s}_i(t) \hat{a}_{d+k-i}(t), \quad k=1, \dots, n \quad (2.22b)$$

$$\hat{t}_k(t) = \sum_{i=0}^d \hat{s}_i(t) \hat{b}_{d+k-i}(t) - \hat{b}_d(t) k_k, \quad k=1, \dots, n \quad (2.22c)$$

ただし、添字番号が定義範囲以外のは次式とおく。

$$\hat{s}_0(t) = 1, \quad d_0 = 1, \quad k_0 = 1 \quad (2.23a)$$

$$\hat{a}_k(t) = 0 \quad (k > n, k < 1) \quad (2.23b)$$

$$\hat{b}_k(t) = 0 \quad (k > n, k < 1) \quad (2.23c)$$

つぎに、 $\text{sgn}(\cdot)$  を符号を表わす関数として、十分小さい正数  $b_m$  を決め、 $\hat{b}_0(t)$  を次式とする。

$$\hat{b}_0(t) = \begin{cases} \hat{b}_d(t); & |\hat{b}_d(t)| \geq b_m \\ b_m \text{sgn}(\hat{b}_d(t)); & |\hat{b}_d(t)| < b_m \end{cases} \quad (2.24)$$

制御則を前章と同じく、(2.20)式の右辺の  $b_d$ ,  $\underline{r}$ ,  $\underline{t}$  を  $\hat{b}_0(t)$ ,  $\hat{\underline{r}}(t)$ ,  $\hat{\underline{t}}(t)$  で代用した式が0となるように決める。すなわち、 $\hat{b}_0(t) \neq 0$  だから

$$\begin{aligned} \hat{b}_0(t) u(t) + \hat{\underline{r}}^T(t) \underline{z}_1(t) + \hat{\underline{t}}^T(t) \underline{z}_2(t) \\ = D(p) A_M^{-1}(p) B_M(p) r(t) \end{aligned} \quad (2.25a)$$

より

$$\begin{aligned} u(t) = -\frac{1}{\hat{b}_0(t)} \{ \hat{\underline{r}}^T(t) \underline{z}_1(t) + \hat{\underline{t}}^T(t) \underline{z}_2(t) \\ - D(p) A_M^{-1}(p) B_M(p) r(t) \} \end{aligned} \quad (2.25b)$$

したがって、全体構成はフィルタ (2.3)式、パラメータ調整則 (2.12)、(2.15)式、



制御則のパラメータの計算式 (2.22) 式、制御入力 (2.25) 式となる。積分次数は、プラント次数  $n$ 、対応定数  $d$  のとき、 $\frac{(2n-d+1)(2n-d+2)}{2} + 5n-d+1$  となる。

### 3. 2. 4 信号の有界性と誤差の指数減衰性

本節ではまず、プラントの未知パラメータ  $\underline{\delta}$  の同定値  $\hat{\underline{\delta}}(t)$  の誤差  $\underline{\zeta}(t) \equiv \hat{\underline{\delta}}(t) - \underline{\delta}$  が減衰度  $\min(\phi/2, \lambda [K])$  で指数減衰することを示し、つぎに適応制御則 (2.25) 式に含まれる同定パラメータ  $\hat{\underline{\theta}}^T(t) = [\hat{b}_d(t), \hat{\underline{r}}^T(t), \hat{\underline{t}}^T(t)]$  と真値  $\underline{\theta}^T = [b_d, \underline{r}^T, \underline{t}^T]$  との誤差  $\hat{\underline{\theta}}^T(t) - \underline{\theta}^T$  も減衰度  $\min(\phi/2, \lambda [K])$  で指数減衰することを示す。誤差モデル (2.20) 式、制御入力 (2.25) 式は前章の MRACS と同じであるので、信号  $\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  の有界性および出力誤差  $e(t) = y(t) - y_M(t)$  の指数減衰性は、誤差  $\hat{\underline{\theta}}^T(t) - \underline{\theta}^T$  の指数減衰性から前章と同じように導かれる。

まず、信号  $\underline{z}_d(t)$  は十分一般的であると仮定する。すなわち、 $T > 0$ ,  $\omega > 0$  が存在し、すべての  $t \geq T$  に対して

$$\int_{t-T}^t \underline{z}_d(\tau) \underline{z}_d^T(\tau) d\tau > \omega I \quad (2.26)$$

が成り立つと仮定する。この条件のもとでパラメータ誤差の指数減衰性を示す定理が成立する。

#### 《定理 3. 1》

調整則 (2.12)、(2.15) 式による同定値  $\hat{\underline{\delta}}(t)$  の同定誤差  $\underline{\zeta}(t) \equiv \hat{\underline{\delta}}(t) - \underline{\delta}$  は、信号  $\underline{z}_d(t)$  が十分一般的であるとき、減衰度  $\min(\phi/2, \lambda [K])$  で指数減衰する。

(証明)

リアプノフ関数を

$$V(t) = \frac{1}{2} \{ \underline{\zeta}^T(t) R(t) \underline{\zeta}(t) + \int_t^\infty \epsilon_2^2(\tau) d\tau \} \quad (2.27)$$

とおく。(2.8) 式より  $\epsilon_2(t)$  は減衰度  $\lambda [K]$  で指数減衰するので、上式右辺第 2 項は (2.8) 式の  $\lambda$ ,  $M_1$  について

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_t^{\infty} \varepsilon_2^2(\tau) d\tau &< \left[ -\frac{M_1^2}{4\lambda} \exp(-2\lambda\tau) \right]_t^{\infty} \\ &= \frac{M_1^2 \exp(-2\lambda t)}{4\lambda} \end{aligned} \quad (2.28)$$

となり、有界であるので  $V(t) \geq 0$  は定義可能である。(2.5)、(2.12)、(2.15)式を使うと

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= -\phi \frac{\xi^T(t) R(t) \xi(t)}{2} - \frac{(\xi^T(t) z_d(t))^2}{2} \\ &\quad - \frac{\varepsilon_2^2(t)}{2} \\ &= -\phi V(t) + \frac{\phi}{2} \int_t^{\infty} \varepsilon_2^2(\tau) d\tau \\ &\quad - \frac{(\xi^T(t) z_d(t))^2}{2} - \frac{\varepsilon_2^2(t)}{2} \\ &\leq -\phi V(t) + \frac{\phi}{2} \int_t^{\infty} \varepsilon_2^2(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.29)$$

より  $\dot{V}(t)$  はつねに負だから  $V(t)$  は単調減少であり、かつ  $V(t) \geq 0$  だから  $t \rightarrow \infty$  で収束し、有界である。また、不等式(2.29)式において、右辺第2項は(2.28)式より減衰度  $2\lambda [K]$  で指数減衰する。よって、前章[補題 2.3]より  $V(t)$  は減衰度  $\min(\phi, 2\lambda [K])$  で指数減衰する。ところが、前章[補題 2.2]より

$$V(t) > \omega \cdot \exp(-\phi T) \|\xi(t)\|^2 \quad (2.30)$$

だから、 $\|\xi(t)\|$  は減衰度  $\min(\phi/2, \lambda [K])$  で指数減衰する。■

つぎに、制御入力の同定パラメータの指数減衰性を示す。

《定理 3.2》

多項式方程式(2.17)、(2.18)式を満足し、拡張誤差方程式(2.20)式に現われるパラメータ  $\theta$  の同定値  $\hat{\theta}(t)$  を(2.22)式によって求めるとき、 $\hat{a}_k(t) - a_k$ 、 $\hat{b}_k(t) - b_k$  が減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰すれば、 $\hat{\theta}(t)$  の誤差  $\hat{\theta}(t) - \theta$  も減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰する。

(証明)

$\hat{s}_k(t) - s_k$  が減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰することを帰納法によって示す。まず、 $k=1$  について示す。

$$\begin{aligned} \hat{s}_1(t) - s_1 &= \{d_1 k_0 + d_0 k_1 + \hat{s}_0(t) \hat{a}_1(t)\} \\ &\quad - \{d_1 k_0 + d_0 k_1 + s_0 a_1\} \\ &= (\hat{s}_0(t) - s_0) \hat{a}_1(t) \\ &\quad + s_0 (\hat{a}_1(t) - a_1) \end{aligned} \quad (2.31)$$

が成り立つ。(2.23)式より、 $\hat{s}_0(t) = s_0 = 1$  であり、また、 $\hat{a}_1(t) - a_1$  が減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰することから、 $\hat{s}_1(t) - s_1$  も減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰する。

つぎに、 $\hat{s}_1(t) - s_1$ 、 $\dots$ 、 $\hat{s}_{k-1}(t) - s_{k-1}$  が指数減衰するならば、 $\hat{s}_k(t) - s_k$  も指数減衰することを示す。(2.22)式より

$$\begin{aligned} \hat{s}_k(t) - s_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \{(\hat{s}_i(t) - s_i) \hat{a}_{k-i}(t)\} \\ &\quad + s_i (\hat{a}_{k-i}(t) - a_{k-i}) \end{aligned} \quad (2.32)$$

である。 $\hat{a}_{k-i}(t) - a_{k-i}$  は指数減衰するから  $\hat{a}_{k-i}(t)$  は有界であり、帰納法の仮定と  $\hat{a}_{k-i}(t) - a_{k-i}$  の指数減衰性より  $\hat{s}_k(t) - s_k$  も減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰する。よって、すべての  $\hat{s}_k(t) - s_k$  は減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰する。

まったく同様にして  $\hat{r}_k(t) - r_k$ 、 $\hat{t}_k(t) - t_k$  も減衰度  $\lambda_3$  で指数減衰することが示される。■

《定理 3.1》、《定理 3.2》より、十分一般性条件成立のもとで、 $\hat{\theta}(t) - \theta$  も減衰度  $\min\{\phi/2, \lambda[K]\}$  で指数減衰することが示された。

前章の場合でも、 $\hat{\theta}(t) - \theta$  の指数減衰性、制御則(2.24)、(2.25)式、フィルタ(2.3)式、拡張誤差方程式(2.20)式を用いて信号  $\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  の有界性および出力誤差の指数減衰性を証明したが、本章の場合でもこれらの関係式は同じであるため、つぎの定理が成り立つ。

### 《定理 3.3》

信号  $\underline{z}_d(t)$  が十分一般的であるとき、信号  $\underline{z}^T(t) = [u(t), \underline{z}_1^T(t), \underline{z}_2^T(t)]$  は有界であり、出力誤差  $e(t) = y(t) - y_M(t)$  は減衰度  $\min\{\phi/2, \lambda[K], \lambda[D]\}$  で指数減衰する。

## 3.3 十分一般性条件によらないMRACS

### 3.3.1 パラメータ調整則とその性質

第2章と同様の誤差方程式

$$e(t) = (\hat{\theta}(t) - \theta)^T \underline{z}(t) = \underline{\zeta}^T(t) \underline{z}(t) \quad (3.1)$$

を考える。ここで、 $e(t)$  は拡張誤差であり、 $\theta$ 、 $\hat{\theta}(t)$ 、 $\underline{\zeta}(t)$ 、 $\underline{z}(t)$  はともに  $N$  次元ベクトルで、 $\theta$  は未知パラメータ、 $\hat{\theta}(t)$  はその同定値、 $\underline{\zeta}(t)$  はパラメータ同定誤差、 $\underline{z}(t)$  はフィルタ信号である。この誤差方程式は、議論を簡単にするため第2章の誤差方程式で初期値項を0としたものである。

この誤差方程式に対して、パラメータ調整則は次式のように構成する。

$$\dot{\underline{\zeta}}(t) = -\phi R^{-1}(t) \frac{\underline{z}(t) e(t)}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)} + \nu I \quad (3.2)$$

$$\dot{R}(t) = -\phi R(t) + \frac{\phi_1 \underline{z}(t) \underline{z}^T(t)}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)}, \quad R(0) > 0 \quad (3.3)$$

$$Q = Q^T > 0, \quad 2\phi > \phi_1, \quad \phi \cdot \min \Lambda [R(0)] > \nu > 0 \quad (3.4)$$

この調整則に関して、 $Q=0$ 、 $\nu=0$ とすると第3.2節の調整則と同じになり、十分一般性条件が成立しないときには、 $R(t)$ の正則性が保証されないため適用することができない。ここでは、 $\nu > 0$ を導入することによって、十分一般性条件が成立しないときにも $R(t)$ の正則性を保証できる。すなわち、つぎの補題が成立する。

[補題 3.1]

ゲイン行列 $R(t)$ は正則である。

(証明)

微分方程式(3.2)~(3.4)式の解は

$$\begin{aligned} R(t) &= R(0) \exp(-\phi t) \\ &+ \int_0^t \exp(-\phi(t-\tau)) \frac{\phi_1 \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau)}{1 + \underline{z}^T(\tau) Q \underline{z}(\tau)} d\tau \\ &+ \nu \int_0^t \exp(-\phi(t-\tau)) d\tau \cdot I \end{aligned} \quad (3.5)$$

で与えられる。ここで、右辺第2項が非負であること、および(3.4)式より

$$\begin{aligned} R(t) &\geq R(0) \exp(-\phi t) + \nu \frac{\{1 - \exp(-\phi t)\}}{\phi} I \\ &> \frac{\nu}{\phi} I \end{aligned} \quad (3.6)$$

となるから、 $R(t)$ が正則となる。□

第3.2節と異り、調整則の分母に $1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)$ が現われているが、これは後述するように、信号の有界性を保証するために必要である。

(3.2)~(3.4) 式の調整則を用いるとフィルタ信号  $\underline{z}(t)$  の有界非有界にかかわらず、つぎの定理が成り立つ。

《定理 3.4》

パラメータ誤差  $\underline{\xi}(t)$  は有界であり、 $\|\dot{\underline{\xi}}(t)\|$  は 2 乗可積分 ( $L^2$ ) である。

(証明)

リアプノフ関数として、

$$V(\underline{\xi}(t), t) = \underline{\xi}^T(t) R(t) \underline{\xi}(t) \quad (3.7)$$

を定義し、 $\Lambda_0 = \min \Lambda[R(0)]$ ,  $\Lambda_1 = \max \Lambda[R(0)]$ ,  $\Lambda_2 = \min \Lambda[Q]$  とおく。(3.6)式より

$$\begin{aligned} V &\geq [\Lambda_0 \exp(-\phi t) + \nu \frac{(1 - \exp(-\phi t))}{\phi}] \|\underline{\xi}(t)\|^2 \\ &> \frac{\nu}{\phi} \|\underline{\xi}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

であるから、 $V$  は正値である。また、

$$\begin{aligned} V &\leq \underline{\xi}^T(t) \left[ R(0) + \left( \nu + \frac{\phi_1}{\Lambda_2} \right) \int_0^t \exp(-\phi(t-\tau)) d\tau \cdot I \right] \underline{\xi}(t) \\ &\leq \left( \Lambda_1 + \frac{1}{\phi} \left( \nu + \frac{\phi_1}{\Lambda_2} \right) \right) \|\underline{\xi}(t)\|^2 \end{aligned} \quad (3.9)$$

である。 $V$  の微分を (3.2)、(3.3) 式を使って求めると

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2 \underline{\xi}^T(t) R(t) \dot{\underline{\xi}}(t) + \underline{\xi}^T(t) \dot{R}(t) \underline{\xi}(t) \\ &= -\phi V + \nu \|\underline{\xi}(t)\|^2 - \frac{(2\phi - \phi_1) \epsilon^2(t)}{1 + \underline{\xi}^T(t) Q \underline{\xi}(t)} \end{aligned} \quad (3.10)$$

となり、(3.9) 式の  $\|\underline{\xi}(t)\|^2$  を代入し

$$\phi_0(t) = \phi - \frac{1}{\left\{ \left( \frac{\Lambda_0}{\nu} - \frac{1}{\phi} \right) \exp(-\phi t) + \frac{1}{\phi} \right\}} \quad (3.11)$$

とおけば、 $\phi_0(t) > 0$ であるから

$$\dot{V} \leq -\phi_0(t) V - \frac{(2\phi - \phi_1) \varepsilon^2(t)}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)} \leq 0 \quad (3.12)$$

となる。したがって、 $\underline{z}(t)$ の原点は一様安定であり(8)。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\underline{z}(t)\| < \infty \quad (3.13)$$

である。すなわち、 $\underline{z}(t)$ は有界である。さらに(3.12)式より

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{\infty} \left( \phi_0(t) V + \frac{(2\phi - \phi_1) \varepsilon^2(t)}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)} \right) dt \\ &\leq - \int_0^{\infty} \dot{V} dt \\ &\leq - (V(\infty) - V(0)) < \infty \end{aligned} \quad (3.14)$$

となることから、 $\frac{\varepsilon(t)}{\sqrt{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)}} \in L^2$ となる。一方、(3.2)式より、 $\underline{z}(t)$ の有界非有界にかかわらず、正定数 $M_0$ によって、

$$\|\dot{\underline{z}}(t)\| \leq \phi \cdot \frac{\phi}{\nu} \cdot M_0 \cdot \frac{|\varepsilon(t)|}{\sqrt{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)}} \quad (3.15)$$

となるから、 $\|\dot{\underline{z}}(t)\| \in L^2$ となる。■

この定理は次節に示すように、調整則(3.2)、(3.3)式を用いてMRACSを構成するとき、十分一般性条件に無関係に全信号の有界性と出力誤差の収束性を示すのに使うことができる。

つぎに、十分一般性条件が成立するときには、パラメータ誤差の指数減衰性が保存されることを表わす定理を示す。上でふれたように、調整則(3.2)、(3.3)式をMRACS構成に使用するとき、常に全信号が有界となり、出力誤差は収束するため、この定理ではフィルタ信号  $\underline{z}(t)$  の一様有界性を仮定する。

《定理 3.5》

十分一般性条件が成立するとき、すなわちある  $T > 0$  と  $\omega > 0$  が存在して、すべての  $t \geq T$  に対して

$$\int_{t-T}^t \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau > \omega I \quad (3.16)$$

が成立するとき、 $\underline{z}(t)$  の一様有界性を仮定すれば、パラメータ誤差は指数減衰する。

(証明)

$t \geq T$  で考える。仮定から、 $\underline{z}(t)$  は一様有界だから、すべての  $t$  に対して

$$\frac{1}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)} \geq C > 0 \quad (3.17)$$

となる  $C$  が存在する。そこで  $\omega_1 = \omega C$  とおく。

また、 $kT \leq t < (k+1)T$  なる整数  $k$  ( $\geq 1$ ) が存在する。そこで、(3.16)式より

$$\begin{aligned} & \int_0^t \exp\{-\phi(t-\tau)\} \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau \\ &= \exp(-\phi t) \left\{ \int_0^{t-kT} \exp(\phi\tau) \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau + \dots \right. \\ & \quad \left. + \int_{t-T}^t \exp(\phi\tau) \underline{z}(\tau) \underline{z}^T(\tau) d\tau \right\} \\ & \geq \exp(-\phi t) [0 + \exp\{\phi(t-kT)\} \omega + \dots \\ & \quad + \exp\{\phi(t-T)\} \omega] I \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - \exp(-k \phi T)}{\exp(\phi T) - 1} \omega_1 I \\
&> \frac{1 - \exp\{-\phi(t-T)\}}{\exp(\phi T) - 1} \omega_1 I
\end{aligned} \tag{3.18}$$

が成り立つ。したがって、(3.5)式より

$$\begin{aligned}
R(t) &\geq \exp(-\phi t) R(0) + \phi_1 \frac{1 - \exp\{-\phi(t-T)\}}{\exp(\phi T) - 1} \omega_1 I \\
&\quad + \frac{\nu (1 - \exp(-\phi t))}{\phi} I \\
&> 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

を得る。よって、(3.8)式と同様に、同じリアプノフ関数について

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\geq \left[ \left( \frac{\Lambda_0}{\nu} \right) \exp(-\phi t) + \frac{\omega_1 \phi_1 [1 - \exp\{-\phi(t-T)\}]}{\nu (\exp(\phi T) - 1)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1 - \exp(-\phi t))}{\phi} \right] \nu \| \underline{z}(t) \|^2
\end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。さらに、(3.12)式と同様に

$$\dot{V} \leq -\phi_0(t) V - \frac{(2\phi - \phi_1)^2 \varepsilon(t)}{1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t)} \tag{3.21}$$

が得られる。ここに、

$$\phi_0(t) = \phi - \frac{1}{\mu(t) + \frac{1}{\phi}} \tag{3.22}$$

$$\mu(t) = \frac{\omega_1 \phi_1 [1 - \exp\{-\phi(t-T)\}]}{\nu (\exp(\phi T) - 1)} + \left( \frac{\Lambda_0}{\nu} - \frac{1}{\phi} \right) \exp(-\phi t) \tag{3.23}$$

である。ここで、 $\mu(t) > 0$ であるから $\phi_0(t) > 0$ でもある。つぎに $\phi_0(t)$ の最小値を調べる。 $\phi_M = \min \phi_0(t)$  および

$$\mu_0 = \frac{\omega_1 \phi_1 \exp(\phi T)}{\nu \{ \exp(\phi T) - 1 \}} - \left( \frac{\Lambda_0}{\nu} - \frac{1}{\phi} \right) \quad (3.24)$$

とおくと、簡単な計算により $\mu_0 \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \phi_M &= \phi_0(T) \\ &= \frac{\phi(\phi \Lambda_0 - \nu)}{(\phi \Lambda_0 - \nu) + \nu \exp(\phi T)} \end{aligned} \quad (3.25)$$

$\mu_0 < 0$ のとき

$$\phi_M = \phi_0(\infty) = \frac{\phi^2 \omega_1 \phi_1}{\phi \omega_1 \phi_1 + \nu \{ \exp(\phi T) - 1 \}} \quad (3.26)$$

となる。したがって、(3.21)式より

$$\begin{aligned} V(t) &\leq V(T) \exp\left\{-\int_T^t \exp\{\phi_0(\tau)\} d\tau\right\} \\ &\leq V(T) \exp\{-(t-T)\phi_M\} \end{aligned} \quad (3.27)$$

が成り立つ。すなわち、 $\underline{x}(t)$ は $\phi_M/2$ の減衰度で指数減衰する。■

### 3.3.2 MRACSへの適用

十分一般性条件によらないパラメータ調整則をMRACSに適用する。制御対象のプラントは可制御可観測のn次1入力1出力系であり

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + \underline{b} u(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (3.28a)$$

$$y(t) = \underline{c}^T \underline{x}(t) = x_1(t) \quad (3.28b)$$

$$A = \begin{bmatrix} & I_{n-1} & \\ \underline{a} & 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \underline{c}^T = [1, 0 \dots 0]$$

なる可観測標準形で表わされているとする。ここに、 $\underline{x}(t)$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $y(t)$  は観測可能なスカラー出力、 $u(t)$  はスカラー入力である。また、 $\underline{a}$ 、 $\underline{b}$  はそれぞれ  $n$  次の未知定数ベクトルである。ただし、この系は最小位相系すなわち伝達関数の零点はすべて  $s$  平面の左半平面に存在すると仮定する。

この系の伝達関数の分母・分子多項式の次数差を表わす次式の対応定数  $d$  は既知としておく。

$$d = \min (j ; \underline{c}^T A^{j-1} \underline{b} \neq 0, j = 1, \dots, n) \quad (3.29)$$

プラント(3.28)式に対し規範となるモデルが

$$\dot{\underline{x}}_M(t) = A_M \underline{x}_M(t) + \underline{b}_M r(t), \quad \underline{x}_M(0) = \underline{0} \quad (3.30a)$$

$$y_M(t) = \underline{c}_M^T \underline{x}_M(t) \quad (3.30b)$$

で与えられているとする。ここで、 $r(t)$  は一様有界で区分的連続な規範入力である。規範モデルの伝達関数の対応定数は  $d$  以上と仮定し、さらに、 $A_M$  は安定と仮定する。

問題は、以上の設定のもとでモデルの入出力  $r(t)$ 、 $y_M(t)$  およびプラントの出力  $y(t)$  のみを用いて、プラントと規範モデルの出力誤差

$$e(t) = y(t) - y_M(t) \quad (3.31)$$

を零へ収束させる適応制御系を構成することである。

適応制御系を第2章同様に、つぎのように構成する。

まず、つぎの安定な  $n \times n$  行列  $K$  を導入する。

$$K = \begin{bmatrix} & I_{n-1} & \\ \underline{k} & 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{k} : n \text{次元ベクトル}$$

$K$  を用いて、状態変数フィルタを以下のように構成する。

$$\dot{\underline{z}}_1(t) = K^T \underline{z}_1(t) + \underline{c} y(t), \quad \underline{z}_1(0) = \underline{0} \quad (3.32a)$$

$$\dot{\underline{z}}_2(t) = K^T \underline{z}_2(t) + \underline{c} u(t), \quad \underline{z}_2(0) = \underline{0} \quad (3.32b)$$

つぎに、微分演算子を用いないで適応制御系を構成するために以下のフィルタをおく。

$$\dot{\hat{\underline{z}}}_i(t) = L \hat{\underline{z}}_i(t) + \hat{\underline{b}}_i z_i(t), \quad i=1, \dots, 2n \quad (3.33a)$$

$$\dot{\hat{\underline{u}}}(t) = L \hat{\underline{u}}(t) + \hat{\underline{b}} u(t) \quad (3.33b)$$

ただし各フィルタの初期値は  $\underline{Q}$ 、また

$$L = \begin{bmatrix} -\alpha_{d-1} & I_{d-1} \\ \vdots & \\ -\alpha_0 & 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\underline{b}}^T = [0, \dots, 0, 1]$$

であり、 $L$ が安定となるように、その要素を選ぶ。(3.33a)式のフィルタの第1要素を上から並べたベクトルを  $\hat{\underline{z}}$ 、 $\hat{\underline{u}}$ の第1要素を  $\hat{u}$ とおく。

また、出力誤差の推定機構をつぎのように構成する。

$$\hat{e}(t) = \hat{\beta}(t) \hat{u}(t) + \hat{\underline{\gamma}}^T(t) \hat{\underline{z}}(t) - y_M(t) \quad (3.34)$$

ただし、 $\hat{\beta}(t)$ 、 $\hat{\underline{\gamma}}(t)$ はそれぞれ第2章(3.4)、(3.11)式と同様の未知パラメータ  $\beta = \underline{c}^T A^{d-1} \underline{b} = b_d$ 、 $\underline{\gamma}$ の同定値である。

制御入力は

$$u(t) = - \frac{\{\hat{\underline{z}}_{12}^T(t) \hat{\underline{\gamma}}(t) - D(p) y_M(t)\}}{\hat{\beta}(t)} \quad (3.35)$$

と構成する。ここで、

$$D(p) = |pI - L| \quad (3.36a)$$

$$\hat{\underline{z}}_{12}^T(t) = [\hat{\underline{z}}_1^T(t), \hat{\underline{z}}_2^T(t)] \quad (3.36b)$$

である。そこで、

$$\varepsilon(t) = \hat{e}(t) - e(t) \quad (3.37)$$

$$\hat{\underline{\xi}}^T(t) = [\hat{\beta}(t) - \beta, (\hat{\underline{\gamma}}(t) - \underline{\gamma})^T] \quad (3.38a)$$

$$\hat{\underline{z}}^T(t) = [\hat{\underline{u}}(t), \hat{\underline{z}}^T(t)] \quad (3.38b)$$

とおけば、誤差方程式は (3.1) 式となる。ただし、次元  $N$  は  $n+1$  となる。

パラメータ調整則を (3.2)~(3.4) 式とすると、つぎの定理が成立する。

### 《定理 3.6》

適応制御系を (3.2)~(3.4) 、(3.32)~(3.35) 式と構成すれば、全信号が有界で、出力誤差は 0 に収束する。

(証明)

《定理 3.4》が成立するので、文献(9) より明らか。■

つぎに、規範入力に対する条件のもとで、出力誤差が指数減衰することを表わす定理を示す。

### 《定理 3.7》

規範入力が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもてば、出力誤差は指数減衰する。

(証明)

規範入力が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもてば、規範出力も同様である。一方、《定理 3.6》より、十分一般性条件の成立不成立にかかわらず、出力誤差は 0 に収束するから、ある時刻  $T'$  があり、 $t \geq T'$  ではプラント出力も規範出力同様、 $(n+1)$  個以上の周波数成分をもち、制御入力も同様となる。したがって、第2章<付録 2.2>より、十分一般性条件が成立する。また、《定理 3.6》より、全信号は有界である。ゆえに、《定理 3.5》より、パラメータ誤差の指数減衰性が成り立つ。出力誤差の指数減衰性は第2章《定理 2.3》と同様である。■

なお、漸減ゲイン調整則は (3.2)~(3.4) 式で  $\psi=0$ 、 $\nu=0$  とした場合にあたり、ゲイン行列の有界性は保証されるが、ゲイン行列  $R^{-1}$  は、正定を保ちながら減少しつづけるため、0 に近くなってからパラメータ変動が生じると、調整則が作動しにくくなると考えられる。また、固定トレースゲイン調整則は (3.2)~(3.4) 式で

$$\phi = \phi_1 \frac{\|R^{-1}(t) \underline{z}(t)\|^2}{(1 + \underline{z}^T(t) Q \underline{z}(t))} \text{tr}(R_0^{-1}) \quad (3.39)$$

とした場合に当たる。

### 3.4 数値シミュレーション

#### 3.4.1 積分次数削減のMRACS

第2章のMRACSと比較するため、表3.1に示す、同じ例題について数値シミュレーションを行った。

第2章のMRACSでは5個のパラメータが同定されるのに対し、本章のMRACSでは3個のパラメータが同定される。また、拡張誤差から出力誤差を導くための6次のフィルタも不要となる。さらに、調整則における5次の補助信号も不要となり、結局、積分次数は第2章の41から15に大幅に減る。

プラント出力と規範モデル出力とを図3.1に、出力誤差を図3.2に示す。プラントの不安定度2.1より調整則の減衰度が小さい場合(減衰度2.0, 1.0)も含めて、すべて、プラント出力は規範出力に追従し、閉ループ系の安定性が保証されていることがわかる。また、初期の出力誤差の最大値も第2章の場合、減衰度3.0, 2.0, 1.0のそれぞれで、62.0, 40.0, 286.0であったのが、それぞれ、8.0, 12.0, 31.0と改善されている。

#### 3.4.2 十分一般性条件によらないMRACS

第6章で述べる熱実験系の物理定数に、測定値を代入して得られる系を使って、シミュレーションを行った。パラメータ値を表3.2に示す。パラメータ変動に対する有効性を比較するため、 $t = 60$ において熱実験系に流量変動があったとして、パラメータ値をかえている。

本章で述べた十分一般性条件によらない調整則の場合、重みつき最小2乗法調整則の場合、漸減ゲイン調整則の場合、固定トレースゲイン調整則の場合、定ゲイン調整則の場合の各々の出力と入力を図3.3~3.12に、 $\log(R^{-1})$ を図3.13に示す。十分一般性条件によらない調整則の場合には、 $R^{-1}$ の発散も生じず、パラメータ変動後の回復も早い。これに対し、重みつき最小2乗法調整則の場合には、 $R^{-1}$ の発散が起こり、

$t = 18$  で計算続行不可能となっている。また、漸減ゲイン調整則の場合には、 $R^{-1} \approx 0$  となり、パラメータ変動後の回復が遅い。固定トレースゲイン調整則の場合も、この例ではパラメータ変動後の回復が遅い。定ゲイン調整則の場合には出力の追従すら行われていない。

