

岩質材料ならびにそれより成る系の  
ぜい性破壊規準に関する基礎的研究

昭和47年1月

小林 昭 一





岩質材料ならびにそれより成る系の  
ぜい性破壊規準に関する基礎的研究

昭和47年1月

小林 昭 一



# 目 次

序 言 .....	1
第 I 部 岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊規準に関する理論的考察	
第 1 章 岩質材料ならびにそれより成る系の破壊の基本特性 .....	9
1.1 はじめに .....	9
1.2 ぜい性破壊開始の条件 .....	11
1.3 ぜい性破壊の破壊曲面 .....	14
1.4 ぜい性破壊曲面の特性 .....	18
第 2 章 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の破壊規準 .....	22
2.1 はじめに .....	22
2.2 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の巨視的破壊規準 .....	22
2.2.1 最大応力破壊説 .....	23
2.2.2 最大ひずみ破壊説 .....	23
2.2.3 最大せん断応力破壊説 .....	24
2.2.4 八面体せん断応力破壊説 .....	24
2.2.5 Coulomb の破壊規準 .....	25
2.2.6 Mohr の破壊規準 ( 2 次式 ) .....	25
2.3 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の準微視的破壊規準 .....	27
2.3.1 Griffith 理論とその一般化 .....	27
i) 楕円クラックからの破壊開始規準 .....	27
ii) 数学的スリットからの破壊開始規準 .....	37
2.3.2 修正 Griffith 理論 .....	41
2.3.3 せん断応力破壊説の適用 .....	47
2.4 準微視的破壊規準と巨視的破壊規準の関係 .....	50
2.5 3次元主応力空間に表示した破壊規準－破壊曲面 .....	53
2.5.1 3次元破壊規準の表示法 .....	53
2.5.2 Coulomb 式の拡張 .....	56
2.5.3 Mohr の 2 次式の拡張 .....	58
2.5.4 代表的な準微視的破壊規準の拡張 .....	59
i) 一般 Griffith 式の拡張 .....	60

ii) 修正 Griffith 式の拡張 .....	63
2.6 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の逐次破壊 .....	63
2.7 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の一般的な破壊規準 .....	66
<b>第3章 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊規準 .....</b>	<b>67</b>
3.1 はじめに .....	67
3.2 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の2次元破壊規準 .....	67
3.2.1 弱面群モデルに基づく破壊規準 .....	67
i) Coulomb 破壊規準の適用 .....	68
ii) Mohr の破壊規準(2次式)の適用 .....	69
3.2.2 潜在欠陥群モデルに基づく破壊規準 .....	70
i) Griffith および修正 Griffith 理論の適用 .....	71
ii) せん断破壊規準の適用 .....	73
3.2.3 直交異方性マトリックス内の潜在クラック群モデルに基づく破壊規準 .....	75
3.3 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊曲面 .....	77
3.3.1 一主応力と平行な弱面群を含むモデルに基づく破壊曲面 .....	78
i) Coulomb 破壊規準の拡張 .....	78
ii) Mohr の破壊規準の拡張 .....	80
3.3.2 任意方向の弱面を含むモデルに基づく破壊曲面 .....	80
3.4 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の逐次破壊 .....	82
3.5 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の一般的な破壊規準 .....	82

## 第Ⅱ部 岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊規準に関する実験的考察

<b>第1章 破壊開始ならびに破壊伝播に関する基礎的実験 .....</b>	<b>85</b>
1.1 はじめに .....	85
1.2 単一スリットおよびインクルージョンからのき裂の発生と伝播 .....	85
1.2.1 供試体の作製 .....	85
1.2.2 試験方法 .....	87
1.2.3 き裂の検出方法 .....	87
1.2.4 試験結果とその考察 .....	88
1.3 多数スリットおよびインクルージョンからのき裂の発生と伝播 .....	103
1.3.1 供試体の作製 .....	103

1.3.2	試験方法	103
1.3.3	試験結果とその考察	104
1.4	おわりに	117
第2章	等方・均質材料の破壊規準に関する基礎的実験	118
2.1	はじめに	118
2.2	試験装置	119
2.2.1	三軸万能試験装置	119
2.2.2	内外軸圧組み合わせ試験装置	122
2.3	供試体の作製	123
2.3.1	セメント・ペースト，モルタル，普通コンクリートおよび軽量コンクリート 供試体の作製	123
2.3.2	岩石供試体の作製	125
2.4	試験条件および試験方法	126
2.4.1	供試体端面拘束の減少	126
2.4.2	加圧盤の問題	128
2.4.3	試験方法	129
2.4.4	供試体の変形の測定	130
2.5	試験結果およびその考察	131
2.5.1	セメント・ペースト，モルタル，普通コンクリートおよび軽量コンクリート の一軸圧縮試験結果とその考察	131
2.5.2	セメント・ペースト，モルタル，普通コンクリートおよび軽量コンクリート の二軸圧縮試験結果とその考察	132
2.5.3	セメント・ペースト，モルタル，普通コンクリートおよび軽量コンクリート の三軸圧縮試験結果とその考察	137
2.5.4	モルタルの圧縮-引張試験結果とその考察	150
2.5.5	砂岩およびチャートの圧縮試験結果とその考察	154
2.5.6	その他の材料のぜい性破壊強度の考察	168
2.6	おわりに	169
第3章	異方性岩質材料ならびに異方性系の破壊規準に関する基礎的実験	170
3.1	はじめに	170
3.2	モデル供試体の作製	170
3.2.1	岩石供試体（緑泥片岩）	170

3.2.2	スリットおよびインクルージョン・モデル供試体	171
3.2.3	単一不連続面を含むモデル供試体	171
3.2.4	層状体モデル供試体	171
3.3	試験装置と試験方法	172
3.4	試験結果とその考察	172
3.4.1	岩石供試体の試験結果とその考察	172
3.4.2	スリットおよびインクルージョン供試体の試験結果とその考察	174
3.4.3	単一不連続面を含むモデル供試体の試験結果とその考察	176
3.4.4	層状体モデル供試体の試験結果とその考察	177
3.5	おわりに	183

### 第Ⅲ部 岩質材料の代表的な試験法における供試体内の応力分布の検討

第1章	供試体内の応力分布の必要性	185
第2章	カップル・ストレス理論の概要	186
2.1	はじめに	186
2.2	線形カップル・ストレス弾性理論	186
2.3	線形マイクロポーラー弾性理論	189
第3章	一軸圧縮による直方供試体内の応力分布	192
3.1	はじめに	192
3.2	Fourier 級数による解法	192
3.2.1	問題の設定	192
3.2.2	Fourier 級数による一般解	193
3.2.3	未定係数の決定	198
3.3	応力分布に及ぼすカップル・ストレスならびに Poisson 比の影響	204
3.4	応力分布に及ぼす供試体端面拘束および Poisson 比の影響	210
第4章	割裂ならびにリング試験における供試体内の応力分布	214
4.1	はじめに	214
4.2	Fourier-Bessel 展開による解法	214

4.2.1	問題の設定	214
4.2.2	Fourier-Bessel 展開による一般解	215
4.3	割裂試験供試体内の応力分布に及ぼすカップル・ストレス, Poisson 比および 荷重幅の影響	220
4.4	リング試験供試体内の応力分布に及ぼすカップル・ストレスおよび Poisson 比の 影響	224
第5章	インデンテーション試験供試体内の応力分布	227
5.1	はじめに	227
5.2	Fourier 級数による解法	227
5.2.1	問題の設定	227
5.2.2	Fourier 級数による解	228
5.3	応力分布に及ぼすカップル・ストレス Poisson比ならびに荷重幅の影響	229
第6章	異方性供試体の応力分布	233
6.1	はじめに	233
6.2	異方性線形カップル・ストレス弾性理論の概要	233
6.3	一軸圧縮を受ける直交異方性直方供試体内の応力分布	240
6.3.1	問題の設定	240
6.3.2	差分法による解析	241
6.3.3	応力分布に及ぼす異方性ならびにカップル・ストレスの影響	242
6.4	インデンテーション試験における直交異方性供試体内の応力分布	251
6.4.1	問題の設定	251
6.4.2	解析方法	252
6.4.3	応力分布に及ぼす異方性の影響	252
あとがき		254
結    言		255
謝    辞		260
参考文献		261

## 附 録

A.1	破壊に関するエネルギー規準	279
A.1.1	エネルギー規準の基本的な考え方	279
A.1.2	欠陥の存在による過剰ひずみエネルギー $W_1$	281
A.1.2.1	面外せん断による $W_1$	281
A.1.2.2	二軸引張りおよび面内せん断による $W_1$	282
A.1.2.3	偏平楕円クラックを含む3次元物体内にたくわえられる $W_1$	283
A.1.3	表面エネルギー $T$	283
A.1.4	極限応力	284
A.1.5	直交異方性材料の破壊に関するエネルギー規準	285
A.1.5.1	二軸引張応力による $W_1$	285
A.1.5.2	面内せん断による $W_1$	286
A.1.5.3	面外せん断による $W_1$	286
A.2	一軸圧縮による直方体供試体内の応力分布 —エネルギー法による解析—	288
A.2.1	エネルギー法による解法 —正規直交多項式の導入—	288
A.2.1.1	問題の設定	288
A.2.1.2	変分法の適用	290
A.2.2	供試体内の応力分布	293
	附録の参考文献	299

## 序 言

破壊は日常ありふれた物理現象である。種々の材料の破壊が観察されるが、その中でも岩石、コンクリート、セラミックス、ガラスなどの破壊は最も普通に見られるものであり、これらの破壊は鋼やアルミニウムなどの破壊に較べて極めてぜい性的である。このように常温、低拘束(封)圧の下で、ぜい性的な破壊特性を示す材料を以下では総称して岩質材料と呼ぶことにする。それでは一体ぜい性破壊はどのような機構に支配され、またどのような条件の下で生じるのであろうか。残念ながらこの間に対する明確な答は期待できないであろう。破壊は我々が日常よく経験し、また工学的にも極めて重要な課題であるにも拘らず、まだ不明な部分が極めて多く残されているからである。

岩石、コンクリート、ガラスなどの破壊に関する研究は、今世紀初頭から岩石について地球物理(地殻構造)分野において、特に高温、高圧下での実験<sup>1)</sup>が進められて来たが、コンクリート、ガラス、などに関する本格的な研究は最近まで殆んど見られず、1930年前後にコンクリートに関する2,3の先駆的な実験<sup>2)</sup>が、またガラスに関して1920年代のGriffithの研究<sup>3)</sup>が見られる程度である。工学面における岩質材料の破壊の研究は、1960年代になって、一方では金属のぜい性破壊の研究に刺戟されて、また他方では、土木建築構造物の巨大化、複雑化に伴って、また鉱山分野における深部長大坑道ならびに大空洞の開さくなどに関連して、更には地震発生の機構にも関連して、岩盤ならびにその構成要素である岩石、構造物要素であるコンクリートなどに関してより適確な知識が要求されるようになり、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊の研究が急速に発展して来た。特に最近では、電子計算機を駆使した解析技術が進歩するにつれて構造物は地上、地下を問わず、巨大化、複雑化の一途をたどり、また極めて苛酷な岩盤条件の下でも建設あるいは開さくを余儀なくされるような趨勢になって来ており、これに伴って、構造物自体の構成要素はもちろん、基盤も益々複雑な組み合わせ応力状態に置かれるようになって来た。構造物自体の設計方法に関しては、既に幾多の成果が得られており、これに基づいて安全かつ経済的な設計が可能となって来たのに反し、これらの構造自体、あるいはその基盤として、しかも構造物-基盤系全体としての安全性に最も影響を及ぼす岩質材料あるいはそれより成る系の力学挙動に関しては、その多様性と複雑性のために研究成果は極めて乏しい。特に、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊に関する研究は、構造物-基盤系の安全性を推定するための最も基礎となるものであり、種々の組み合わせ応力条件の下での破壊の機構ならびに破壊規準に関する詳細な研究が待たれている。我々が、土木建築あるいは鉱山分野で現時点で遭遇する工学上の問題では、地下構造物にしても地下開さくにしても、一般には拘束圧は比較的低く、また温度も余り高くないので、破壊はぜい性的と考えられる。また構造物要素としてのコンクリートの応力状態もぜい性的破壊を生じるオーダーであり、その他の岩質材料、セラミックス、ブラファイト、鋳鉄などの使用条件も殆んどの場合、ぜい性破壊を考慮しなければならないものと考えられる。

本論文は、このような立場から、常温、低拘束圧の下での岩質材料ならびにそれより成る連続系のぜい性破壊を理論的ならびに実験的な両面から検討することを意図している。

破壊の研究を歴史的に眺めてみると、破壊現象の最初の力学的な説明は1773年Coulombの研究<sup>4)</sup>

に見出されるようである。彼は、その中で砂岩の引張り、曲げおよび圧縮試験について実験を試み、特に圧縮を受けた供試体の斜め破壊 ( oblique fracture ) に関して、破壊を生じる面上のせん断応力が、その面上の粘着力 ( cohesion ) の項と直応力により生じる “摩擦” の項との和より大きいときに生じると解釈した。これは、今日我々が Coulomb の破壊規準と称しているものである。

破壊の概念あるいは破壊規準に関する研究は、その後長い間大きな進展を見ず、最も一般的に用いられていた規準は、Lamé, Clapeyron および Rankine による最大直応力規準<sup>5)</sup> ( the maximum normal stress criterion ) であった。1858年には、Rankine<sup>6)</sup>が “Manual of Applied Mechanics” を出版し、この中で破壊の形態について分類を試みている。それによると、引張および圧縮によっては、それぞれ tearing および crushing あるいは cleavage 破壊が生じ、せん断変形 ( distorsion )、ねじりおよび曲げによっては、それぞれ shearing, wrenching および breaking across が生じるとしている。同じ頃、産業の発達につれて鑄鉄の需要が高まり、その強度に関しても注意が払われるようになって来た。Hodgkinson<sup>7)</sup>は1930年に鑄鉄の強度に関する実験を行ない、鑄鉄の弾性係数、弾性限界および終局強度は引張と圧縮で異なることを見出した。彼は、また圧縮破壊について cone ないし wedge 状の破壊形状が共通に現われることを図示している。また、鑄鉄の圧縮と引張強度の比が 6 : 1 ~ 6.5 : 1 という結果をも示している。

一方、同時代には、St. Venant が応用力学の指導的役割を演じており、破壊について最大直ひずみ説 ( the maximum normal strain theory ) を主唱していた。<sup>8)</sup>彼は、この説を1837年に既に考えていたと思われる。1864~1872年には Tresca<sup>9)</sup>が材料の引き抜きとか punching の実験を重ね、これを基に、材料が塑性時に変形する時には最大せん断応力が一定であると結論した。St. Venant はこの重要性を認め、自らも一連の研究を行なっている。彼はその研究の中でひずみ増分の必要性を認めている。<sup>10)</sup>

今世紀に近づくにつれて、弾性学の完成と共に材料強度に関する研究も進展し、1885年には Beltrami<sup>11)</sup>は、破壊エネルギー概念を導入し、与えられた物体内に蓄えられる全弾性ひずみエネルギーが或る一定値に達すると破壊 ( failure ) が生じるという、いわゆる全ひずみエネルギー一定説を提案した。1900年になると Guest の薄肉円筒を用いた一連の引張 - ねじり - 内圧試験が発表され、延性材料 ( 鋼、銅、真鍮など ) の初期降伏は或るせん断応力で生じ、中間主応力には無関係であることが示された。<sup>12)</sup>これは Guest の最大せん断応力規準と呼ばれている。1900年には、更に Mohr<sup>13)</sup>が Coulomb の規準を一般化して、破壊時のせん断応力を直応力の関数で表わし、Mohr の包絡線概念を導入して、いわゆる Mohr の破壊規準を提案した。

1910年代になると、岩石の破壊に関しても本格的な研究が試みられるようになり、von Kármán ( 1911年 )<sup>14)</sup> および Böker ( 1915年 )<sup>15)</sup> は、大理石を用いていわゆる三軸圧縮ならびに伸張試験を行なって、拘束圧の低い間は典型的ぜい性破壊を生じ、Coulomb-Mohr の破壊規準の適用が可能であるが、拘束圧が高くなると岩石でも塑性変形を示し、最大せん断応力規準に近づくことが明らかにされた。その後、高い拘束圧および高温下の岩石の破壊、変形挙動に関しては、地球物理部門で、多数の研究が行なわれている。<sup>16)</sup>