### 3.5 結言

重みつき最小2乗法調整則にもとづいて、積分次数を削減したMRACS、十分一般性条件によらないMRACSの構成方法を述べた。

積分次数の削減は重みつき最小2乗法調整則の使用とともに、同定パラメータと制御入力の構成パラメータの分離、フィルタ構成の改善により実現している。その結果、たとえば次数2、対応定数2のとき、従来、積分次数は41であったのが、15に減る。

また、十分一般性条件が成立していなくても適用できるMRACSは、重みつき最小2乗法調整則に微小正定行列を付加した調整則を用いることによって構成でき、この構成のMRACSでは、

- 1) 十分一般性条件が成立していなくても、出力誤差は収束する、
- 2) 十分一般性条件が成立していれば、重みつき最小2乗法調整則における出力誤差の指数減衰性が保存される、
- 3) 規範入力が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもっていれば、十分一般性条件が成立する、という特徴をもつ。

表 3. 1 積分次数削減のMRACSの

シミュレーションにおけるパラメータ値

プラント	$\frac{2.0}{p^2 - 0.1p - 4.2}$ 極: -2.0, 2.1		
規範モデル	$\frac{1.0}{p^2 + 5.0p + 6.0}$ 極: -3.0, -2.0		
規範入力	振幅: 10.0, 周期: 3.0 の矩形波		
シミュレーション 番号	NO. 1	NO. 2	NO. 3
減衰度	3.0	2.0	1.0
調整則: $\phi$	3.0	2.0	1.0
フィルタ: K 多項式: D 極	$p^2 + 7.0p + 12.0$ -4.0, -3.0	$p^2 + 5.0p + 6.0$ -3.0, -2.0	$p^2 + 3.0p + 2.0$ -2.0, -1.0
制御則の正数: $b_m$	0.1		
初期値	$\hat{b}_2(0) = 10.0, R(0) = I, \text{他は } 0$		
パラメータ $\hat{s}_1$ , $\hat{r}_1, \hat{t}_1$ の計算	$\begin{aligned} \hat{s}_1 &= d_1 + k_1 + \hat{a}_1, \\ \hat{s}_2 &= d_2 + d_1 k_1 + k_2 \\ &\quad + (\hat{s}_1 \hat{a}_1 + \hat{a}_2), \\ \hat{r}_1 &= d_2 k_1 + d_1 k_2 \\ &\quad + (\hat{s}_2 \hat{a}_1 + \hat{s}_1 \hat{a}_2), \\ \hat{r}_2 &= d_2 k_2 + \hat{s}_2 \hat{a}_2, \\ \hat{t}_1 &= \hat{s}_1 \hat{b}_2 - \hat{b}_2 k_1, \\ \hat{t}_2 &= \hat{s}_2 \hat{b}_2 - \hat{b}_2 k_2 \end{aligned}$		



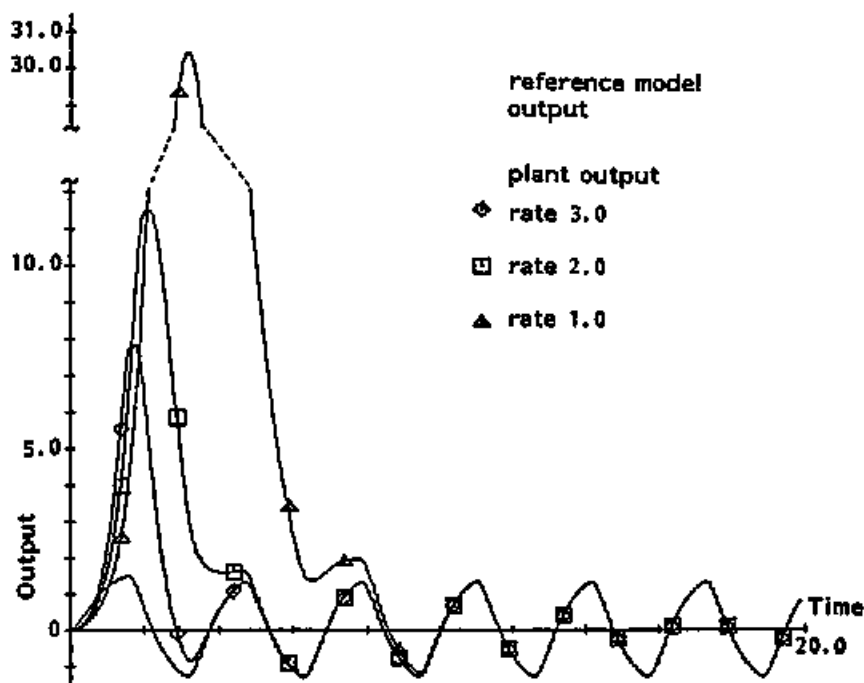


図 3. 1 積分次数削減のMRACSのプラント出力と規範出力

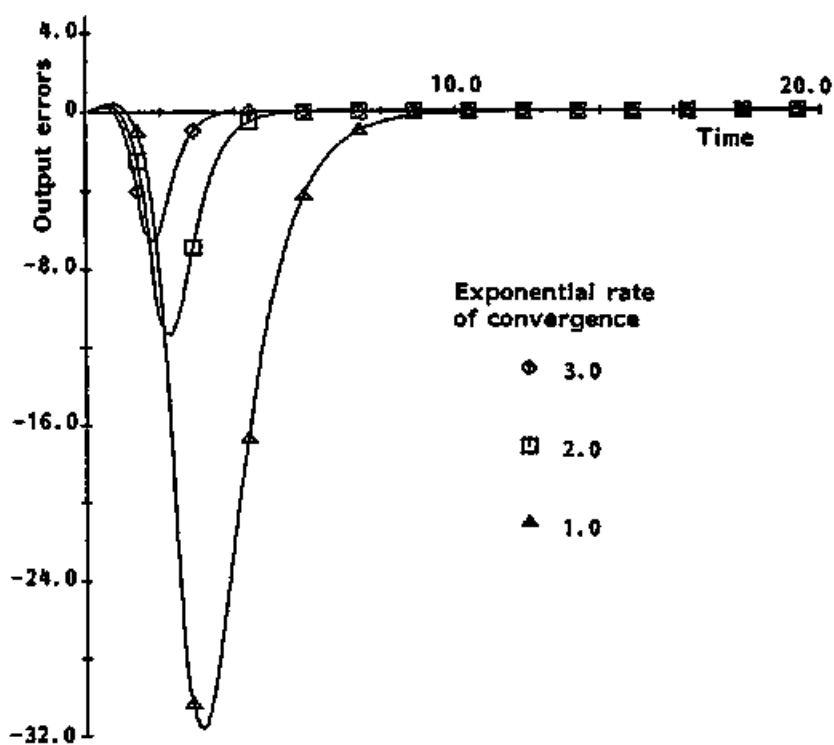


図 3. 2 積分次数削減のMRACSの出力誤差

表 3. 2 十分一般性条件によらない MRACS の

シミュレーションにおけるパラメータ値

プラント	$t \leq 60.0 \text{ のとき } \frac{0.014p + 0.008}{p^2 + 0.838p + 0.076}$ $t > 60.0 \text{ のとき } \frac{0.013p + 0.008}{p^2 + 0.828p + 0.076}$
規範モデル	$\frac{0.162p + 0.011}{p^2 + 0.162p + 0.011}$
規範入力	振幅 : 5.0 のステップ波
フィルタ : K, D	$K = \begin{bmatrix} -2.0, & 1 \\ -1.0, & 0 \end{bmatrix}, \quad D = p + 0.5$
設計パラメータ	$\phi = 1.5, \quad \phi = 1.0, \quad \phi_1 = 2.0, \quad \gamma = 0.08,$ $R^{-1}(0) = I, \quad Q = 0.001 I$
パラメータ初期値	$\hat{\beta}(0) = 0.005, \quad \text{その他} = 0.0$

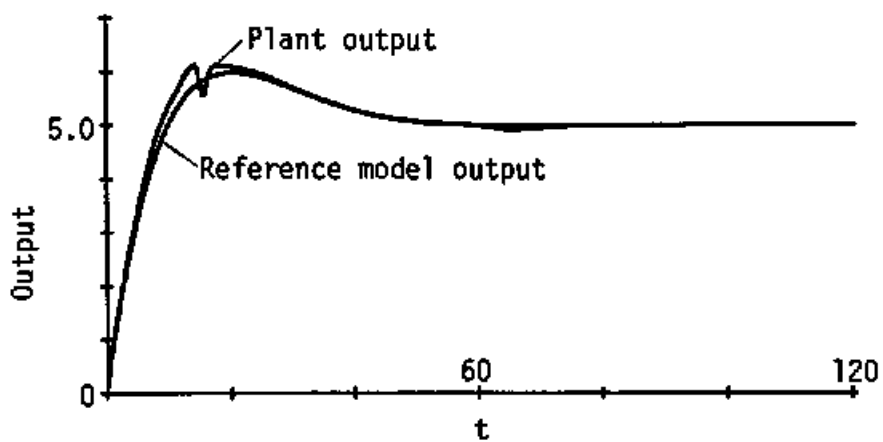


図 3. 3 十分一般性条件によらない調整則を用いた場合の  
プラント出力と規範出力

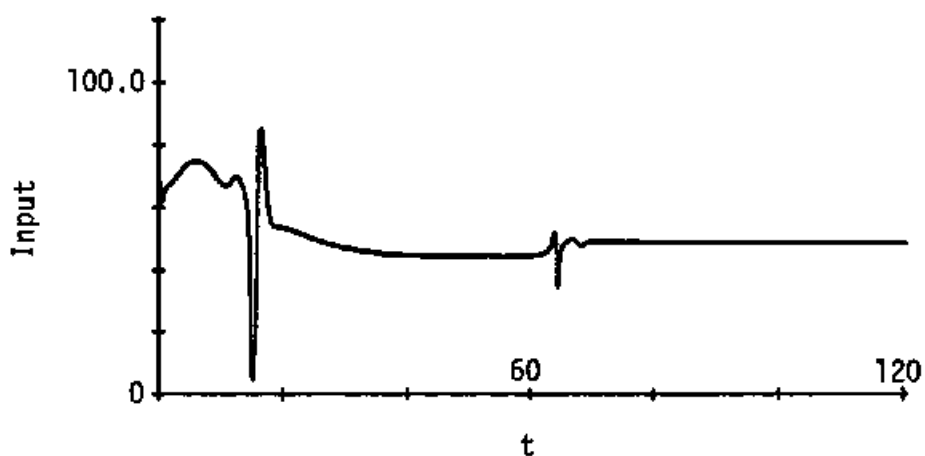


図 3. 4 十分一般性条件によらない調整則を用いた場合の  
制御入力

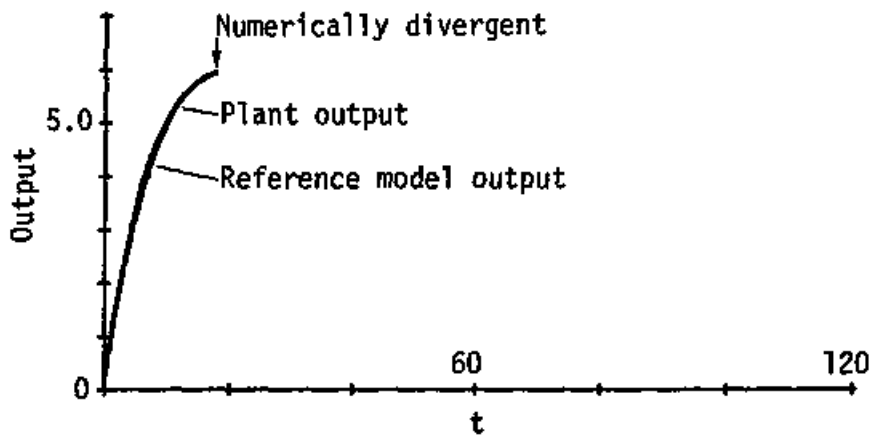


図 3. 5 重みつき最小 2 乗法調整則を用いた場合の  
プラント出力と規範出力

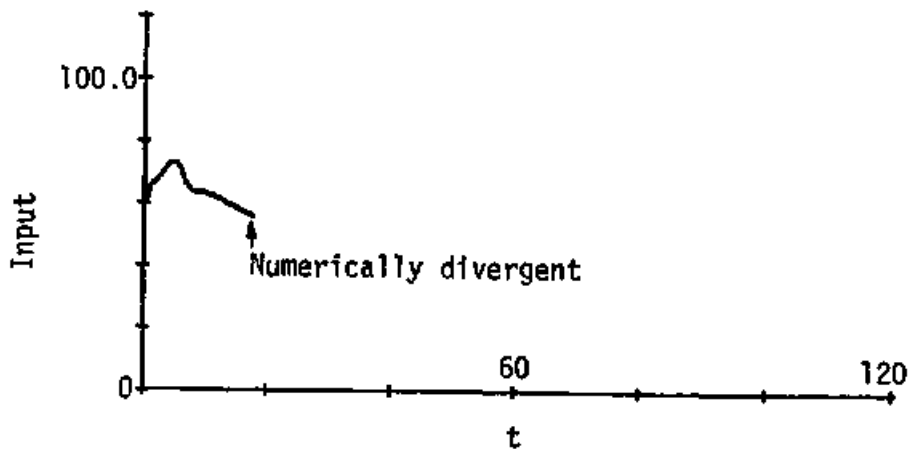


図 3. 6 重みつき最小 2 乗法調整則を用いた場合の  
制御入力

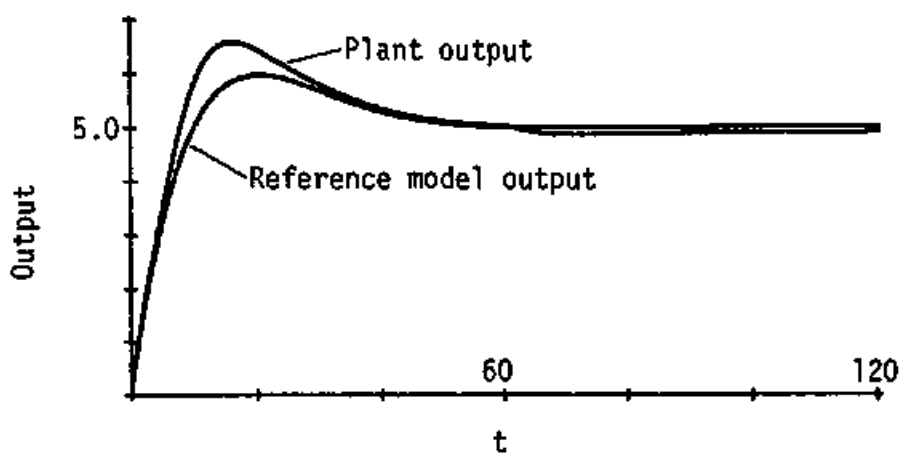


図 3. 7 漸減ゲイン調整則を用いた場合の  
プラント出力と規範出力

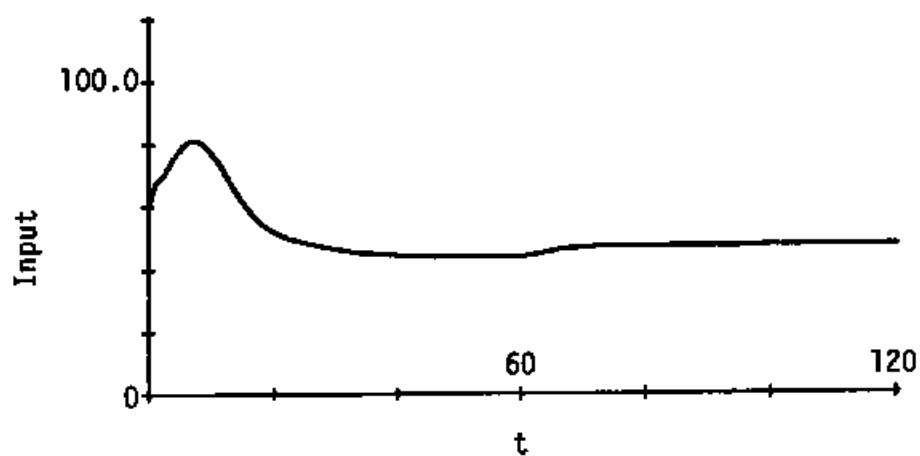


図 3. 8 漸減ゲイン調整則を用いた場合の  
制御入力

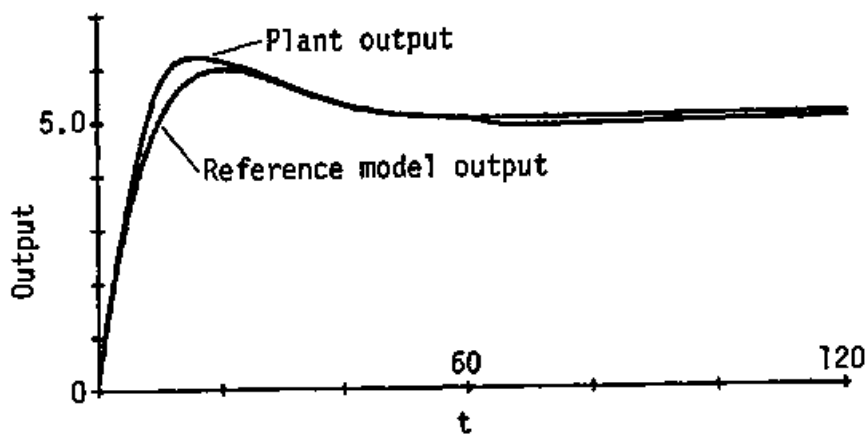


図 3. 9 固定トレースゲイン調整則を用いた場合の  
プラント出力と規範出力

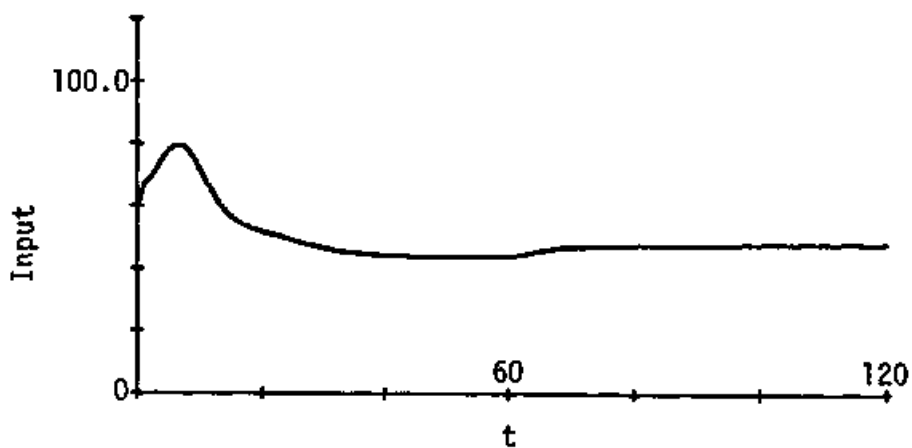


図 3. 10 固定トレースゲイン調整則を用いた場合の  
制御入力

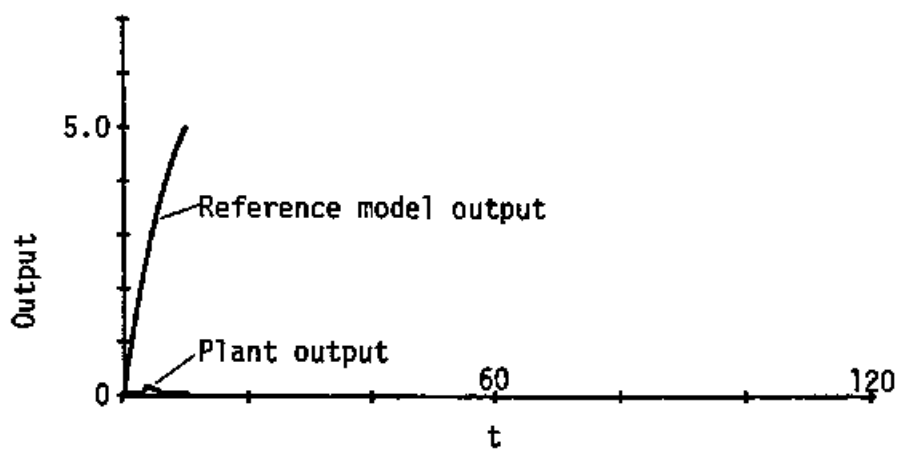


図 3. 1 1 定ゲイン調整則を用いた場合の  
プラント出力と規範出力

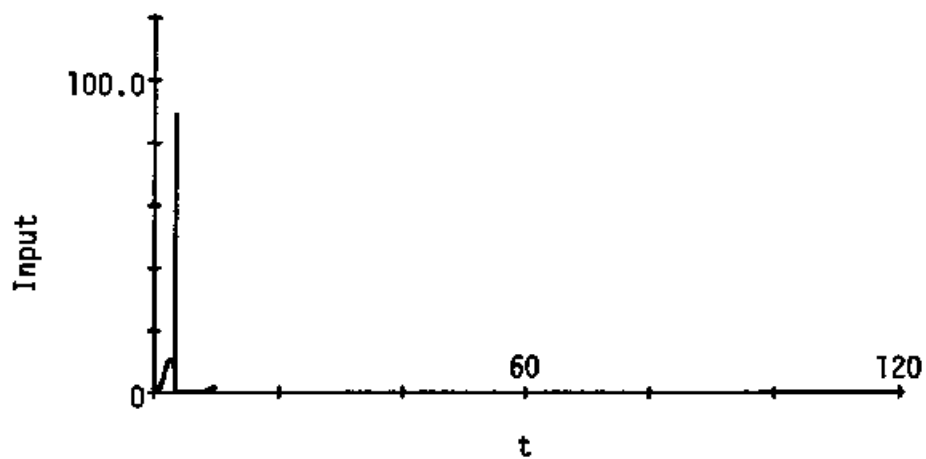


図 3. 1 2 定ゲイン調整則を用いた場合の  
制御入力

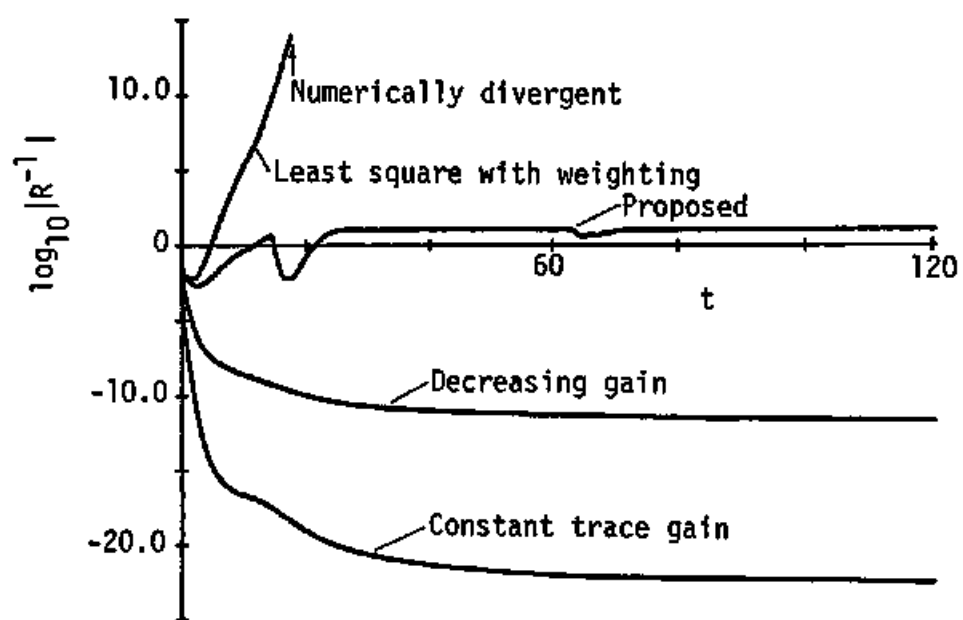


図 3. 13 ゲイン行列の行列式；  $\log |R^{-1}|$



## 第4章 多入出力系への拡張

### 4.1 緒言

前章まででは1入出力系を対象にMRACSの構成方法を論じてきた。しかし、適応制御を最も必要とするプラントは大規模なシステムが多いことを考えると、多入出力系に対するMRACS設計問題はきわめて重要である。そこで、本章では多入出力系に対するMRACSの構成方法を取り扱う。

MRACSに限らず、適応観測器をはじめとする、多入出力系に対する適応制御問題においては、対象となるシステムをいかにして適応制御系の構成に都合のよい形に表現しなおすかという、いわゆるシステムのパラメトリック表現の問題が重要となる。したがってここでは、まずシステムのパラメトリック表現に関連して、多入出力適応観測器をとりあげて、新しいパラメトリック表現を導き、その表現にもとづいて指数減衰的収束性を有する多入出力適応観測器を構成する方法を論じる。その後で類似のパラメトリック表現を利用して、多入出力MRACSの構成方法、指数減衰性、信号の有界性を示す。

多入出力系に対する適応観測器の設計方法は、2つに大別できる。第1はLüdersら(1)によって提案された方法で、未知パラメータを2段階で同定する方法である。まず、多出力の線形結合としてスカラー出力表現を求め、この多入力1出力系の未知パラメータを同定し、その後で出力方程式のパラメータを同定する方法である(2)。しかし、この方法はcyclicなプラント、すなわち、スカラー出力表現が多出力の線形結合として求められるプラントにしか適用できない。第2は多出力系をいくつかの1出力サブシステムに分割し、それぞれのサブシステムの未知パラメータを同定する方法である。Gauthierら(3)や厳ら(4)はこの方法によって、ある限られた範囲の多出力系に対する適応観測器の構成方法を示した。しかし、その構成方法を一般的な系に適用することはできなかった。その理由は、一般的な多出力系には出力間に干渉があり、1出力サブシステムに分割することが難しかったからである。その後、Nikiforukら(5)やYangら(6)は、一般的な多出力系を1出力サブシステムの集合として表わせることを示した。しかし、Nikiforukらの適応観測器では、出力を最小限の積分器で表わすminimal表現をとっているため、補助信号が必要となって、構成が複雑であった。また、Yangらの適

応観測器は、Kreisselmeier (7) の1入出力系に対するパラメトリック表現を拡張した表現にもとづいているため、補助信号が不要な nonminimal 表現となっているが、使用する信号として、プラント出力を含めず、状態変数フィルタ出力のみを用いているため、Nikiforuk らの適応観測器とは違う点で構成が複雑化している。さらに、いずれも指数減衰性は述べられていない。そこで、ここでは、一般的な多出力系をいくつかのサブシステムに分割する方法にもとづいて、新しいパラメトリック表現を導出する。この表現は nonminimal 表現であるため、Nikiforuk らの適応観測器のような補助信号が不要であり、またパラメトリック表現に使用する信号にプラント出力も含めているため、

Yang らの適応観測器のような複雑さもない。また、調整則に前章までと同様に、指数減衰性をもつものを使っているため、パラメータの収束が指数減衰的である。

一方、多入出力系に対する MRACS についても、1入出力系の成果を踏まえた設計手法が種々提案され、パラメトリック表現に関連したインタラクタマトリクス概念にもとづく構成方法などが論じられている(8,9)。しかし、多入出力系は1入出力系以上に適切なモデル化が困難となり、不十分なモデル化のもとでも有効性を発揮できる指数減衰的収束性の重要度が増すにもかかわらず、多入出力系に対する指数減衰的 MRACS の構成方法については、ほとんど発表がない。そこで、ここでは前述の多入出力適応観測器と類似のパラメトリック表現を利用した、指数減衰的収束性を有する多入出力 MRACS の構成方法を示す。

以下、第4.2節で新しいパラメトリック表現の導出、指数減衰的多入出力適応観測器の構成方法を述べ、第4.3節で前節と類似のパラメトリック表現にもとづいて、多入出力系に対する指数減衰的 MRACS の構成方法を与える。第4.4節では、シミュレーション結果を示す。

## 4.2 指数減衰的多入出力適応観測器の構成

### 4.2.1 問題の記述

プラントは  $r$  入力  $m$  出力可制御可観測線形時不変安定系であるとし、以下の仮定を満たすものとする。

- 1) 次数  $n$  は既知である。
- 2)  $m$  出力は独立である。
- 3) 可観測指標 (10)  $n_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) は既知である。

このとき、系はつぎの可観測標準形の状態方程式で表現することができる(11, 12)。

$$\dot{\underline{x}}(t) = A \underline{x}(t) + B \underline{u}(t), \quad \underline{x}(0) = \underline{x}_0 \quad (2.1a)$$

$$\underline{y}(t) = C^T \underline{x}(t) \quad (2.1b)$$

ここで、 $\underline{x}(t)$  は  $n$  次元状態ベクトル、 $\underline{y}(t)$  は  $m$  次元出力ベクトル、 $\underline{u}(t)$  は  $r$  次元入力ベクトルである。出力の独立性の仮定より、行列  $C^T$  はフルランクをもつ。すなわち、

$$\text{rank } C^T = m \quad (2.2)$$

である。可観測指標  $n_i$  ( $n_i > 0, \sum_{i=1}^r n_i = n$ ) を使うとつぎの関係式が成り立つ。

$$A = [A_{ij}], \quad \underline{x}^T = [\underline{x}_i^T], \quad B = [\underline{b}_{ik}], \quad C^T = [\underline{c}_{ij}^T] \\ i, j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, r$$

ここで、 $A_{ij}$  は  $A$  の  $n_i \times n_j$  サブマトリクスである。また、 $n_i$  次元ベクトル  $\underline{a}_{ij}$  を使って、 $A_{ij}$  はつぎのように表わされる。

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \underline{a}_{ij} & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, m$$

$$A_{ij} = [\underline{a}_{ij}, \underline{0}, \dots, \underline{0}], \quad i = 1, \dots, m$$

$n_i$  次元ベクトル  $\underline{a}_{ij}$  は、 $\min(n_i, n_j)$  個の未知パラメータを含み、 $n_i > n_j$  のとき上から  $n_i - n_j$  個の要素は 0 である。さらに、 $\underline{b}_{ik}$ 、 $\underline{x}_i$ 、 $\underline{c}_{ij}$  は  $n_i$  次元ベクトルであり、 $\underline{c}_{ij}$  はつぎのような形式をもつ。

$$\underline{c}_{ij}^T = [1, 0, \dots, 0], \quad i = 1, \dots, m$$

$$\underline{c}_{ij}^T = [c_{ij}, 0, \dots, 0], \quad i = 1, \dots, m$$

ここで、 $i < j$  のとき  $c_{ij} = 0$ 、 $i > j$  かつ  $n_i \geq n_j$  のとき  $c_{ij} = 0$  である。行列  $C^T$  の 0 でない要素  $c_{ij}$  は出力  $y_i$  と出力  $y_j$  との干渉を表わす。

問題は測定可能な入力  $\underline{u}$  と出力  $\underline{y}$  を用いて、未知パラメータ  $\underline{a}_{ij}$ 、 $\underline{b}_{ik}$ 、 $c_{ij}$  を同定

し、直接入手できない状態ベクトル  $\underline{x}$  を推定することである。

可観測指標が事前にわからない場合には、適応観測器を使う前に同定しておく必要がある。離散時間系の場合には、ランクテスト法(11)などによって同定できる。

#### 4. 2. 2 パラメトリック表現

可観測標準形 (2.1)式はつぎの  $m$  個のサブシステムに分割できる。

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m A_{ij} \underline{x}_j + \sum_{k=1}^r \underline{b}_{ik} u_k, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.3a)$$

$$y_i = \sum_{j=1}^m \underline{c}_{ij}^T \underline{x}_j \quad (2.3b)$$

ここで、次式の安定な  $n_i \times n_i$  行列  $K_i$ 、 $m \times m$  行列  $S$ 、 $n_i \times m$  行列  $T_i$  を導入する。

$$K_i = \begin{bmatrix} \underline{k}_{ii} & 1 & \dots & 1 \\ & 0, \dots, 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \underline{c}_{21} & 1 & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \underline{c}_{m1} & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_i = [\underline{a}_{i1}, \dots, \underline{a}_{ii-1}, \underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}, \underline{a}_{ii+1}, \dots, \underline{a}_{im}]$$

このとき、(2.3)式の第  $i$  番目のサブシステムは

$$\dot{\underline{x}}_i = K_i \underline{x}_i + \sum_{j=1}^m \underline{d}_{ij} y_j + \sum_{k=1}^r \underline{b}_{ik} u_k \quad (2.4a)$$

$$[\underline{d}_{i1}, \dots, \underline{d}_{im}] = T_i S^{-1} \quad (2.4b)$$

となる。上式の導出は<付録 4. 1>に示す。

つぎに以下の  $n_i$  次元フィルタ信号  $\underline{v}_{ij}$ 、 $\underline{w}_{ik}$  を定義する。

$$\dot{\underline{v}}_{ij} = K_i^T \underline{v}_{ij} + \underline{c}_{ij} y_j, \quad \underline{v}_{ij}(0) = \underline{0} \quad (2.5a)$$

$$\dot{\underline{w}}_{ik} = K_i^T \underline{w}_{ik} + \underline{c}_{ii} u_k, \quad \underline{w}_{ik}(0) = \underline{0} \quad (2.5b)$$

これらの信号を用いると、サブベクトル  $\underline{x}_i$  は

$$\underline{x}_i = \sum_{j=1}^m P_{ij}(t) \underline{d}_{ij} + \sum_{k=1}^r Q_{ik}(t) \underline{b}_{ik} + \exp(K_i t) \underline{x}_i \quad (0) \quad (2.6)$$

$$P_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{c_{ij}^T}{c_{ii}^T} K_i \\ \vdots \\ \frac{c_{ij}^T}{c_{ii}^T} K_i^{n_i-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{v_{ij}^T}{v_{ij}^T} K_i \\ \vdots \\ \frac{v_{ij}^T}{v_{ij}^T} K_i^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

$$Q_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{c_{ik}^T}{c_{ii}^T} K_i \\ \vdots \\ \frac{c_{ik}^T}{c_{ii}^T} K_i^{n_i-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{w_{ik}^T}{w_{ik}^T} K_i \\ \vdots \\ \frac{w_{ik}^T}{w_{ik}^T} K_i^{n_i-1} \end{bmatrix}$$

と表現される。(2.6)式の前から  $\underline{c}_{ii}^T$  を乗じると

$$\underline{c}_{ii}^T \underline{x}_i = \sum_{j=1}^m \underline{v}_{ij}^T \underline{d}_{ij} + \sum_{k=1}^r \underline{w}_{ik}^T \underline{b}_{ik} + f_i \quad (2.7)$$

となる。ここで

$$f_i = \underline{c}_{ii}^T \exp(K_i t) \underline{x}_i \quad (0) \quad (2.8)$$

とつぎの関係式を使っている。

$$\underline{c}_{ii}^T P_{ij} = \underline{v}_{ij}^T, \quad \underline{c}_{ii}^T Q_{ik} = \underline{w}_{ik}^T, \quad i, j=1, \dots, m, \quad k=1, \dots, r \quad (2.9)$$

ここで  $m$  次元ベクトル  $\underline{y}_d$  を

$$\underline{y}_d = [\underline{c}_{11}^T \underline{x}_1, \dots, \underline{c}_{mm}^T \underline{x}_m] \quad (2.10)$$

と定義すると  $\underline{y} = S \underline{y}_d$ 、すなわち  $\underline{y}_d = S^{-1} \underline{y}$  となる。 $S$  は対角成分が 1 の下三角行列であるため、 $S^{-1}$  も  $S$  と同じ形式となり、 $S^{-1}$  の  $(i, j)$  要素  $s_{ij}$  は  $i < j$  のとき  $s_{ij} = 0$ 、 $i = j$  のとき  $s_{ij} = 1$  である。 $\underline{y}_d = S^{-1} \underline{y}$  の第  $i$  番目の要素から

$$y_i = - \sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} y_j + \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_i$$

$$= -\sum_{j=1}^{i-1} s_{ij} y_j + \sum_{j=1}^m \underline{v}_{ij}^T \underline{d}_{ij} + \sum_{k=1}^r \underline{w}_{ik}^T \underline{b}_{ik} + f_i \quad (2.11)$$

となる。つぎに、 $p_i = n_i(m+r) + (i-1)$  とおき、 $p_i$  次元フィルタ信号  $\underline{z}_i$  と  $p_i$  次元未知パラメータベクトル  $\underline{\theta}_i$  をつぎのように定める。

$$\underline{z}_i^T = [y_1, \dots, y_{i-1}, \underline{v}_{i1}^T, \dots, \underline{v}_{im}^T, \underline{w}_{i1}^T, \dots, \underline{w}_{ir}^T] \quad (2.12)$$

$$\underline{\theta}_i^T = [-s_{i1}, \dots, -s_{i(i-1)}, \underline{d}_{i1}^T, \dots, \underline{d}_{im}^T, \underline{b}_{i1}^T, \dots, \underline{b}_{ir}^T] \quad (2.13)$$

これによって、 $y_i$  のパラメトリック表現は

$$y_i = \underline{z}_i^T \underline{\theta}_i + f_i \quad (2.14)$$

となる。この表現は1出力系の場合と同じ形式であるため、1出力系の場合の設計方法が容易に適用できる。Yang らのパラメトリック表現は、出力を直接使わずフィルタ出力のみを用いているため、調整するパラメータからプラントパラメータを構成する過程が複雑化している。

#### 4.2.3 適応観測器

適応観測器はフィルタ (2.5)式、信号(2.12)式とつぎの信号からなる。

$$\hat{y}_i = \underline{z}_i^T \hat{\underline{\theta}}_i \quad (2.15)$$

$$\dot{\hat{\underline{\theta}}}_i = -\phi R_i^{-1} \underline{\eta}_i \quad (2.16a)$$

$$\dot{\underline{\eta}}_i = -(\phi + \psi) \underline{\eta}_i + \underline{z}_i (\hat{y}_i - y_i), \quad \underline{\eta}_i(0) = \underline{0} \quad (2.16b)$$

$$\dot{R}_i = -\phi R_i + \underline{z}_i \underline{z}_i^T, \quad R_i(0) > 0 \quad (2.16c)$$

ここで、 $R_i$  は  $p_i \times p_i$  行列、 $\underline{\eta}_i$  は  $p_i$  次元ベクトル、 $\phi$  と  $\psi$  は正定数である。さらに、このとき

$$[-\hat{s}_{i1}, \dots, -\hat{s}_{i(i-1)}, \hat{\underline{d}}_{i1}^T, \dots, \hat{\underline{d}}_{im}^T,$$



$$\|\hat{\theta}_i - \theta_i\| \leq M_1 \exp(-\mu_i t) \quad (2.21a)$$

$$\|\hat{x}_i - x_i\| \leq M_2 \exp(-\mu_i t) \quad (2.21b)$$

となる。

(証明)

入力  $u$  の有界性の仮定から、フィルタ信号  $\underline{z}_i$  は有界である。 $\underline{\zeta}_i$  をパラメータ誤差ベクトル  $\hat{\theta}_i - \theta_i$  とし、 $\underline{\delta}_i = \underline{\eta}_i - R_i \underline{\zeta}_i$  とおくと

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\delta}}_i &= \dot{\underline{\eta}}_i - \dot{R}_i \underline{\zeta}_i - R_i \dot{\underline{\zeta}}_i \\ &= -\phi (\underline{\eta}_i - R_i \underline{\zeta}_i) + \underline{z}_i f_i \\ &= -\phi \underline{\delta}_i + \underline{z}_i f_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。フィルタ信号  $\underline{z}_i$  は有界であり、 $f_i$  は (2.8) 式で定義されているから、上式の右辺第2項は正定数  $C_1$  によって

$$\|\underline{z}_i f_i\| \leq C_1 \exp(-\min \Lambda [K_i] t) \quad (2.23)$$

と表わされる。一方、微分方程式 (2.22) 式の解から

$$\begin{aligned} \|\underline{\delta}_i\| &\leq \|\underline{\delta}_i(0)\| \exp(-\phi t) \\ &\quad + \int_0^t \|\underline{z}_i f_i\| \exp(-\phi(t-\tau)) d\tau \end{aligned} \quad (2.24)$$

であるから、(2.23)式を使えば、 $\|\underline{\delta}_i\|$  は  $\min\{\min \Lambda [K_i], \phi\}$  で指数減衰する。また、

$$\dot{\underline{\zeta}}_i = -\phi \underline{\zeta}_i - \phi R_i^{-1} \underline{\delta}_i \quad (2.25)$$

であり、 $\|R_i^{-1}\|$  が有界であるから、上式右辺第2項  $-\phi R_i^{-1} \underline{\delta}_i$  も  $\min\{\min \Lambda [K_i], \phi\}$  で指数減衰する。したがって、(2.25)式の解  $\underline{\zeta}_i$  は  $\mu_i = \min\{\phi, \phi, \min \Lambda [K_i]\}$  で指数減衰することがわかる。

状態推定誤差も同様であることは (2.6), (2.20) 式から明らかである。□



〔補足〕

$R_i^{-1}$  の存在性および、 $R_i$  ,  $\|R_i^{-1}\|$  の有界性の十分条件は、入力  $\underline{u}$  が有界であり、すべての  $i$  について、フィルタ信号  $\underline{z}_i$  の各成分が線形独立、すなわち任意の零ベクトルでない定数ベクトル  $\underline{\beta}$  によって

$$\underline{\beta}^T \underline{z}_i = 0 \quad (2.26)$$

が成立しないことである。 $R_i$  の有界性はフィルタ信号  $\underline{z}_i$  の有界性から明らかであり、 $R_i^{-1}$  の存在性、 $\|R_i^{-1}\|$  の有界性は、フィルタ信号  $\underline{z}_i$  の各成分が線形独立であれば、第2章 (4.1) 式が成立するので、第2章〔補題 2.2〕から明らかである。

また、入力  $\underline{u}$  に以下の十分一般性条件を仮定すれば、フィルタ信号  $\underline{z}_i$  の各成分の線形独立性は満たされる（証明は〈付録 4.2〉参照）。

〈入力  $\underline{u}$  の十分一般性条件〉

$n_0 = \max\{n_j\}$ 、 $p = d/dt$  とおくと、任意の  $t$  に対して、 $r(n+n_0-1)$  個の関数

$$p^i u_j, \quad i=0, \dots, n+n_0-1, \quad j=1, \dots, r \quad (2.27)$$

が区間  $[t_0, \infty)$  で、線形独立、すなわち、 $r$  個の任意の  $(n+n_0-1)$  次多項式

$$\beta_j(p) = \sum_{j=0}^{n+n_0-1} \beta_{ij} p^j \quad (2.28)$$

に対して

$$\sum_{i=1}^r \beta_i(p) u_i = 0 \quad (2.29)$$

が成り立たないとき、入力  $\underline{u}$  は十分一般的であるという。

この定義から、各入力  $u_i$  が他の入力  $u_j$  ( $i \neq j$ ) と異なる周波数成分を少なくとも  $\frac{(n+n_0)}{2}$  個以上含んでいれば、入力  $\underline{u}$  は十分一般的となる。Yuanらも十分一般性条件を論じ、類似の条件を導いている(13)。

#### 4.3 指数減衰的多入出力MRACSの構成

##### 4.3.1 問題の記述

制御対象は $m$ 入出力可制御可観測線形時不変系であり、第4.3節の適応観測器の仮定1)～3)を満たしているものとする。

このとき、系は(2.1)式の可観測標準形式で表現される。ただし、 $r=m$ である。さらに以下を仮定する。

- 4) 制御対象の伝達関数行列の零点の実部はすべて左半平面にある。
- 5) 次式で定義される対応定数 $d_i$  ( $i=1, \dots, m$ )は既知である。

$$d_i = \min\{j; \underline{c}_i^T A^{j-1} B \neq 0, j=1, \dots, n\} \quad (3.1)$$

- 6) 制御対象は非干渉化可能である。すなわち

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T A^{d_1-1} B \\ \vdots \\ \underline{c}_m^T A^{d_m-1} B \end{bmatrix} = m \quad (3.2)$$

規範モデルは

$$\dot{\underline{x}}_M(t) = A_M \underline{x}_M(t) + B_M \underline{r}(t), \underline{x}_M(0) = \underline{0} \quad (3.3a)$$

$$\underline{y}_M(t) = C_M^T \underline{x}_M(t) \quad (3.3b)$$

とする。ここで、 $\underline{x}_M(t)$ は規範モデルの任意次元の状態ベクトル、 $\underline{y}_M(t)$ は $m$ 次元の規範モデル出力ベクトル、 $\underline{r}(t)$ は $m$ 次元の規範モデル入力ベクトルである。 $A_M$ は安定とする。またモデルの $i$ 番目の出力の対応定数はプラントの $i$ 番目の出力のそれ以上となるように与える。

問題は出力誤差 $\underline{y} - \underline{y}_M$ を減衰させる制御入力 $\underline{u}$ を構成することである。

##### 4.3.2 MRACSの構成

多入出力適応観測器と類似のパラメトリック表現にもとづいて、MRACSを構成する。まず、状態変数フィルタをつぎのように構成する。

$$\underline{v}_i = H_i \underline{q}_i \quad (3.4a)$$

$$\dot{\underline{q}}_i = K^T \underline{q}_i + \underline{c}_0 y_i, \quad \underline{q}_i(0) = \underline{0} \quad (3.4b)$$

$$\dot{\underline{w}}_i = K^T \underline{w}_i + \underline{c}_0 u_i, \quad \underline{w}_i(0) = \underline{0} \quad (3.4c)$$

ここで  $K$ 、 $H_i$  はそれぞれ次式の形式の  $n_0 \times n_0$ 、安定行列、 $n_i \times n_0$ 、行列であり、 $\underline{q}_i$ 、 $\underline{w}_i$  は  $n_0$  次元ベクトル、 $\underline{v}_i$  は  $n_i$  次元ベクトルである。また、 $\underline{c}_0^T = [1, 0, \dots, 0]$  である。

$$K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \underline{k} & \ddots & & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad H_i = \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}$$

多入出力適応観測器と同様にこれらのフィルタ信号を使って、出力  $y_i$  およびその微分のパラメトリック表現はつぎのように与えられる。

$$p^j y_i = \underline{\rho}_{ij}^T \underline{z}_1 + \underline{\sigma}_{ij}^T \underline{z}_2 + \underline{c}_i^T A^j \exp(Kt) \underline{x}(0) \quad (3.5a)$$

$$p^{d_i} y_i = \underline{\rho}_i d_i^T \underline{z}_1 + \underline{\sigma}_i d_i^T \underline{z}_2 + \underline{c}_i^T A^{d_i} \exp(Kt) \underline{x}(0) \\ + \underline{c}_i^T A^{d_i-1} B \underline{u}(t) \quad (3.5b)$$

ここで  $p = d/dt$  であり、 $\underline{z}_1$ 、 $\underline{z}_2$  はそれぞれ  $\underline{v}_i$ 、 $\underline{w}_i$  を  $i=1$  から  $m$  までについて上から並べた  $n$  次元、 $m n_0$  次元ベクトルである。また  $n$  次元ベクトル  $\underline{\rho}_{ij}$ 、 $m n_0$  次元ベクトル  $\underline{\sigma}_{ij}$  は未知パラメータ  $\underline{a}_{ij}$ 、 $\underline{b}_{ik}$ 、 $\underline{c}_{ij}$  とフィルタ信号ベクトル  $\underline{k}$  の関数である。この表現は適応観測器の場合の表現における  $y_1, \dots, y_{i-1}$  およびその微分をフィルタ信号  $\underline{v}_i$ 、 $\underline{w}_i$  だけで表わしている点が異り、1 入出力系の場合の拡張となっている。また、この表現は各出力  $y_i$  ごとに独立した表現になっているので、以下 1 入出力系の設計方法が適用できる。まず、漸近安定な多項式オペレータ

$$D_i(p) = \alpha_i d_i p^{d_i} + \dots + \alpha_i 0, \quad \alpha_i d_i = 1, \quad i=1, \dots, m \quad (3.6)$$

を導入する。  $D_i$  を  $e_i$  に作用させると、入力を陽に含むつぎの誤差方程式が得られる。

$$D_i(p) e_i = \underline{\gamma}_i^T \underline{z} + \underline{\beta}_i^T \underline{u} - D_i(p) y_{m i} + g_{i0} \quad (3.7)$$

ここで、

$$\underline{y}_i^T = \left[ \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{ij} \underline{p}_{ij}^T, \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{ij} \underline{q}_{ij}^T \right] \quad (3.8a)$$

$$\underline{\beta}_i^T = \underline{c}_i^T \Lambda d_i^{-1} B \quad (3.8b)$$

$$\underline{g}_{i0} = \sum_{j=1}^{d_i} \alpha_{ij} \underline{c}_j^T A^j \exp(Kt) \underline{x}(0) \quad (3.8c)$$

$$\underline{z}^T = [\underline{z}_1^T, \underline{z}_2^T] \quad (3.8d)$$

である。規範モデルの仮定から、 $D_i(p)$   $y_{Mi}$  は規範入力  $r_i$  の微分を含まない。  
さらに、つぎのフィルタを定義する。

$$\underline{\tilde{z}}_i = D_i^{-1}(p) \underline{z}, \quad \underline{\tilde{z}}_i(0) = \underline{0} \quad (3.9a)$$

$$\underline{\tilde{u}}_i = D_i^{-1}(p) \underline{u}, \quad \underline{\tilde{u}}_i(0) = \underline{0} \quad (3.9b)$$

このとき、 $e_i$  は

$$e_i = \underline{y}_i^T \underline{\tilde{z}}_i + \underline{\beta}_i^T \underline{\tilde{u}}_i - y_{Mi} + \varepsilon_{i1} \quad (3.10)$$

と書ける。ここに、 $\varepsilon_{i1} = D_i^{-1}(p) \underline{g}_{i0}$  である。行列  $K$  と多項式  $D_i(p)$  の漸近安定性の仮定から、 $\varepsilon_{i1}$  は  $\min \{ \min \Lambda [K], \lambda [D_i] \}$  で指数減衰する。

パラメータ  $\underline{y}_i$ ,  $\underline{\beta}_i$  は未知であるから、同定値  $\hat{\underline{y}}_i$ ,  $\hat{\underline{\beta}}_i$  でおきかえれば、

$$\hat{e}_i = \hat{\underline{y}}_i^T \underline{\tilde{z}}_i + \hat{\underline{\beta}}_i^T \underline{\tilde{u}}_i - y_{Mi} \quad (3.11)$$

となる。したがって、同定誤差  $\bar{e}_i = \hat{e}_i - e_i$  は

$$\bar{e}_i = \underline{\zeta}^T \underline{\tilde{z}}_i - \varepsilon_{i1} \quad (3.12)$$

となる。ここに

$$\underline{\zeta}_i^T = [\hat{\underline{\beta}}_i^T - \underline{\beta}_i^T, \hat{\underline{y}}_i^T - \underline{y}_i^T], \quad \underline{\tilde{z}}_i = [\underline{\tilde{u}}_i, \underline{\tilde{z}}_i]$$

である。ここで、適応観測器と同じつぎのパラメータ調整則を用いる。

$$\dot{\underline{z}}_i = -\phi_i R_i^{-1} \underline{\eta}_i, \quad \phi > 0 \quad (3.13)$$

$$\dot{\underline{\eta}}_i = -(\phi_i + \phi_i) \underline{\eta}_i + \underline{z}_i \bar{c}_i, \quad \underline{\eta}_i(0) = \underline{0}, \quad \phi > 0 \quad (3.14)$$

$$\dot{R}_i = -\phi_i R_i + \underline{z}_i \underline{z}_i^T, \quad R_i(0) > 0 \quad (3.15)$$

つぎに、制御則を得るために全体系の誤差モデルを導く。すなわち、

$$D(p) \underline{e} = \Theta^T \underline{u} + \Gamma^T \underline{z} - D(p) \underline{y}_M + \underline{g}_0 \quad (3.16)$$

ここに、

$$\underline{e}^T = [e_1, \dots, e_m]$$

$$\Theta = [\underline{\theta}_1, \dots, \underline{\theta}_m]$$

$$\Gamma = [\underline{\gamma}_1, \dots, \underline{\gamma}_m]$$

$$\underline{g}_0^T = [g_{10}, \dots, g_{m0}]$$

$$D(p) = \begin{bmatrix} D_1(p) & 0 \\ 0 & D_m(p) \end{bmatrix}$$

である。(3.16)式の未知パラメータに同定値を代入すれば、制御入力

$$\underline{u} = -(\hat{\Theta}^T)^{-1} [\hat{\Gamma}^T \underline{z} - D(p) \underline{y}_M] \quad (3.17)$$

となる。ただし、 $\hat{\Theta}$ の行列式がある微小正数 $\delta$ より小さいときには、 $(\hat{\Theta}^T)^{-1}$ は

$\frac{\text{adj}(\hat{\Theta}^T)}{\delta \text{sgn}(\det \hat{\Theta})}$  で代用する。ここに、 $\hat{\Theta}$ 、 $\hat{\Gamma}$ は $\Theta$ 、 $\Gamma$ の同定値である。

このように構成すれば、フィルタ信号の十分一般性条件成立の仮定のもとで出力誤差が指数減衰することを以下で示す。

まず、フィルタ信号の十分一般性条件が成立する、すなわち、ある $T_i > 0$ 、 $\omega_i > 0$ が存在し、すべての $t \geq T_i$ に対して

$$\int_{t-T_i}^t \underline{z}_i(\tau) \underline{z}_i^T(\tau) d\tau > \omega_i I \quad (3.18)$$

が成り立つと仮定する。このとき、つぎの定理が成り立つ。

《定理 4.1》

信号  $\underline{z}_i(t)$  が十分一般的であるとき、パラメータ誤差ベクトル  $\underline{k}_i$  は減衰度

$$\lambda_i = \min(\phi_i, \phi_i/2, \min \Lambda[K], \lambda[D_i]) \quad (3.19)$$

で指数減衰する。

(証明)

第2章《定理 2.1》より明らか。■

《定理 4.2》

信号  $\underline{z}_i(t)$  ( $i=1, \dots, m$ ) が、すべての  $i$  について、十分一般的であるとき、全信号は有界であり、出力誤差は減衰度

$$\lambda_0 = \min(\lambda_1, \dots, \lambda_m) \quad (3.20)$$

で指数減衰する。

(証明)

《定理 4.1》が成立するから、第2章《定理 2.2》, 《定理 2.3》より明らか。■

## 4.4 数値シミュレーション

### 4.4.1 多入出力適応観測器

表4.1に示す3次系に対してシミュレーションを行った。このシステムはYangらの例で使われたシステムを変換して得たものである。可観測指標は $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 1$ である。減衰度の違いを示すために、減衰度 2.0, 4.0, 8.0 の場合について行っている。

図4.1~4.5に各同定パラメータ値を真値で割って、正規化した値を示す。残りの未知パラメータも同様に収束しているのので、ここでは省略している。図4.6, 4.7には状態量の正規化した推定値を示す。パラメータ同定、状態推定の完了する時間は、減衰度 2.0 のときには $t = 8.0$ 、減衰度 4.0 のときには $t = 4.0$ 、減衰度 8.0 のときには $t = 3.0$  である。これより、減衰度が大きいほど収束時間が短いことがわかる。

### 4.4.2 多入出力MRACS

表4.2の例でシミュレーションを行った。これは第6章で述べる熱実験系のおおよその数値をプラントパラメータ値としたものである。

プラント出力と規範出力を図4.8に、入力を図4.9に示す。図より1入出力系の場合と同様の減衰曲線を描きながら、プラント出力が規範モデル出力に収束していることが確認できる。また、規範モデルを非干渉形式で与えているため、規範モデル出力にプラント出力が追従した後は、プラント出力は非干渉となっており、MRACSによって非干渉制御が実現できることがわかる。

#### 4.5 結言

本章では多入出力系に対する指数減衰的適応観測器およびMRACSの構成方法を示した。まず、cyclicでないプラントにも適用できるように、多入出力系を1出力サブシステムに分割した。そして、そのシステム表現に対して、構成の複雑さを改善できる新しいパラメトリック表現を求め、1入出力系の設計方法を適用して、指数減衰的収束性を有する多入出力適応観測器を構成した。同じ収束性をもつ多入出力MRACSも類似のパラメトリック表現にもとづいて、同様の方法で構成できることを示した。出力誤差の漸近安定性、全信号の有界性の証明には1入出力系の議論を適用した。

設計において、非干渉可能条件 (3.2) を仮定しているが、未知インタラクタマトリクス概念 (14, 15) を取り入れれば、より弱い条件に広げることが容易である。

#### 4.6 付録

##### <付録 4.1>

( (2.4) 式の証明 )

(4.3) 式より

$$\dot{\underline{x}}_i = A_{ii} \underline{x}_i + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m A_{ij} \underline{x}_j + \sum_{k=1}^r \underline{b}_{ik} u_k, \quad i = 1, \dots, m \quad (A1.1)$$

となる。そこで、 $A_{ij}$ 、 $K_i$  の定義を使えば

$$(A_{ii} - K_i) \underline{x}_i = (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_i \quad (A1.2a)$$

$$A_{ij} \underline{x}_j = \underline{a}_{ij} \underline{c}_j^T \underline{x}_j \quad (A1.2b)$$

である。これらを(A1.1)式に代入すれば

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}}_i = & K_i \underline{x}_i + (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_i + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \underline{a}_{ij} \underline{c}_j^T \underline{x}_j \\ & + \sum_{k=1}^r \underline{b}_{ik} u_k, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (A1.3)$$



が得られる。 $T_i$ 、 $\underline{y}_d$  の定義から、上式の右辺第 2、3 項は

$$\begin{aligned} K_i \underline{x}_i + (\underline{a}_{ii} - \underline{k}_{ii}) \underline{c}_{ii}^T \underline{x}_i + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^m \underline{a}_{ij} \underline{c}_j^T \underline{x}_i \\ = T_i \underline{y}_d \end{aligned} \quad (A1.4)$$

である。 $\underline{y} = S \underline{y}_d$  すなわち  $\underline{y}_d = S^{-1} \underline{y}$  を (A1.4) 式に代入し、ベクトル  $\underline{d}_{ij}$  を使えば、(2.4) 式が得られる。

#### <付録 4.2>

(フィルタ信号  $\underline{z}_i$  の各成分の線形独立性の証明)

$k_i(p)$  と  $t(p)$  を次式の  $n_i$  次および  $n$  次多項式とする。

$$k_i(p) = \det(pI - K_i), \quad t(p) = \det(pI - A) \quad (A2.1)$$

すると、フィルタ信号と出力は

$$\underline{v}_{ij} = k_i^{-1}(p) \begin{bmatrix} p^{n_i-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} y_j, \quad j=1, \dots, m \quad (A2.2a)$$

$$\underline{w}_{ik} = k_i^{-1}(p) \begin{bmatrix} p^{n_i-1} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u_k, \quad k=1, \dots, r \quad (A2.2b)$$

$$\underline{y} = t^{-1}(p) T(p) \underline{u} \quad (A2.3)$$

$$y_i = \sum_{k=1}^r t^{-1}(p) t_{ik}(p) u_k \quad (A2.4)$$

となる。ここで  $T(p)$  は  $t^{-1}(p) T(p) = C^T (pI - A)^{-1} B$  を満たす  $m \times r(n-1)$  次多項式行列であり、 $t_{ik}(p)$  はその  $(i, k)$  要素を表わす。

ある定数ベクトル  $\underline{\beta}_i$  によって、 $\underline{\beta}_i^T \underline{z}_i = 0$  が成り立つとする。 $\underline{v}_{ij}$ 、 $\underline{w}_{ik}$ 、 $y_i$  を (A2.3) 式に代入し、 $t(p) k_i(p)$  を乗じれば、 $u_i$  を含む項の係数は  $p$  の  $(n+n_0-1)$  次多項式となる。したがって、各  $i$  について

$$\sum_{j=1}^r \beta_{ij}(p) u_j = 0 \quad (\text{A2.5})$$

を満たす  $r$  個の  $(n+n_0-1)$  次多項式  $\beta_{ij}(p)$  が存在する。  $n_0 = \max\{n_i\}$  であるから、これは入力  $\underline{u}$  の十分一般性条件に矛盾する。

表4.1 多入出力適応観測器の

シミュレーションにおけるパラメータ値

<p>プラント</p>	$A = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_2 & 0 & a_3 \\ a_4 & 0 & a_5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \\ b_5 & b_6 \end{bmatrix}$ $C^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_{21} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p> <math>a_1 = -3.67, \quad a_2 = -2.44, \quad a_3 = 0.444,</math>  <math>a_4 = -0.667, \quad a_5 = -2.33,</math>  <math>b_1 = 1.0, \quad b_2 = 5.67, \quad b_3 = 1.67,</math>  <math>b_4 = 0.333, \quad b_5 = 1.0, \quad b_6 = 1.33,</math>  <math>c_{21} = 0.667.</math> </p>		
<p>入力</p>	<p> <math>u_1(t) = \text{sign}(\sin(3.0t)) + \sin(3.5t),</math>  <math>u_2(t) = \text{sign}(\sin(4.0t)) + \sin(4.5t)</math> </p>		
<p>初期値</p>	<p><math>R_1(0) = 0.1I, \quad \text{その他} = 0.0</math></p>		
<p>シミュレーション 番号</p>	<p>NO. 1</p>	<p>NO. 2</p>	<p>NO. 3</p>
<p>減衰度</p>	<p>2.0</p>	<p>4.0</p>	<p>8.0</p>
<p>調整則: <math>\phi, \phi</math></p>	<p>2.0</p>	<p>4.0</p>	<p>8.0</p>
<p>フィルタ: <math>k_{11}^T</math> 固有値</p>	<p>[ 5.0, 6.0 ] -2.0, -3.0</p>	<p>[ 9.0, 20.0 ] -4.0, -5.0</p>	<p>[ 18.0, 80.0 ] -8.0, -10.0</p>
<p>フィルタ: <math>k_{22}^T</math> 固有値</p>	<p>[ 2.0 ] -2.0</p>	<p>[ 4.0 ] -4.0</p>	<p>[ 8.0 ] -8.0</p>