1913年には、von Mises<sup>17)</sup>は、延性金属材料の降伏に関して、偏差応力の第2不変量( $J_2$ )が或る一定値に達すると降伏が始まるという数学的な表現を用いると便利であることを示唆した。1920年には、Haigh<sup>18)</sup>および Westergaard<sup>19)</sup>は破壊規準を主応力を軸とする直交直線応力空間内に表わすことを提案した。この時代には数多くの論文が発表されているが、破壊(failure)はぜい性破壊(brittle fracture)であるのか、初期降伏(initial yielding)であるのかのはっきりした区別が見られないようである。

これまでに発展して来た理論は全て現象的なものであるが、1921年および1924年になって、より微視的な立場に基礎を置く新しい破壊の概念がGriffith<sup>20)</sup>によって導入された。彼は材料の“理想的強度”と実験値との相違が著しい原因は、材料に潜在する微小欠陥にあると考えた。この欠陥周辺の集中応力は理想強度と同程度になると考えた。彼は、1921年の論文でエネルギー概念を導入することにより、材料の引張強度を欠陥の幅と表面エネルギー、弾性係数、Poisson比の関数として与えている。1924年の論文では、彼は潜在欠陥周辺の応力集中による引張応力が材料固有の強度に等しくなれば破壊に至ると考えて、二軸応力下での破壊規準を提案した。しかし、このGriffithの輝やかな研究は1940年代の終りになって、Orowan<sup>21)</sup>などにより破壊の物理が、また1950年代になってIrwin<sup>22)</sup>などによる破壊力学が誕生するまでその重要性は認められず、殆んど忘れられていたようである。この間には、1933年にNadai<sup>23)</sup>が八面体せん断応力一定説を提案し、また1939年にはWeibull<sup>24)</sup>が破壊の確率論を提唱している。前者の破壊説は、更にNovozhilov(1952年)<sup>25)</sup>によって一般化されて、せん断応力の2乗と平均の平方根(root mean square)一定規準となり、また後者はFisher<sup>26)</sup>により一般的な理論に発展された。

1950年代以後の岩質材料の破壊に関する理論的研究は、Griffith理論、少なくともその概念に根拠を求めたものであり、決定論的な立場からはMcClintock & Walsh(1962年)<sup>27)</sup>による修正Griffith理論、Brace(1960年)<sup>28)</sup>、Murrell(1963年)<sup>29)</sup>によるGriffith理論ならびに修正Griffith理論とMohrの2次式とCoulomb規準との対応性などがあげられる。確率論的な立場からの研究は未だWeibull以来大きな発展はないようである。

1960年代の終りになると岩質材料の破壊に関する実験技術も進歩し、資料も蓄積されるに従って、更にまた他の関連分野との交流が激しくなるにつれて、特に地震の発生機構などとの関連もあって多軸応力下でのより正確な実験が行なわれるようになった。これにつれて、岩質材料の破壊に関する考え方も変遷し、破壊開始、破壊伝播、終局破壊などの一連の破壊過程の概念が導入されるようになると、従来のGriffith理論あるいはWeibull理論による解釈では不十分な点が明らかとなってきた。現在は、一連の破壊過程をも総括するような新しい破壊理論あるいは新しい解釈が模索されている状況である。一方、実験的には、1960年代後半になって、三軸試験の重要性が認識されるようになり、更により一般的な応力条件の下での破壊機構ならびに破壊条件が研究されるようになって来た。また、岩質材料より成る系、特に岩盤の破壊に関しても組み合わせ応力の下での基礎的な模型実験が試みられるようになって来た。しかしながら、一般的な組み合わせ応力の下での岩質材料ならびにそれより成る系の破壊に関する研究はまだ日も浅く、得られている成果も多くは

ない。最近の岩質材料の破壊に関する研究の動向ならびに成果は、Paul の論文<sup>30)</sup> “Macroscopic Criteria for Flow and Fracture” および Freudenthal の論文<sup>31)</sup> “Statistical Approach to Brittle Fracture” に詳細に紹介されており、また特に岩石に関しては Jaeger & Cook の著書 “Fundamentals of Rock Mechanics, Methuen (1969)” に、コンクリートに関しては Brook & Newman 編 “The Structure of Concrete, Cement and Concrete Assoc., London (1968)” および, Newman & Newman の論文<sup>32)</sup> “Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete” に相当詳しく述べられているので参照されたい。

岩質材料は巨視的には等方・均質に見える場合でも、微視的に見れば一般には幾何学的に複雑な形状と分布とを示す同質あるいは異質物質の結合ないし混合物である。岩石の多くは多結晶質であり、その結晶粒界は力学的には弱点ないし弱面を形成する。極めて均質と考えられる泥岩とか凝灰岩にも層理面とか空隙などの力学的な不連続点ないし面が見られるのが普通である。また、岩盤を見れば、一般にはき裂、節理、層理などが発達し、力学的な性質はこれらの存在により不連続となる。モルタルとかコンクリートを考えても、セメント・ペーストと砂および細粗骨材の境界ならびに空、水隙は力学的性質の不連続面であり、弱点となる。他の岩質材料、例えばセラミックス、グラファイト、ガラス等にしてもほぼ同様のことが考えられる。岩質材料の力学特性、特に破壊特性は、構成物質それぞれの特性ならびに内部構造、特にこれらの弱点群に支配されて極めて複雑なものとなる。一般的に言えば、岩質材料およびそれより成る系の破壊過程は、岩質材料ならびに系内あるいは表面に存在する潜在欠陥、主として上述のような結晶粒界ならびに被含有物とマトリックスとの境界あるいは他質構造的な弱面周辺の応力集中ないしひずみ集中あるいはすべりによる破壊の開始に始まり、複雑な伝播過程を経て、材料ないし系全体の安定性を失う、いわゆる終局破壊、崩壊あるいは破断に至り終了する。しかしながら、この破壊の各段階はどのような条件の下で、どのような機構に支配されるかについては不明な部分が多い。

破壊の過程を解析的に追及しようとするれば、潜在欠陥ないし弱面を含む材料ないし連続体系の刻々の釣り合い問題の解を逐次的に見出して行くことが必要になる。岩盤などの弱面に沿うすべり安定計算などにはこの方法は有効であろうが、一般には、特に材料の破壊を対象とする場合には、潜在欠陥ないし弱面の形状も分布も未定である上に境界条件が破壊の進行につれて変化し、さらに局所的な材料特性が載荷履歴にも影響されると考えられるので、極めて高次の非線形混合移動境界値問題となる。この種の問題の解を見出すことは不可能に近い。従って、一般的にはこのようなアプローチは断念せざるを得ない。しかしながら、幸なことに、工学的に重要なのはこのような問題の厳密解を得ることではなく、むしろ対象とする材料ないし系が外荷重の下でどのような応答を示すかを系全体にわたって集積した形で巨視的に把握することである。対象とする材料ないし系が Drucker の意味で安定でさえあれば、境界値問題には一義的な解が存在することが保証されているので、材料ないし系内の応力ないしひずみ状態は境界に作用する荷重ないし変位の関数として表わされることになり、従って、材料ないし系内の局所的な応答や構造変化は、集積された形で巨視的な挙動に反映されることになる。本研究は、このような観点から、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊を、構造組織との対応を考慮しながら、特に巨視的な立場に立って議論したものである。

第Ⅰ部は岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊の機構ならびに破壊規準を理論的な面から検討したものである。

第1章では、ぜい性破壊の基本概念を明らかにし、破壊の一般特性についても検討した。まず、1.1では破壊に関する術語の定義を明らかにし、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊に関する基本概念を構造組織的な面をも考慮に入れて検討し、破壊の取り扱いに関する基本的な立場を述べた。さらに1.2では初期欠陥周辺のみ注目して、最も一般的な準微視的破壊開始規準を提案し、その特殊な例として、線形破壊力学より得られている基本破壊モードに対する固有応力強度を示した。1.3では、ぜい性破壊の一般的な破壊規準について巨視的な立場から議論し、破壊曲面として表わすことを提案し、最後に1.4ではその曲面の特性を Drucker の物質の安定性の解釈に基づいて検討した。

第2章では、等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の破壊規準を検討した。2.1では第2章での問題の概要を述べ、2.2では、今までに提案されている主な巨視的な破壊規準を簡単に総括し、その物理的な意味と問題点を考案した。ついで、2.3では Griffith の概念に立脚した準微視的モデルを基に準微視的な破壊規準を検討し、Griffith 理論を一般化した。さらに、修正 Griffith ならびにその変形理論についても言及し、一般 Griffith 理論をも含めてこれら破壊規準の物理的な意味をも考察した。これらの準微視的な破壊規準と巨視的な破壊規準の関係は、2.4で詳細に検討され、その対応性が明らかにされた。2.5では、これらの規準を3次元主応力空間内に表示するための手法ならびに基本概念が検討され、代表的な破壊規準が3次元に拡張されて3次元的な破壊規準曲面が求められた。2.6では、第1章で述べた逐次破壊の概念に基づいて、上述の破壊規準の逐次破壊への適用が検討された。最後に、2.7で第2章を要約して、等方・均質材料ならびにそれより成る等方・均質系の一般的な破壊規準が提案された。

第3章では、異方性岩質材料ならびに異方性系の破壊機構ならびに破壊規準について検討した。まず、3.1では異方性岩質材料ならびに異方性岩系問題の概要を述べ、3.2では異方性材料ならびに異方性系を理想化して、等方均質マトリックス内の弱面群モデル、潜在欠陥群モデルならびに直交異方性マトリックス内の潜在クラック群モデルに基づいて2次元異方性破壊規準を求めた。3.3では、これらを3次元主応力空間内の曲面に拡張した。3.4では、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の逐次破壊について、異方性破壊規準の適用性について検討した。最後に、3.5では、第3章を要約して、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の一般的な破壊規準を示した。

第Ⅱ部は、岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊機構および破壊規準を実験的に検討し、また、第Ⅰ部で提案した破壊の機構ならびに破壊規準との比較検討をも同時に意図したものである。

第1章では、基礎的なモデル実験に基づいて破壊開始ならびに破壊伝播の機構ならびに規準を検討した。まず、1.1では第1章の概要を示し、1.2では、一軸圧縮、二軸圧縮および引張応力場内の単一スリットあるいは単一インクルージョンからのき裂の発生と伝播過程について基礎実験を行ない、その結果と、一般 Griffith 理論、修正 Griffith 理論などとの比較検討を試みた。次いで、1.3では、多数のスリットおよびインクルージョンを規則的にあるいは不規則的に含む岩質供試体内のき裂発生とその成長の機構について検討した。き裂の発生と伝播の過程は、供試体全体としての挙動に密接な関係があるので、これらにも関連

して詳細な検討を加え、最後に 1.4 では、第 I 部で概念的に述べた破壊開始から終局破壊に至る一連の破壊の過程を実験結果と対応させ、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊過程の特性について検討した。

第 2 章では、第 1 章の結果を踏まえた上で、巨視的な立場に立って、等方・均質岩質材料の破壊規準について組み合わせ応力の下での基礎実験を行なって実際に種々の材料の破壊曲面を決定し、これを基に第 I 部で理論的に推定した破壊曲面の妥当性についても検討した。2.1 では本章の概要を述べ、2.2 では本実験に用いた試験装置の概要を述べた。2.3 では、セメント・ペースト、モルタル、コンクリート、人工軽量コンクリートおよび 2,3 の岩石供試体の作製法を、2.4 では試験条件および試験方法について略述した。2.5 では、試験結果を一括して比較し、破壊規準の特性を比較検討すると共に、グラフアイト、セラミックス、鋳鉄などに関する資料をも加えて、第 I 部で推測した規準との比較検討を行なった。

第 3 章では、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊規準を実験的に検討した。3.1 では問題を取り扱う立場について略述した。3.2 では結晶片岩供試体の成形、スリットあるいはインクルージョンを含む人工的な異方性モデル、単一ないし層状不連続面を有する異方性モデル供試体の作製方法を、3.3 では 2.4 に準じて試験方法を述べた。3.4 では、試験結果を総括し、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊機構ならびに破壊規準の特性を検討すると共に、第 I 部で提案した破壊規準の妥当性を検証した。

第 III 部は、岩質材料の代表的な試験法における供試体内の応力分布を検討したものである。材料試験に際しては、供試体内の応力分布は、負荷方法に伴う拘束の他に、材料それ自体の特性、すなわち、弾性係数、Poisson 比ならびに材料の構造組織などの影響を受けると考えられる。現在のところ、材料の構造組織を適確に評価する方法は見当たらないが、この影響は主要であるので何らかのアプローチが必要である。本研究では、平均化した連続的な近似ではあるが、カップル・ストレス理論を中心にその影響を検討した。

第 1 章では、供試体内の応力解析の必要性について述べると共に解析の基本的な考え方を述べた。

第 2 章では、解析の基礎とした線形カップル・ストレス理論ならびに線形マイクロポーラー理論の概要を述べ、従来の線形弾性学（古典弾性学）との関連に言及した。

第 3 章では、一軸圧縮試験による直方体供試体内の応力分布を Fourier 級数展開法ならびに有限要素法により求め、応力分布に及ぼす加圧盤による供試体端面拘束、Poisson 比ならびにカップル・ストレスの影響について検討した。

第 4 章では、割裂試験ならびにリング試験の際に生じる供試体内の応力を、Fourier-Bessel 展開法によって求め、載荷幅、Poisson 比ならびにカップル・ストレスの影響について議論し、第 5 章では、インデンテーション試験によって生じる短形供試体内の応力分布を Fourier 級数展開法によって求め、割裂試験と比較検討し、載荷幅、Poisson 比ならびにカップル・ストレスの影響を見た。

第 6 章では、異方性線形カップル・ストレス理論を誘導し、これを用いて一軸圧縮を受ける直交異方性供試体内の応力分布を差分法によって求め、異方性ならびに Poisson 比、カップル・ストレスの影響について検討した。最後に、以上の解析結果を総合して、岩質材料の試験法ならびに結果の解析についての一つの考え方を示した。

結言には、本研究で得られた成果を総括しておいた。

なお、附録では、本文中では詳細に述べ得なかった重要項目について補足した。A.1では、破壊に関するエネルギー概念を導入して、材料の破壊規準を導く方法について述べた。特に、3次元問題ならびに直交異方性材料に関するエネルギー規準にも言及した。A.2では、第Ⅲ部の供試体内応力分布に関連して、古典弾性学の立場に立って、エネルギー法の適用を述べた。実際の解析例では、変分問題に変換し、正規直交多項式を導入することにより Kantrovich の解法を適用して、一軸圧縮による直方体供試体内の応力分布を求めた。



第Ⅰ部 岩質材料ならびにそれより成る系の  
ぜい性破壊規準に関する理論的考察



# 第1章 岩質材料ならびにそれより成る系の破壊の基本特性

## 1.1 はじめに

固体材料の破壊に関する定義は不明確であり、破壊に関連した術語も著者によって種々の異なった意味に用いられているようである。この事実は破壊現象の複雑さ、多様性を反映しているとも見ることができようが、あいまいな術語の使用のために不必要な混乱を生じていることも否めない。本文では、このような混乱を避けるために用語は専ら次のような定義に従うことにする。<sup>1)</sup>

破損 ( failure ) : 材料ないしそれより成る系が或る挙動を示す状態から他の挙動を示す状態に変化する遷移過程であり、以下に定義する降伏、破壊、破断、終局破壊あるいは崩壊などを全て含んだものと定義する。

降伏 ( yield ) : 単純増加荷重の下では、材料ないしそれより成る系が弾性的性質の卓越した状態から、塑性の卓越した状態に移行する破損の過程である。さらに、一般的には荷重一除荷の1サイクル荷重の下で定義すれば、材料ないしそれより成る系内に貯えられるひずみエネルギーが零から正に移行する状態を示す破損の過程であり、この定義には初期降伏 ( initial yield ) および逐次降伏 ( subsequent yield ) が含まれている。

破壊 ( fracture ) : 材料あるいは、それより成る系内に新しい形状のき裂が発生するか、あるいは潜在初期欠陥に起因するき裂が発生、伝播する破損の過程であり、これには次のような種々の条件および段階が含まれる。