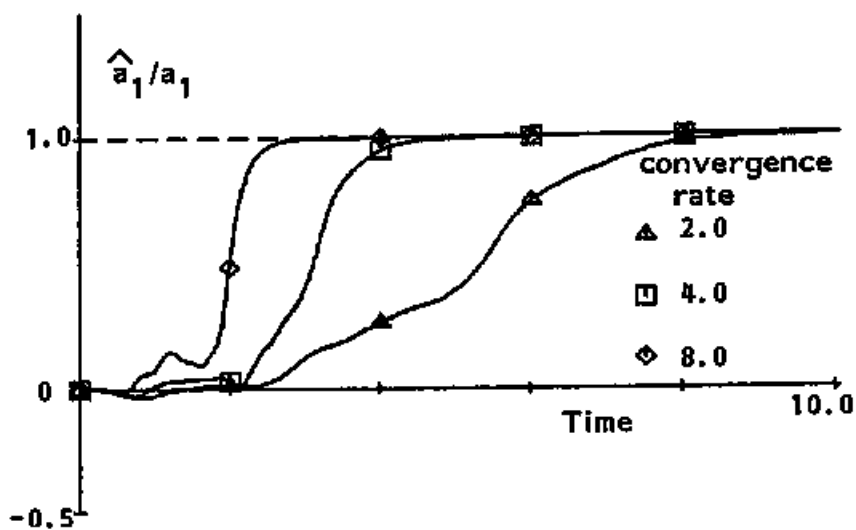


図4.1 パラメータの同定経過 ;  $\hat{a}_1 / a_1$

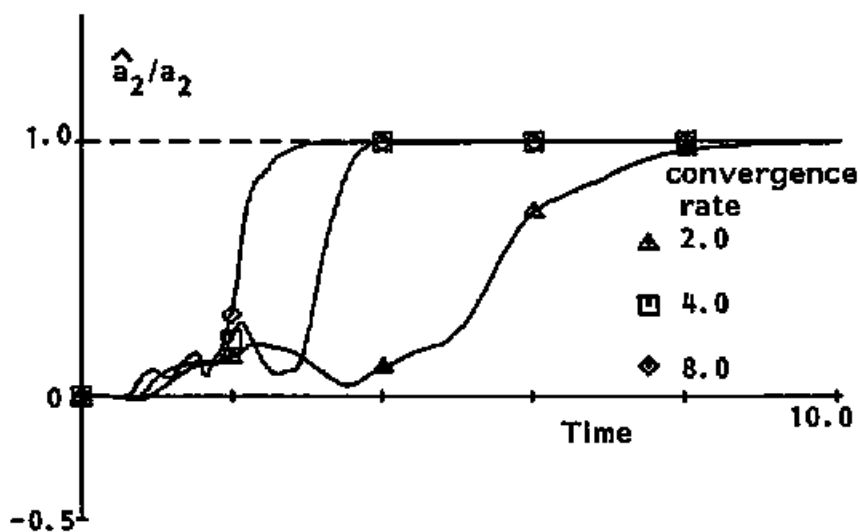


図4.2 パラメータの同定経過 ;  $\hat{a}_2 / a_2$

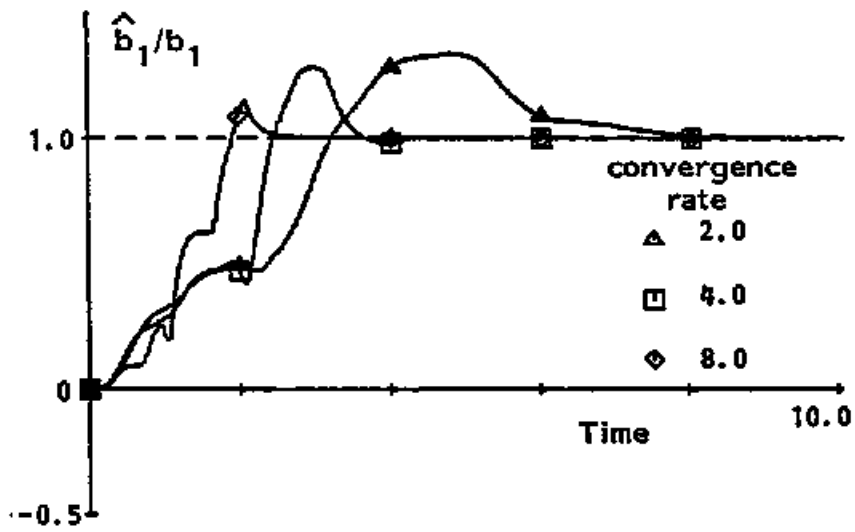


図4.3 パラメータの同定経過 ;  $\hat{b}_1 / b_1$

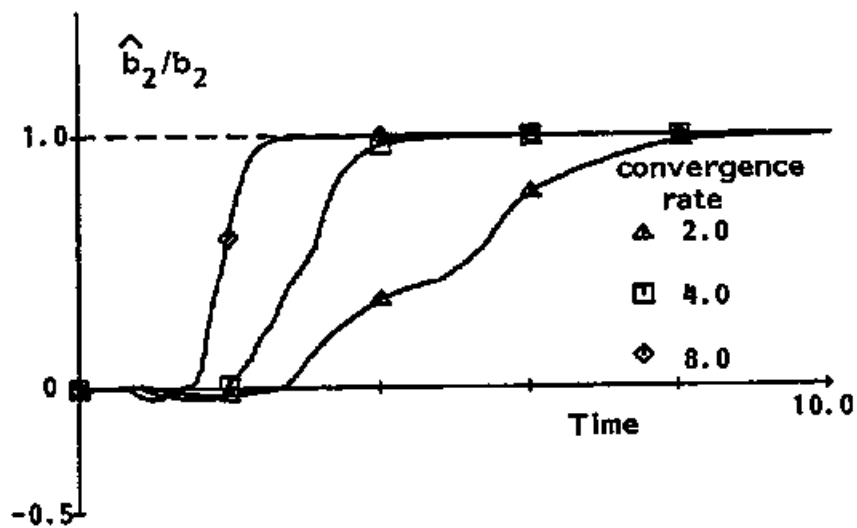


図4.4 パラメータの同定経過 ;  $\hat{b}_2 / b_2$

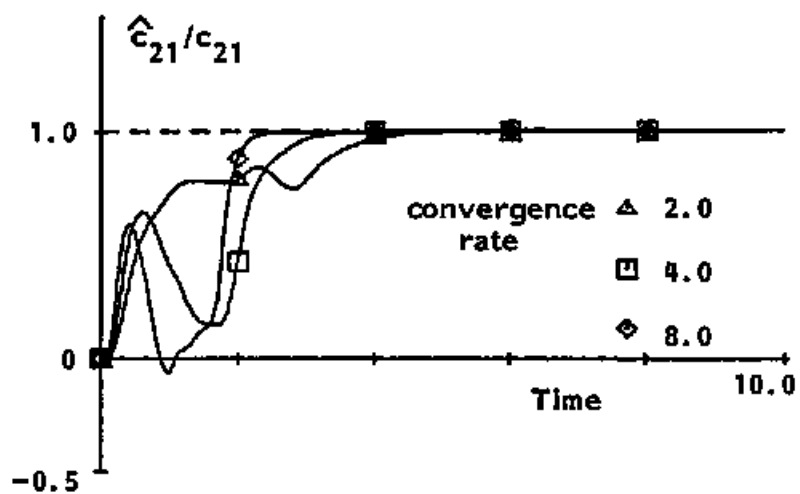


図4.5 パラメータの同定経過 ;  $\hat{c}_{21}/c_{21}$

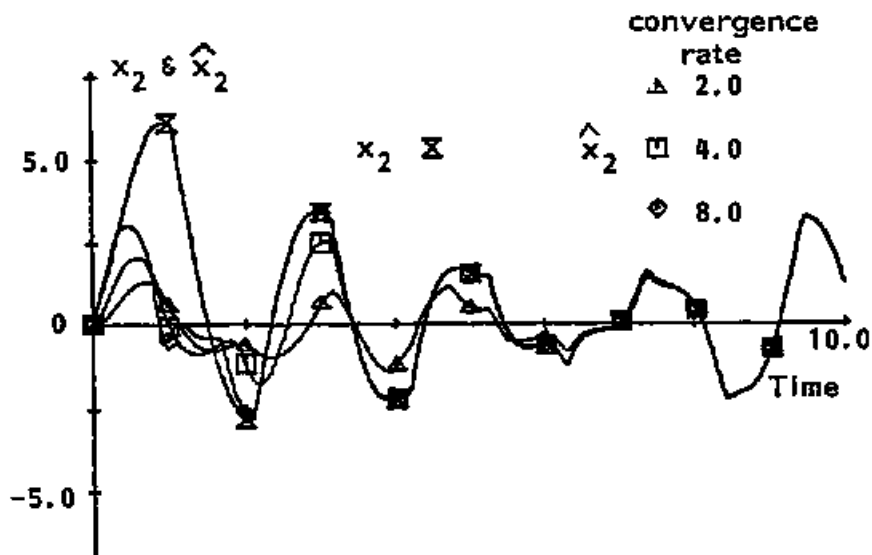


図4.6 状態変数の推定経過 ;  $\hat{x}_2$

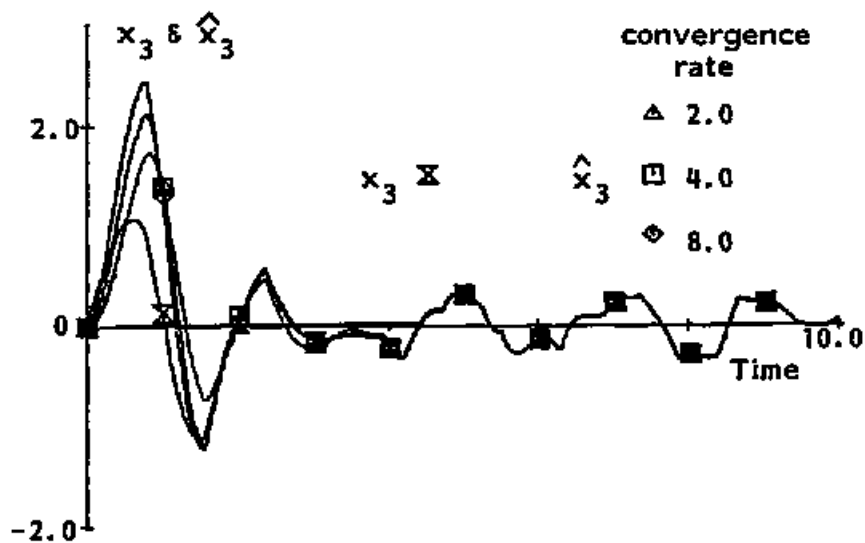


図4.7 状態変数の推定経過 ;  $\hat{x}_3$

表4.2 多入出力MRACSの

シミュレーションにおけるパラメータ値

プラント	$A = \begin{bmatrix} -0.267, & 0.137 \\ 1.005, & -1.005 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.0137, & 0 \\ 0, & 0.1005 \end{bmatrix}$
規範モデル	$A_M = \begin{bmatrix} -0.1403, & 0 \\ 0, & -0.1987 \end{bmatrix}, B_M = \begin{bmatrix} 0.1403, & 0 \\ 0, & 0.1987 \end{bmatrix}$
規範入力	$r_1 = \text{振幅} : 0.6, \text{ 周期 } 64.0 \text{ の矩形波}$ $r_2 = \text{振幅} : 0.6, \text{ 周期 } 54.0 \text{ の矩形波}$
フィルタ : $D_1$	$D_1 = D_2 = p + 0.5$
設計パラメータ	$\phi_1 = \phi_2 = 0.05, \psi_1 = \psi_2 = 0.05$
初期値	$R_1(0) = R_2(0) = I$ $\hat{\beta}_{11}(0) = \hat{\beta}_{12}(0) = 0.001,$ $\hat{\beta}_{21}(0) = 0.03, \hat{\beta}_{22}(0) = 0.09$ その他 = 0.0



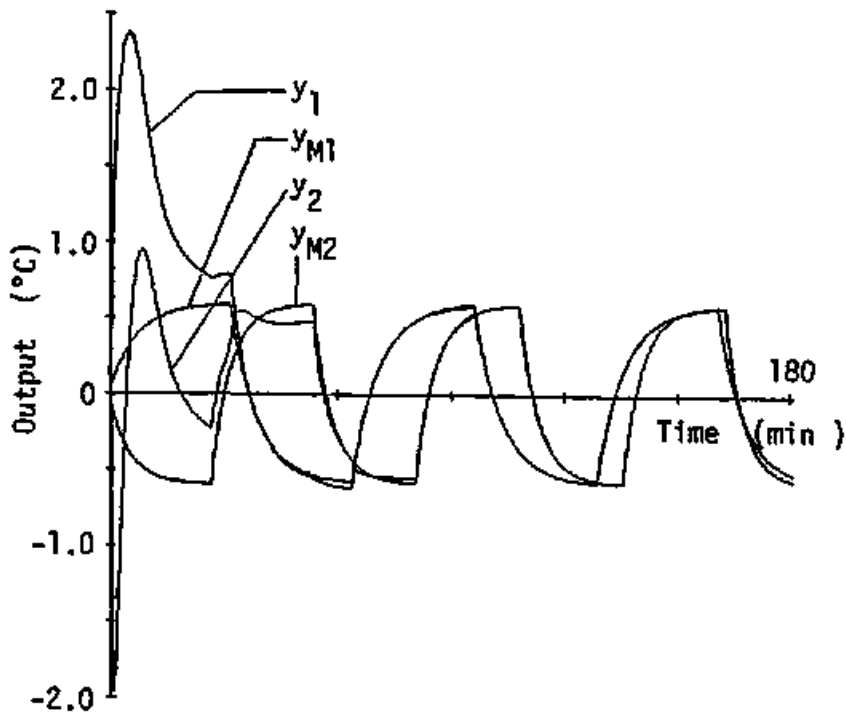


図4.8 2入出力MRACSのプラント出力と規範出力

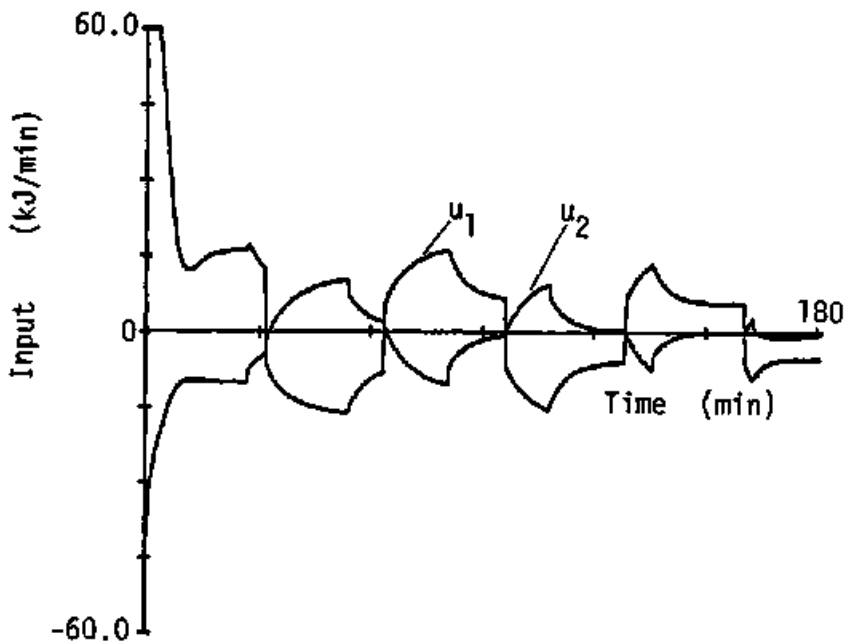


図4.9 2入出力MRACSの制御入力

## 第5章 離散時間系への拡張

### 5.1 緒言

前章まででは連続時間系を対象としたMRACSを扱ってきたが、近年めざましい発展をとげているデジタル計算機を用いることを考えると、実装の容易さの面で離散時間形式のMRACSも重要である。そこで本章では離散時間MRACSの構成方法を論じる。

離散時間形式のMRACSでも、すぐれた制御性能、特に早い収束速度を実現することに研究の方向が向けられるようになってきた。制御性能は一般に、使用されるパラメータ調整則に大きく依存するため、その選択が重要となってきた。すでに提案されている調整則の多くはLandauら(1)、鈴木ら(2)により一般化調整則として整理されているが、これらの調整則のうち、良好な収束性が得られるのは可変ゲイン方式のものであり(3)、特に重みつき最小2乗法調整則は収束が早く、時変系にも有効であることから、よく利用されている(4)。しかし、重みつき最小2乗法調整則を用いた離散時間MRACSでは、従来、状態変数フィルタおよび伝達関数の分母分子の次数差を補ってパラメータ同定を行うフィルタとして、プラントの入出力データをそのまま時間を遅らせたものを使用している。これは、いわば極が0のフィルタを用いていることと同じであり、ノイズ等の影響を受けて、制御性能が悪化しやすくなる。そこで、良好な制御性能を得るためには、連続時間系の場合と同じように、極が任意に指定できるフィルタを用いて、MRACSを構成することが望ましい。そうすれば、フィルタの極を調整則の指数減衰度にあわせて、指定するすることができ、その結果として制御経過を滑らかにすることができる(5)。このような、極が任意に指定できるフィルタをもつ、重みつき最小2乗法調整則による離散時間MRACSの構成はLozano(6)、Landau(1)らによって与えられている。しかし、その構成方法では、制御経過が滑らかになるように制御則を選ぶと、調整則でノイズの影響を受けやすくなり、逆に、調整則でノイズの影響を受けないフィルタを用いると、制御則の計算でノイズによる変動が入りやすくなる構造となっており(〈付録 5.1〉参照)、また、強正実条件を満たす必要があるため、フィルタの極を自由に選ぶことができず、さらに、信号にフィルタを用いたとき、調整則の構成が複雑となる。そこで、本章では、制御則のフィルタも調整則のフィルタも、その極がまっ

たく独立に、任意に指定可能な構成方法を示し、閉ループ系の安定性と信号の有界性の証明を与える。

重みつき最小2乗法調整則を用いた離散時間MRACSの安定性を最初に証明したのはGoodwinら(7)であるが、そこでは次数差が1の場合だけが扱われている。前記のLozano, Landauらも同じ方法で証明している。中村ら(8)は任意の極をもつフィルタを一部に使ったMRACSを提案しているが、その証明にはまだ検討すべき点が残っている。また、Narendra(9)、藤井ら(10)、武藤ら(11)も離散時間MRACSの安定性の証明を与えているが、いずれも固定ゲイン調整則を用いたMRACSを対象としている。これらの証明はすべてGoodwinらの証明方法にもとづいている。ところが、本章で扱うMRACSには、この方法を拡張することが困難である。

そこで、本章では新しい考え方にもとづく証明方法によって、安定性を証明する。それはSchauderの不動点定理(12)を用いる方法であるが、これは非線形系の可制御性の証明にすでに用いられており(13,14)、今後さらに、他のMRACSの安定性等の証明にも応用の可能性がある有効な証明手段と考えられる方法である。なお、適応フィルタの収束性の証明にも不動点定理が使われている(15)が、これは縮小写像の不動点定理であり、本章でいう不動点定理とは異なる。

以下、第5.2節でMRACSの構成方法を与え、第5.3節で、同定誤差の指数減衰性と信号の有界性を示す。そして、第5.4節でシミュレーション例について述べる。

なお、記号として、 $\lambda_M[\cdot]$ は多項式の特異根の実数部の絶対値の最大値を表わすものとする。

## 5.2 MRACSの構成

制御対象は離散時間1入出力系で、 $z^{-1}$ を時間遅れ要素( $z^{-1}y(k) = y(k-1)$ )としたとき、その入出力関係が伝達関数

$$A(z^{-1})y(k) = (z^{-1})^d B(z^{-1})u(k) \quad (2.1)$$

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n (z^{-1})^n \quad (2.2a)$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m (z^{-1})^m \quad (2.2b)$$

で与えられているとする。ここで、 $y(k)$ は出力、 $u(k)$ は入力であり、 $A(z^{-1})$ 、

$B(z^{-1})$  は  $n$  次、 $m$  次多項式である。その係数ベクトルは未知であるが、次数  $n$ 、 $m$ 、入力遅れ時間  $d$  は既知とする。また、 $B(z^{-1})$  は安定、すなわち、制御対象は最小位相系であり、 $B(z^{-1})$  の最初の係数  $b_0$  の絶対値の下限  $b_0'$  は既知とする。

規範モデルは次式で与える。

$$A_M(z^{-1}) y_M(k) = (z^{-1})^{d_M} B_M(z^{-1}) r(k) \quad (2.3)$$

ここで、 $y_M(k)$  は規範出力、 $r(k)$  は規範入力であり、有界とする。 $A_M(z^{-1})$  は安定多項式であり、入力遅れ時間  $d_M$  は  $d$  以上とする。

このとき、設計目的は出力誤差  $\tilde{e}(k) = y(k) - y_M(k)$  が 0 に減衰するように、制御入力  $u(k)$  を規範入出力  $r(k)$ 、 $y_M(k)$ 、プラント出力  $y(k)$  のみを用いて構成することである。

以下で上記の目的を達成する MRACS の構成を与えるが、フィルタの極が設計者によって任意に指定できる点が従来の方法と異なる。まず、安定な  $j$  次、 $\ell$  次多項式  $K(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$  を特性多項式とするフィルタを導入する。次数  $j$ 、 $\ell$  は設計者によって任意に与えられる。

$$K(z^{-1}) = 1 + k_1 z^{-1} + \dots + k_j (z^{-1})^j \quad (2.4)$$

$$D(z^{-1}) = 1 + d_1 z^{-1} + \dots + d_\ell (z^{-1})^\ell \quad (2.5)$$

$$K(z^{-1}) \underline{z}_1(k) = z^{-r+1} y(k) \quad (2.6a)$$

$$K(z^{-1}) \underline{z}_2(k) = \underline{p}_t u(k) \quad (2.6b)$$

$$\underline{z}^T(k) = [u(k), \underline{z}_1^T(k), \underline{z}_2^T(k)]$$

$$D(z^{-1}) \tilde{\underline{z}}(k) = (z^{-1})^d \underline{z}(k) = \underline{z}(k-d) \quad (2.7)$$

$$r = \max\{n-1, \ell+j-d\}, \quad t = \max\{m+d-1, j\} \quad (2.8)$$

ここで、 $\underline{p}_1^T$  は  $[(z^{-1}), \dots, (z^{-1})^j]$  の時間遅れ作用素、 $\underline{z}_1(k)$ 、 $\underline{z}_2(k)$  はそれぞれ  $y(k)$ 、 $u(k)$  を入力とする  $j$  次元フィルタの  $(r+1)$ 、 $t$  次元状態ベクトルであり、 $(r+t+2)$  次元ベクトル  $\tilde{\underline{z}}(k)$  の各成分  $\tilde{z}_1(k)$  は  $\underline{z}(k)$  の第  $i$  成分  $z_1(k)$  を入力とする  $\ell$  次元フィルタ  $D(z^{-1}) \tilde{z}_1(k) = z_1(k-d)$  の出力である。

注) 従来の構成方法では  $\underline{z}_1(k)$ ,  $\underline{z}_2(k)$ ,  $\tilde{\underline{z}}(k)$  はそれぞれ

$$\underline{z}_1^T(k) = [y(k), y(k-1), \dots, y(k-r-1)]$$

$$\underline{z}_2^T(k) = [u(k-1), u(k-2), \dots, u(k-t)]$$

$$\tilde{\underline{z}}(k) = \underline{z}(k-d)$$

と選んであるが、これは  $K(z^{-1}) = 1$ ,  $D(z^{-1}) = 1$  とした場合であり、極がすべて 0 の場合に相当する。

つぎに、以下の 2 つの多項式方程式を満たす、 $r$  次、 $d-1$  次、 $t$  次多項式  $R(z^{-1})$ ,  $S(z^{-1})$ ,  $T(z^{-1})$  を考える。

$$D(z^{-1}) K(z^{-1}) = A(z^{-1}) S(z^{-1}) + (z^{-1})^d R(z^{-1}) \quad (2.9)$$

$$S(z^{-1}) B(z^{-1}) = b_0 K(z^{-1}) + T(z^{-1}) \quad (2.10)$$

$$R(z^{-1}) = r_0 + r_1 z^{-1} + \dots + r_r (z^{-1})^r = z \underline{p}_{r+1}^T \underline{r} \quad (2.11)$$

$$S(z^{-1}) = 1 + s_1 z^{-1} + \dots + s_{d-1} (z^{-1})^{d-1} = z \underline{p}_d^T \underline{s} \quad (2.12)$$

$$T(z^{-1}) = t_1 z^{-1} + \dots + t_t (z^{-1})^t = \underline{p}_t^T \underline{t} \quad (2.13)$$

$\underline{r}$ ,  $\underline{s}$ ,  $\underline{t}$  は係数ベクトルである。この関係式を満たす多項式が一意に存在することは、各方程式の  $z^{-1}$  の係数を比較して、各多項式の係数が一意に決定されることから示される。

さて、 $(r+t+2)$  次元未知係数ベクトル

$$\underline{\theta}^T = [b_0, \underline{r}^T, \underline{t}^T] \quad (2.14)$$

を使うと、出力誤差方程式が得られる。

$$\begin{aligned} D(z^{-1}) K(z^{-1}) y(k+d) \\ &= A(z^{-1}) S(z^{-1}) y(k+d) + (z^{-1})^d R(z^{-1}) y(k+d) \\ &= b_0 K(z^{-1}) u(k) + T(z^{-1}) u(k) + R(z^{-1}) y(k) \end{aligned}$$

$$= K(z^{-1}) \underline{\theta}^T \underline{z}(k) \quad (2.15)$$

さらに、上式の両辺を  $D(z^{-1})$  ,  $K(z^{-1})$  で約すと

$$\begin{aligned} D(z^{-1}) y(k+d) &= \underline{\theta}^T \underline{z}(k) + \varepsilon_1(k) \\ &= \underline{\theta}^T D(z^{-1}) \underline{\tilde{z}}(k+d) + \varepsilon_1(k) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$y(k) = \underline{\theta}^T \underline{\tilde{z}}(k) + \varepsilon_2(k) \quad (2.17)$$

$$K(z^{-1}) \varepsilon_1(k) = 0, \quad D(z^{-1}) \varepsilon_2(k+d) = \varepsilon_1(k) \quad (2.18)$$

ここで  $\varepsilon_1(k)$  ,  $\varepsilon_2(k)$  は初期値による項であり、(2.18)式を満たす。(2.16)式を用いると出力誤差  $\tilde{e}(k)$  は次式となる。

$$D(z^{-1}) \tilde{e}(k+d) = \underline{\theta}^T \underline{z}(k) - D(z^{-1}) y_M(k+d) + \varepsilon_2(k) \quad (2.19)$$

この右辺を 0 とするように制御入力  $u(k)$  を決めるが、 $\underline{\theta}$  は未知であるため、その同定値  $\hat{\underline{\theta}}^T(k) = [\hat{b}_0(k), \hat{\underline{f}}^T(k), \hat{\underline{g}}^T(k)]$  で代用し、かつ、 $b_0$  より小さいか等しい正数  $b_m$  を決め、つぎの  $\hat{b}(k)$

$$\hat{b}(k) = \begin{cases} \hat{b}_0(k); & |\hat{b}_0(k)| \geq b_m \\ b_m \operatorname{sgn}(\hat{b}_0(k)); & |\hat{b}_0(k)| < b_m \end{cases} \quad (2.20)$$

で  $\hat{b}_0(k)$  を代用し

$$\begin{aligned} u(k) = -\frac{1}{\hat{b}(k)} \{ & \hat{\underline{f}}^T(k) \underline{z}_1(k) + \hat{\underline{g}}^T(k) \underline{z}_2(k) \\ & - D(z^{-1}) A_M^{-1}(z^{-1}) B_M(z^{-1}) r(k) \} \end{aligned} \quad (2.21)$$

と与える。

同定値  $\hat{\underline{\theta}}(k)$  はつぎの重みつき最小 2 乗法調整則によって求める (16)。

$$\hat{\underline{\theta}}(k+1) = \hat{\underline{\theta}}(k) - \frac{R^{-1}(k) \underline{\tilde{z}}(k+1) (\hat{y}(k+1) - y(k+1))}{\phi + \underline{\tilde{z}}^T(k+1) R^{-1}(k) \underline{\tilde{z}}(k+1)} \quad (2.22)$$

$$0 < \phi < 1$$

$$R^{-1}(k+1) = \frac{1}{\phi} \left( R^{-1}(k) - \frac{R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1) \tilde{z}^T(k+1) R^{-1}(k)}{\phi + \tilde{z}^T(k+1) R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1)} \right) \quad (2.23)$$

$$\hat{y}(k+1) = \tilde{z}^T(k+1) \hat{\theta}(k) \quad (2.24)$$

このとき、信号  $\tilde{z}(k)$  が十分一般性条件、すなわち、ある正定数  $T$  および  $\omega$  が存在して、すべての  $k$  について

$$\sum_{i=k}^{k+T} \tilde{z}(i) \tilde{z}^T(i) > \omega I \quad (2.25)$$

が満足されるならば、同定値  $\hat{\theta}(k)$  は減衰度  $\sqrt{\phi}$  で真値  $\theta$  へ指数減衰する。すなわち、ある定数  $M_0$  が存在し、パラメータ誤差  $\underline{\zeta}(k) \equiv \hat{\theta}(k) - \theta$  が

$$\|\underline{\zeta}(k)\| \leq M_0 (\sqrt{\phi})^k \quad (2.26)$$

と評価される(16)。ただし、 $M_0$  は初期値に依存する。文献(16)には条件(2.25)のほか(2.25)式の左辺が有界であるという条件も課されているが、その条件がなくても  $\underline{\zeta}(k)$  の指数減衰性は成立する。

以上より、本章のMRACSはフィルタ(2.6)、(2.7)式、制御入力(2.21)式、調整則(2.22)～(2.24)式で構成される。

### 5.3 不動点定理による有界性と安定性の証明

任意に選んだ初期値および有界な規範入力に対する軌道  $y(k)$ 、 $y_M(k)$ 、 $u(k)$ 、 $\underline{z}(k)$ 、 $\tilde{z}(k)$  が有界かつ安定であることを示して、閉ループ系が有界かつ安定であることを証明する。

まず、この軌道における同定誤差  $\underline{\zeta}(k)$  は(2.26)式で減衰するので、ある有限時刻  $k_1$  が存在して、 $k > k_1$  では

$$|\hat{b}_0(k)| \geq |b_0| - |\hat{b}_0(k) - b_0| \geq b_m \quad (3.1)$$

となって、(2.20)式の  $\hat{b}(k)$  は  $\hat{b}_0(k)$  と等しくなる。よって、(2.21)式より  $k > k_1$  では次式が成立する。

$$D(z^{-1}) y_M(k+d) = \hat{\theta}^T(k) \underline{z}(k) \quad (3.2)$$

軌道  $y(k)$  その他は、有限時刻  $k_1$  までは  $r(k)$  の有界性より有界だから、 $k > k_1$  以降の有界性を (3.2) 式が成立するとして証明する。

以下の仮想的な信号を考える。これらの信号は証明に用いるだけで、MRACSの構成上は不要である。まず、

$$(z^{-1})^d B(z^{-1}) u_M(k) = A(z^{-1}) y_M(k) \quad (3.3)$$

なる関係式を満たす信号  $u_M(k)$  を考える。 $A_M(z^{-1})$  が安定で  $r(k)$  が有界であるから  $y_M(k)$  が有界であり、 $B(z^{-1})$  が安定だから  $u_M(k)$  も有界となる。つぎに、 $y_M(k)$ 、 $u_M(k)$  をフィルタ  $K(z^{-1})$  にとおした信号  $\underline{z}_{M1}(k)$ 、 $\underline{z}_{M2}(k)$  を仮想的に考える。

$$K(z^{-1}) \underline{z}_{M1}(k) = z_{p_{r+1}} y_M(k) \quad (3.4a)$$

$$K(z^{-1}) \underline{z}_{M2}(k) = p_1 u_M(k) \quad (3.4b)$$

$$\underline{z}_M^T(k) = [u_M(k), \underline{z}_{M1}^T(k), \underline{z}_{M2}^T(k)]$$