き裂開始 ( crack initiation ) : 1つ、あるいはそれ以上のき裂が、潜在欠陥とは独立に材料あるいはそれより成る系内に発生する破損の過程である。

破壊開始 ( fracture initiation ) : 材料あるいはそれより成る系内に、1つあるいはそれ以上の潜在欠陥からき裂が発生する破損の過程である。

破壊伝播 ( fracture propagation ) : 材料あるいはそれより成る系内に1つあるいはそれ以上の欠陥が成長する破損の過程である。したがって、この過程は破壊開始に続いて起るものであり、これには比較的容易に制御できる安定な破壊伝播過程と、制御が困難な不安定な破壊伝播過程とが含まれる。

破断 ( rupture ) : 対象とする材料ないしそれより成る系が2つ、あるいはそれ以上に分離する破損の過程である。

終局破壊 ( final fracture ) : 対象とする材料ないしそれより成る系が破断あるいは降伏などによってその特性を喪失するに至った状態であり、材料を対象とした場合には終局破壊 ( final fracture )、また系を対象とした場合には崩壊 ( collapse ) とも呼ばれる。

なお、ここでは術語としての意味を明確にするために破壊、破断および終局破壊を一応区別したが、これらは現象的には破壊の一形態と見ることがもできる。従って、以下では簡単のために、特に断らない限り破壊という術語をこれらを全て含めた意味に用いることにする。

また、破壊時の変形特性に着目して分類すれば、次のようなぜい性破壊と延性破壊に分けられる。

ぜい性破壊 ( brittle fracture ) : 塑性変形を全く、または殆んど伴わない破壊あるいは終局破壊。

延性破壊 ( ductile fracture ) : 相当量の塑性変形を伴う破壊あるいは終局破壊。

この両者を区別する定量的な基準はなく、実際には両者の遷移状態も存在するので、一線をもって画することはできない。通常は、対象とする材料あるいはそれより成る系との関連において、定性的に概括してぜい性破壊あるいは延性破壊と称している。また、ぜい性破壊とか延性破壊とかは、材料ないしそれより成る系の属性ではなく、それらの置かれた状態によって定まるものであり、鋼材においてもぜい性破壊は発生するし、岩質材料にも延性破壊は生じることが知られている。

一般に殆んど岩石、モルタル、コンクリート、ガラス、セラミックスなどは常温で、あまり高くない拘束圧 ( 封圧, confining pressure ) の下では、ぜい性破壊を生じることがよく知られている。このような性質を有する材料を岩質材料あるいは単に材料と呼ぶことにし、これらを構成要素とするような物体、例えば岩盤とかコンクリートないし、コンクリート構造物などは、以下では岩質材料より成る系と呼ぶことにしよう。ここで一般的に岩質材料と呼んでいる材料も、他の連続体と同様に、構造組織的に、あるいは微視的なスケールで見れば、さらに微小な要素 ( 物質 ) の結合ないし混合した1つの系と見做すことができる。従って、力学的に見れば、岩質材料と上述の岩質材料より成る系とは本質的な差異はない。以下では特に断らない限り、巨視的な連続体力学の立場に立って、両者を同時に議論することにする。

一般的に言えば、岩質材料およびそれより成る系の破壊は、その微視的な構造組織に極めて敏感である。破壊はその物質内あるいは表面に存在する潜在欠陥、例えば、異質含有物質とマトリックスとの境界とか、結晶粒界とか、あるいは潜在クラックなどの欠陥周辺の応力ないしひずみ集中の結果、これらの潜在欠陥からきれつが発生し、成長することによって生じることが知られている。しかしながら、如何なる条件の下できれつが発生し成長するか、また、それは如何なる機構に支配されるかなどに関しては、まだ十分明らかにはされていない。破壊の全過程を解析的に追及するには、与えられた境界条件の下で潜在欠陥を含む材料ないし、それより成る系の刻々の釣り合い問題の解を見出すことが最も基本となる。しかしながら、一般には潜在欠陥の形状もその分布も未定であり、また、それらは一般に載荷履歴にも大きく左右され、更に、き裂発生に伴って境界条件も変化するので、この問題は極めて複雑な非線形移動境界値問題となり、仮りに対象とする材料ないし、それより成る系が終局破壊まで完全に線形弾性を保ちうると仮定しても、この種の問題の厳密解を得ることは殆んど不可能に近い。従って、このようなアプローチは、特殊な問題の破壊開始条件を求める以外には断念せざるを得ないであろう。しかしながら幸いなことには、以下に見るように工学的には必ずしもこの厳密解を得なくても破壊に関して十分有用な規準を得ることができる。工学的に重要なのは、そのような厳密解を得ることではなくて、むしろ対象となる材料ないしそれより成る系が、如何なる条件の下で破壊開始に至り、更には終局破壊に至るかを全体として把握することである。

以下、1.2 では、初期欠陥周辺のみ注目して、最も一般的な準微視的破壊開始規準を述べ、次いで線形破壊力学に基づいて得られた簡単な破壊モードに対する固有応力強度の例を示した。1.3 では、ぜい性破壊の一般的な規準について、巨視的な立場から議論し、これを表わすものとして破壊曲面を提案し、そ

の意味について検討した。1.4 では、この曲面の基本特性を、Druckerの物質の安定性の解釈に基づいて検討した。

## 1.2 ぜい性破壊開始の条件

岩質材料ないしそれより成る系の破壊は、一般に構造組織に極めて敏感である。破壊は対象とする材料あるいはそれより成る系の最も苛酷な応力、あるいはひずみ状態にある欠陥周辺上の点に生じると考えられる。今、材料特性として、引張、面内せん断および面外せん断応力強度およびひずみ強度が存在すると仮定し、それぞれを  $N_\sigma, T_\sigma, S_\sigma$  および  $N_\epsilon, T_\epsilon, S_\epsilon$  と記すと、対象とする材料ないし、それより成る系の応力ないしひずみ状態に対して、最も一般的には

$$\Phi(N_\sigma, T_\sigma, S_\sigma; N_\epsilon, T_\epsilon, S_\epsilon) \leq 0 \quad (1.2.1)$$

を満たすような関数  $\Phi$  が存在すると考えられる。<sup>2)</sup>  $\Phi = 0$  という条件は、これに達した点は、丁度き裂が発生する極限状態にあることを示し、 $\Phi > 0$  となるとき裂が成長伝播することを示している。今材料ないしそれより成る系の応力-ひずみ関係が微視的にも一義的に定められると仮定すれば、破壊開始条件は応力強度のみの関数として表わされ

$$\Phi(N_\sigma, T_\sigma, S_\sigma) = 0 \quad (1.2.2)$$

で与えられる。これらの強度特性は、単独に破壊開始を支配するのか、或いは或る関数関係が成立すれば破壊発生に至るのかに関しては全く不明であるけれども、最も一般的には、この条件(1.2.1)或いは、(1.2.2)は  $N_\sigma, T_\sigma, \dots, S_\epsilon$  を軸とする6次元、あるいは3次元空間内の或る曲面を表わしていると見ることができる。従って、全ての点の応力ないしひずみ状態はこの曲面内あるいは少なくともこの曲面上に表わされることになる。破壊開始条件は、応力ないしひずみ状態が丁度この曲面に達するということを意味している。しかしながら、この曲面形がどのようなものであるかは、現段階では全く知られていない。この曲面形は、破壊の形態、すなわちぜい性破壊であるか、それとも延性破壊であるかによっても異なってくるであろう。

最も簡単な例として、例えば、単一偏平クラック(クラック長  $2a$ 、先端の曲率  $\rho$ )を含む無限2次元板にクラック長軸に直角に無限遠から一様な引張応力  $\sigma_0$  が働く場合を考えてみる。この場合のクラック先端の応力集中は、 $\sigma_{\max} \doteq 2(a/\rho)^{1/2} \sigma_0$  で与えられる。破壊開始が引張応力のみ支配されると考えると、式(1.2.2)は

$$N_\sigma = \text{const.} \quad (1.2.3)$$

となり、この  $\sigma_{\max}$  が  $N_\sigma$  に等しくなったときに、き裂が発生し、破壊開始に至ることになる。従って、逆に式(1.2.2)は、応力集中係数を用いて表わすこともできる。破壊開始が、その他の単一の強度特性のみに支配されると考えると、上と全く同様にして破壊開始条件は、

$$T_\sigma = \text{const.} \quad (1.2.4)$$

$$S_{\sigma} = \text{const.} \quad (1.2.5)$$

などとなる。

この材料固有の強度に関しては、Griffith のエネルギー規準、すなわち、初期欠陥を含む系の全ポテンシャル・エネルギー（或いは自由エネルギー）が丁度極値になったとき、換言すれば、き裂の成長に伴う自由表面エネルギー増分と、それによって解放される系のひずみエネルギーの増分とが等しくなったときに、欠陥からき裂が発生するという規準を適用して、次のように求められている（附録 A.1 参照）。

材料は完全線形弾性であると仮定すると、2次元偏平楕円クラック（長径  $2a$ ）に対する解析結果を用いて、 $N_{\sigma}$ ,  $T_{\sigma}$ ,  $S_{\sigma}$  は

$$\left. \begin{aligned} N_{\sigma} &= \sqrt{\frac{2\tau E}{\pi a(1-\nu^2)}} && \text{(平面ひずみ)} \\ T_{\sigma} &= \sqrt{\frac{2\tau E}{\pi a(1-\nu^2)}} && \text{(平面ひずみ)} \\ S_{\sigma} &= \sqrt{\frac{\tau E}{\pi a(1+\nu)}} && \text{(平面応力)} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.6)$$

で与えられる。<sup>3)</sup>ここに  $\tau$  は表面エネルギー密度を、 $E$  および  $\nu$  はそれぞれ弾性係数および Poisson 比を表わす。

また、3次元物体内の偏平楕円スリット（長径  $2a$ ）について考えると、貨へい状（penny-shaped）クラックの場合（半径  $a$ ）が最小強度を与えることになり、 $N_{\sigma}$ ,  $T_{\sigma}$  は次のように与えられる。<sup>4)</sup>

$$\left. \begin{aligned} N_{\sigma} &= \sqrt{\frac{\pi\tau E}{2a(1-\nu^2)}} \\ T_{\sigma} &= \sqrt{\frac{\pi\tau(2-\nu)E}{4a(1-\nu^2)}} \end{aligned} \right\} \quad (1.2.7)$$

これらの値は、2次元モデルによるものとは若干異なっており、引張応力強度に関しては、貨へい状クラック・モデルによる方が、2次元の場合の約 1.57 程大きく、また、せん断応力強度に関しても、貨へい状クラック・モデルによる方が、2次元モデルの場合の約 1.36 ~ 1.57 倍程大きくなる。

さらに、一般的な例として、Irwin の基本破壊モードについて考えてみよう。スリットは、数学的にはその面上の変位ベクトル成分の不連続性をもって定義することができる。3次元物体内には、3つの独立な変位ベクトル成分があり、従って、これに対応して Fig. 1.1.1 に示すような3つの基本破壊モードが考えられる。このモードに対応する Irwin の応力強度係数（stress-intensity factor）<sup>5)</sup>を、それぞれ  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  とすると、これらと  $N_{\sigma}$ ,  $T_{\sigma}$ ,  $S_{\sigma}$  との間には一義的な関係がある（後述、式(1.2.13) (1.2.14)）ので、式(1.2.1)に対応して

$$\Phi(k_1, k_2, k_3) \leq 0 \quad (1.2.8)$$

また破壊開始条件(1.2.2)に対応して

$$\Phi(k_1, k_2, k_3) = 0 \quad (1.2.9)$$

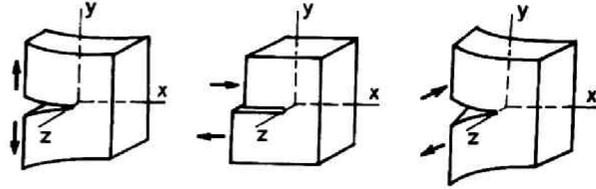


Fig. 1.1.1 Fundamental modes of fracture.

が得られる。

この条件(1.2.9)は、 $k_1, k_2, k_3$  を軸とする3次元空間内の曲面を

表わしていると見ることができる。この曲面は、一般には、スリットの主応力軸からの傾きの関数ともなるであろう。

次に、簡単な例について具体的な形を求めてみよう。破壊開始まで材料ないしそれより成る系は、等方線形弾性が保たれると仮定すると、ひずみエネルギー解放速度( strain energy release rate )  $\mathcal{G}$ <sup>6)</sup>は、せん断弾性係数  $G$ 、Poisson比  $\nu$ を用いて

$$\frac{\mathcal{G}}{\pi} = \frac{1-\nu}{2G} k_1^2 + \frac{1-\nu}{2G} k_2^2 + \frac{1}{2G} k_3^2 \quad (\text{平面ひずみ}) \quad (1.2.10)$$

で与えられる。さらに、破壊開始は材料ないしそれより成る系のひずみエネルギー解放速度  $\mathcal{G}$  が成る一定値、すなわち、極限ひずみエネルギー解放速度あるいは破壊靱性( fracture toughness )  $\mathcal{G}_c$  が材料ないしそれより成る系の表面エネルギー( surface energy )  $2\gamma$  になったときに生じると仮定すれば、破壊開始は応力履歴には無関係に  $\mathcal{G}_c = 2\gamma$  で生じることになり、式(1.2.10)は

$$\frac{1-\nu}{2G} k_{1c}^2 + \frac{1-\nu}{2G} k_{2c}^2 + \frac{1}{2G} k_{3c}^2 = \frac{2\gamma}{\pi} \quad (1.2.11)$$

で与えられることになる。これは  $k_{1c}, k_{2c}, k_{3c}$  空間内の2次曲面を表わしている。

さらに破壊は、引張応力が或る値になったときにのみ生じると仮定すると、式(1.2.6)を用いて、式(1.2.11)は簡単に

$$k_{1c}^2 + k_{2c}^2 + \frac{1}{1-\nu} k_{3c}^2 = a N_\sigma^2 \quad (1.2.12)$$

と書くことができる。なお、スリットに垂直に引張応力のみが働いている場合には、 $k_2 = k_3 = 0$  となり、式(1.2.12)はさらに簡単になって

$$k_{1c} = N_\sigma \sqrt{a} \quad (1.2.13)$$

となる。この式は材料定数  $N_\sigma$  と応力強度係数  $k_{1c}$  との比が  $\sqrt{a}$  に等しくなったときに破壊開始に至るという関係を示している。従って、応力強度係数を求めれば、破壊開始条件が求められることにもなる。

せん断破壊開始モードのみを考えると、 $k_2, k_3$  についても同様な関係

$$k_{2c} = T_{\sigma} \sqrt{a}, \quad k_{3c} = S_{\sigma} \sqrt{a} \quad (1.2.14)$$

が導ける。

式(1.2.2)或いは(1.2.9)は、潜在欠陥からき裂が発生する条件、すなわち、破壊開始の条件のみを与えるものであり、それ以後の欠陥の挙動とか、き裂の伝播に関しては全く関知しない。しかしながら与えられた形状の欠陥からの破壊開始に関しては、この式(1.2.2)或いは(1.2.9)を用いれば、欠陥を含む材料ないし系全体の応力およびひずみ場を解析することなく、欠陥近傍の条件、すなわち応力強度或いは応力強度係数の値を求めるだけで十分であるという長所を有している。応力強度係数  $k_1, k_2, k_3$  は欠陥の形状により、また分布した欠陥の相互干渉により異なった値を取るもので、種々の場合について数多くの研究が行なわれている。<sup>7)</sup>

以上のことをまとめると、潜在欠陥からの破壊開始条件は、線型弾性体と仮定すれば、応力強度係数、あるいは応力の特異性がない場合には、直応力ならびに面内および面外せん断応力集中係数の関数として表わされることが分る。さらに一般的に非弾性的な挙動を示す材料ないし要素から成る系では、応力強度係数あるいは応力集中係数の他に、さらにひずみないし変形の関数が考えられるのであろう。さらに拡張すれば、破壊開始条件は、潜在欠陥周辺の応力、ひずみ状態の他に、応力勾配あるいはカップル・ストレス、応力速度、ひずみ勾配、ひずみ速度、さらには温度をも含む関数となり、一般的な表現としては、

$$\Phi(\Sigma, E, T) = 0 \quad (1.2.15)$$

となるであろう。ここに  $\Sigma$  は応力、応力速度、応力勾配、カップル・ストレスなどを、 $E$  はひずみ、ひずみ速度、ひずみ勾配などを、 $T$  は温度を表わすものとする。