$K(z^{-1})$  が安定かつ  $y_M(k)$ 、 $u_M(k)$  が有界であることより  $\underline{z}_M(k)$  も有界である。

これらの仮想的な信号を使って、MRACSの閉ループ系を表わす式を与える。まず、誤差モデルは (2.19)、(3.2) 式より、 $\bar{e}(k)$  を (2.19) 式の左辺とおき

$$\begin{aligned} \bar{e}(k) &= D(z^{-1}) \tilde{e}(k+d) \\ &= -\underline{\xi}^T(k) \{ \underline{z}(k) - \underline{z}_M(k) \} \\ &\quad - \underline{\xi}^T(k) \underline{z}_M(k) + \varepsilon_2(k) \end{aligned} \quad (3.5)$$

つぎに、信号を表現する式は、(2.1)、(3.3)、(3.4) 式より

$$D(z^{-1}) B(z^{-1}) \{ u(k) - u_M(k) \} = A(z^{-1}) \bar{e}(k) \quad (3.6)$$

$$D(z^{-1}) K(z^{-1}) \{ \underline{z}_1(k) - \underline{z}_{M1}(k) \} = p_{r+1} (z^{-1})^{d-1} \bar{e}(k) \quad (3.7)$$

$$D(z^{-1}) K(z^{-1}) B(z^{-1}) \{ \underline{z}_2(k) - \underline{z}_{M2}(k) \}$$



$$= p_t A(z^{-1}) \bar{e}(k) \quad (3.8)$$

よって、 $(r+t+2)$  次元の信号  $\underline{z}(k)$  と  $\underline{z}_M(k)$  の差

$$\underline{\bar{w}}(k) = \underline{z}(k) - \underline{z}_M(k) \quad (3.9)$$

は、入力を  $\bar{e}(k)$ 、極を  $D(z^{-1})$ 、 $K(z^{-1})$ 、 $B(z^{-1})$  の零点にもつ線形系の出力として表わされる。これより、

$$\lambda_0 = \max \{ \sqrt{\phi}, \lambda_M [D(z^{-1})], \lambda_M [K(z^{-1})], \lambda_M [B(z^{-1})] \} \quad (3.10)$$

とし、 $\lambda$  を  $\lambda_0 < \lambda < 1$  とおくと、(2.26)式および  $\underline{z}_M(k)$  の有界性を使い、初期値の項  $\varepsilon_2(k)$  を考慮すると (3.5)式の  $\bar{e}(k)$  および (3.6)~(3.8)式の  $\underline{\bar{w}}(k)$  は  $k > k_1$  で定数  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ 、 $M_4$  によって、次式で評価される。(3.11)式は (3.5)式より明らかである。(3.12)式の導出は〈付録 5.2〉に示す。

$$|\bar{e}(k)| \leq M_1 \|\underline{\bar{w}}(k)\| \lambda^k + M_2 \lambda^k \quad (3.11)$$

$$\|\underline{\bar{w}}(k)\| \leq M_3 \sum_{l=0}^{k-1} \{ \lambda^{k-l} |\bar{e}(l)| \} + M_4 \lambda^k \quad (3.12)$$

この2つの評価式を使って、つぎの命題を証明する。

#### 【命題 5.1】

各初期値および有界な各規範入力に対して、有限時刻  $k_0$ 、定数  $M_e$ 、 $M_w$  が存在して、集合  $S_e$ 、 $S_w$  を

$$S_e = \{ (e(k)); k > k_0 \text{ で } |e(k)| \leq M_e \lambda^k \text{ かつ } 0 \leq k \leq k_0 \text{ で } e(k) = \bar{e}(k) \} \quad (3.13a)$$

$$S_w = \{ (\underline{w}(k)); k > k_0 \text{ で } \|\underline{w}(k)\| \leq (M_{wa} + M_{wb} k) \lambda^k \text{ かつ } 0 \leq k \leq k_0 \text{ で } \underline{w}(k) = \underline{\bar{w}}(k) \} \quad (3.14b)$$

とおくと、 $k_0$  以降では、その初期値およびその規範入力に対する閉ループ系の軌道  $\underline{e}(k)$ 、 $\underline{w}(k)$  は集合  $S_e \times S_w$  に属す。

(証明)

まず、時刻  $k_0$ 、定数  $M_e$ 、 $M_{wa}$ 、 $M_{wb}$  をつぎのようにして決める。 $k_0$  は (3.11) (3.12) 式の定数  $M_1$ 、 $M_2$  に対し、すべての  $k_2 < k$  で

$$1 - M_1 M_2 k \lambda^k > 1 - M_1 M_2 k_2 \lambda^{k_2} > 0 \quad (3.14a)$$

$$k_0 = \max\{k_1, k_2\} \quad (3.14b)$$

を満たすように決める。このような  $k_2$  が存在することは <付録 5. 2> の [補題 A5. 1] 1) より明らかである。定数  $M_e$ 、 $M_{wa}$ 、 $M_{wb}$  は次式のように決める。

$$M_5 = \sum_{i=0}^{k_0-1} (\lambda^{-i} | e(i) |) \quad (3.15)$$

$$M_{wa} = M_2 M_5 + M_4 \quad (3.16)$$

$$M_{wb} = \frac{M_2 (M_1 M_{wa} \lambda^{k_0} + M_2)}{1 - M_1 M_2 k_0 \lambda^{k_0}} \quad (3.17)$$

$$M_e = \frac{M_{wb}}{M_2} \quad (3.18)$$

さて、2乗和が有限の1次元および  $(r+t+2)$  次元の点列からなる空間をそれぞれ  $\ell_2(R^1)$ 、 $\ell_2(R^{r+t+2})$  と書く。そして、写像  $f$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} f : (e(k), \underline{w}(k)) \in \ell_2(R^1) \times \ell_2(R^{r+t+2}) &\rightarrow \\ (e(k)', \underline{w}(k)') & \\ = f(e(k), \underline{w}(k)) \in \ell_2(R^1) \times \ell_2(R^{r+t+2}) &\quad (3.19) \end{aligned}$$

$$e(k)' = -\underline{f}^T(k) \underline{w}(k) - \underline{f}^T(k) \underline{z}_M(k) + \epsilon_2(k) \quad (3.20)$$

$$\underline{w}(k)' = \begin{bmatrix} B^{-1}(z^{-1}) D^{-1}(z^{-1}) A(z^{-1}) \\ K^{-1}(z^{-1}) D^{-1}(z^{-1}) \underline{p}_{r+1}(z^{-1}) d^{-1} \\ B^{-1}(z^{-1}) K^{-1}(z^{-1}) D^{-1}(z^{-1}) \underline{p}_r A(z^{-1}) \end{bmatrix} e(k) \quad (3.21)$$

ただし、 $\bar{z}(k)$ 、 $\bar{z}_M(k)$  は現在考えている初期値および規範入力に対する同定誤差および仮想的信号 (3.3)~(3.4) 式である。このとき、写像  $f$  は集合  $S_e \times S_w$  内に不動点をもつことを示す。この不動点を  $e(k)^*$ 、 $\underline{w}(k)^*$  とすると、 $e(k)^*$ 、 $\underline{w}(k)^*$  は  $S_e \times S_w$  に属し、時刻  $k_0$  で  $(e(k_0)^*, \underline{w}(k_0)^*) = (\bar{e}(k_0), \bar{w}(k_0))$  であり、かつ、不動点  $f(e(k)^*, \underline{w}(k)^*) = (e(k)^*, \underline{w}(k)^*)$  であることより、(3.20)、(3.21) 式の両辺に  $e(k)^*$ 、 $\underline{w}(k)^*$  を代入した方程式が成立する。すなわち、 $\bar{e}(k)$ 、 $\bar{w}(k)$  の満たすべき方程式 (3.5)~(3.8) 式を満たす。よって、すべての  $k \geq k_0$  で  $(e(k)^*, \underline{w}(k)^*) = (\bar{e}(k), \bar{w}(k))$  となり、 $(\bar{e}(k), \bar{w}(k))$  が  $S_e \times S_w$  に属することが示される。

さて、 $f$  が  $S_e \times S_w$  において不動点をもつことを示すには、Schauder の不動点定理 (12, 14) により、 $f$  がつぎの3つの性質をもつことを証明すればよい。

- 1)  $f(S_e \times S_w) \subset S_e \times S_w$ 。
- 2)  $f$  は  $S_e \times S_w$  で連続。
- 3)  $f(S_e \times S_w)$  は  $\ell_2(R^1) \times \ell_2(R^{r+1+2})$  において相対コンパクト。

まず、1) を示す。任意の  $\{e(k)\} \in S_e$  に対し、(3.21) 式の  $\{\underline{w}(k)'\}$  は  $S_w$  に属することを示す。(3.12) 式と同じ不等式が成立し、

$$\begin{aligned} \|\underline{w}(k)'\| \leq M_3 \left( \sum_{i=0}^{k_0-1} \lambda^{k-i} |e(i)| + \sum_{i=k_0}^{k-1} \lambda^{k-i} |e(i)| \right) \\ + M_4 \lambda^k \end{aligned} \quad (3.22)$$

である。 $\{e(k)\} \in S_e$  より、 $k_0 < 1$  で  $|e(i)| < M_e \lambda^i$  であり、また (3.15)~(3.18) 式を使い、

$$\|\underline{w}(k)'\| \leq M_3 M_5 \lambda^k + M_3 M_6 (k - k_0) \lambda^k + M_4 \lambda^k$$

$$\begin{aligned} &\leq (M_3 M_5 + M_4) \lambda^k + M_3 M_6 k \lambda^k \\ &= (M_{wa} + M_{wb} k) \lambda^k \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。また、時刻  $0 \leq k \leq k_0$  では  $e(k) = \bar{e}(k)$  だから、(3.6) ~ (3.8) 式より  $0 \leq k \leq k_0$  で  $\underline{w}(k) = \bar{w}(k)$  となる。よって、 $\{\underline{w}(k)'\} \in S_w$  が示された。つぎに、任意の  $\{\underline{w}(k)\} \in S_w$  に対し、(3.20) 式の  $\{e(k)'\}$  は  $S_e$  に属することを示す。(3.1) 式と同じ不等式が成立し、 $\{\underline{w}(k)\} \in S_w$  より、 $k > k_0$  で

$$|e(k)'| \leq (M_1 (M_{wa} + M_{wb} k) \lambda^k + M_2) \lambda^k \quad (3.24)$$

また (3.16), (3.17) 式より

$$\frac{M_{wb}}{M_3} = \frac{M_1 M_{wa} \lambda^{k_0} + M_2}{1 - M_1 M_3 k_0 \lambda^{k_0}} > \frac{M_1 M_{wa} \lambda^k + M_2}{1 - M_1 M_3 k \lambda^k} \quad (3.25)$$

この不等式の分母をはらい、移項することにより

$$M_e = \frac{M_{wb}}{M_3} > M_1 M_{wb} k \lambda^k + M_1 M_{wa} \lambda^k + M_2 \quad (3.26)$$

となり、(3.24) 式に使うと、 $|e(k)'| \leq M_e \lambda^k$  が成立する。また、 $k \leq k_0$  で  $e(k)' = e(k)$  となることは  $\underline{w}(k)'$  のときと同様である。よって、 $\{e(k)'\} \in S_e$  が示され、1) が証明された。

2) の連続性は  $f$  が (3.20), (3.21) 式で定義されていることから明らかである。

3) を示す。  $S_e$ ,  $S_w$  はその定義式 (3.13) 式より、閉集合である。また、 $S_e$  は全有界集合 (文献 (17) の p. 96 例 3 において  $1/2$  を  $\lambda$  とすればよい)、かつ完備距離空間  $\mathcal{L}_2 (R^1)$  の閉部分集合である。よって、 $S_e$  はコンパクトとなる。 $\lambda < \lambda_1 < 1$  なる  $\lambda_1$  および、<付録 5. 2> の [補題 A5. 1] 2) の定数  $M$  を使い、 $M_w = M_{wa} + M \cdot M_{wb}$  として、

$$\begin{aligned} S_w' = \{ \{\underline{w}(k)\} ; k > k_0 \text{ で } \|\underline{w}(k)\| \leq M_w \lambda_1^k, \\ k \leq k_0 \text{ で } \underline{w}(k) = \bar{w}(k) \} \end{aligned} \quad (3.27)$$

とおくと、 $S_e$  と同様にして、 $S_w'$  もコンパクトとなる。また、 $(\underline{w}(k)) \in S_w$  であれば、〈付録 5.2〉の [補題 A5.1] 2) より、 $k > k_0$  で

$$\begin{aligned} \|\underline{w}(k)\| &\leq (M_{wa} + k M_{wb}) \lambda^k \\ &< (M_{wa} + M \cdot M_{wb}) \lambda_1^k \\ &= M_w \lambda_1^k \end{aligned} \tag{3.28}$$

だから、 $(\underline{w}(k))$  は  $S_w'$  に属す。よって、 $S_w$  は  $S_w'$  の閉部分集合であり、 $S_w$  もコンパクトとなる (文献 (17)、p.90 定理2系)。また、1) の閉包

$$\overline{f(S_e \times S_w)} \subset S_e \times S_w \tag{3.29}$$

について、 $S_e$ 、 $S_w$  が相対コンパクトだから  $S_e \times S_w$  も相対コンパクトで、右辺はコンパクト、左辺はその閉部分集合だからまたコンパクト。よって、 $f(S_e \times S_w)$  は相対コンパクトである。■

この命題より、 $S_w$  は  $S_w'$  の部分集合だから、すべての初期値および有界な規範入力について、 $\bar{e}(k)$ 、 $\bar{w}(k)$  は減衰度  $\lambda_1$  ( $0 < \lambda_0 < \lambda < \lambda_1 < 1$ ) で指数減衰し、 $\underline{z}_M(k)$  は有界であるから、 $\underline{z}(k)$  も有界である。よって、つぎの定理を得る。

【定理 5.1】

出力誤差  $\tilde{e}(k) = y(k) - y_M(k)$  は減衰度  $\lambda > \max(\sqrt{\phi}, \lambda_M [D(z^{-1})], \lambda_M [B(z^{-1})], \lambda_M [K(z^{-1})])$  で指数減衰し、閉ループ系の信号は有界である。

5.4 数値シミュレーション

理論の確認のために行ったシミュレーションについて述べる。シミュレーション条件を表5.1に示す。これも前章と同じく熱実験系を想定している。フィルタの極が異なる2例についての出力と入力を図5.1~5.4に示す。フィルタの極が1に近い場合より、0に近い場合が出力追従応答はよいが、規範入力の矩形波が切り替わった直後の制御入力の滑らかさは悪い。

## 5.5 結言

極指定可能なフィルタをもつ離散時間モデル規範形適応制御系について、その閉ループ系の安定性および信号の有界性の証明を与えた。このMRACSでは、従来のGoodwinらによる証明方法が使えないので、まったく新しい方法であるSchauderの不動点定理を用いる方法によった。この極が任意に指定できるMRACSは、制御経過の滑らかさとノイズの影響の軽減とをともに実現することができる。他のMRACS構成方法における、閉ループ系の安定性および信号の有界性の証明でも、本章の不動点定理を用いる方法が利用可能と考えられる。

## 5.6 付録

<付録 5.1> (Lozano, Landauらの構成方法)

Lozano (6), Landauら (1) の構成方法では、制御則は本論文と同じく  $D(z^{-1}) \tilde{e}(k) = 0$  となるように構成するが、調整則は(3.22)式に代わり、

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \frac{R^{-1}(k) \underline{z}(k+1-d) (\hat{y}(k+1) - D(z^{-1}) y(k+1))}{\phi + \underline{z}^T(k+1-d) R^{-1}(k) \underline{z}(k+1-d)} \quad (A1.1)$$

を使い、(2.23)、(2.24)式では  $\tilde{z}(k+1)$  を  $\underline{z}(k+1-d)$  とする。したがって、制御経過を滑らかにするため、 $D(z^{-1})$  の零点を1に近く選ぶと、(A1.1)式の  $D(z^{-1}) y(k)$  の計算が  $y(k)$  の差分計算に近くなり、観測誤差の影響を受けやすくなる。また、信号  $\underline{z}(k)$  に本論文と同じくフィルタを用いる構成方法では、制御則を

$$K(z^{-1}) u_o(k) = u(k), \quad K(z^{-1}) y_o(k) = y(k) \quad (A1.2)$$

$$K(z^{-1}) y_o_M(k) = y_M(k) \quad (A1.3)$$

$$u_o(k) = -\frac{1}{b_o} \{ D(z^{-1}) y_o_M(k+d) - T(z^{-1}) u_o(k) - R(z^{-1}) y_o(k) \} \quad (A1.4)$$

から与えているが、実際の構成では、さらにこの  $u_o(k)$  から  $u(k)$  を計算しなければ

ならない。この計算は  $K(z^{-1})$  の零点を 1 の近くに選ぶと差分計算に近くなり、制御量が同定値  $\hat{\theta}(k)$  の変動の影響を受けやすくなる。また、(A1.2)、(A1.3)式のフィルタを用いる構成方法では、調整則も(A1.1)式の右辺第2項の分子の計算が複雑となる。

<付録 5. 2> ((3.12)式の証明)

(3.6)~(3.8)式より、適当な行列  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  状態ベクトル  $\bar{x}(k)$  を用いて、状態方程式により、 $\bar{w}(k)$  は

$$\bar{x}(k+1) = \bar{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{e}(k) \quad (\text{A2.1a})$$

$$\bar{w}(k) = \bar{C}\bar{x}(k) \quad (\text{A2.1b})$$

と表わされる。よって

$$\bar{w}(k) = \bar{C}\bar{A}^k \bar{x}(0) + \sum_{i=0}^{k-1} \bar{C}\bar{A}^{k-1-i} \bar{B}\bar{e}(i) \quad (\text{A2.2})$$

となる。 $\bar{A}$  が重根をもたないときは、 $\bar{A}$  は対角形に変換でき、(3.10)式の  $\lambda_0$  は  $\bar{A}$  の絶対値最大の固有値だから、定数  $M$  で

$$\|\bar{A}^k \bar{x}(k)\| \leq M \lambda_0^k \|\bar{x}(k)\| \quad (\text{A2.3})$$

となる。(A2.2)式にこれを用い、次式の  $M_3$ ,  $M_4$  を使うと(3.12)式が成立する。

$$M_3 = \|\bar{C}\bar{A}^{-1}\| \cdot M \cdot \|\bar{B}\| \quad (\text{A2.4a})$$

$$M_4 = \|\bar{C}\| \cdot M \cdot \|\bar{x}(0)\| \quad (\text{A2.4b})$$

$\bar{A}$  が重根をもつときはつぎの【補題 A5. 1】により、 $\lambda_0 < \lambda < 1$  なる任意の  $\lambda$  に対して(3.12)式が成立する。

【補題 A5. 1】

- 1)  $0 < \lambda < 1$  のとき、ある  $k_0$  が存在し、すべての  $k$  で

$$k \lambda^k \leq k_0 \lambda^{k_0} \quad (\text{A2.5})$$

かつ、 $k > k_0$  で  $k \lambda^k$  は単調減少で  $k \rightarrow \infty$  で  $k \lambda^k \rightarrow 0$ 。

2)  $0 < \lambda_0 < \lambda < 1$  のとき、ある定数  $M$  があり、すべての  $k$  で

$$k \lambda_0^k \leq M \lambda^k \quad (\text{A2.6})$$

(証明)

1)  $f(k) = k \lambda^k$  とおくと、 $\frac{df(k)}{d\lambda} = (1 + k \log \lambda) \lambda^k$  だから、 $f(k)$  は  $k_0 = -\frac{1}{\log \lambda}$  で最大値をとり、以降  $0$  に単調減少する。

2) (A2.5) 式において、 $\lambda$  を  $\frac{\lambda_0}{\lambda}$  とすれば、 $M = k_0 \left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^{k_0}$  とおくことによって、(A2.6) 式が成立する。■



表 5. 1 離散時間MRACSの  
シミュレーションにおけるパラメータ値

プラント	$\frac{(z^{-1})(0.0066(z^{-1}) - 0.0048)}{1 - 1.62(z^{-1}) + 0.640(z^{-1})^2}$	
規範モデル	$\frac{(z^{-1})(0.079(z^{-1}) - 0.076)}{1 - 1.92(z^{-1}) + 0.922(z^{-1})^2}$	
規範入力	最大：7.0, 最小：3.0, 振幅：2.0, 周期：120.0の矩形波	
シミュレーション 番号	NO. 1	NO. 2
フィルタ：K	$1 - 0.55(z^{-1})$	$1 - 0.97(z^{-1})$
フィルタ：D	$1 - 0.50(z^{-1})$	$1 - 0.95(z^{-1})$
調整則： $\phi(i)$	$0.1 + 0.89(1.0 - 0.8^i)$	
制御則の正数： $b_m$	$1.0 \times 10^{-10}$	
初期値	$\hat{b}_0(0) = 0.001, R(0) = 0.0001 I, \text{他は } 0$	

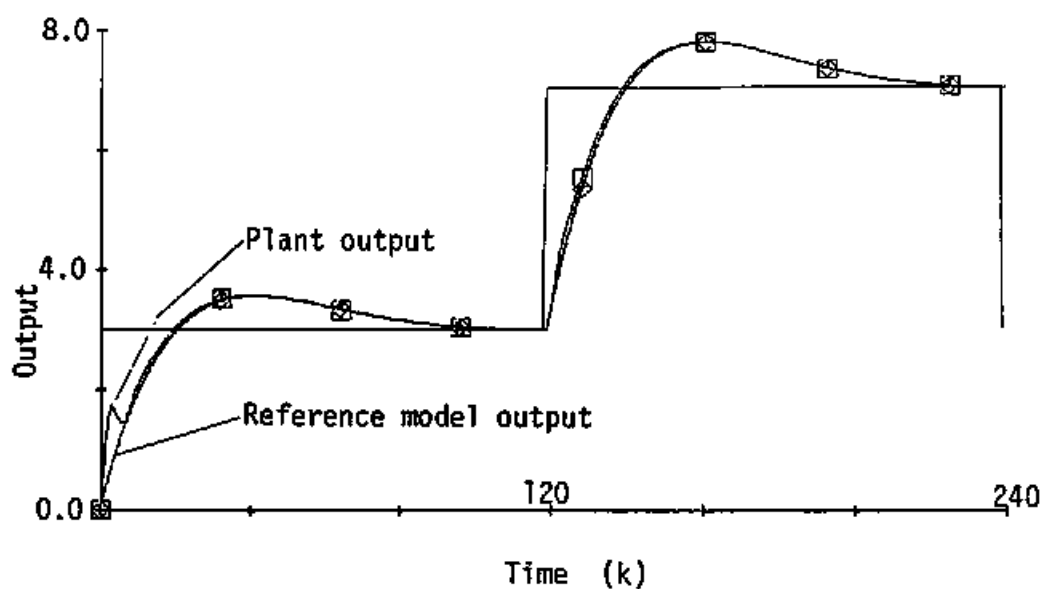


図 5. 1 離散時間MRACSのプラント出力と規範出力；  
フィルタKの極：0.55，Dの極：0.5

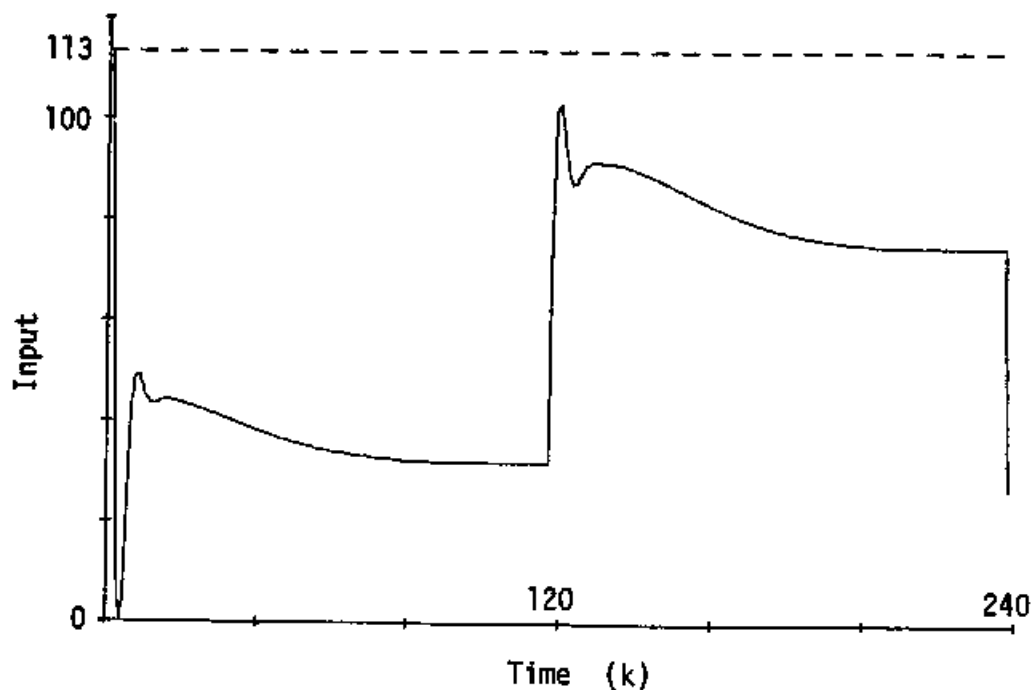


図 5. 2 離散時間MRACSの制御入力；  
フィルタKの極：0.55，Dの極：0.5

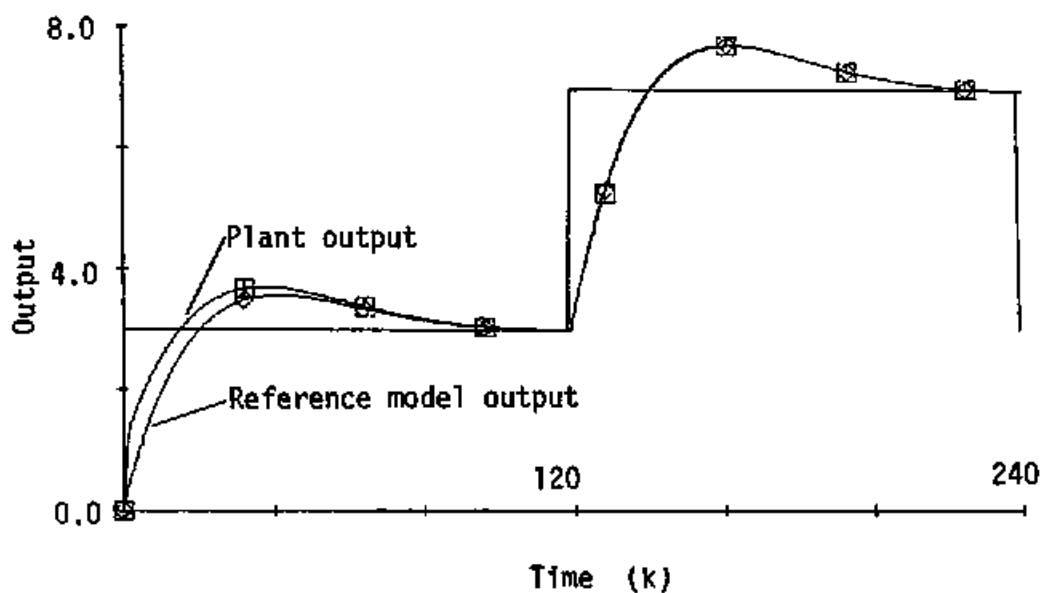


図5.3 離散時間MRACSのプラント出力と規範出力；  
フィルタKの極：0.97，Dの極：0.95

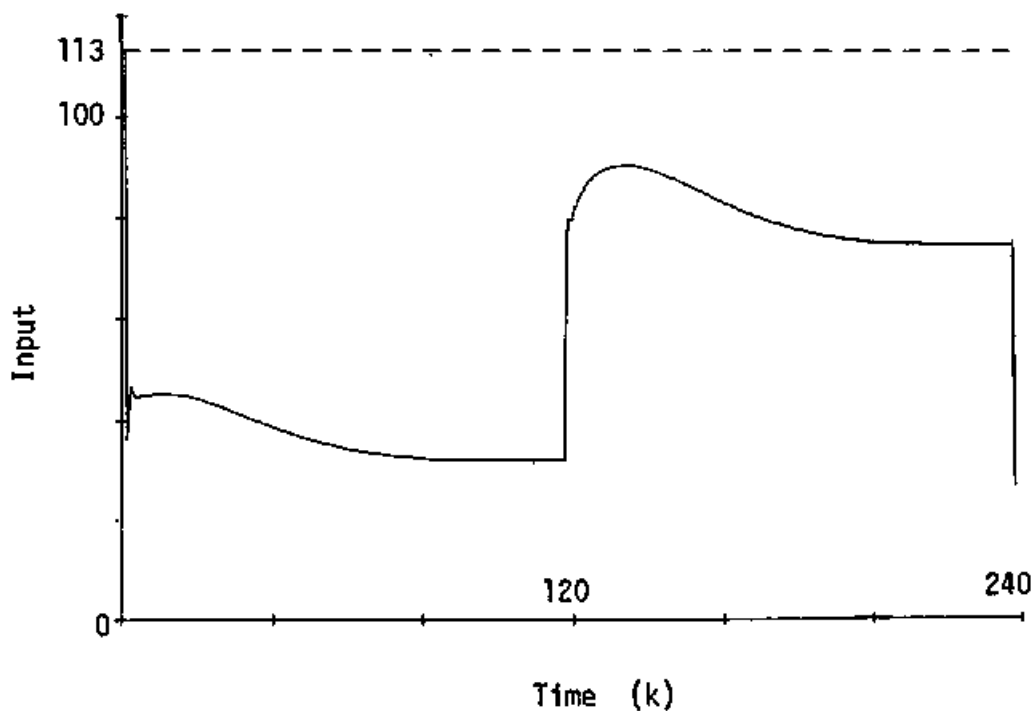


図5.4 離散時間MRACSの制御入力；  
フィルタKの極：0.97，Dの極：0.95

## 第6章 熱実験系への適用

### 6.1 緒言

従来、MRACSの研究の多くは、理論の確認を数値シミュレーションのみによって行っている(1,2)。本論文でも前章までの設計方法については、それぞれ各章で数値シミュレーションを示している。しかし、数値シミュレーションだけでは、その設計方法が実システムに対して有効であると即断することはできない。なぜなら、実システムは、多かれ少なかれ予期せぬ外乱が入ること、それらの原因により制御対象のパラメータが変動すること、測定装置の精度や分解能のため、検出されたプラント出力は誤差を含むこと、入出力装置などにも動特性があるため、実際の制御対象の特性がモデル化した制御対象のそれとは異っていることなどの問題をもつからである。

本論文では、実用上有効なMRACSの設計方法を確立することが目的のひとつであるため、本章では熱実験プラントに対する適用をとおして、前章までの設計方法の実用性の確認および理論の実証を行う。

以下、第6.2節で実験装置を説明し、第6.3節でプラントの状態方程式、第6.4節で規範モデル、第6.5節で適応制御系の構成を示し、第6.6節で実験および実験結果について述べる。

### 6.2 実験装置

装置の概要を図6.1に示す。制御対象のプラントは二重水槽型熱系であり、外槽は塩化ビニール製円筒管(肉厚10mm、径290mm)、内槽は黄銅製板巻管(肉厚2mm、径150mm)である。出力の水温は白金抵抗体によって検出され、デジタル温度計をとおしてミニコンピュータに読み込まれる。入力熱量はミニコンピュータからトライアックコントローラを介してヒータを周期的にオンオフすることによって与えられる。その周期は約2秒であり、この周期の内、入力の大きさに比例した時間だけヒータがオンになる。ヒータの最大能力は、外槽が113.0kJ/min、内槽が28.0kJ/minである。

実験は平衡水位状態で行われる。各槽は十分攪はんが行われているので水温は一律であり、また断熱材により外部への熱損失は無視しようと仮定する。図は2入出力系の場合を表わし、1入出力系の実験では外槽の白金抵抗体、ヒータだけが使われる。

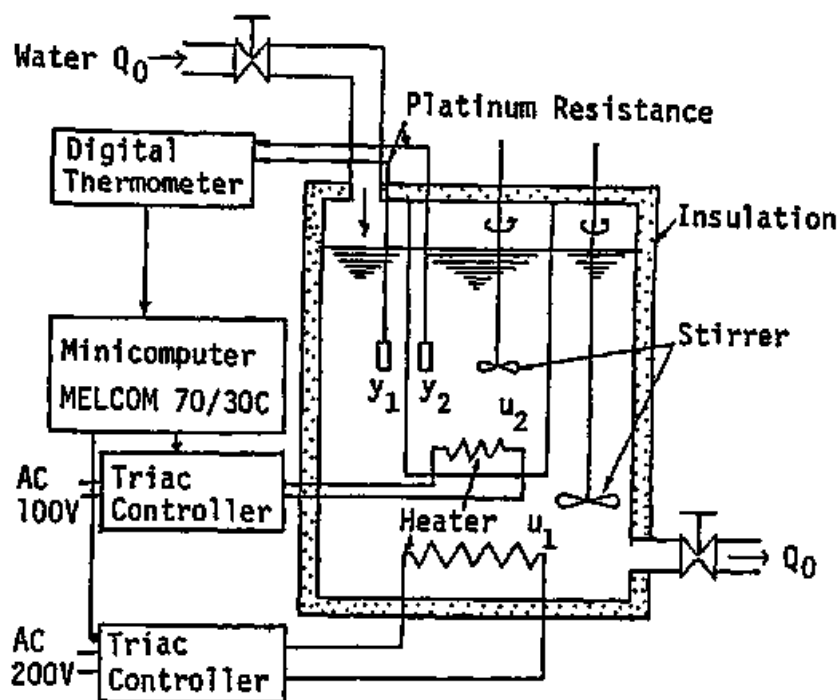


図6.1 二重水槽型熱実験装置の概要

### 6.3 プラントの状態方程式

#### (1) 1入出力連続時間系の場合

入力  $u$  を外槽操作ヒータ熱量、出力  $y$  を外槽水温の上昇温度とすると、状態方程式は次式となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} u \quad (3.1a)$$

$$y = \theta_1 \quad (3.1b)$$

ただし、

$$a_{11} = -\frac{1 + c_o R Q_o}{D_1 c_o R}, \quad a_{12} = \frac{1}{D_1 c_o R},$$

$$a_{21} = \frac{1}{D_2 c_o R}, \quad a_{22} = -a_{21},$$

$$b_{11} = -\frac{1}{D_1 c_o}, \quad b_{21} = 0.$$

$\theta_1, \theta_2$  : 外槽および内槽の水温の上昇温度 (°C)

$u$  : 操作ヒータ熱量 (kJ/min, 最大113.0)

$Q_o$  : 流入流出水量 (kg/min)

$D_1, D_2$  : 外槽および内槽の容量 (kg)

$R$  : 総括伝熱抵抗 (min·°C/kJ)

$c_o$  : 水の比熱 (4.1868 kJ/kg·°C)

ここで、状態変数変換

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{22} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

を行うと、可観測標準形の状態方程式は以下となる。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (3.3a)$$

$$y = x_1, \quad [x_1(0), x_2(0)] = [0, 0] \quad (3.3b)$$

ただし、

$$a_1 = a_{11} + a_{22}, \quad a_2 = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22},$$

$$b_1 = b_{11}, \quad b_2 = a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11},$$

## (2) 2入出力系の場合

入力  $u_1, u_2$  を外槽、内槽操作ヒータ熱量、出力  $y_1, y_2$  を外槽、内槽水温の上昇温度とすると、状態方程式は次式となり、これが可観測標準形でもある。

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$[y_1, y_2] = [\theta_1, \theta_2] \quad (3.4b)$$

ただし、

$$b_{22} = \frac{1}{D_2 c_0}$$

## (3) 1入出力離散時間系の場合

入力、出力を連続時間系と同じとし、1 サンプルング時間  $\Delta T$  内で (3.1) 式の入力は一定と仮定して離散化すると

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(k+1) \\ \bar{\theta}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(k) \\ \bar{\theta}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_{11} \\ \bar{b}_{21} \end{bmatrix} u(k) \quad (3.5a)$$

$$y = \bar{\theta}_1(k) \quad (3.5b)$$

が得られる。ただし、 $A = (a_{ij})$  ,  $\underline{b} = (b_{11})'$  ,  $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$  ,  $\overline{\underline{b}} = (\overline{b}_{11})$  とおくと

$$\overline{A} = \exp(A \cdot \Delta T) , \quad \overline{\underline{b}} = (\overline{A} - I) A^{-1} \underline{b} \quad (3.6)$$

(3.5)式に対応する可観測標準形は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \overline{x}_1(k+1) \\ \overline{x}_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{a}_1 & 1 \\ \overline{a}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{x}_1(k) \\ \overline{x}_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{b}_1 \\ \overline{b}_2 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.7a)$$

$$y = \overline{x}_1(k) , \quad [\overline{x}_1(0), \overline{x}_2(0)] = [0, 0] \quad (3.7b)$$

ただし、

$$\overline{a}_1 = \overline{a}_{11} + \overline{a}_{22}, \quad \overline{a}_2 = \overline{a}_{12}\overline{a}_{21} - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22},$$

$$\overline{b}_1 = \overline{b}_{11}, \quad \overline{b}_2 = \overline{a}_{12}\overline{b}_{21} - \overline{a}_{22}\overline{b}_{11},$$

$$\overline{x}_2(k) = -\overline{a}_{22}\overline{\theta}_1(k) + \overline{a}_{12}\overline{\theta}_2(k)$$

## 6.4 規範モデル

### (1) 1入出力連続時間系の場合

まず、予備実験によるステップ応答にもとづいて、定常値が等しくなるように1次の低次元近似モデルを求め、つぎに、目標値  $r$  に追従する比例積分形フィードバック系を2次形式評価規範を最小にするように構成し、これを規範モデルとした(3)。可観測標準形は次式である。第2章のMRACSと第3章のMRACSとで差があるのは、予備実験における流入流出水量に違いがあり、低次元近似モデルが異っているためである。

#### 1) 第2章のMRACS

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1678 & 1 \\ -0.0123 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1678 \\ 0.0123 \end{bmatrix} r \quad (4.1a)$$

$$y_M = x_{M1}, \quad [x_{M1}(0), x_{M2}(0)] = [0, 0] \quad (4.1b)$$



2) 第3章のMRACS

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1620 & 1 \\ -0.0114 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M1} \\ x_{M2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1620 \\ 0.0114 \end{bmatrix} r \quad (4.2a)$$

$$y_M = x_{M1}, \quad [x_{M1}(0), x_{M2}(0)] = [0, 0] \quad (4.2b)$$

(2) 2入出力系の場合

多入出力系特有の制御方式である非干渉制御を実現するため、規範モデルを非干渉形式で与えることとした。また、それぞれの非干渉モデルは2次評価規範最小の意味で最適となる比例フィードバックによって与えた。

まず、ステップ応答実験データにもとづいて、外槽、内槽各々ヒータから上昇水温間の1次元近似モデルを、定常値が一致するように算出した。それを次式とする。

$$\dot{z}_i = \alpha_i z_i + \beta_i u_i, \quad z_i(0) = 0, \quad (i=1,2) \quad (4.3)$$

そこで、 $e_i = z_i - r_i$ ,  $v_i = u_i + \alpha_i \frac{r_i}{\beta_i}$  とおいて得られる系

$$\dot{e}_i = \alpha_i e_i + \beta_i v_i, \quad e_i(0) = -r_i \quad (4.4)$$

において、評価規範

$$J = \int_0^{\infty} (g_i e_i^2 + h_i v_i^2) dt, \quad g_i, h_i > 0 \quad (4.5)$$

を最小にしながら、 $e_i \rightarrow 0$  を実現する比例フィードバック  $v_i = k_i e_i$  を求める。これより、規範モデルは

$$\dot{e}_i = (\alpha_i + \beta_i k_i) e_i, \quad e_i(0) = -r_i \quad (4.6)$$

すなわち、

$$\dot{z}_i = a_{Mi} z_i + b_{Mi} r_i$$

$$= (\alpha_i + \beta_i k_i) z_i - (\alpha_i + \beta_i k_i) r_i, \quad z_i(0) = 0 \quad (4.7)$$

となる。各データは

$$\alpha_1 = -0.1131, \quad \alpha_2 = -0.1127, \quad \beta_1 = 0.01173, \quad \beta_2 = 0.02315$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 50.0, \quad h_1 = h_2 = 1.0, \quad k_1 = -2.316, \quad k_2 = -3.716$$

$$\alpha_1 + \beta_1 k_1 = -0.1403, \quad \alpha_2 + \beta_2 k_2 = -0.1987$$

である。したがって、

$$\dot{y}_{M1} = -0.1403 y_{M1} + 0.1403 r_1, \quad y_{M1}(0) = 0 \quad (4.8a)$$

$$\dot{y}_{M2} = -0.1987 y_{M2} + 0.1987 r_2, \quad y_{M2}(0) = 0 \quad (4.8b)$$

が規範モデルとなる。

### (3) 離散時間系の場合

連続時間系の (4.2) 式をサンプリングタイム  $\Delta T = 30$  秒で離散化し、可観測標準形に変換した

$$\begin{bmatrix} x_{M1}(k+1) \\ x_{M2}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9195, & 1 \\ -0.92221, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{M1}(k) \\ x_{M2}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.079133 \\ -0.076407 \end{bmatrix} r(k) \quad (4.9a)$$

$$y_M(k) = x_{M1}(k), \quad [x_{M1}(0), x_{M2}(0)] = [0, 0] \quad (4.9b)$$

を規範モデルとした。

## 6.5 適応制御系の構成

適応制御系はつぎのように構成される。

(1) 基本構成の連続時間1入出力MRACS

フィルタ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y, \quad \begin{bmatrix} z_{11}(0) \\ z_{12}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.1)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} z_{21}(0) \\ z_{22}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.2)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = -\alpha_0 \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(0) \\ \tilde{z}_2(0) \\ \tilde{z}_3(0) \\ \tilde{z}_4(0) \\ \tilde{u}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.3)$$

$$\text{同定機構: } \hat{y} = \hat{\beta} \tilde{u} + \hat{\gamma}^T \tilde{z} \quad (5.4)$$

ここに、 $\tilde{z}^T = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4]$ である。

パラメータ調整機構:

$$\dot{\underline{\zeta}} = -\phi R^{-1} \underline{\eta} \quad (5.5)$$

$$\dot{\underline{\eta}} = -(\phi + \phi) \underline{\eta} + (\hat{y} - y) \underline{\bar{z}} \quad (5.6)$$

$$\dot{R} = -\phi R + \underline{\bar{z}} \underline{\bar{z}}^T \quad (5.7)$$

ここに、 $\underline{\bar{z}}^T = [\tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4]$ 、 $\underline{\zeta}^T = [\hat{\beta}, \hat{\gamma}^T]$ であり、 $\underline{\zeta}$ 、 $\underline{\eta}$ は5次元ベクトル、 $R$ は5x5行列である。

制御入力:

$$u = -\frac{1}{\hat{\beta}} \left( \hat{\gamma}^T \underline{z}_{12} - (\alpha_0 \underline{c}_M^T \underline{x}_M + \underline{c}_M^T A_M \underline{x}_M + \underline{c}_M^T \underline{b}_M r) \right) \quad (5.8)$$

ここに、 $\underline{z}_{12}^T = [z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}]$  である。

## (2) 重みつき最小2乗法調整則によるMRACS

### 1) 積分次数削減のMRACS

フィルタ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y, \quad \begin{bmatrix} z_{11}(0) \\ z_{12}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.9)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} z_{21}(0) \\ z_{22}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.10)$$

ここで、 $K(p) = |pI - K| = p^2 + k_1 p + k_2$  である。

$$\text{同定機構: } \hat{y} = \hat{\delta}^T \underline{z}_d \quad (5.11)$$

パラメータ調整機構:

$$\dot{\hat{\delta}} = -R^{-1} \underline{z}_d (\hat{y} - y) \quad (5.12)$$

$$\dot{R} = -\phi R + \underline{z}_d \underline{z}_d^T \quad (5.13)$$

ここで、 $\underline{z}_d^T = [z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}]$ 、 $\hat{\delta}^T = [k_1 + \hat{a}_1, k_2 + \hat{a}_2, \hat{b}_1, \hat{b}_2]$  であり、 $R$  は  $4 \times 4$  行列である。

制御入力のパラメータの計算:

$$\hat{s}_1 = d_1 + k_1 + \hat{a}_1, \quad \hat{r}_1 = d_1 k_1 + k_2 + \hat{a}_1 \hat{s}_1 + \hat{a}_2, \quad (5.14)$$

$$\hat{r}_2 = d_1 k_2 + \hat{a}_2 \hat{s}_1, \quad \hat{t}_1 = (\hat{s}_1 - k_1) \hat{b}_1 + \hat{b}_2, \quad (5.15)$$

$$\hat{t}_2 = -k_2 \hat{b}_1 + \hat{s}_1 \hat{b}_2 \quad (5.16)$$

制御入力:

$$u = -\frac{1}{b_1} (\hat{r}^T z_1 + \hat{t}^T z_2 - (d_1 c_M^T x_M + c_M^T A_M x_M + c_M^T b_M r)) \quad (5.17)$$

ここで、 $\hat{r}^T = [\hat{r}_1, \hat{r}_2]$ 、 $\hat{t}^T = [\hat{t}_1, \hat{t}_2]$ 、 $z_1^T = [z_{11}, z_{12}]$ 、 $z_2^T = [z_{21}, z_{22}]$  である。

## 2) 十分一般性条件によらないMRACS

フィルタ:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} y, \quad \begin{bmatrix} z_{11}(0) \\ z_{12}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} = K^T \begin{bmatrix} z_{21} \\ z_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad \begin{bmatrix} z_{21}(0) \\ z_{22}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = -\alpha_0 \begin{bmatrix} \tilde{z}_1 \\ \tilde{z}_2 \\ \tilde{z}_3 \\ \tilde{z}_4 \\ \tilde{u} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{11} \\ z_{12} \\ z_{21} \\ z_{22} \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(0) \\ \tilde{z}_2(0) \\ \tilde{z}_3(0) \\ \tilde{z}_4(0) \\ \tilde{u}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.20)$$

$$\text{同定機構: } \hat{y} = \hat{\beta} \tilde{u} + \hat{y}^T \tilde{z} \quad (5.21)$$

ここに、 $\tilde{z}^T = [\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4]$  である。

パラメータ調整機構:

$$\dot{\hat{z}} = -\phi R^{-1} \frac{\tilde{z} (\hat{y} - y)}{1 + \tilde{z}^T Q \tilde{z}} + \nu I \quad (5.22)$$

$$\dot{\hat{R}} = -\phi R + \frac{\phi_1 \tilde{z} \tilde{z}^T}{1 + \tilde{z}^T Q \tilde{z}} \quad (5.23)$$

ここで、 $\underline{z}^T = [\tilde{u}, \tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4]$  であり、 $\underline{z}$  は 5次元ベクトル、 $R$  は 5x5行列である。

制御入力：

$$u = -\frac{1}{\hat{\beta}} \left\{ \hat{\gamma}^T \underline{z}_{12} - (\alpha_0 \underline{c}_M^T \underline{x}_M + \underline{c}_M^T A_M \underline{x}_M + \underline{c}_M^T \underline{b}_M r) \right\} \quad (5.24)$$

ここに、 $\underline{z}_{12}^T = [z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}]$  である。

### (3) 2入出力MRACS

フィルタ：

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} \\ \tilde{z}_{12} \\ \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{12} \end{bmatrix} = -\alpha_{10} \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11} \\ \tilde{z}_{12} \\ \tilde{u}_{11} \\ \tilde{u}_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{z}_{11}(0) \\ \tilde{z}_{12}(0) \\ \tilde{u}_{11}(0) \\ \tilde{u}_{12}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \tilde{z}_{21} \\ \tilde{z}_{22} \\ \tilde{u}_{21} \\ \tilde{u}_{22} \end{bmatrix} = -\alpha_{20} \begin{bmatrix} \tilde{z}_{21} \\ \tilde{z}_{22} \\ \tilde{u}_{21} \\ \tilde{u}_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{z}_{21}(0) \\ \tilde{z}_{22}(0) \\ \tilde{u}_{21}(0) \\ \tilde{u}_{22}(0) \end{bmatrix} = \underline{0} \quad (5.26)$$

同定機構：

$$\hat{y}_1 = \hat{\beta}_1^T [\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{12}] + \hat{\gamma}_1^T [\tilde{z}_{11}, \tilde{z}_{12}] \quad (5.27)$$

$$\hat{y}_2 = \hat{\beta}_2^T [\tilde{u}_{21}, \tilde{u}_{22}] + \hat{\gamma}_2^T [\tilde{z}_{21}, \tilde{z}_{22}] \quad (5.28)$$

調整機構：

$$\dot{\underline{\zeta}}_1 = -\phi_1 R_1^{-1} \underline{\eta}_1 \quad (5.29)$$

$$\dot{\underline{\eta}}_1 = -(\phi_1 + \phi_1) \underline{\eta}_1 + (\hat{y}_1 - y_1) \underline{z}_1 \quad (5.30)$$

$$\dot{\underline{R}}_1 = -\phi_1 \underline{R}_1 + \underline{z}_1 \underline{z}_1^T \quad (5.31)$$

$$\dot{\underline{\zeta}}_2 = -\phi_2 \underline{R}_2^{-1} \underline{\eta}_2 \quad (5.32)$$

$$\dot{\underline{\eta}}_2 = -(\phi_2 + \phi_2) \underline{\eta}_2 + (\hat{y}_2 - y_2) \underline{z}_2 \quad (5.33)$$

$$\dot{\underline{R}}_2 = -\phi_2 \underline{R}_2 + \underline{z}_2 \underline{z}_2^T \quad (5.34)$$

ここに、 $\underline{z}_1^T = [\tilde{u}_{11}, \tilde{u}_{12}, \tilde{z}_{11}, \tilde{z}_{12}]$ 、 $\underline{\zeta}_1^T = [\hat{\beta}_1^T, \hat{y}_1^T]$ 、 $\underline{z}_2^T = [\tilde{u}_{21}, \tilde{u}_{22}, \tilde{z}_{21}, \tilde{z}_{22}]$ 、 $\underline{\zeta}_2^T = [\hat{\beta}_2^T, \hat{y}_2^T]$ である。

制御入力：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1^T \\ \hat{\beta}_2^T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{y}_1^T \\ \hat{y}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} (a_{M1} + \alpha_{10}) y_{M1} + b_{M1} r_1 \\ (a_{M2} + \alpha_{20}) y_{M2} + b_{M2} r_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.35)$$

#### (4) 離散時間MRACS

フィルタ：

$$\begin{bmatrix} z_{11}(k+1) \\ z_{12}(k+1) \\ z_{21}(k+1) \end{bmatrix} = -k_1 \begin{bmatrix} z_{11}(k) \\ z_{12}(k) \\ z_{21}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y(k) \\ y(k-1) \\ u(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_{11}(0) \\ z_{12}(0) \\ u(0) \end{bmatrix} = \underline{Q} \quad (5.36)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_1(k+1) \\ \tilde{z}_2(k+1) \\ \tilde{z}_3(k+1) \\ \tilde{z}_4(k+1) \end{bmatrix} = -d_1 \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(k) \\ \tilde{z}_2(k) \\ \tilde{z}_3(k) \\ \tilde{z}_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u(k) \\ z_{11}(k) \\ z_{12}(k) \\ z_{21}(k) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \tilde{z}_1(0) \\ \tilde{z}_2(0) \\ \tilde{z}_3(0) \\ \tilde{z}_4(0) \end{bmatrix} = \underline{Q} \quad (5.37)$$

$$\text{同定機構: } \hat{y}(k+1) = \tilde{z}^T(k+1) \hat{\theta}(k) \quad (5.38)$$

ここで、 $\tilde{z}^T(k) = [\tilde{z}_1(k), \tilde{z}_2(k), \tilde{z}_3(k), \tilde{z}_4(k)]$ 、

$\hat{\theta}^T(k) = [\hat{b}_0(k), \hat{r}_0(k), \hat{r}_1(k), \hat{t}_1(k)]$  である。

パラメータ調整則:

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) - \frac{R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1) (\hat{y}(k+1) - y(k+1))}{\phi + \tilde{z}^T(k+1) R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1)} \quad (5.39)$$

$$R^{-1}(k+1) = \frac{1}{\phi} \left\{ R^{-1}(k) - \frac{R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1) \tilde{z}^T(k+1) R^{-1}(k)}{\phi + \tilde{z}^T(k+1) R^{-1}(k) \tilde{z}(k+1)} \right\} \quad (5.40)$$

ここで、 $R(k)$  は  $4 \times 4$  行列である。

制御入力:

$$u(k) = -\frac{1}{\hat{b}(k)} \left( \hat{r}_0(k) z_{11}(k) + \hat{r}_1(k) z_{12}(k) + \hat{t}_1(k) z_{21}(k) - (1 + d_1 z^{-1}) y_M(k+1) \right) \quad (5.41)$$

## 6.6 実験および実験結果

### (1) 基本構成の連続時間1入出力MRACS実験

実験では積分機能をデジタル計算機の数値積分によって実現している。数値積分には4次の Runge-Kutta-Gill 法を用いている。ミニコンピュータは温度計をとおして、サンプリングタイム3秒ごとに外槽水温を読みとり、コンピュータ内に備えられたプログラムによって、適応制御入力を計算し、ヒータから熱量として与えている。サンプリングタイムの3秒は、数値積分の精度をあげるため、1回の入出力および計算に必要な処理を実行できる時間範囲で、できるだけ短くするように決めた時間である。減衰度と設計パラメータとの関係を確認するため、減衰度に現われる設計パラメータ  $\phi$ 、 $\phi$  をかえて実験を行った。設計パラメータは以下のとおりである。



実験 A) :  $\phi = \psi = 0.1 + 0.4 \exp(-0.1t)$  ,

実験 B) :  $\phi = \psi = 0.1 + 0.9 \exp(-0.1t)$  ,

Kの固有値 =  $(-1.0, -1.0)$  ,  $\alpha_0 = 0.5$  ,  $R(0) = I$  ,  $\hat{\beta}(0) = 0.0005$  ,

その他の初期値 = 0

理論では固定した $\phi$ 、 $\psi$ を扱っているのに対し、実験では可変の $\phi$ 、 $\psi$ を用いている。 $\phi$ 、 $\psi$ を可変とするのは、制御の初期では減衰度を大きくして収束速度をあげ、収束が進むにつれて減衰度を小さくしてノイズによる影響を小さくするためである(4)。第2章の証明では記述の簡単化のために $\phi$ 、 $\psi$ が定数の場合を扱っているが、可変とした場合にもまったく同様に証明できる。

また、規範入力 $r$ は最大7、最小3、振幅2、周期20分の矩形波である。

実験結果を図6.2~6.7に示す。

図6.2~6.4から、両実験とも時間が十分経過した後では、プラント出力は規範出力に追従し、出力誤差がほぼ0になっていることがわかる。減衰度については、実験B)の減衰度が大きくなるべきであるが、図6.3にそれが現われており、減衰の傾きが実験B)のほうが大きい。

つぎに、図6.5の制御入力について述べる。出力誤差が収束しているとみられる時間において、制御入力が一貫していないが、これは実験条件が両実験で多少異り、プラントパラメータ値が違っているためであると思われる。また、制御入力のグラフは滑らかであるのに対し、出力誤差のグラフには白色雑音のような乱れが現われているのはつぎの理由による。制御入力は計算機内で計算された数値であり、連続とみなせる値をとる。これに対し、出力誤差には、分解能0.1℃のデジタル温度計計測による、読み取り誤差が生じるからである。

最後に、同定パラメータについて論じる。図6.6、6.7に実験での同定パラメータの代表例として、 $\hat{\beta}(t)$ 、 $\hat{\psi}_0(t)$ の推移を示す。他のパラメータもほぼ同様の傾向を示しているので省略している。図6.6、6.7より、両パラメータとも十分時間が経過した後では、ほぼ一定となっている。また収束速度の差については、出力誤差と同様に実験B)のほう収束速度すなわち傾きが大きい。なお、実験B)ではほぼ一定値に収束した後、20分から45分の間で乱れが現われている。これは、実験条件の一時的な変動によって生じたものと考えられる。出力誤差にもその影響が現われているが、同定パラメータほど明確ではない。

## (2) 重みつき最小2乗法調整則によるMRACS実験

### 1) 積分次数削減のMRACS実験

基本構成のMRACS実験と同様の方法で実験を行った。異なる条件は以下のとおりである。

$$K(p) = (p+0.01)(p+0.02), \quad \phi = 0.01 + 0.19\exp(-0.07t),$$
$$D(p) = p+0.2$$

規範入力  $r$  は最大 7.8、最小 4.8、振幅 1.5、周期 80 分の矩形波である。

このMRACSでは積分次数は 20 であり、基本構成のMRACSで必要な積分次数 36 に比べ、16 少なくなっている。1 サンプルあたりでの計算時間は 0.29 秒である。出力を図 6. 8、入力を図 6. 9 に示す。良好な追従経過を示している。また、基本構成のMRACSとは、規範モデル、設計パラメータなどの条件が異なるため細かい比較は難しいが、構成が簡単になっても出力、入力いずれも大差ない傾向を示している。

### 2) 十分一般性条件によらないMRACS実験

設計パラメータをつぎのように与えて、実験を行った。

$$K \text{ の固有値} = (-1.0, -2.0), \quad \alpha_0 = 0.5, \quad \hat{\beta}(0) = 0.005,$$
$$\phi = 1.5, \quad \phi = 1.0, \quad \phi_1 = 2.0, \quad \nu = 0.08, \quad Q = 0.001 I$$

規範入力  $r$  は振幅 5 のステップ波である。また、アルゴリズムが第 2 章より簡単になっているため、サンプリングタイムは短くなり 2 秒である。

出力、入力、 $\log |R^{-1}|$  の経過を図 6. 10 ~ 6. 20 に示す。 $\nu$  を入れた調整則の場合、図 6. 10, 6. 20 より、出力の追従が達成されるとともに、 $|R^{-1}|$  は発散していない。収束するまでの時間も 30 分ほどであり、十分許容しうる時間であると考えられる。一方、重みつき最小 2 乗法調整則の場合には、図 6. 12, 20 より、出力誤差は急速に収束する傾向を示しているが、18 分ほどで  $|R^{-1}|$  が発散し制御続行不可能となっている。図 6. 14, 6. 16, 6. 20 より、この例では、漸減ゲイン調整則、固定トレースゲイン調整則の場合は  $|R^{-1}|$  は発散せず、出力追従経過も  $\nu$  を入れた調整則の場合とほとんどかわらない。理論にとどまった設計方法でしばしば使わ

れる定ゲイン調整則の場合には、図6.18より、出力の追従が行われていないことがわかる。これから、定ゲイン行列調整則を使用したMRACSは、実用的には適用が困難であると思われる。

### (3) 2入出力MRACS実験

この実験では、状態量は出力そのものであり直接検出できるため、状態変数フィルタは不要となる。設計パラメータは以下のとおりである。

$$\begin{aligned} \phi_i = \psi_i = 0.05, \quad \alpha_{10} = 0.5, \quad R_i(0) = I, \quad (i=1,2) \\ \hat{\beta}_{11}(0) = \hat{\beta}_{12}(0) = 0.001, \quad \hat{\beta}_{21}(0) = 0.03, \quad \hat{\beta}_{22}(0) = 0.09 \end{aligned}$$

規範入力の  $r_1$  は最大 0.6、最小 -0.6、周期 64 分の矩形波、 $r_2$  は最大 0.6、最小 -0.6、周期 54 分の矩形波である。また、サンプリングタイムは 6秒としている。これは2入出力系となり計算量がふえた（1サンプリングあたりの計算時間は 0.72 秒）ためと、水温測定を1台の温度計のリレー切り換えによって行っており、確実に温度を測定するためとによる。

出力および入力の経過を図6.21～6.24に示す。出力は内槽、外槽ともに非干渉形式の規範モデル出力に追従し、非干渉制御が実現されていることがわかる。また、サンプリングタイムすなわち積分の刻み時間が長くなることにより、制御性能が劣化することが考えられる(5)が、結果からは1入出力系の場合とほとんどかわらない追従経過となっている。

### (4) 離散時間MRACSの実験

フィルタ  $K(z^{-1})$ 、 $D(z^{-1})$  はともに1次で、同定すべきパラメータは  $b_0$ 、 $r_0$ 、 $r_1$ 、 $t_1$  の4個である。この実験では、パラメータ同定の減衰度を指定する、調整則の設計パラメータ  $\phi$  は、初め0に近い値 ( $k=0$ で 0.1) とし、後に1に近い値となるように可変減衰度として与えた。これによって、同定の初期には収束を早くし、後にはノイズの影響をおさえることができる(6)。第5章の理論では記述の簡単化のため、 $\phi$  が定数の固定減衰度の場合を扱ったが、可変減衰度の場合にも証明は同様である。

フィルタの極が指定できることによる特徴を調べるため、極をかえて実験を行った。

設計パラメータはつぎのように与えた。

$$\text{実験 A) : } K(z^{-1}) = 1 - 0.55z^{-1}, D(z^{-1}) = 1 - 0.50z^{-1}$$

$$\text{実験 B) : } K(z^{-1}) = 1 - 0.97z^{-1}, D(z^{-1}) = 1 - 0.95z^{-1}$$

$$\phi(i) = 0.1 + 0.89(1 - 0.8^i), R(0) = 0.0001 I, b_m = 1.0 \times 10^{-10}, \\ \hat{b}_0(0) = 0.001$$

規範入力  $r$  は最大 7.0、最小 3.0、振幅 2.0、周期 120 分の矩形波である。また、サンプリングタイムは 30 秒である。

出力を図 6.25 に、制御入力を図 6.26, 6.27 に示す。実験 A) は実験 B) に比べて出力追従経過は良好であるが、制御入力により大きく変動し、滑らかさが悪くなっており、極の違いによる影響が現われている。