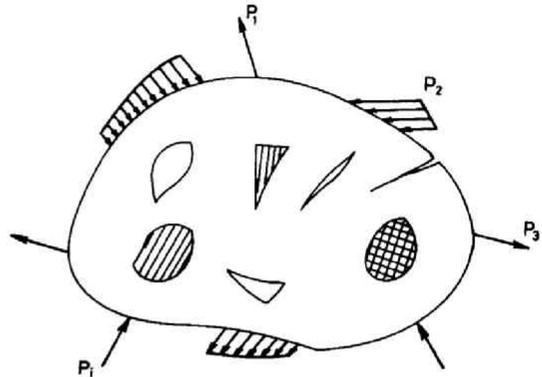
しかしながら、このような一般的な特性はもちろん、実際には材料の応力強度特性に関しても殆んど知られておらず、少数の金属ならびにコンクリートに対して、応力強度係数  $k_1$  のみが求められている程度である。<sup>8)</sup> 概念的に一般化することは容易であるが、実際の物理現象として把握することは困難である。以下では、簡単なもの以外にはこの方面からのアプローチは断念する。

### 1.3 ぜい性破壊の破壊曲面

前節で議論したところにより、破壊開始条件は、対象とする材料ないしそれより成る系内に含まれる潜在欠陥周辺の応力ないしひずみ状態だけに支配され、その条件式は材料ないしそれより成る系内の少なくとも一点が式(1.2.2)、(1.2.9)あるいは(1.2.15)を満足しなければならないことを知った。したがって、この条件を適用するためには、少なくとも対象とする材料ないしそれより成る系内の潜在欠陥周辺の応力ないしひずみ状態を、破壊に先だつて解析しなければならないことになる。しかしながら、一般には潜在欠陥の形状も分布も未定であり、応力場ないしひずみ場を解析することは殆んど不可能に近い。従って、このような条件式をそのまま適用することは困難である。幸いなことに、一般的に対象とする材料ないし系の要素がDruckerの意味で安定でさえあれば(後述 1.4)、対象とする材料ないしそれより成る系の境界値問題には一義的な解が存在することが保証されているので、潜在欠陥周辺の応力ないしひず

み状態は、この材料ないし、それより成る系に作用する外荷重の関数として表わすことができる。この場合、応力ないしひずみ場は、非線形移動境界値問題の解として与えられるべきものであり、一般には載荷履歴にも依存することになるであろう。従って、破壊条件は一般には外荷重およびその履歴の関数として表わされることになる。

さて、Fig. 1.1.2 のように、或る材料ないしそれより成る系に荷重群  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) が作用しているとしよう。この材料ないし系には、潜在欠陥群が含まれているとする。荷重群  $P_i$  が或る載荷径路に沿って零から次第に増加すると考えると、荷重増加につれて潜在欠陥周辺の応力、ひずみ集中は次第に増大し、ついには少なくとも或る一つの欠陥周辺上の一点で破壊開始の条件式 (1.2.2), (1.2.9) あるいは (1.2.15) を満すことになり、き裂が発生する。この時点での外荷重群の状態は  $P_i$  で与えられるので、外荷重群に基づく破壊開始条件は



$$F_I ( P_1, P_2, \dots P_n ) = 0 \quad (1.3.1)$$

与えられることになる。この条件は、一般には応力、ひずみだけでなく、さらに一般化した応力勾配、ひずみ速度などをも陰に含んだものと解釈される。この条件は、一般には潜在欠陥の形状と分布のみならず、載荷径路にも大きく支配されることになろう。

Fig. 1.1.2 A body containing systems of initial cracks and flaws subjected to a system of loadings.

さて、ここで  $P_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) を軸とする  $n$ 次元空間を考えると、条件 (1.3.1) はこの空間内の一つの曲面を表わしていると見ることが出来る。従って、これを破壊開始曲面と呼ぶことにしよう。 $P_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) で対象とする材料ないし、それより成る系の応力およびひずみ場を零とすれば、座標原点はこの曲面内に含まれることになる。このように選ぶと、この曲面の内側にある全ての点 (荷重状態) およびこの曲面に含まれる全ての載荷径路に関しては、たとえどのような載荷径路によろうとも、潜在欠陥群からき裂は発生しない。また、この曲面を含みこの曲面より外側の領域 (荷重状態) に対しては、対象とする材料およびそれより成る系内に少なくとも一つはき裂が発生、あるいは成長していることになる。

さらに外荷重が増加するか、あるいは載荷径路が変更されれば、応力ないしひずみ場の再配分が起り、逐次的に次第に多数の潜在欠陥周辺が極限状態に達してき裂を生じ、また発生したき裂の一部も同様な状態に達してき裂が成長するか、あるいは分岐して、次第に局所的な不安定領域が増加する。このような段階は破壊伝播、あるいは局所破壊と呼ばれている。この状態は上の  $n$ 次元荷重空間の中で考えてみると、

荷重群が或る荷重載荷径路に沿って、破壊開始曲面の外側に増加したことになり、各段階に応じて逐次的な釣り合いクラックないし欠陥が存在し、準静的な問題では、 $n$ 次元空間内の一点が逐次的に定まることになる。この状態から、微小量だけ異なった状態に対しては、安定な材料ないしそれより成る系では、一般に微小距離だけ離れた一点が対応することになる。従って、全体としては、各荷重段階に対応した逐次破壊曲面が存在することが考えられる。しかしながら、一般には、破壊開始曲面の外側の領域では、き裂の発生、および成長は、潜在欠陥あるいはき裂の形状と分布および荷重群の大きさならびに載荷径路に大きく支配されるので、逐次破壊(局所破壊)曲面を荷重空間内に一義的に定めることは一般に困難である。

ただ、き裂の成長の方向が予め定められているような場合、例えば引張破壊とか、異質弾性体がはり合わされていて、そのはり合わせた面に沿ってき裂が成長するような場合には、応力状態やき裂の形状は載荷径路に無関係に、その時刻の荷重状態にのみ依存するので、逐次破壊曲面を求めることは比較的容易である。

さて、或る載荷径路に沿ってさらに荷重が増加すると、き裂の発生は増加し、発生したき裂は成長、伝播して、局所的な不安定領域が次第に増加し、遂には材料ないし系全体としての安定性を喪失するに至る。これは終局破壊あるいは崩壊と呼ばれる。終局破壊強度は、対象とした材料ないしそれより成る系が或る与えられた荷重群に対して示す最大耐荷力である。終局破壊強度は、載荷径路に大きく依存するので、載荷径路を変更すれば、さらに異なった耐荷力を示すことになる。終局破壊状態での荷重群の間には、一つの関数関係

$$F_F ( P_1, P_2, \dots, P_n ) = 0 \quad (1.3.2)$$

が存在すると考えられる。これは  $P_i$  を座標軸とする  $n$  次元荷重空間内の一曲面を表わしており、終局破壊曲面と呼ばれる。この曲面の特徴はこの曲面内にさえあれば、いかなる荷重状態あるいは載荷径路に対しても準静的な釣り合い状態が必ず見出され、この曲面外の状態は決して実現され得ないことである。この終局破壊曲面は、対象とする材料ないしそれより成る系全体としての安全荷重域を定めるもので、工学的に最も重要な強度特性である。この曲面は、系全体としての極限安定状態に対応する曲面と解することもできる。一般には、この曲面も載荷径路に依存するので荷重空間内に固定して表わすことはできないであろう。以上の破壊曲面を概念的に図示すれば Fig. 1.1.3 のようになる。

さて、今までの議論の特別な場合として、工学的に重要な例、すなわち、対象とする材料ないしそれより成る

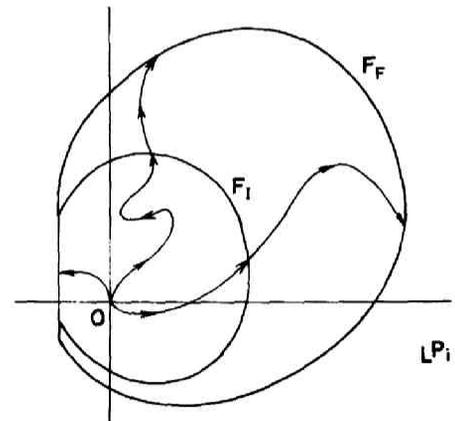


Fig. 1.1.3 Fracture surfaces in load space.

系内に巨視的に見て一様応力場 ( macroscopically homogeneous state of stress ) を生じるような短時間準静荷重群を考えてみよう。この場合には、荷重群の代りに巨視的な応力成分ないしひずみ成分で破壊曲面を表わすことが可能になる。巨視的な応力ないしひずみは潜在欠陥周辺の応力ないしひずみとはもちろん異っており、応力勾配、ひずみ勾配、ひずみ速度など二次的なものの影響も含んだものと解釈することができる。したがって、巨視的な応力成分  $\sigma_{ij}$  ないしひずみ成分  $\varepsilon_{ij}$  を用いて表現した破壊曲面

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}; \theta) = 0 \quad (1.3.3)$$

は極めて一般的である。ここに  $\theta$  は対象とする材料ないしそれより成る系の方向特性を示すパラメーター ( material descriptor ) である。

さらに、応力とひずみの関係が一義的に定められれば、破壊曲面は

$$f(\sigma_{ij}; \theta) = 0 \quad (1.3.4)$$

或いは

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3; \theta) = 0 \quad (1.3.5)$$

という形で表わされることになる。ここに  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は3主応力成分を表わすものとする。破壊開始曲面、逐次破壊曲面、終局破壊曲面は荷重群による場合と同様に定義される。

今、対象とする材料ないしそれより成る系の破壊が載荷径路に影響されないと仮定できれば、破壊曲面は応力空間内に固定された曲面となる。換言すれば、破壊を生じる全ての応力群は一つの曲面を形成することである。この場合にも、もちろん一般には、破壊開始に対応する応力群と終局破壊に対応する応力群とは異なった値を示すので、両者に対してそれぞれ異なった曲面が対応することになる。破壊開始曲面は終局破壊曲面内に含まれるかあるいは接しており、逐次破壊曲面は両者の間に無数に存在することになる。

対象とする材料ないしそれより成る系が等方・均質であれば、破壊強度は、方向特性パラメーター  $\theta$  には無関係となり破壊曲面は、式 (1.3.3) ~ (1.3.5) に対応して、それぞれ

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}) = 0 \quad (1.3.6)$$

$$f(\sigma_{ij}) = 0 \quad (1.3.7)$$

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \quad (1.3.8)$$

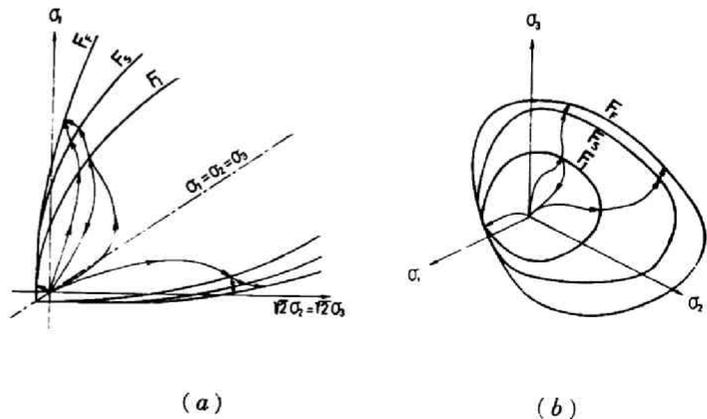


Fig. 1.1.4 Fracture surfaces in stress space.

となる。主応力空間内に表わした破壊曲面を概念的に Fig. 1.1.4 に示す。

#### 1.4 ぜい性破壊曲面の特性

前節の議論から、岩質材料あるいはそれより成る系の破壊条件は、その材料ないし系に作用する荷重群より成る荷重空間内の曲面、あるいは主応力空間内の曲面で表わし得ることを知った。それでは、これらの曲面は一体どのような形状をしているのであろうか。この答えは個々の材料ないし系について実験的にしか得られないと考えるかも知れないけれども、実際には簡単な荷重条件の下でも破壊曲面を求めるには相当量の実験が必要であり、一般的な形状を議論するには、更に膨大な資料を必要とするので、実験的なアプローチだけではあまり有効ではない。従って、実験に先立って破壊曲面の一般的特性について予め基礎知識を持つておくことは、実験計画をたてる上でも、得られた結果を解釈する上でも極めて重要である。

ここで対象としている岩質材料およびそれより成る系はDruckerの意味で安定<sup>9)</sup>であると仮定しよう。すなわち、集中荷重  $P_i^0$ 、表面力  $T_i^0$ 、物体力  $F_i^0$  の下で釣り合い状態にある一つの系、Fig.

1.1.5 (a)に、微小な外部攪乱が径路  $\delta P_i$ 、 $\delta T_i$ 、 $\delta F_i$  に沿って作用したとき、この外部攪乱が微小変形  $\delta u_i$  に対して成す仕事が正の場合を“局所安定”(stable in the small)、この仕事が負の場合を“局所不安定”(unstable in the small)と定義する。

さらに、有限な大きさの外部攪乱に対する系の安定性として“大域安定性”(stability in the large)を定義する。これを式で表わせば、釣り合い状態にある系(Fig. 1.1.5 (a))に無限少の外部攪乱  $\delta P_i$ 、 $\delta T_i$ 、 $\delta F_i$  を作用させる(Fig. 1.1.5 (b))と、それによって生じる無限少の変位  $\delta u_i$  との間に

$$\delta P_i \delta u_i + \int_A \delta T_i \delta u_i dA + \int_V \delta F_i \delta u_i dV > 0 \quad (1.4.1)$$

が成立すれば“局所的安定”であり、 $\delta P_i$ 、 $\delta T_i$ 、 $\delta F_i$  がそれぞれ零から  $\Delta P_i$ 、 $\Delta T_i$ 、 $\Delta F_i$  まで或る載荷径路に沿って増加すると、これに対応して変位の増分も零から  $\Delta u_i$  まで変化することになり、この有限な載荷径路にわたる積分が

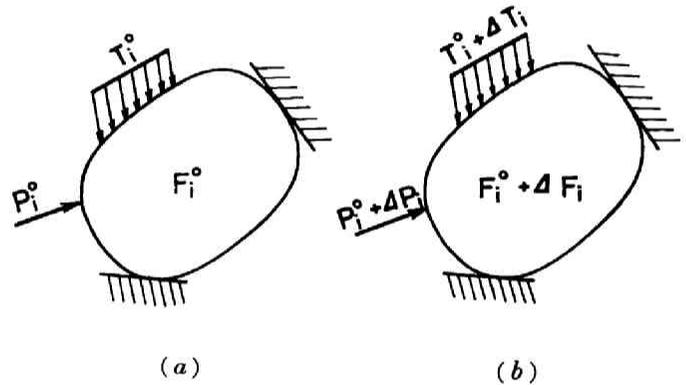


Fig. 1.1.5 Existing system (a) and existing system plus external agency (b).

$$\int_0^{\Delta u_i} \delta P_i \delta u_i + \int_A \int_0^{\Delta u_i} \delta T_i \delta u_i dA + \int_V \int_0^{\Delta u_i} \delta F_i \delta u_i dV > 0 \quad (1.4.2)$$

ならば“大域的安定”(stable in the large)である。なお、上式における添字に関しては総和規約を適用するものとする。

外部攪乱が回復可能な載荷径路、或いは非可逆な径路を経て1つのサイクルを描く場合、すなわち外部攪乱を零から徐々に増加した後、再び零に戻した場合には、局所安定の条件は

$$\delta P_i \delta u_i^P + \int_A \delta T_i \delta u_i^P dA + \int_V \delta F_i \delta u_i^P dV \geq 0 \quad (1.4.3)$$

となり、大域安定の条件は

$$\int_0^{\Delta u_i^P} \delta P_i \delta u_i^P + \int_A \int_0^{\Delta u_i^P} \delta T_i \delta u_i^P dA + \int_V \int_0^{\Delta u_i^P} \delta F_i \delta u_i^P dV \geq 0 \quad (1.4.4)$$

と表わせる。ここに上添字  $p$  は永久変位(permanent displacement)を意味している。

式(1.4.1)～(1.4.4)は外部攪乱による安定性の表現であるが、一様応力状態(homogeneous state of stress)では、この関係はそれぞれ

$$\delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} > 0 \quad (1.4.5)$$

$$\int_0^{\Delta \varepsilon_{ij}} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} > 0 \quad (1.4.6)$$

$$\delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (1.4.7)$$

$$\int_0^{\Delta \varepsilon_{ij}^P} \delta \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^P \geq 0 \quad (1.4.8)$$

となる。材料が安定か否かは、式(1.4.5)～(1.4.8)を満足するか否かということである。さらに、要素について対応した定義を行なえば

$$\delta S_i \delta e_i > 0 \quad (1.4.9)$$

$$\int_0^{\Delta e_i} \delta S_i \delta e_i > 0 \quad (1.4.10)$$

$$\delta S_i \delta e_i^P \geq 0 \quad (1.4.11)$$

$$\int_0^{\Delta e_i^P} \delta S_i \delta e_i^P \geq 0 \quad (1.4.12)$$

となる。ここに  $\delta S_i$  は要素に作用する外部攪乱、 $\delta e_i$  は対応する変位である。要素が安定か否かは、式(1.4.9)～(1.4.12)を満足するか否かということである。

以上の材料ないし要素の安定性の概念を図示すると Fig. 1.1.6 のようになる。また、系全体としての

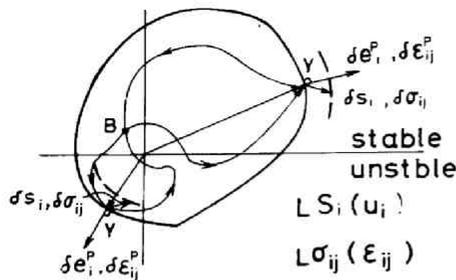


Fig. 1.1.6 Stability and instability in stress space.

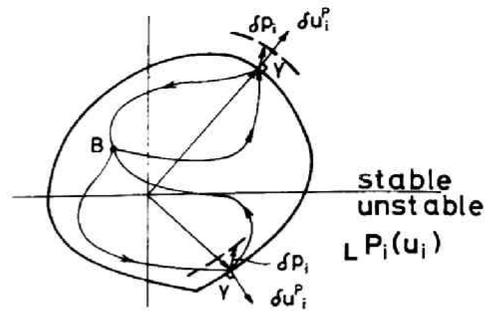


Fig. 1.1.7 Overall stability and instability of a system or structure.

安定性は Fig. 1.1.7 のようになる。図の上半分には安定な場合を下半分には不安定な場合を示した。

$P_i$  としては、集中荷重  $P_i$ 、表面力  $T_i$ 、物体力  $F_i$  をも含むものとする。

既に仮定しているように、岩質材料ないしその系が安定であれば、式 (1.4.4)、(1.4.8) は破壊曲面内の全ての点に対して成立する。従って、 $(\sigma_{ij}^Y - \sigma_{ij}^B) \delta \epsilon_{ij}^P \geq 0$  あるいは  $(P_i^Y - P_i^B) \delta U_i^P \geq 0$  を満すことになり、破壊曲面は凸でなければならないことになる。また、式 (1.4.3)、(1.4.7) からは、永久ひずみ増分  $\delta \epsilon_{ij}^P$ 、あるいは永久変位増分  $\delta u_i^P$  は破壊曲面に垂直であることが知られる。

さらに、連続した変位場に対しては、式 (1.4.4) の左辺が式 (1.4.8) の左辺と等しいので（これは仮想仕事の原理から容易に求められる）、材料が安定であれば、式 (1.4.8) が成立し、式 (1.4.4) も成立することになる。すなわち、材料が安定であれば、それより成る系も安定である。ただし、ここでは幾何学的な不安定性は考慮されていない。

今、式 (1.4.8) の経路として、破壊曲面内の点 B から出発して点 Y に達し、さらに或る経路を経て点 B に帰る 1 サイクルを考えると、式 (1.4.8) は

$$\int_B^{B'} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^B) \delta \epsilon_{ij}^e + \int_B^{B'} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^B) d\epsilon_{ij}^P$$

と書ける。ここに上添字 e は弾性的という意味である。一般に応力は点 B に帰ってもひずみは点 B には帰らず、 $B'$  と B とは一致しない。今、弾性回復  $\epsilon_{ij}^e$  が完全に行なわれたとすると、Y 点近傍以外では積分は零となって、上式は近似的に

$$(\sigma_{ij}^Y - \sigma_{ij}^B) \delta \epsilon_{ij}^P + \frac{1}{2} \delta \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij}^P$$

となる。この第1項は、点  $B$  が破壊曲面内或いは上にあれば、材料ないし要素が不安定であっても常に正、或いは非負である。第2項は、安定な材料ないし要素に対しては非負である。従って、材料ないし要素が安定であれば、系全体としても安定であり、その破壊曲面は凸で、永久変位増分はこの破壊曲面に垂直となる。

不安定な材料ないし要素に対しては、第2項は負となるが、一般にはこの値は第1項に比して十分小さいので、全体としては非負となり、第1オーダーとして、破壊曲面は凸となる。

以上のことを総合すると、材料の破壊曲面は、その材料が安定であればもちろん、不安定であっても一度には凸であることが保証される。また、材料ないし要素より成る系に対しては、材料ないし要素が安定であれば系全体は安定である。また、仮りに、不安定な材料ないし要素が含まれていたとしても、系全体の安定性としては、全体を集積した形で表わされるので、一般には安定である。従って、材料ないし要素が安定であればもちろん、かりに不安定材料ないし要素が含まれていたとしても、系全体としての破壊曲面は一般には凸となる。<sup>10)</sup>

永久ひずみ増分および永久変形増分は、対応する破壊曲面に垂直である。ただし、摩擦が卓越した材料ないし系、例えば砂などに対しては、一般にこの垂直性の条件 ( nonmality condition ) は成立しないといわれている。しかし、これは破壊曲面の隅角部として考えると、永久ひずみ増分ないし永久変位増分の条件つき任意性のうちに含まれていると解釈されている。ここで対象としているような岩質材料ないしそれより成る系では、弾性的ないし塑性的挙動が卓越しているので、垂直性の条件は一応成立していると考えてよいであろう。

なお、今までの議論では、材料ないしそれより成る系の材料特性は外部攪乱によっては変化しないと考えてきたけれども、実際の岩盤試験に見られるように、永久ひずみないし永久変形が増加するにつれて弾性係数が著しく変化するような材料ないし弾性応答が著しく変化するような系に対しては、破壊曲面は局部的に凹になる可能性はある。<sup>11)</sup> しかしながら、一般にこの凹面の曲率は弾性係数の逆数に比例するので、弾性応答が著しく変化したとしても、はっきりと認められる程の凹面は生じないであろう。従って、一般に材料ないしそれより成る系の破壊曲面は荷重空間ないし応力空間内の凸曲面で表わされると考えて十分である。

## 第2章 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の破壊規準

### 2.1 はじめに

一般に岩質材料あるいはそれより成る系は、一見して等方・均質と見える場合にも、微視的に見れば幾何学的にも複雑な形状と分布を示し、かつ力学的にも特性の異なった異質物質の結合体ないし混合体である場合が多い。通常工学的に等方・均質という物体を考える場合には、対象とする材料ないしそれより成る系が、求めようとする巨視的、物体全体としての力学挙動に対して、方向特性を示さず、また、局所的な差異をも示さないという意味であり、換言すれば物体のどの部分も同様な巨視的応答を示すという意味である。従って、均質という表現は常に対象とする物体ないし、系の寸法との対比に於てのみ意味を有することになる。なお、等方性と均質性とは全く別のものであり、均質と見做し得るものでも異方性を示すものも多い。また、工学的なスケールで等方と見做し得るものでも非均質なものも多い。しかしながら、等方性・均質性を定量的に表示することは極めて困難である。以下では、対象とする材料ないしそれより成る系の構造組織は対象とする寸法に比して十分小さく、巨視的な等方性・均質性は十分保証されていると仮定する。

本章では、巨視的な破壊理論と同時に準微視的 ( submacro ) ないし微小マクロ ( mini-macro ) 的なモデルに立脚した理論についても論議する。後者の場合にも等方・均質連続体の仮定をそのまま縮小 ( scale down ) して適用できるものと仮定する。この意味からは微視的という表現は当らず、むしろ微小マクロ的という方が適切であろう。

さて、本章で考察する破壊規準は大別すると、巨視的な等方・均質の仮定の下に導かれた巨視的・現象的なものと、微小マクロ的な等方・均質連続体の仮定の下に導かれたいわゆる準微視的なものとに分けられる。通常工学的に要求される破壊規準は対象とする材料ないし系全体としての破壊、すなわち終局破壊であり、従って、巨視的・現象的な破壊規準ということになる。しかしながら、一度準微視的な立場に立って破壊現象の物理的意味を検討し、準微視的破壊説との関連を検討することは、破壊の機構を考察し、破壊規準をより良く理解するためにも不可欠であろう。以下の諸節では岩質材料ないしそれより成る系が静的な短時間の一様応力を受ける場合について、巨視的ならびに準微視的破壊規準の物理的な意味を考察し、両者の対応を検討する。さらに、これらのうち代表的なものを3次元応力空間に拡張し、これを基に等方・均質岩質材料ならびに系のぜい性破壊の一般的な破壊規準を提案する。これらの規準が、実在の岩質材料ないしそれより成る系の破壊をよく説明するか否かは、個々の材料ないし系について実験的に検証しなければならない。なお、用語としては、一般的な意味では破壊規準という表現を用い、特に3次元なことを強調する場合には破壊曲面を、2次元的な表現には破壊曲線という用語を用いることにする。

### 2.2 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の巨視的破壊規準

巨視的な破壊規準は、破壊時のその瞬間に作用している外力群によって表わそうとしたものであり、最も一般的には式(1.3.1)および(1.3.2)の形に表わされることになる。一般に破壊は載荷径路にも依

存するので破壊規準を一義的に表わすことは困難であるが、比例载荷あるいはそれに近い場合には、破壊開始および終局破壊曲面は荷重空間内にほぼ固定されたものになると考えられる。対象とする材料ないし系が一樣応力ないしひずみ状態で終局破壊にまで至ると考えると、この場合の破壊曲面は3主応力ないし主ひずみ空間内の凸曲面として表示することができ、比例载荷の場合にはこの曲面は、主応力ないし主ひずみ空間にほぼ固定されたものになるであろう。この場合の最も一般的な破壊曲面は既に述べたところにより、式(1.3.6)、(1.3.7)あるいは(1.3.8)で与えられる。以下では、特に断らない限り一様応力ないしひずみ場を生じるような短時間比例载荷の下での材料ないし系の破壊規準を考察することにする。なお、以下の破壊規準は一般には終局破壊のみを対象としていると解釈されているが、ここでは拡張して破壊開始から終局破壊までを含んだ意味に取り扱うことにする。また、簡単のために破壊という用語で破壊開始、破壊伝播、終局破壊をも代表させることにする。

### 2.2.1 最大応力破壊説(規準)<sup>1)</sup>

主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  のうち最大のものが或る一定値  $\sigma_0$  に達したときに、他の主応力の大きさは無関係に破壊が生じるとする仮説であり、式で表わせば

$$(\sigma_1^2 - \sigma_0^2)(\sigma_2^2 - \sigma_0^2)(\sigma_3^2 - \sigma_0^2) = 0 \quad (2.2.1)$$

となる。これを修正すると、引張強度  $\sigma_t$  と圧縮強度  $\sigma_c$  の異なる場合には、引張破壊は

$$(\sigma_1 - \sigma_t)(\sigma_2 - \sigma_t)(\sigma_3 - \sigma_t) = 0 \quad (2.2.2)$$

圧縮破壊は

$$(\sigma_1 - \sigma_c)(\sigma_2 - \sigma_c)(\sigma_3 - \sigma_c) = 0 \quad (2.2.3)$$

で生じることになる。圧縮-引張域では破壊は  $|\sigma_t|, |\sigma_c|$  の小さい方に支配されるので、一般には引張破壊が生じると考えられる。

### 2.2.2 最大ひずみ破壊説<sup>2)</sup>

主ひずみ値  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$  のうち最大のものが或る値  $\epsilon_0$  に達すると、他の主ひずみの値には無関係に破壊が生じるとする仮説であり、次のように表わせる。

$$(\epsilon_1^2 - \epsilon_0^2)(\epsilon_2^2 - \epsilon_0^2)(\epsilon_3^2 - \epsilon_0^2) = 0 \quad (2.2.4)$$

材料ないしそれより成る系が終局破壊まで弾性的であると仮定できれば、上式は応力表示ができて

$$\begin{aligned} & [\{\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\}^2 - \sigma_0^2] [\{\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)\}^2 - \sigma_0^2] [\{\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\}^2 - \sigma_0^2] \\ & = 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

となる。ここに  $\nu$  は Poisson 比を  $\sigma_0$  は  $\epsilon_0$  に対応する応力値を表わす。なお、式(2.2.4)は引張ひず

み強度  $\varepsilon_t$  と圧縮ひずみ強度  $\varepsilon_c$  の異なる場合には、引張ひずみ域に対して

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_t)(\varepsilon_2 - \varepsilon_t)(\varepsilon_3 - \varepsilon_t) = 0 \quad (2.2.5)$$

圧縮ひずみ域に対して

$$(\varepsilon_1 - \varepsilon_c)(\varepsilon_2 - \varepsilon_c)(\varepsilon_3 - \varepsilon_c) = 0 \quad (2.2.6)$$

となる。引張-圧縮ひずみ域では、一般には式(2.2.5)に支配されると考えられる。材料ないし系が破壊まで線形弾性的であれば、式(2.2.5)、(2.2.6)は容易に応力表示することができる。

### 2.2.3 最大せん断応力破壊説<sup>3)</sup>

最大せん断応力がある一定値  $\sigma_0$  になれば破壊が生じるとした仮説であり、普通Trescaの条件式と呼ばれている。式で表わせば、

$$\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \sigma_0^2\} \{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \sigma_0^2\} \{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \sigma_0^2\} = 0 \quad (2.2.7)$$

となる。これを拡張して静水圧の影響を考慮すれば、

$$\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 - \{h(I_1)\}^2\} \{(\sigma_2 - \sigma_3)^2 - \{h(I_1)\}^2\} \{(\sigma_3 - \sigma_1)^2 - \{h(I_1)\}^2\} = 0 \quad (2.2.8)$$

を得る。ここに  $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$  である。

### 2.2.4 八面体せん断応力破壊説<sup>4)</sup>

破壊は、八面体せん断応力  $\tau_{oct}$  と八面体直応力  $\sigma_{oct}$  が或る関係を満たすときに生じるとする仮説であり、一般的には

$$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct}) \quad (2.2.9)$$

と表わせる。ここに

$$\left. \begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{I_1^2 - 3I_2} \\ \sigma_{oct} &= \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}I_1 \\ I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \end{aligned} \right\} (2.2.10)$$

である。ここで  $f(\sigma_{oct}) = \sigma_0 = \text{const.}$  とすると

$$\tau_{oct} = \sigma_0 \quad (2.2.11)$$

という von Mises-Huber-Hencky の式が得られる。

八面体せん断応力仮説および拡張した Tresca の仮説は、破壊がせん断すべりによって生じることを示唆している。式(2.2.7)、(2.2.11)は金属材料の降伏条件をよく表わすといわれている。しかしながら、岩質材料ないしそれより成る系は、常温で低拘束圧の下では、引張強度は圧縮強度に比して、一般に小さく、従ってせん断応力による破壊機構は考えられないので、これらの条件を岩質材料ないしそれより成る系に直ちに適用することはできないであろう。