## 6.7 結言

いずれの実験でも、数値シミュレーションと異り、外乱、パラメータ変動、測定用温度計の精度や分解能の粗さ、モデル化誤差などが原因と思われる乱れが多少現われているが、ほぼ良好な追従経過が得られるとともに、設計パラメータの与え方による減衰度の変化などの、理論を実証する結果が得られ、実験の目的が達成された。

本章で述べたプラント以外の実システムに対しては、時定数が本論文のプラント程度に大きく、時定数に比べて十分小さいサンプリングタイムによって、適応制御計算を行うことができるならば、適用できる見込みは高い。

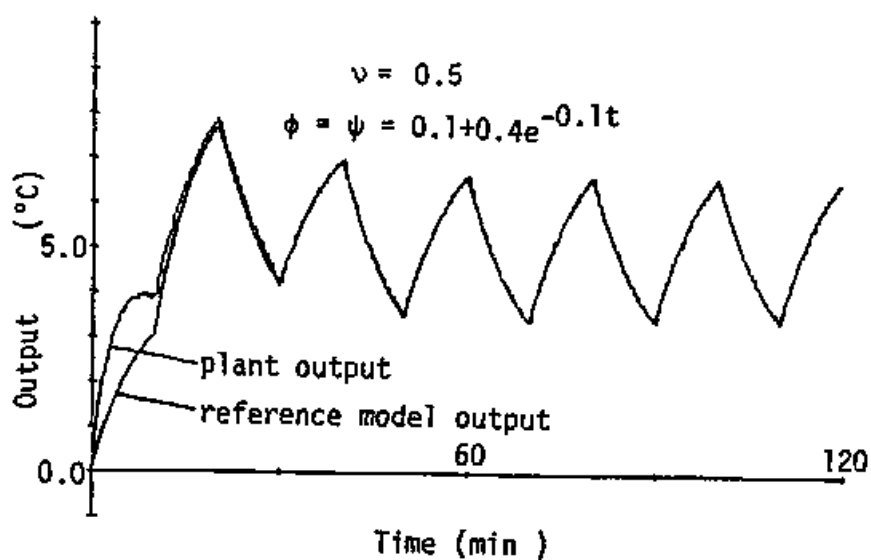


図6. 2 基本構成のMRACS実験のプラント出力と規範出力  
実験 A)

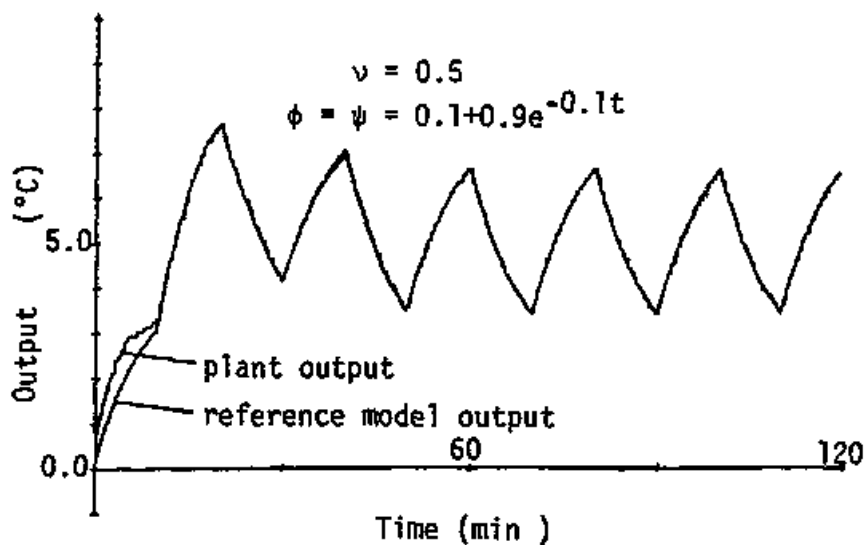


図6. 3 基本構成のMRACS実験のプラント出力と規範出力  
実験 B)