### 2.2.5 Coulomb の破壊規準<sup>5)</sup>

直応力  $\sigma$  とせん断応力  $\tau$  との間に次のような関係が成立するときに破壊が生じるとしたものである。圧縮応力を正とすると、

$$\text{Max. } (|\tau| - \mu\sigma) = \text{const.} \quad (2.2.12)$$

あるいは

$$|\tau| = \mu\sigma + C \quad (2.2.13)$$

と表わせる。ここに  $\mu$ ,  $C$  は材料定数である。式(2.2.13)の関係を最大、最小主応力  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_3$ ) を用いて書き改めれば、

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1 + \mu^2} + \mu}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu} \sigma_3 + \frac{2C}{\sqrt{1 + \mu^2} - \mu} \quad (2.2.14)$$

となる。

### 2.2.6 Mohr の破壊規準(2次式)<sup>6)</sup>

破壊時の Mohr の応力円群の包絡線が、破壊規準を表わすと解釈したもので、一般的には

$$f(|\tau|, \sigma) = \text{const.} \quad (2.2.15)$$

と表わせる。特に、 $|\tau|$  と  $\sigma$  とが線形関係にある場合には Coulomb の規準となる。Mohr の 2 次式は次のように表わせる。

$$\tau^2 = \lambda\sigma + D \quad (2.2.16)$$

ここに  $\lambda$ ,  $D$  は材料定数である。これを最大、最小主応力  $\sigma_1, \sigma_3$  で表わせば

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\lambda(\sigma_1 + \sigma_3) + 4D - \lambda^2 \quad (2.2.17)$$

となる。主応力  $(\sigma_1, \sigma_3)$  面上に Coulomb 規準および Mohr の 2 次式を示すと Fig. 1.2.1 を得る。

Coulomb の規準(2.2.13)あるいは(2.2.14)および Mohr の 2 次式(2.2.16)あるいは(2.2.17)は、土質材料ならびに岩質材料ないしそれより成る系について広く適用され、よく終局破壊条件を表わす

ことが認められている。これらの規準は後述する  
 ように、Griffith および修正 Griffith 理論と  
 等価であることが認められる。従って、破壊開始  
 の規準としても十分有用であると思われる。なお、  
 Griffith および Griffith 理論は潜在欠陥周辺  
 の集中応力に最大引張応力一定破壊説を適用した  
 ものであることを考えると、式(2.2.13) およ  
 び(2.2.16) の形からのみ判断して、これら  
 は、せん断応力と直応力との間に或る関係が満さ  
 れるとき、せん断応力により破壊が生じることを  
 示していると解釈する従来の説は妥当ではない。  
 この意味からは、破壊時における最大・最小主  
 応力の関係で表わした式(2.2.14) および  
 (2.2.17) を用いるべきかも知れない。なお  
 ここに用いた材料定数  $\mu$ ,  $C$ ,  $\lambda$ ,  $D$  などは、  
 実験的に求められる定数であり、その取り方によ  
 って、Coulomb および Mohr 規準は破壊開始にも  
 終局破壊にも適用できる。破壊開始に対応する材  
 料定数と、終局破壊に対するものは一般には異な  
 っている筈である。巨視的には同一の対象を取り

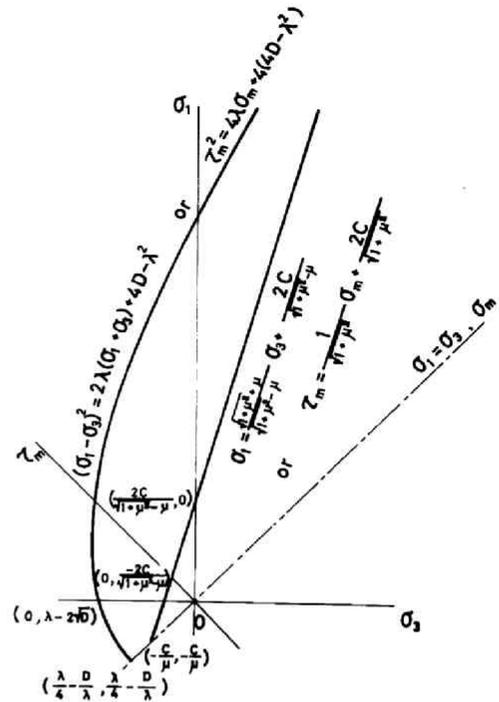


Fig. 1.2.1 Coulomb and Mohr criteria represented in the maximum-minimum principal stress plane and in the mean stress-maximum shear stress plane.

扱っていても、材料ないしそれより成る系自体の  
 内部構造は、破壊の進行につれて刻々変化し、材  
 料定数も一定ではあり得ない。この意味からは材  
 料定数というよりも、材料状態パラメーターと呼ぶ方が適切であろう。

なお、Coulomb および Mohr の破壊規準は、 $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$  および  $\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$  を用いても、次の  
 ように容易に表わすことができる。Fig. 1.2.1 のように、 $\sigma_3$  および  $\sigma_1$  軸を反時計回りに回転して  
 得られる新しい座標軸を  $\sigma_m$  および  $\tau_m$  とする。 $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  軸方向の単位ベクターを  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  とし、 $\sigma_m$   
 および  $\tau_m$  方向のベクター(単位ではない)を  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  とすると、この平面上の任意の点(応力状態)は、

$$\mathbf{r} = \sigma_1 \mathbf{i} + \sigma_3 \mathbf{j} = \sigma_m \mathbf{m} + \tau_m \mathbf{n} \quad (2.2.18)$$

と表わされる。今、 $\mathbf{m}$  および  $\mathbf{n}$  として、

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} (\mathbf{i} + \mathbf{j}), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2} (\mathbf{i} - \mathbf{j}) \quad (2.2.19)$$

と取ると、

$$\sigma_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3), \quad \tau_m = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \quad (2.2.20)$$

となり、従って、

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_3) \mathbf{m} + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \mathbf{n} \quad (2.2.21)$$

と表わせる。すなわち、座標系  $\sigma_m, \tau_m$  の単位としては、 $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  軸の単位の和および差の  $\frac{1}{2}$  を取れば、 $\sigma_1 - \sigma_3$  平面上の曲線は、そのまま  $\sigma_m - \tau_m$  平面上の曲線ともなる。Fig. 1.2.1 は、これをも同時に示したものである。

これらの関係を式で表わせれば、次のようになる。

Coulomb式 (2.2.14) に対応して、

$$\tau_m = \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}} \sigma_m + \frac{C}{\sqrt{1 + \mu^2}} \quad (2.2.22)$$

Mohr式 (2.2.17) に対応して、

$$\tau_m^2 = \lambda \sigma_m + D - \frac{\lambda^2}{4} \quad (2.2.23)$$

を得る。

## 2.3 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の準微視的破壊規準

準微視的破壊規準は、破壊は材料ないしそれより成る系の内部および表面に潜在する欠陥周辺の応力ないしひずみ集中に基づく応力ないしひずみが、材料固有の強度あるいはその強度の或る関数に等しくなったときに生じるという概念に基づいて導かれたものであり、一般的な表現では、式 (1.2.1) の等号を満たすときに破壊が生じるとしたものである。破壊が応力強度のみによって表わされると考えれば、この規準は、式 (1.2.2) あるいは特別な場合には、式 (1.2.3) ~ (1.2.14) で与えられる。これらの式を適用するためには、対象とする物体ないし系の応力場ないしひずみ場の解析、少なくとも欠陥周辺の応力ないしひずみ状態を予め求めておかなければならない。しかしながら既に述べたように、純粹に微視的な立場から、一般の応力場ないしひずみ場を決定することは極めて困難である。本節では、最も簡単な場合として、等方・均質な2次元無限弾性板に含まれる単一楕円クラックないし、単一スリット周辺の最大引張応力およびせん断応力に、それぞれ引張応力一定破壊説、式 (1.2.3) およびせん断応力一定破壊説、式 (1.2.4) を適用して、簡単な破壊規準を導こう。

### 2.3.1 Griffith 理論とその一般化

#### i) 楕円クラックからの破壊開始規準

岩質材料ないしその系の破壊強度は、これらが完全な結晶ないし要素より成ると考えて求めた理論的強度より、はるかに低いことはよく知られている。この説明として Griffith は、破壊は、その内部および

表面にランダムに潜在する微小偏平クラック、いわゆる Griffith クラックの応力集中に起因するという仮説をたてた。<sup>7)</sup> 後に Orowan は、このクラック周辺の集中応力は、理論的な強度にまで達し得るということを示し、<sup>8)</sup> 現在では、この仮説は妥当性のあるものとして受けいれられている。さらに Griffith は、ランダムな偏平楕円クラックのうち最も高い集中応力が材料固有の引張強度式 (1.2.3) に達したときに破壊が生じると考えて、Inglis による 2 次元楕円形空孔周辺の応力解析結果<sup>9)</sup> を基に、いわゆる Griffith 理論<sup>10)</sup> を導いた。この際に、彼は次のような仮定を設けている。すなわち、

- (a) クラックは物体の内部および表面にもランダムに分布する。
- (b) クラックの形状は偏平楕円状である。
- (c) クラック間の相互干渉はない。
- (d) 破壊に至るまで材料は完全線形弾性的な挙動を示し、クラックには微小変形弾性学が適用できる。
- (e) クラックは圧着されない。

これらの仮定は実在の材料を必ずしも正しく表現しているとは言えないが、数学的な解析を行なう上で、(a), (b), (e) 以外は数学的なモデルとして一応妥当な仮定であろう。

(a) の仮定を変更したものは、次章の異方性の破壊規準に関連して取り扱う。また、(e) の仮定を除いた場合は修正 Griffith 理論の節で述べることにし、この節では、(b) の仮定のみを若干緩和して、一般的な楕円クラック (円孔までを含む) までを含むものに Griffith 理論を一般化しよう。(c) の仮定により、単一クラックのみを含む数学モデルを考えると、この挙動は材料ないし系全体としての挙動と等価である。従って、単一クラックのみを含むモデルの解析を行なえば十分である。

さて、Fig. 1.2.2 のように、長軸  $2a$ 、短軸  $2b$  の単一楕円孔を含む 2 次元無限板に無限遠から一様主応力  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_3$ , 圧縮を正とする) が作用しているものとする。楕円孔長軸方向と  $\sigma_1$  方向との成す角を  $\theta$  とすると、楕円孔上の周縁応力  $\sigma_b$  は、楕円座標  $(u, v)$  を用いて、次のように与えられる。

$$\sigma_b = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) \sinh 2u_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)}{\left\{ (e^{2u_0} \cos 2v - 1) \cos 2\theta \right.} \quad (2.3.1)$$

$$\left. \frac{\cosh 2u_0 - \cos 2v}{+ e^{2u_0} \sin 2v \cos 2\theta} \right\}$$

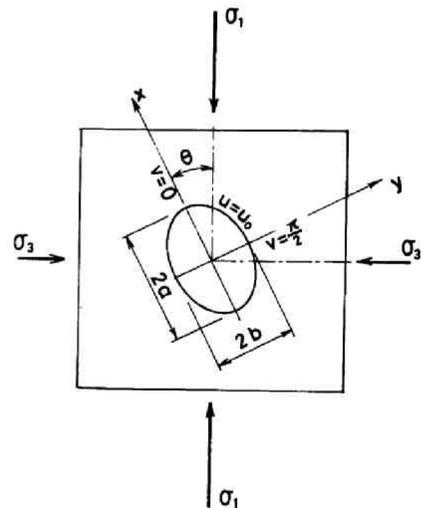


Fig. 1.2.2 Stress system acting upon an elliptical crack.

ここに  $u = u_0$  は楕円孔を表わす。

楕円座標  $(u, v)$  と、デカルト座標  $(x, y)$  との間には、 $2c$  を焦点間距離とすると、次の関係が成立する。

$$x = c \cosh u \cos v \quad (2.3.2)$$

$$y = c \sinh u \sin v$$

今、楕円孔の方向（傾角）が  $\theta = \theta_0$  で与えられているとすると、楕円周縁上で最大引張応力の生じる  $v = v_0$  は  $\frac{\partial \sigma_b}{\partial v} = 0$  を解いて、次のように求められる。計算の簡便のために

$$\alpha \equiv \cosh 2u_0 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2}, \quad r \equiv \sinh 2u_0 = \frac{2ab}{c^2} = \frac{2ab}{a^2 - b^2}$$

$$\mathcal{X} \equiv e^{2u_0} = \frac{(a+b)^2}{c^2} = \frac{(a+b)^2}{a^2 - b^2}, \quad S \equiv \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \quad (2.3.3)$$

とおくと、 $\frac{\partial \sigma_b}{\partial v} = 0$  から、

$$\mathcal{X} \tan 2\theta_0 (\alpha \cos 2v - 1) + \sin 2v \left( 1 - \alpha \mathcal{X} + \frac{rS}{\cos 2\theta_0} \right) = 0 \quad (2.3.4)$$

を得る。これを解くと、

$$v_0 = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{A \tan^2 2\theta_0 \pm \left( C + \frac{rS}{\cos 2\theta_0} \right) \sqrt{D \tan^2 2\theta_0 + \left( C + \frac{rS}{\cos 2\theta_0} \right)}}{B \tan^2 2\theta_0 + \left( C + \frac{rS}{\cos 2\theta_0} \right)} \right] \quad (2.3.5)$$

が求められる。ここに

$$A = \frac{(a+b)(a^2+b^2)}{(a-b)^3}, \quad B = \frac{(a^2+b^2)^2}{(a-b)^4}, \quad C = -\frac{2ab}{a^2-b^2} \quad (2.3.6)$$

$$D = \frac{4a^2b^2}{(a-b)^4}$$

最大引張応力の値は、式 (2.3.1) に  $\theta = \theta_0$  および  $u = u_0, v = v_0$  を代入して求められる。

今、破壊開始は、最大引張応力が或る一定値になったときに生じると仮定し、その値を一軸引張強度  $\sigma_t$  を基準として  $\kappa_t \sigma_t (0 < \kappa_t \leq 1)$  と表わせば、クラックの傾き  $\theta$  と破壊開始に必要な応力  $\sigma$  との関係は Fig. 1.2.3 に示すようになる。また、この関係を主応力平面に図示すれば、Fig. 1.2.4 を得る。これより破壊強度は、クラックの傾き  $\theta$  に大きく左右されることが分る。

一方、この点の楕円境界上の単位法線ベクトル  $\mathbf{n}$  は

$$\mathbf{n} = \frac{\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cosh u_0 \cos v_0 \mathbf{i} + \frac{a^2 - b^2}{b^2} \sinh u_0 \sin v_0 \mathbf{j}}{\sqrt{\frac{\cos^2 v_0}{a^2} + \frac{\sin^2 v_0}{b^2}}} \quad (2.3.7)$$

で与えられる。ここに、 $\mathbf{i}$  および  $\mathbf{j}$  は、それぞれ  $x$  および  $y$  軸方向の単位ベクトルとする。き裂の発生方向は、楕円境界に垂直であるとする。この単位法線ベクトルの方向と一致し、この方向とクラック長軸方向 ( $x$  軸) との成す角  $\beta$ 、き裂発生方向は、次のように与えられる。

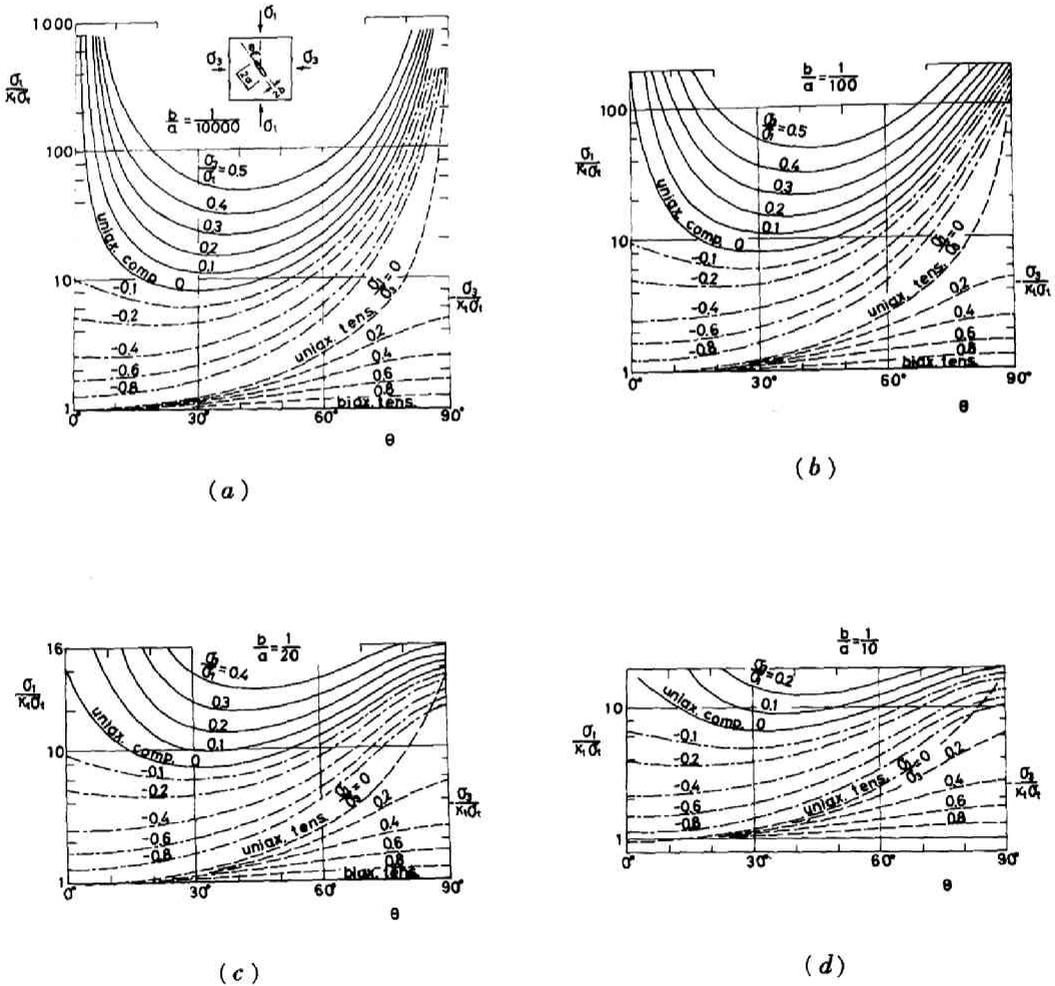


Fig. 1.23 Criterion for fracture initiation from a single elliptical crack with various eccentricity.

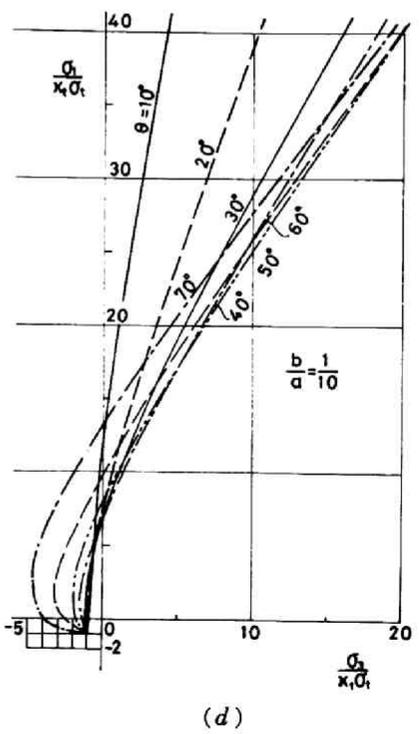
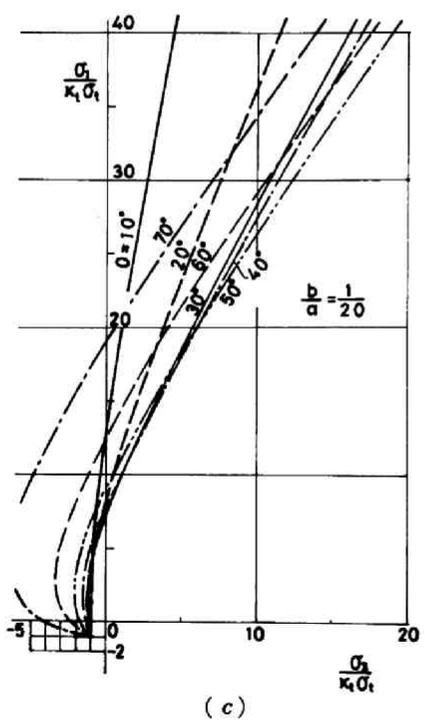
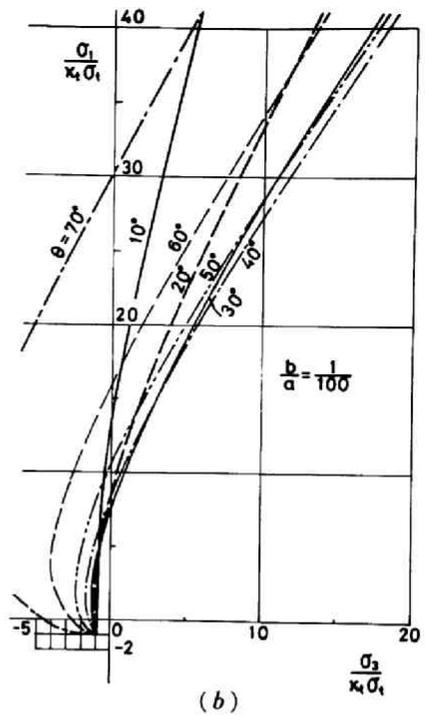
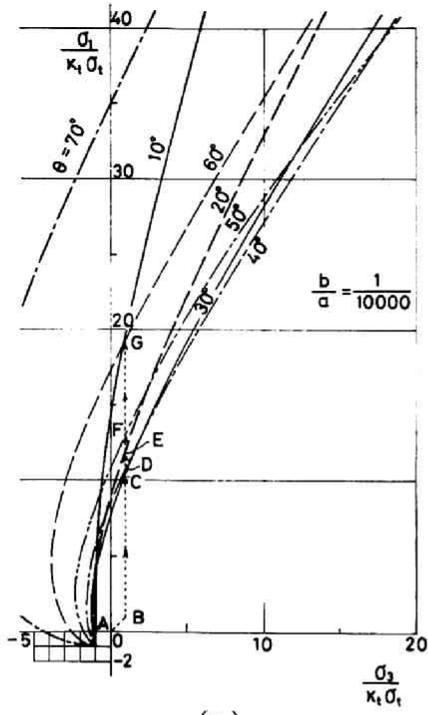


Fig. 1.2.4 Criterion for fracture initiation for various orientations.

$$\beta = \cos^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{b^2} \tan^2 \nu_0}} \right] \quad (2.3.8)$$

き裂発生方向  $\beta$  とクラックの傾き  $\theta$  との関係を Fig. 1.2.5 に示す。

この図から分るように、き裂の発生方向は一般には、元のクラック面内にはない。従って、いったんき裂が発生すると、クラックの形状は元のものとは全く異なったものとなり、二軸一様引張およびクラック面に垂直な一軸引張の場合を除けば、上述の理論はそのままでは適用できなくなる。ここで議論した規準は破壊開始の規準であり、伝播過程をも含むものではない。上記2つの引張応力の例の場合には、き裂は

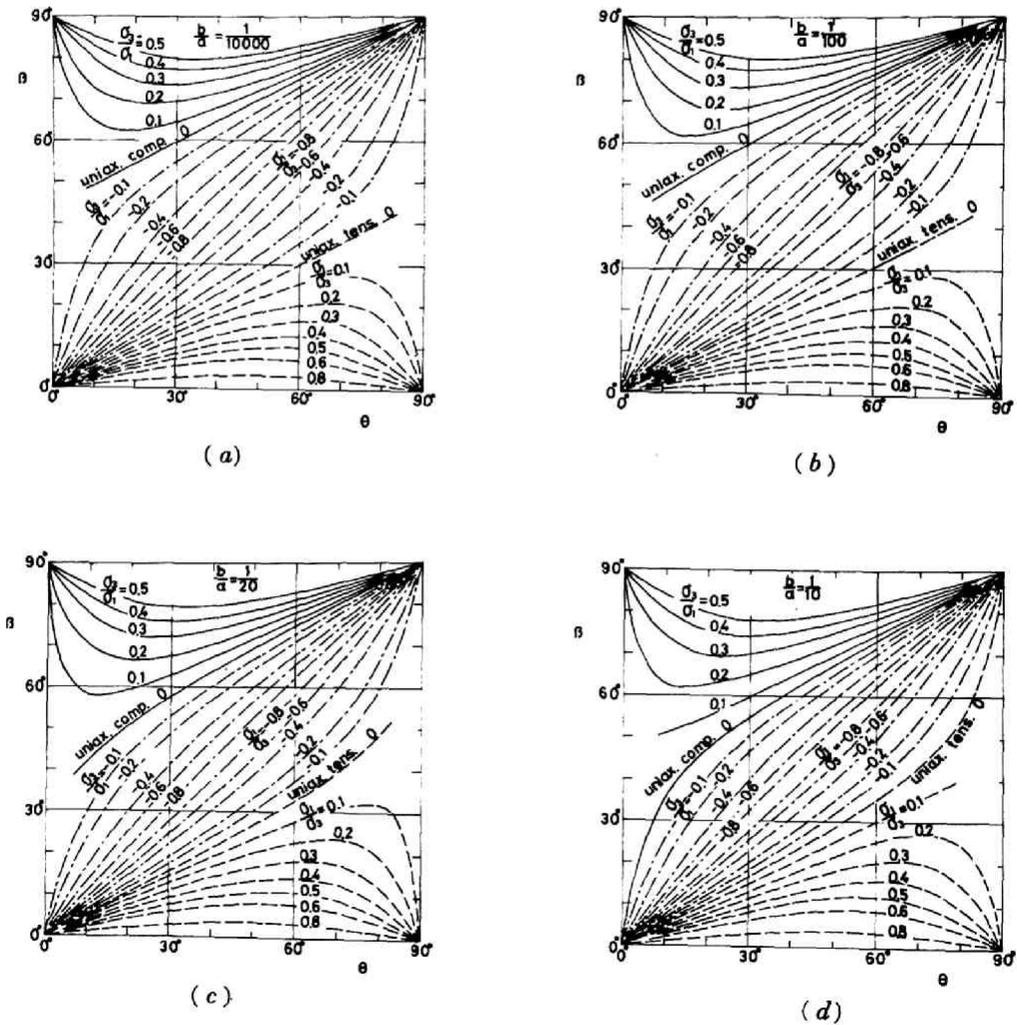


Fig. 1.2.5 Directions of branch crack initiation from an elliptical crack .

元のクラック面内に成長するので、クラックは刻々偏平となり、これに対応した刻々の準静的破壊規準が見出される。この場合の破壊時応力は、刻々小さなものとなり、従って、逐次破壊荷重は破壊発生荷重より小さくてもよい。すなわち、この場合の破壊開始は、直ちに終局破壊（崩壊）に至ることを意味している。

一般的な場合には、上述の理論を多数の欠陥を含むモデルに適用すれば、逐次破壊の説明も可能となる。これに関しては、改めて、2.6 で検討する。

任意の傾きを有するクラックの周縁上の応力  $\sigma_b$  が最大値を取るための条件は、 $\frac{\partial \sigma_b}{\partial v} = 0$  と同時に  $\frac{\partial \sigma_b}{\partial \theta} = 0$  が満足されることである。後者より

$$\tan 2\theta = \frac{\mathcal{X} \sin 2v}{\mathcal{X} \cos 2v - 1} \quad (2.3.9)$$

$$\cos 2\theta = \pm \frac{\mathcal{X} \cos 2v - 1}{\sqrt{\mathcal{X}^2 - 2\mathcal{X} \cos 2v + 1}} \quad (2.3.9)'$$

が求められる。従って、式(2.3.4)に式(2.3.9)を代入して、

$$\sin 2v \left[ \mathcal{X}^2 \left( \frac{\alpha \cos 2v - 1}{\mathcal{X} \cos 2v - 1} \right) + 1 - \alpha \mathcal{X} + \frac{rS}{\cos 2\theta} \right] = 0$$

を得る。これを解いて、まず、

$$\sin 2v = 0$$

すなわち

$$v = 0, \quad \theta = 0 \quad (2.3.10)$$

が求められる。また、残りから

$$-\frac{rS}{\cos 2\theta} = \frac{1 - \mathcal{X} \cos 2v + r\mathcal{X}}{1 - \mathcal{X} \cos 2v} \quad (2.3.11)$$

を得、これと式(2.3.9)'から

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{1 + r\mathcal{X} - 2r^2 S^2}{\mathcal{X}} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{(a^2 - b^2)^2 + 2ab(a+b)^2 - 8a^2 b^2 S^2}{(a-b)(a+b)^3} \right] \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

を、また、式(2.3.9)'および式(2.3.12)から

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{\mathcal{X} \mp 2 r S^2}{2 S} \right] \\ &= \frac{1}{2} \cos^{-1} \left[ \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \left\{ \frac{(a+b)^2}{S} - 4 a b S \right\} \right]\end{aligned}\quad (2.3.13)$$

を得る。

式(2.3.10)を式(2.3.1)に代入すると、最大値が求められる。今、この最大値が、材料固有の強度  $N_\sigma$  に等しいときに破壊が生じると考えると、破壊開始規準は

$$\begin{aligned}N_\sigma &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) \sinh 2u_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)(e^{2u_0} - 1)}{\cosh 2u_0 - 1} \\ &= \sigma_3 \left(1 + \frac{2a}{b}\right) - \sigma_1\end{aligned}\quad (2.3.14)$$

となる。

式(2.3.12)および(2.3.13)を式(2.3.1)に代入して、若干の計算を行なうと、 $\sigma_b$  の最大値として、

$$\sigma_{b, \max} = - \frac{\mathcal{X}(\sigma_1 + \sigma_3)}{2r S^2} = - \frac{\mathcal{X}(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2r(\sigma_1 + \sigma_3)}$$

を得、従って、破壊開始規準としては、材料固有の引張強度  $N_\sigma$  を用いて、

$$N_\sigma = - \frac{\mathcal{X}(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{2r(\sigma_1 + \sigma_3)} = - \frac{(a+b)^2}{4ab} \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)^2}{\sigma_1 + \sigma_3}\quad (2.3.15)$$

を得る。<sup>11)</sup>

一般に、 $N_\sigma$ を推定することは困難であるので、その代りに一軸引張強度  $\sigma_t$  および一軸圧縮強度  $\sigma_c$  を用いて表わすことを考えよう。破壊開始時の応力は、一般に引張強度および圧縮強度より小さいので、今、引張および圧縮破壊時応力を  $\kappa_t \sigma_t$  および  $\kappa_c \sigma_c$  としよう。もちろん、 $0 \leq \kappa_t \leq 1$ 、 $0 \leq \kappa_c \leq 1$  である。

式(2.3.14)に、 $\sigma_1 = 0$ 、 $\sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t$  を代入すると、

$$N_\sigma = -\kappa_t \sigma_t \left(1 + \frac{2a}{b}\right)\quad (2.3.16)$$

を得、また、式(2.3.15)に  $\sigma_1 = \kappa_c \sigma_c$ 、 $\sigma_3 = 0$  を代入して

$$N_\sigma = - \frac{(a+b)^2}{4ab} \kappa_c \sigma_c\quad (2.3.17)$$

を得る。この両者から  $N_\sigma$  を消去すると

$$\frac{b}{a} = \frac{R-8}{2-R-2\sqrt{R+1}}, \quad R = \frac{\kappa_c \sigma_c}{\kappa_t \sigma_t} = \frac{4a(2a+b)}{(a+b)^2} \quad (2.3.18)$$

が求められる。従って、式 (2.3.14), (2.3.16) および (2.3.18) から

$$\sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t - \left( \frac{R-8}{R+4+4\sqrt{R+1}} \right) \sigma_1 \quad (2.3.19)$$

を得、また、式 (2.3.15) および (2.3.17) から

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \kappa_c \sigma_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.3.20)$$

或いは、式 (2.3.18) を用いて、

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - R \kappa_t \sigma_t (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.3.20)'$$

を得る。また、式 (2.3.14) および (2.3.15) から、式 (2.3.19) は

$$\sigma_1 + \frac{3a+b}{a-b} \sigma_3 \leq 0$$

で成立し、式 (2.3.20), (2.3.20)' は

$$\sigma_1 + \frac{3a+b}{a-b} \sigma_3 \geq 0$$

で成立することが容易に分る。式 (2.3.19), (2.3.20) および (2.3.20)' を以下では一般 Griffith 式 (規準) と呼ぶことにする。

$$\frac{b}{a} \rightarrow 0, \quad \kappa_t = \kappa_c = 1 \quad \text{とすると,}$$

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0 \quad \text{では,} \quad \sigma_3 = -\sigma_t \quad (2.3.21)$$