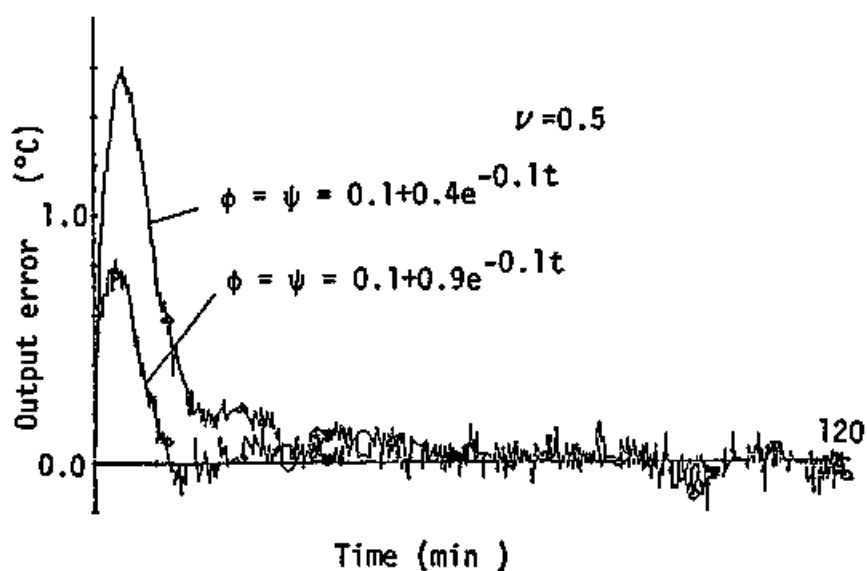


図 6. 4 基本構成のMRACS実験の出力誤差

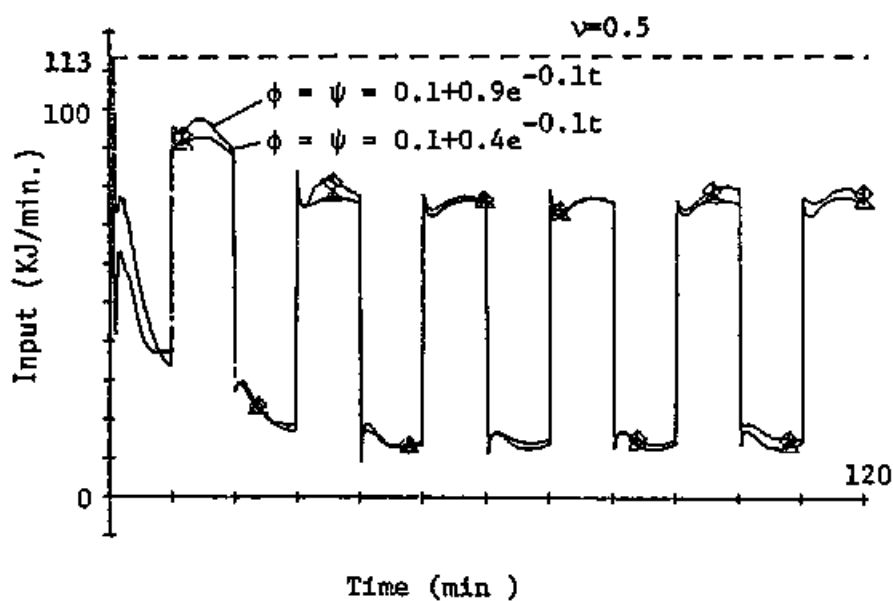


図 6. 5 基本構成のMRACS実験の制御入力

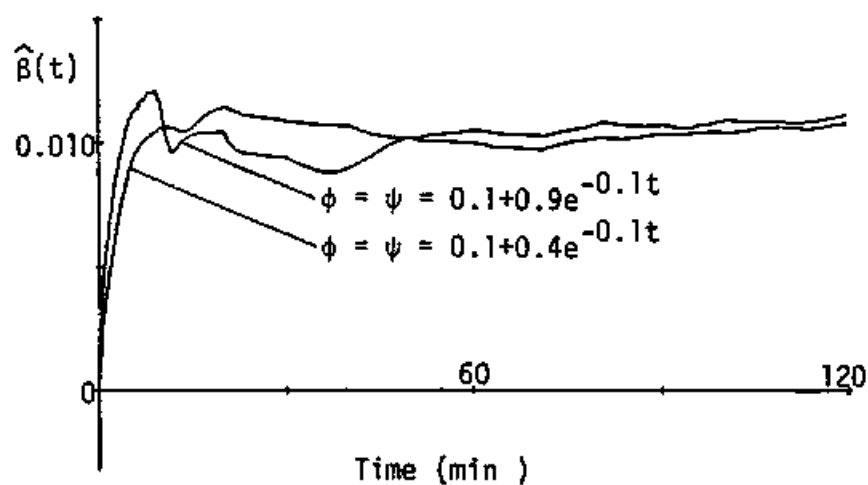


図 6. 6 基本構成のMRACS実験のパラメータ同定;  $\hat{\beta}$

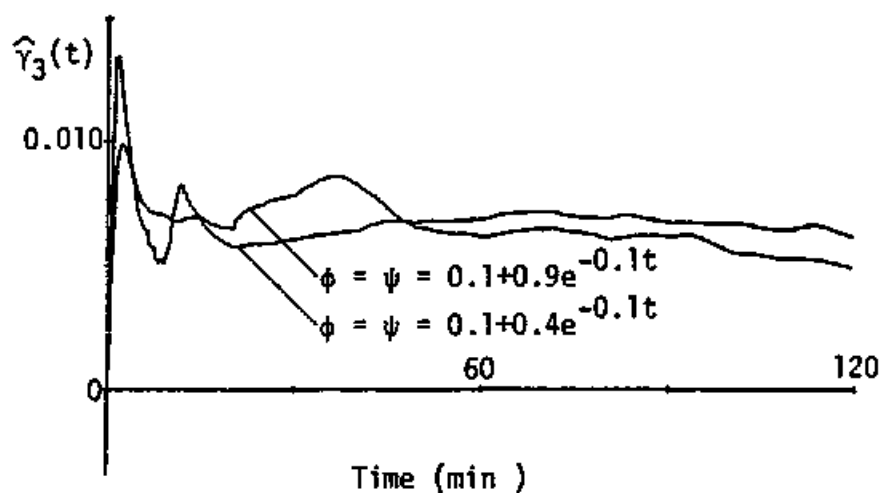


図 6. 7 基本構成のMRACS実験のパラメータ同定;  $\hat{\gamma}_3$

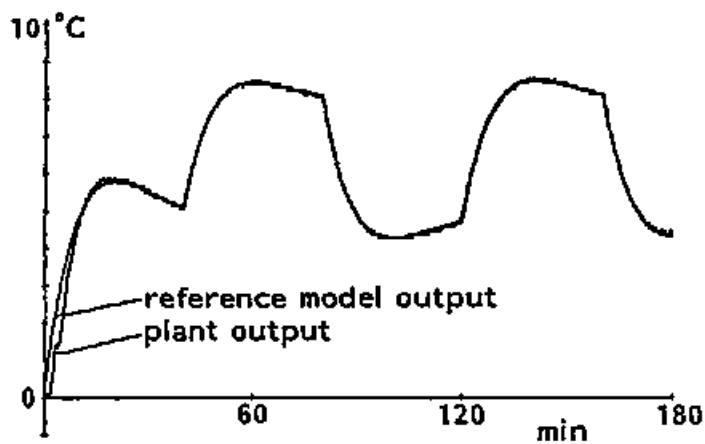


図 6. 8 積分次数削減のMRACS実験のプラント出力と規範出力

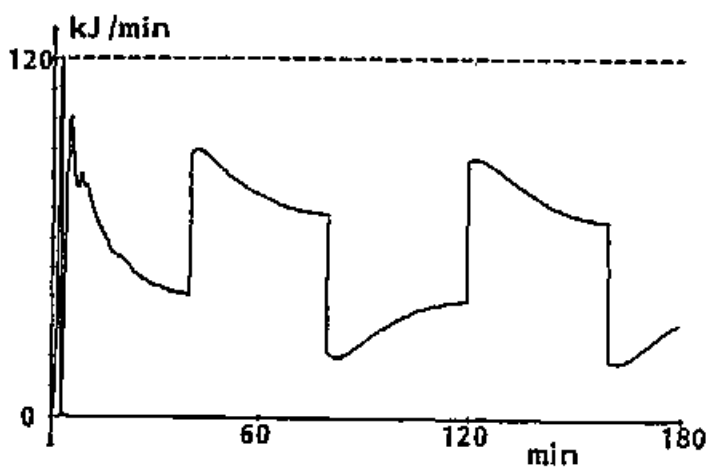


図 6. 9 積分次数削減のMRACS実験の制御入力



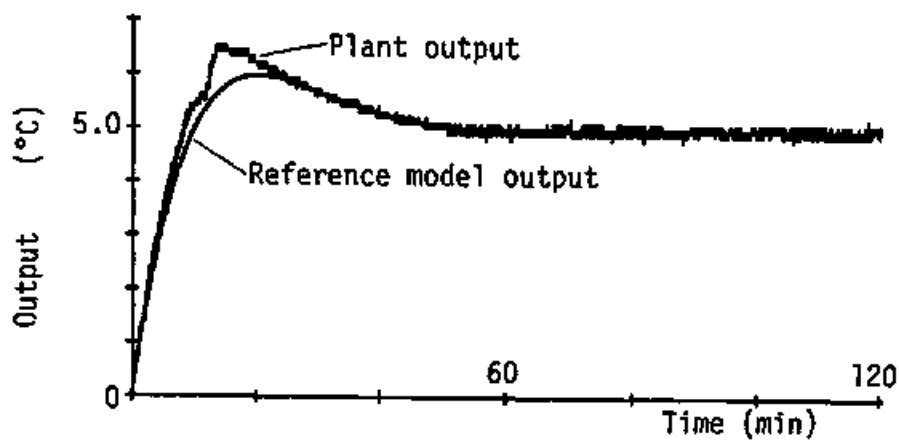


図 6. 1 0 十分一般性条件によらない調整則を用いた場合の  
実験のプラント出力と規範出力

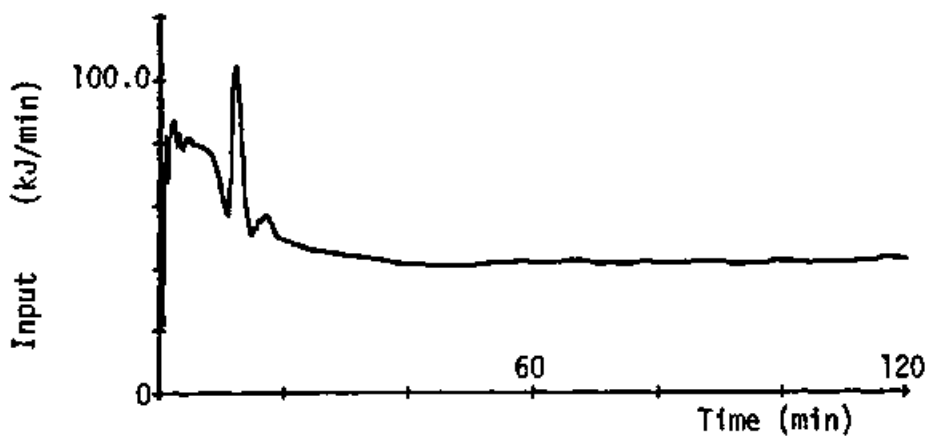


図 6. 1 1 十分一般性条件によらない調整則を用いた場合の  
実験の制御入力

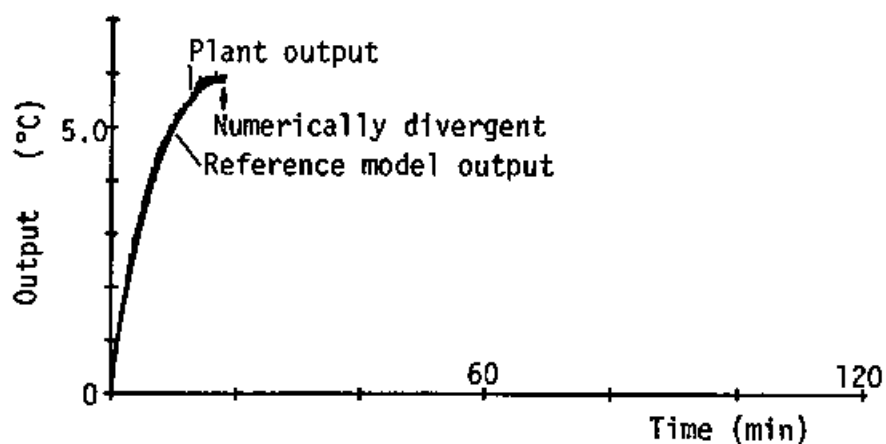


図 6. 1 2 重みつき最小 2 乗法調整則を用いた場合の  
実験のプラント出力と規範出力

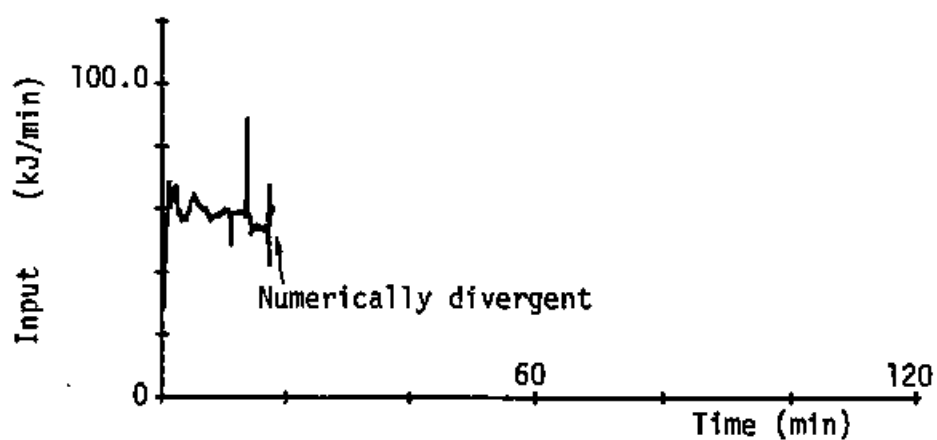


図 6. 1 3 重みつき最小 2 乗法調整則を用いた場合の  
実験の制御入力

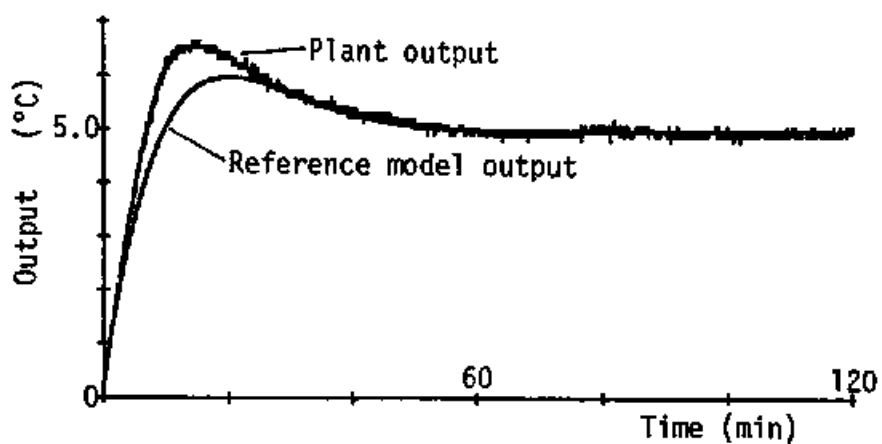


図6. 14 漸減ゲイン調整則を用いた場合の  
実験のプラント出力と規範出力

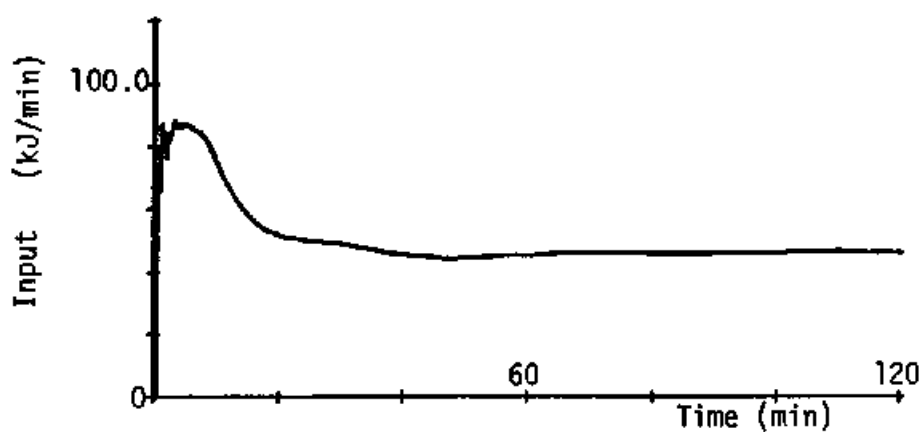


図6. 15 漸減ゲイン調整則を用いた場合の  
実験の制御入力

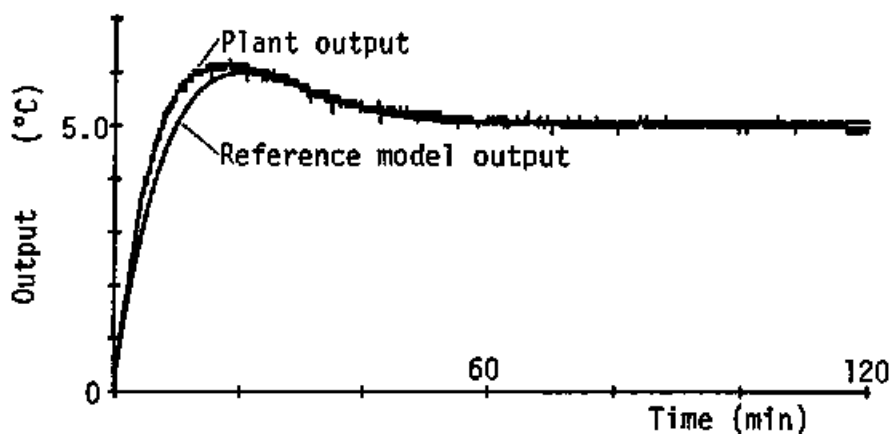


図6.16 固定トレースゲイン調整則を用いた場合の  
実験のプラント出力と規範出力

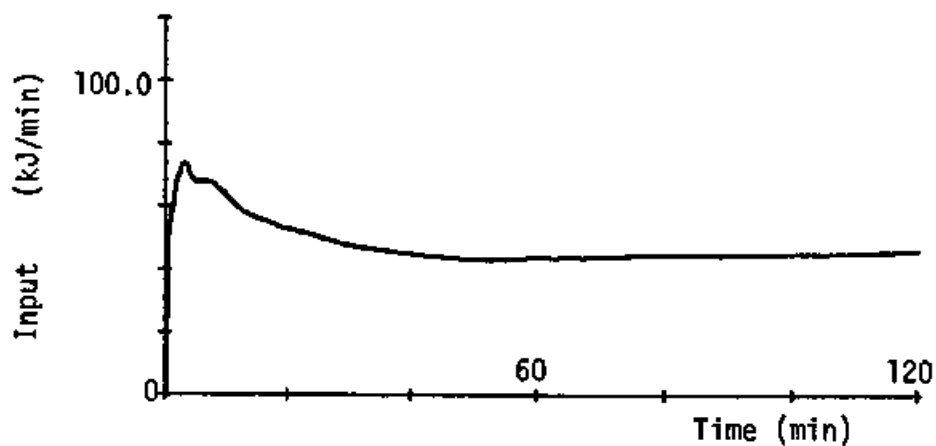


図6.17 固定トレースゲイン調整則を用いた場合の  
実験の制御入力

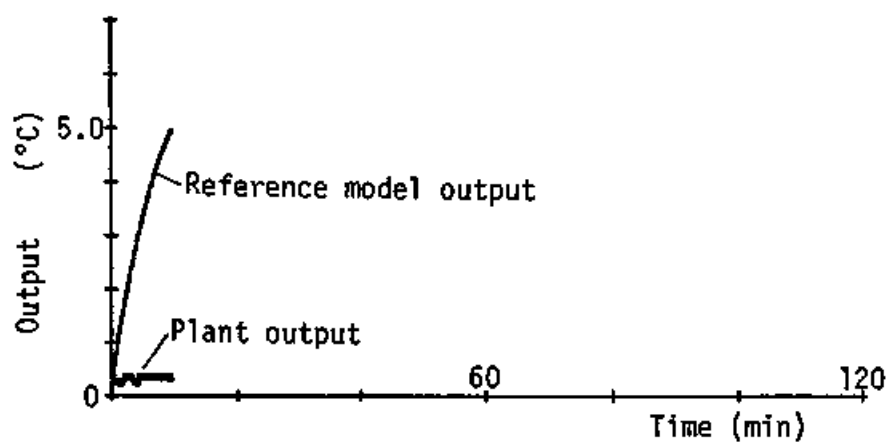


図 6. 18 定ゲイン調整則を用いた場合の  
実験のプラント出力と規範出力

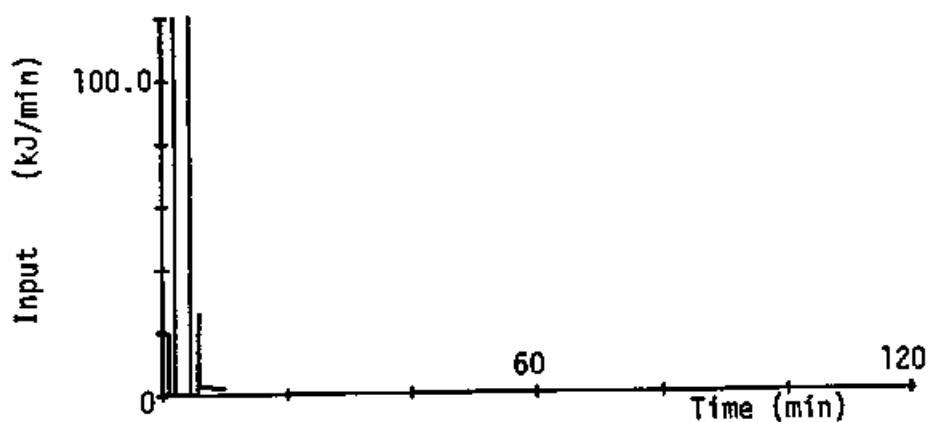


図 6. 19 定ゲイン調整則を用いた場合の  
実験の制御入力

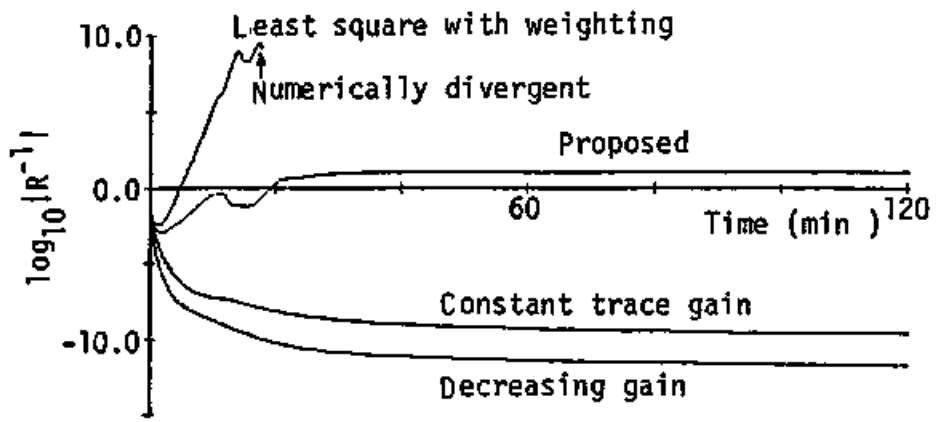


図 6. 20 実験のゲイン行列の行列式;  $\log |R^{-1}|$

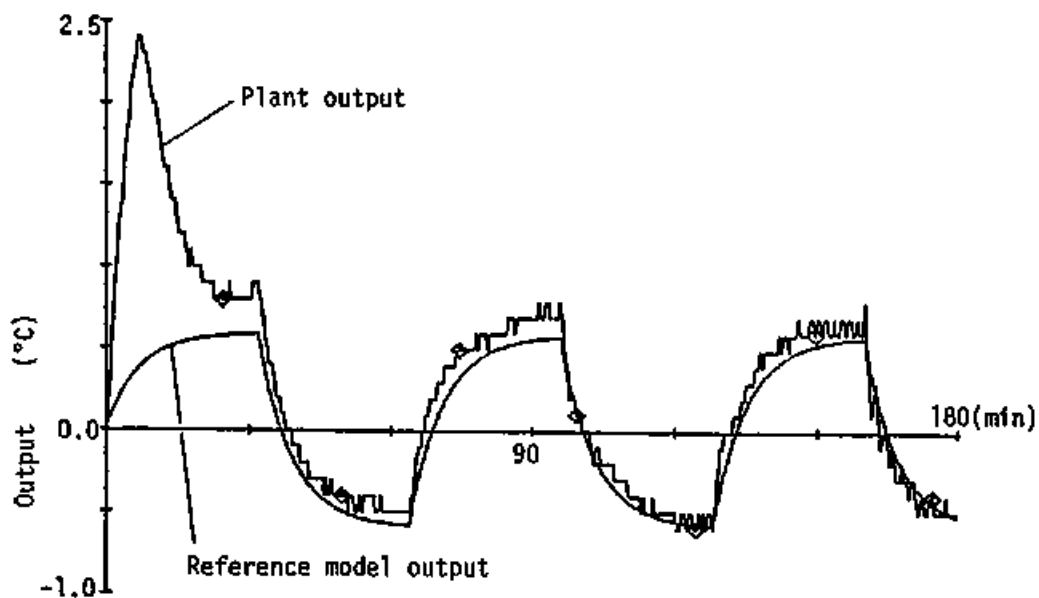


図6.21 2入出力MRACS実験のプラント出力と  
規範出力；外槽上昇水温

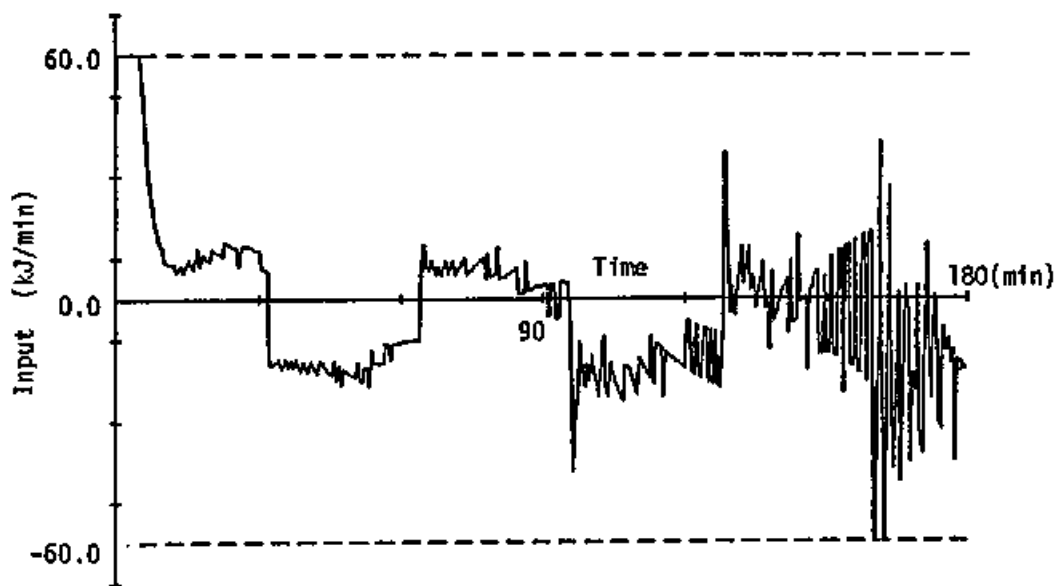


図6.22 2入出力MRACS実験の制御入力；  
外槽ヒータ熱量

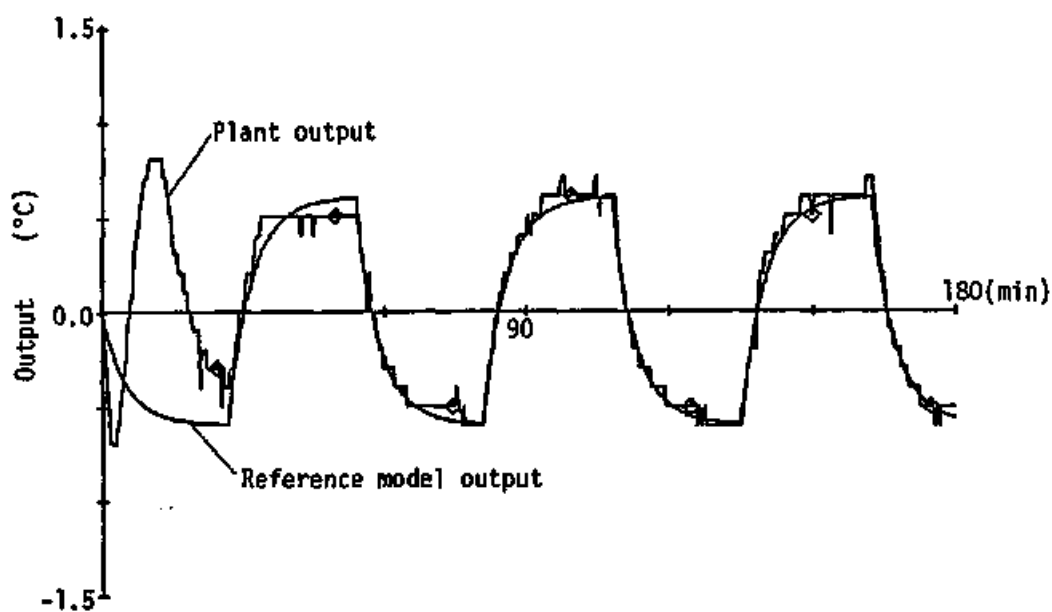


図6.23 2入出力MRACS実験のプラント出力と  
規範出力；内槽上昇水温

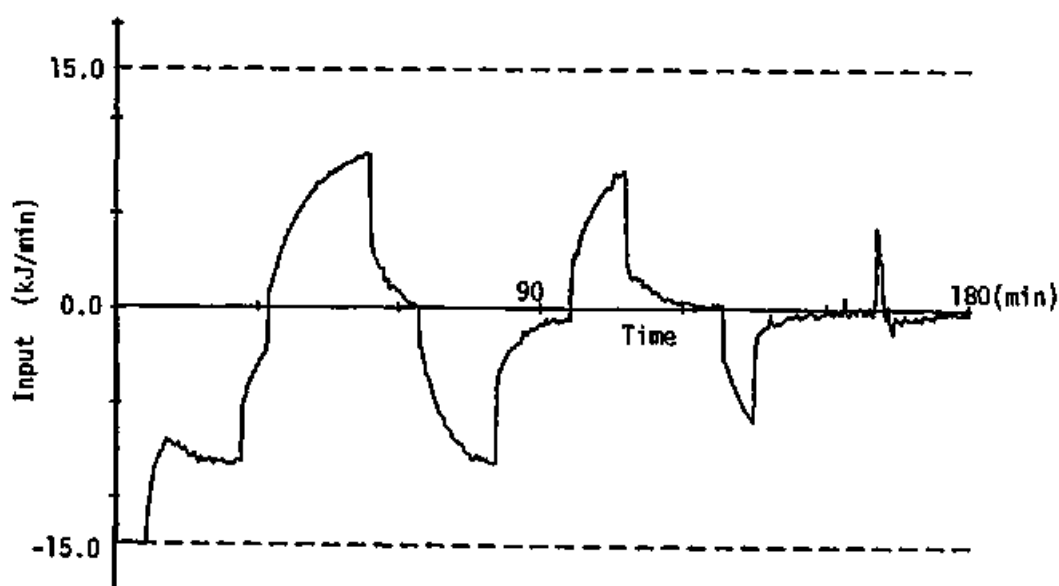


図6.24 2入出力MRACS実験の制御入力；  
内槽ヒータ熱量



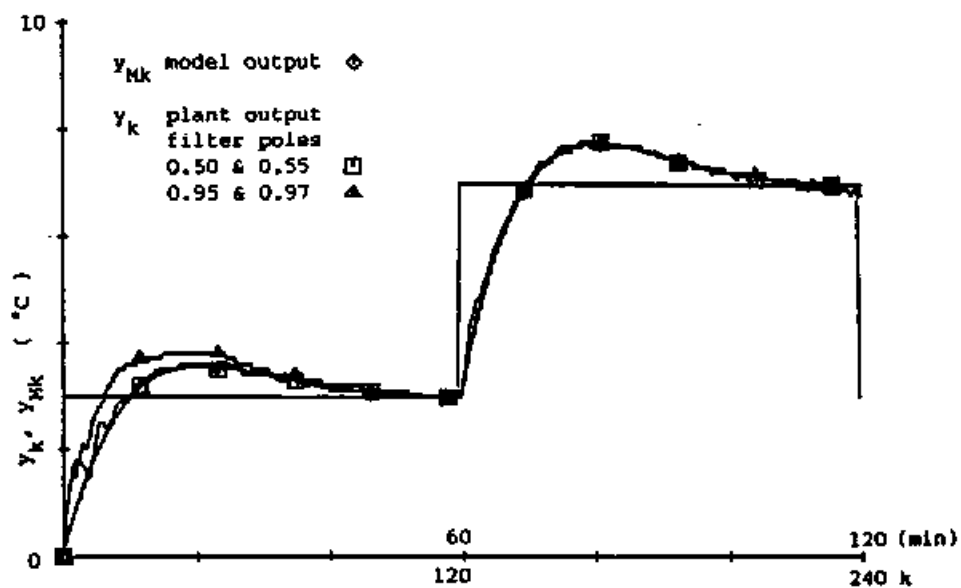


図 6. 25 離散時間MRACS実験の  
 プラント出力と規範出力

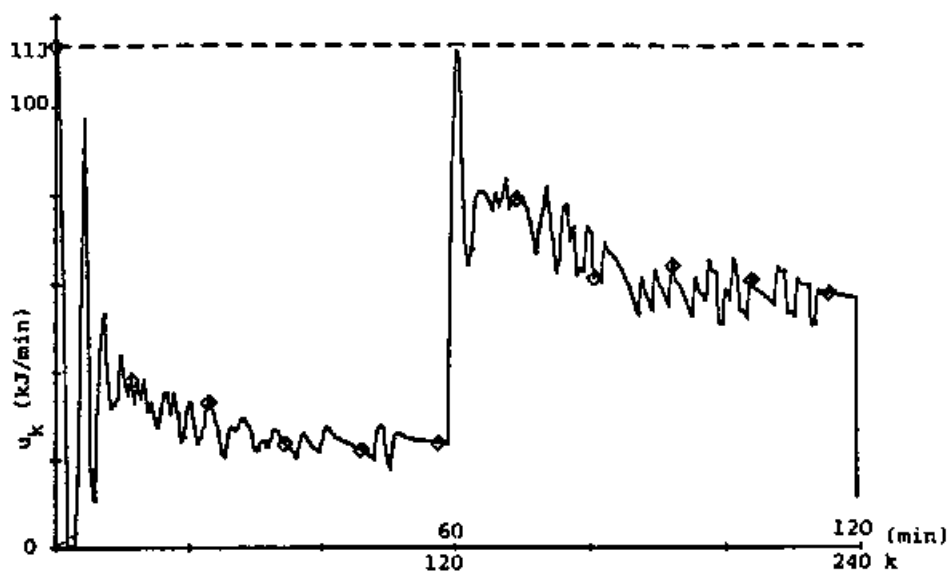


図 6. 26 離散時間MRACS実験の制御入力；  
フィルタKの極：0.55, Dの極：0.5

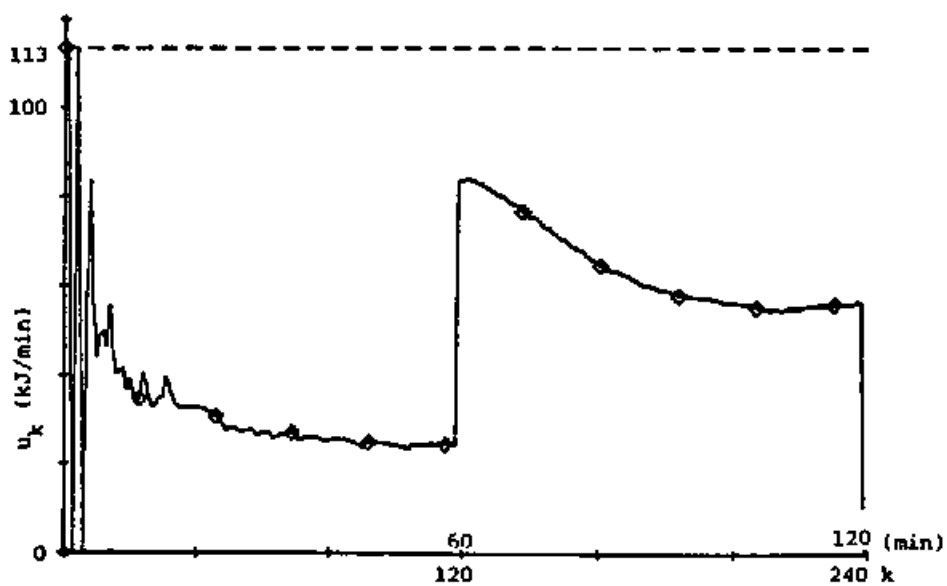


図 6. 27 離散時間MRACS実験の制御入力；  
フィルタKの極：0.97, Dの極：0.95

## 第 7 章 結 論

モデル規範形適応制御系は動特性が未知であるか、あるいは変動する制御対象に対して、所望の応答を示す規範モデルを与え、その応答に制御対象の出力が追従するように制御入力を構成する制御方式であり、本論文は指数減衰的収束性を有するモデル規範形適応制御系の構成方法を論じている。指数減衰的収束性は、多くの実プラントにみられる、プラントパラメータの変動、プラント次数の誤認、観測ノイズの混入といったような、理想的でない状況においても、モデル規範形適応制御系が実用可能な収束性能を得るために、必然的に備えておくべき性質である。

本論文の結果の要約は以下のとおりである。

第 2 章では、指数減衰的収束性を有するモデル規範形適応制御系の基本構成として、同様の性質をもつ適応観測器に用いられるパラメータ調整則を使用した構成方法を示し、閉ループ系の全信号の有界性と出力誤差の指数減衰性の証明とを与えた。

このモデル規範形適応制御系の特徴は、出力誤差の減衰度を設計者が任意に設定できること、制御対象の不安定度がパラメータ調整則の減衰度より大きくても適用できることなどである。

しかし、第 2 章の基本構成のモデル規範形適応制御系では、積分次数が高いこと、十分一般性条件が成立しないときには適用できないこと、十分一般性条件が成立するための規範入力に対する条件は明らかでないことが問題であった。

そこで、第 3 章では、まず、連続時間形式の重みつき最小 2 乗法から導かれるパラメータ調整則を用い、また、同定パラメータ数を未知パラメータ個数とし、さらに制御対象の伝達関数の分母分子の次数差補償のためのフィルタを不要とすることにより、積分次数を削減するモデル規範形適応制御系の構成方法、ならびに閉ループ系の全信号の有界性を示した。これにより、たとえば 2 次系の場合、積分次数はほぼ半減する。

つぎに、十分一般性条件が成立しないときにも適用できるモデル規範形適応制御系と

して、重みつき最小2乗法調整則に微小正定行列を付加したパラメータ調整則を用いた構成方法を示した。この構成では、第2章のモデル規範形適応制御系で適用できなかったステップ規範入力に対しても、収束性が保証される。また、十分一般性条件が成立していれば、指数減衰的収束性も保存される。さらに、その十分一般性条件は、制御対象の次数を  $n$  とすると、規範入力が  $(n+1)$  個以上の周波数成分をもっていれば成立することを明らかにした。

第4章では、1入出力系より以上に適応制御の必要性が高いと考えられる多入出力系に対して、指数減衰的収束性を有する適応観測器およびモデル規範形適応制御系を構成する方法を示した。その構成方法は、多入出力系を1出力サブシステムに分割し、そのパラメトリック表現を求めることから導かれた。この適応観測器およびモデル規範形適応制御系の特徴はcyclicでない制御対象にも適用できることなどである。

第5章では、近年めざましい発展をとげているデジタル計算機での実装が容易な、離散時間形式のモデル規範形適応制御系の構成方法を考察した。指数減衰的収束性をもつ、重みつき最小2乗法パラメータ調整則を用いたときに、フィルタの極を任意に指定できるモデル規範形適応制御系の構成方法を与え、その閉ループ系の安定性および全信号の有界性をSchauderの不動点定理によって証明した。このモデル規範形適応制御系は制御経過の滑らかさとノイズの影響の軽減とをともに実現できる特徴を有する。

第6章では、第2章から第5章までの理論の実用的確認のため、その設計方法を熱実験系に適用した結果について述べた。いずれの実験でもモデル規範形適応制御系の目的である良好な追従結果が得られ、また、各設計方法の特徴が実証された。

指数減衰的収束性は理想状態にない状況のもとで、ロバストな性能が得られる性質である。しかし、指数減衰性のうえにさらに、パラメータ変動、モデリングの誤り、ノイズの混入などを考慮した設計方法が確立されれば、適応制御系としての性能は、より向上すると考えられる。したがって、今後は指数減衰性と同時に、上記のような問題をも考えに入れたMRACS構成方法を研究することが課題である。また、デジタル技術の進展をみれば、時定数が小さいプラントに対する本論文の設計方法の適用可能性は十

分期待できるが、その一方で、収束速度を指数減衰程度より悪くせずに、より単純なアルゴリズムを開発することが、理論面からのアプローチとして望まれる。

## 謝 辞

本研究を行うにあたり、御懇切なる御指導を賜わった、京都大学工学部数理工学科 得丸英勝教授に心より感謝申し上げます。

研究の遂行および成文化において、多大の御教示をいただいた、熊本大学工学部機械工学科 岩井善太教授ならびに、御助言をいただいた、熊本大学工学部共通講座 井上昭教授に深謝いたします。また、有益なる御討論、御助言をいただいた、新潟大学工学部精密工学科 足立紀彦教授に感謝いたします。御討論いただいた八代工業高等専門学校 真野和生助教授、京都大学大学院 井上清治氏（現在、三菱重工業㈱）にも厚くお礼申し上げます。そして、激励のお言葉をいただいた、北海道大学工学部精密工学科 島公脩教授に感謝申し上げます。実験装置の製作および実験の実施に御協力いただいた、熊本大学工学部機械工学科 平野末彦技官、若宮龍市技官、永田正伸氏（現在、富士電機㈱）、宮本誠氏（現在、松下電器産業㈱）、西光雄氏、今崎智基氏には厚くお礼申し上げます。

## 参考文献

### 第1章

- (1) D. P. Lindorff and R. L. Carroll: Survey of Adaptive Control using Lyapunov Design, *Int. J. Control*, 18-5, 897/914 (1973)
- (2) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Stable Adaptive Observers and Controllers, *Proc. IEEE*, 64-8, 1198/1208 (1976)
- (3) 小林: モデル規範形適応制御系, *計測と制御*, 17-8, 602/612 (1978)
- (4) I. D. Landau: *Adaptive Control-The Model Reference Approach*, Marcel Dekker (1979)
- (5) B. Egardt: *Stability of Adaptive Controllers*, *Lecture Notes in Control and Information Series*, 20, Springer-Verlag (1979)
- (6) K. S. Narendra and R. V. Monopoli (eds): *Applications of Adaptive Control*, Academic Press (1980)
- (7) H. Unbehauen (ed): *Methods and Applications in Adaptive Control*, *Lecture Notes in Control and Information Series*, 24, Springer-Verlag (1980)
- (8) I. D. ランダウ, 富塚: *適応制御システムの理論と実際*, オーム社 (1981)
- (9) 田村, 市川: モデル規範形適応制御系の設計, *計測と制御*, 20-11, 1078/1086 (1981)
- (10) 藤井: 適応制御における最近の動向, *システムと制御*, 25-12, 715/726 (1981)
- (11) 鈴木: 適応制御理論—今後の展開は, *システムと制御*, 26-3, 172/181 (1982)
- (12) 計測自動制御学会編: *自動制御ハンドブック (基礎編)*, オーム社 (1983)
- (13) 小特集 適応制御, *計測と制御*, 23-5, 415/502 (1984)
- (14) D. W. Clarke, and P. J. Gawthrop: Self-Tuning Controller, *Proc. IEE*, 122-9, 929/934 (1975)
- (15) K. J. Åström: *Theory and Applications of Adaptive Control—A Survey*, *Automatica*, 19-5, 471/486 (1983)

- (16) H. P. Whitaker, J. Yarmon and A. Kezer: Design of Model-Reference Adaptive Control Systems for Aircraft, Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT, Cambridge, Mass. (1958)
- (17) P. C. Parks: Lyapunov Redesign of Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans., AC-11-3, 362/367 (1966)
- (18) S. レフシツ (加藤訳) : 非線形制御系の安定性, 産業図書 (1974)
- (19) I. D. Landau: A Hyperstability Criterion for Model Reference Adaptive Control Systems, IEEE Trans., AC-14-5, 552/555 (1969)
- (20) V. M. Popov: Hyperstability of Control Systems, Springer-Verlag (1973)
- (21) R. V. Monopoli: Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans., AC-19-5, 474/484 (1974)
- (22) A. Feuer, B. R. Barmish and A. S. Morse: An Unstable Dynamical System Associated with Model Reference Adaptive Control, IEEE Trans., AC-23-3, 499/500 (1978)
- (23) A. Feuer and A. S. Morse: Adaptive Control of Single-Input, Single-Output Linear Systems, IEEE Trans., AC-23-4, 557/569 (1978)
- (24) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design-Direct Control, IEEE Trans., AC-23-4, 570/583 (1978)
- (25) A. S. Morse: Global Stability of Parameter-Adaptive Control Systems, IEEE Trans., AC-25-3, 433/439 (1980)
- (26) K. S. Narendra, Y. H. Lin and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design, Part II: Proof of Stability, IEEE Trans., AC-25-3, 440/448 (1980)
- (27) K. S. Narendra and Y. H. Lin: Stable Discrete Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25-3, 456/461 (1980)
- (28) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines: Discrete-Time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25-3, 449/456 (1980)
- (29) K. S. Narendra and L. S. Valavani: Direct and Indirect Model Reference Adaptive Control, Automatica, 15, 653/664 (1979)
- (30) B. Egardt: Unification of Some Continuous-Time Adaptive Control Schemes,



- IEEE Trans., AC-24-4, 588/592 (1979)
- (31) R. Lozano and I. D. Landau: Redesign of Explicit and Implicit Discrete Time Model Reference Adaptive Control Systems, *Int. J. Control*, 33-2, 247/268 (1980)
- (32) 鈴木, 中村: 間接法によるモデル規範形適応制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, 16-6, 824/831 (1980)
- (33) R. L. Carroll and D. P. Lindorff: An Adaptive Observer for Single-Input, Single-Output Linear Systems, *IEEE Trans.*, AC-18-5, 428/435 (1973)
- (34) 鈴木: 適応観測器, 計測と制御, 19-2, 195/205 (1980)
- (35) 岩井: 適応観測器における諸問題, システムと制御, 28-6, 354/363 (1984)
- (36) G. Lüders and K. S. Narendra: An Adaptive Observer and Identifier for a Linear Systems, *IEEE Trans.*, AC-18-5, 496/499 (1973)
- (37) 武藤, 市川: 適応観測器を用いたモデル規範形適応制御系の構成, 計測自動制御学会論文集, 16-3, 303/309 (1980)
- (38) 金井, 出川: 観測器を含む離散時間モデル規範形適応制御系の構成, 計測自動制御学会論文集, 16-5, 666/672 (1980)
- (39) B. B. Peterson and K. S. Narendra: Bounded Error Adaptive Control, *IEEE Trans.*, AC-27-6, 1161/1168 (1982)
- (40) G. Kreisselmeier and K. S. Narendra: Stable Model Reference Adaptive Control in the Presence of Bounded Disturbances, *IEEE Trans.*, AC-27-6, 1169/1175 (1982)
- (41) P. A. Ioannou and P. V. Kokotovic: Adaptive Systems with Reduced Model, Springer Verlag, (1982)
- (42) C. E. Rohrs, L. Valavani, M. Athans and G. Stein: Robustness of Adaptive Algorithms in the Presence of Unmodeled Dynamics, Proc. 21st IEEE CDC, Orlando, 3/11 (1982)
- (43) B. D. O. Anderson and C. R. Johnson, Jr.: Exponential Convergence of Adaptive Identification and Control Algorithms, *Automatica*, 18-1, 1/13 (1982)
- (44) G. Kreisselmeier and D. Joos: Rate of Convergence in Model Reference

- Adaptive Control, IEEE Trans., AC-27-3, 710/713 (1982)
- (45) K. Ichikawa: Continuous Time Adaptive Identification and Control Algorithm via Newly Developed Adaptive Laws, Int. J. Control, 36-5, 819/831 (1982)
- (46) 鈴木, 新中: 連続時間モデル規範形適応システムのための一般化適応則, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 108/113 (1984)
- (47) 天野, 田村, 市川: 間接法によるMRACS の一構成法とシステム内の全信号の有界性の証明, 計測自動制御学会論文集, 19-9, 697/704 (1983)
- (48) 井上, 岩井, 真野: 指数減衰度を有するモデル規範形適応制御系の熱実験系への適用例, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 175/177 (1984)
- (49) R. Lozano: Adaptive Control, Preprint of 8th IFAC World Congress, 7-33.5 83/88 (1981)

## 第2章

- (1) H. P. Whitaker, J. Yarmon and A. Kezer: Design of Model-Reference Adaptive Control Systems for Aircraft, Report R-164, Instrumentation Laboratory, MIT, Cambridge, Mass. (1958)
- (2) 藤井: 適応制御における最近の動向, システムと制御, 25-12, 715/726 (1981)
- (3) R. M. Johnstone and B. D. O. Anderson: Exponential Convergence of Recursive Least Squares with Exponential Forgetting Factor-Adaptive Control, Systems & Control Letters, 2-2, 69/76 (1982)
- (4) G. Kreisselmeier and D. Joos: Rate of Convergence in Model Reference Adaptive Control, IEEE Trans., AC-27-3, 710/713 (1982)
- (5) K. Ichikawa: Continuous Time Adaptive Identification and Control Algorithm via Newly Developed Adaptive Laws, Int. J. Control, 36-5, 819/831 (1982)
- (6) 中村, 鈴木, 永井: 連続時間モデル規範形適応制御系の速応性の改善, 電気学会論文誌C, 102-11, 253/260 (1982)

- (7) 鈴木, 新中: 連続時間モデル規範形適応システムのための一般化適応則, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 108/113 (1984)
- (8) 天野, 田村, 市川: 間接法によるMRACS の一構成法とシステム内の全信号の有界性の証明, 計測自動制御学会論文集, 19-9, 697/704 (1983)
- (9) 得丸, 今井, 岩井: リレーによる線形多変数系の無干渉制御, 計測自動制御学会論文集, 3-3, 188/196 (1967)
- (10) 岩井, 佐藤, 井上, 真野: 指数減衰的収束性を有する適応観測器, 計測自動制御学会論文集, 18-4, 343/348 (1982)
- (11) A. S. Morse: Global Stability of Parameter-Adaptive Control Systems, IEEE Trans., AC-25-3, 433/439 (1980)
- (12) D. H. Lukes: Differential Equations: Classical to Controlled, Academic Press (1982)
- (13) 鈴木: 適応観測器, 計測と制御, 19-2, 195/205 (1980)
- (14) G. Kreisselmeier: Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, IEEE Trans., AC-22-1, 2/8 (1977)

### 第3章

- (1) 武藤, 市川: 適応観測器を用いたモデル規範形適応制御系の構成, 計測自動制御学会論文集, 16-3, 303/309 (1980)
- (2) 天野, 田村, 市川: 間接法によるMRACS の一構成法とシステム内の全信号の有界性の証明, 計測自動制御学会論文集, 19-9, 697/704 (1983)
- (3) 鈴木, 新中: 連続時間モデル規範形適応システムのための一般化適応則, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 108/113 (1984)
- (4) N. Minamide, P. N. Nikiforuk and M. M. Gupta: Design of an Adaptive Observer and its Application to an Adaptive Pole Placement Controller, Int. J. Control, 37-2, 349/366 (1983)
- (5) 中村, 鈴木, 永井: 連続時間モデル規範形適応制御系の速応性の改善, 電気学会論文誌C, 102-11, 253/260 (1982)

- (6) 岩井, 足立, 井上: 指数減衰的収束性を有する適応調整則とその適応観測器への応用, 計測自動制御学会論文集, 20-5, 460/462 (1984)
- (7) G. Kreisselmeier: Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, IEEE Trans., AC-22-1, 2/8 (1977)
- (8) 伊藤: システム制御理論, 第4章, 昭晃堂 (1973)
- (9) K. S. Narendra, Y. H. Lin and L. S. Valavani: Stable Adaptive Controller Design, Part II: Proof of Stability, IEEE Trans., AC-25-3, 440/448 (1980)

#### 第4章

- (1) G. Luders and K. S. Narendra: Stable Adaptive Schemes for State Estimation and Identification of Linear Systems, IEEE Trans., AC-19-6, 841/847 (1974)
- (2) 金井, 出川, 内門: 多入力多出力系の適応観測器の構成, 計測自動制御学会論文集, 18-4, 349/356 (1982)
- (3) A. Gauthier and I. D. Landau: On the Recursive Identification of Multi-Input, Multi-Output Systems, Automatica, 14-6, 609/614 (1978)
- (4) 巖, 足立, 得丸: 多入出力系における有限時間整定適応観測器, 計測自動制御学会論文集, 19-2, 124/129 (1983)
- (5) P. N. Nikiforuk, H. Ohta and M. M. Gupta: Adaptive Observer and Identifier Design for Multi-Input Multi-Output Systems, Proc. 4th IFAC Int. Symp., Fredericton, Canada, 189/196 (1977)
- (6) H. W. Yang, H. Itakura and Y. Nishikawa: Two Approaches for Adaptive Observer in Multi-Output Systems, Preprints of 8th World Congress of IFAC, Kyoto, 36.4 (1981)
- (7) G. Kreisselmeier: Adaptive Observers with Exponential Rate of Convergence, IEEE Trans., AC-22-1, 2/8 (1977)
- (8) G. C. Goodwin and R. S. Long: Generalization of Results on Multivariable

- Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25-6, 1241/1245 (1980)
- (9) H. Elliott and W. A. Wolovich: A Parameter Adaptive Control Structure for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-27-2, 340/352 (1982)
- (10) D. G. Luenberger: Canonical Forms for Multivariable Systems, IEEE Trans., AC-12, 290/296 (1967)
- (11) R. Guidorzi: Canonical Structures in the Identification of Multivariable Systems, Automatica, 11, 361/374 (1975)
- (12) J. E. Ackermann: On the Synthesis of Linear Control Systems with Specified Characteristics, Automatica, 13, 89/94 (1977)
- (13) J. S-C. Yuan and W. M. Wonham: Probing Signals for Model Reference Identification, IEEE Trans., AC-22, 530/538 (1977)
- (14) 新, 北森: 多変数モデル規範形適応制御系の一つの一般化, 計測自動制御学会論文集, 19-10, 807/812 (1983)
- (15) 金井, 内門: 未知インタラクタを含む適応制御系の一構成法, 計測自動制御学会論文集, 19-12, 950/957 (1983)

## 第5章

- (1) I. D. ランダウ, 富塚: 適応制御システムの理論と実際, オーム社 (1981)
- (2) 鈴木, 新中, 田中: 一般化適応則の証明と固定トレースアルゴリズムの諸性質, 計測自動制御学会論文集, 18-11, 1074/1079 (1982)
- (3) 鈴木: 適応制御における最近の興味ある研究テーマ, 計測と制御, 23-5, 498/502 (1984)
- (4) 相良, 秋月, 中溝, 片山: システム同定, 計測自動制御学会 (1981)
- (5) 藤井: 適応制御における最近の動向, システムと制御, 25-12, 715/726 (1981)
- (6) R. Lozano: Adaptive Control, Preprint of 8th IFAC World Congress, 7-33.5 83/88 (1981)
- (7) G. C. Goodwin, P. J. Ramadge and P. E. Caines: Discrete-Time Multivariable Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25-3, 449/456 (1980)

- (8) 中村, 鈴木: プラントの入力に着目した間接法離散時間 MRACSの構成, 計測自動制御学会論文集, 18-2, 131/138 (1982)
- (9) K. S. Narendra and Y. H. Lin: Stable Discrete Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25-3, 456/461 (1980)
- (10) 藤井, 水野: 多変数離散時間モデル規範形適応制御系の一設計法, 計測自動制御学会論文集, 18-2, 124/130 (1982)
- (11) 武藤, 市川: 拡張誤差を用いない直接法離散時間 MRACSの一般的構造と漸近安定性, 計測自動制御学会論文集, 19-4, 293/299 (1983)
- (12) J. K. Hale: Ordinary Differential Equations, Wiley-Interscience (1969)
- (13) 山本, 杉浦: 非線形制御系の可制御性, 計測自動制御学会論文集, 9-1, 71/76 (1973)
- (14) 小林, 示村: 非線形システムの原点可制御領域, 計測自動制御学会論文集, 16-1, 1/5 (1980)
- (15) 亀島: パラメータ問題における不動点の存在, 計測自動制御学会論文集, 19-12, 937/942 (1983)
- (16) R. M. Johnstone, C. R. Johnson, Jr., R. R. Bitmead and B. D. O. Anderson : Exponential Convergence of Recursive Least Squares with Exponential Forgetting Factor, Systems & Control Letters, 2-2, 77/82 (1982)
- (17) A. N. コルモゴロフ, S. V. フォーミン (山崎訳): 関数解析の基礎, 第2版, 岩波書店 (1971)

## 第6章

- (1) 計測自動制御学会編: 自動制御ハンドブック (基礎編), オーム社 (1983)
- (2) 小特集 適応制御, 計測と制御, 23-5, 415/502 (1984)
- (3) 井上, 岩井, 真野: 指数減衰度を有するモデル規範形適応制御系の熱実験系への適用例, 計測自動制御学会論文集, 20-2, 175/177 (1984)
- (4) 井上, 岩井, 佐藤: 可変減衰度を有する適応観測器とその2次熱実験系への適用, 計測自動制御学会論文集, 18-12, 1159/1164 (1982)

- (5) 吉沢：基礎工学4，数値解析 I，岩波書店，90 (1968)
- (6) 井上，岩井，佐藤：可変減衰度を有する離散時間適応観測器とその収束性の熱系による実験的検討，計測自動制御学会論文集，19-1，21/27 (1983)