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \quad \text{では,} \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.3.22)$$

$$R = 8, \quad i. e. \quad \sigma_c = 8\sigma_t \quad (2.3.23)$$

となって、Griffith 式<sup>12)</sup> に一致する。

一方、 $\frac{b}{a} \rightarrow 1$ , *i. e.*  $a = b$  とすると円形空隙の問題となり、

$$\sigma_3 \leq 0 \quad \text{では,} \quad \sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t + \frac{1}{3} \sigma_1 \quad (2.3.24)$$

$$\sigma_3 \geq 0 \text{ では, } (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \kappa_c \sigma_c (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.3.25)$$

$$R = 3, \text{ i. e. } \sigma_c = 3 \sigma_t \quad (2.3.26)$$

となる。

主応力平面上に、これらの式 (2.3.19), (2.3.20)', (2.3.21) ~ (2.3.26) の関係を示すと, Fig. 1.2.6 のようになる。なお、図中の破線は平面応力に対する破壊開始規準である。既に述べたように、これらの曲線は破壊開始の規準を示すに過ぎないことを注意しておこう。

$$\text{次に, } \sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, \quad \tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$$

とおいて、 $\sigma_m$   $\tau_m$ -平面に表示することを考えてみよう。式 (2.3.20), (2.3.19) に対応して、次のような式が得られる。

$$\begin{aligned} & 2(R-2+2\sqrt{R+1})\sigma_m \\ & - 4(3+\sqrt{R+1})\tau_m \\ & = -(R+4+4\sqrt{R+1})\kappa_t\sigma_t \\ & \quad (2.3.19)' \end{aligned}$$

$$2\tau_m^2 - \kappa_c\sigma_c\sigma_m = 0 \quad (2.3.20)'$$

これらの式は、それぞれ、

$$2a\sigma_m - (a+b)\tau_m \leq 0$$

$$2a\sigma_m - (a+b)\tau_m \geq 0$$

の範囲で成立する。一方、Griffith 式 (2.3.21) ~ (2.3.23) に対応しては

$$2\sigma_m - \tau_m \leq 0 \text{ ならば, } \sigma_m - \tau_m = -\kappa_t\sigma_t = -\frac{\kappa_c\sigma_c}{8} \quad (2.3.21)'$$

$$2\sigma_m - \tau_m \geq 0 \text{ ならば, } 2\tau_m^2 - \kappa_c\sigma_c\sigma_m = 0 \quad (2.3.22)'$$

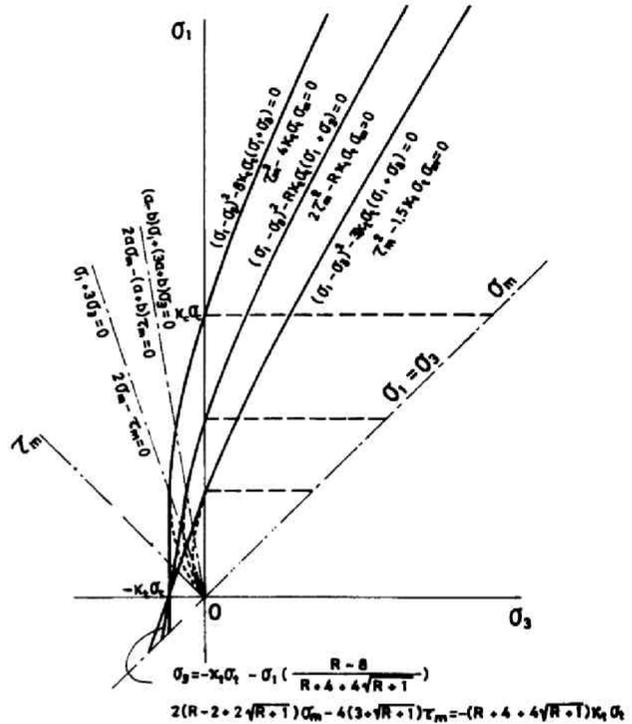


Fig. 1.2.6 The generalized Griffith criterion represented in the maximum-minimum stress plane and in the mean stress-maximum shear stress plane.

を得る。

更に、式 (2.3.24) ~ (2.3.25) に対応して、

$$\sigma_m - \tau_m \leq 0 \quad \text{では、} \quad 2 \sigma_m - 4 \tau_m = -\kappa_c \sigma_c \quad (2.3.24)'$$

$$\sigma_m - \tau_m \geq 0 \quad \text{では、} \quad 2 \tau_m^2 - \kappa_c \sigma_c \sigma_m = 0 \quad (2.3.25)'$$

が求められる。

式 (2.3.19)' ~ (2.3.25)' の関係は、2.2 の最後に述べたところにより、容易に  $\sigma_1 \sigma_3$  - 平面と同時に図示される。Fig. 1.2.6 にその関係を示した。図に示した規準は、2種類の規準より成ることに注意されたい。このことは、一般 Griffith 破壊規準が2種類の合成した規準で表わされていることを考え合せれば当然うなづけるであろう。

### ii) 数学的スリットからの破壊開始規準

以上の議論では潜在欠陥のモデルとしては楕円孔を対象としたけれども、潜在欠陥のモデル化はこれ以外にも種々考えられる。以下に比較のために数学的なスリット・モデルについて Griffith の考え方を適用してみよう。Fig. 1.2.7 のように最大主応力  $\sigma_1$  方向から  $\theta$  だけ傾いた長さ  $2\ell$  のスリットを考える。解析に当っては、最初に述べた Griffith の仮定をそのまま設けることにする。スリット先端近傍の応力状態に関しては次のような結果が得られている。<sup>13)</sup>

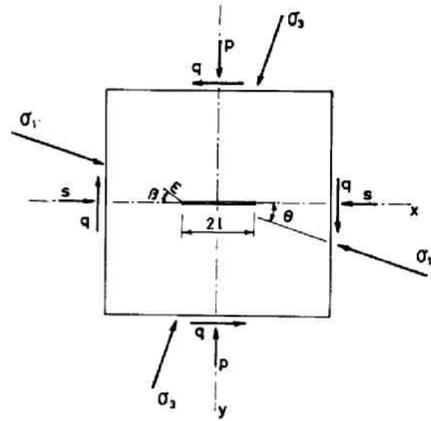


Fig. 1.2.7 Stress system acting upon a mathematical slit.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 (3 - \cos \beta) \cos \frac{\beta}{2} - k_2 (3 \cos \beta - 1) \sin \frac{\beta}{2} \right] + \dots \\ \sigma_\beta &= \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 (1 + \cos \beta) \cos \frac{\beta}{2} + k_2 (3 \sin \beta) \cos \frac{\beta}{2} \right] + \dots \\ \tau_{r\beta} &= \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} - k_2 (3 \cos \beta - 1) \cos \frac{\beta}{2} \right] + \dots \end{aligned} \right\} (2.3.27)$$

或いは、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \cos \frac{\beta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3}{2} \beta \right) + k_2 \sin \frac{\beta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{3}{2} \beta \right) \right] + \dots \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \cos \frac{\beta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3}{2} \beta \right) - k_2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{3}{2} \beta \right] + \dots \end{aligned} \right\}$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{3}{2}\beta - k_2 \cos \frac{\beta}{2} (1 - \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{3}{2}\beta) \right] + \dots \quad (2.3.28)$$

ここに、 $(\varepsilon, \beta)$  はスリット先端を原点とする極座標を表わし、 $|\varepsilon| \ll \ell$  である。また、 $\beta$  は  $x$  軸方向から時計廻りに計った角度である。係数  $k_1, k_2$  は次のように与えられている。

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= p \sqrt{\ell} = \frac{\sqrt{\ell}}{2} [\sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta] \\ k_2 &= q \sqrt{\ell} = \frac{\sqrt{\ell}}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.3.29)$$

スリット周辺の最大引張応力は  $\tau_{r\beta} = 0$  で生じるから、その点の角度  $\beta_0$  は、

$$\cos \frac{\beta_0}{2} [k_1 \sin \beta_0 - k_2 (3 \cos \beta_0 - 1)] = 0 \quad (2.3.30)$$

i. e.

$$\beta_0 = \pm \pi$$

$$k_1 \sin \beta_0 - k_2 (3 \cos \beta_0 - 1) = 0 \quad (2.3.31)$$

を満すことになる。

式(2.3.31)に式(2.3.29)を代入すると、

$$\beta_0 = \cos^{-1} \left[ \frac{3 \pm \frac{k_1}{k_2} \sqrt{8 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2}}{9 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2} \right] \quad (2.3.32)$$

あるいは  $\beta_0$  と  $\theta$  との関係として、

$$\beta_0 = \cos^{-1} \left[ \frac{3 \sin^2 2\theta \pm \sin 2\theta (S - \cos 2\theta) \sqrt{8 \sin^2 2\theta + (S - \cos 2\theta)^2}}{9 \sin^2 2\theta + (S - \cos 2\theta)^2} \right] \quad (2.3.32)'$$

を得る。

一軸圧縮の場合には、式(2.3.29)、(2.3.31)、(2.3.32)'は  $\sigma_3 = 0, S = 1$  とおくと簡単になって、

$$k_1 = \sqrt{\ell} \sigma_1 \sin^2 \theta, \quad k_2 = \sqrt{\ell} \sigma_1 \sin \theta \cos \theta \quad (2.3.29)'$$

および

$$\sin \beta_0 - (3 \cos \beta_0 - 1) \cot \theta = 0 \quad (2.3.31)'$$

或いは、

$$\cos \beta_0 = \frac{3 \pm \tan \theta \sqrt{8 + \tan^2 \theta}}{9 + \tan^2 \theta}$$

i. e.

$$\beta_0 = \cos^{-1} \left[ \frac{3 \pm \tan \theta \sqrt{8 + \tan^2 \theta}}{9 + \tan^2 \theta} \right] \quad (2.3.32)''$$

となる。

今、最大引張応力を生じる点にき裂が発生すると考えると、式 (2.3.32)' 或いは (2.3.32)'' は主応力  $\sigma_1$  方向から  $\theta$  だけ傾いたスリットからのき裂発生方向  $\beta_0$  を与えるものである。 $\theta$  と  $\beta_0$  の関係を Fig. 1.2.8 に示す。

き裂の発生方向は、スリットの傾きに左右されることが分る。

次に破壊開始規準について考える。Griffithの考え方をを用いてスリット周辺上の最大引張応力が、材料の固有値に達したときに破壊が生じると仮定する。スリット周辺上の応力は式 (2.3.27) 或いは (2.3.28) に見られるように  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$  のオーダーの特異性を呈しており、 $\epsilon \rightarrow 0$  では無限大となる。しかしながら、 $\sqrt{\frac{2\epsilon}{\ell}} \sigma$  は或る一定値に収斂すると考えられるので、材料の固有の引張強度として、 $\sqrt{\frac{2\epsilon}{\ell}} \sigma \beta = N_\sigma = \text{const.}$  を用いると、 $\sigma_\beta$  の極値を与えるための条件 (2.3.30) および式 (2.3.27)、(2.3.29) から、 $\theta$  をパラメーターとして、与えられた  $\theta$  に対する破壊開始規準は次のように求められる。

$$2\sqrt{\ell}N_\sigma = k_{10} \left(1 + \cos \beta_0\right) \cos \frac{\beta_0}{2} + k_{20} \left(3 \sin \beta_0\right) \cos \frac{\beta_0}{2} \quad (2.3.33)$$

ここに  $\beta_0$ 、 $k_{10}$  および  $k_{20}$  は、与えられた  $\theta$  に対して、式 (2.3.32)'' および式 (2.3.29)' から求められる既知の値である。

$N_\sigma$  を求めることは、一般に困難であるので、これを一軸引張強度  $\sigma_t$  を用いて表わそう。クラックの場合と同様に  $\theta = 0$ 、 $\beta = 0$ 、 $\sigma_1 = 0$  および  $\sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t$  とすると、

$$2\sqrt{\ell}N_\sigma = 2k_{10} = 2\sqrt{\ell}\sigma_3 = -2\sqrt{\ell}\kappa_t \sigma_t$$

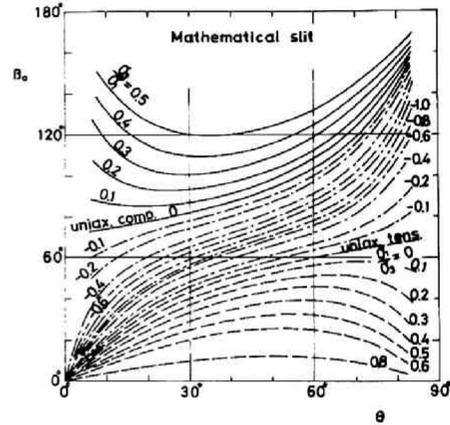


Fig. 1.2.8 Directions of branch crack initiation from a mathematical slit.

となり、従って

$$N_{\sigma} = -\kappa_t \sigma_t$$

を得る。

式(2.3.33)より得られるスリットの傾き $\theta$ と、破壊開始に必要な応力 $\sigma$ との関係を、 $\kappa_t \sigma_t$ を基準として Fig. 1.2.9 に示す。破壊強度はスリットの傾きに大きく左右されることが分る。この関係を主応力平面に示せば Fig. 1.2.10 となる。

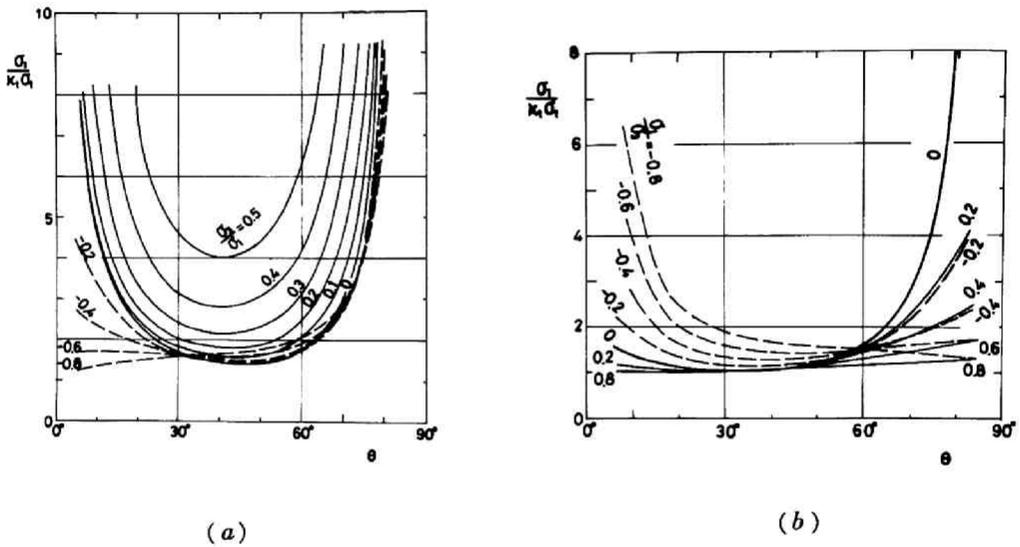


Fig. 1.2.9 Criterion for fracture initiation from a mathematical slit.

なお、この破壊規準は一般には破壊開始の条件のみを表わすことは、楕円クラック・モデルによる Griffith 理論の場合と全く同様であり、また、逐次破壊モデルに対する適用についても前述と同様なことが言える。

式(2.3.33)において、極値を与える $\theta$ は、 $\frac{\partial N_{\sigma}}{\partial \theta} = 0$ より求められる。今、その $\theta$ を $\theta_e$ とし、それに対応する $\beta$ を $\beta_e$ 、 $k_1$ 、 $k_2$ をそれぞれ $k_{1e}$ 、 $k_{2e}$ とすると、結局破壊開始規準は

$$-2\sqrt{\ell} \kappa_t \sigma_t = k_{1e} (1 + \cos \beta_e) \cos \frac{\beta_e}{2} + k_{2e} (3 \sin \beta_e) \cos \frac{\beta_e}{2} \quad (2.3.34)$$

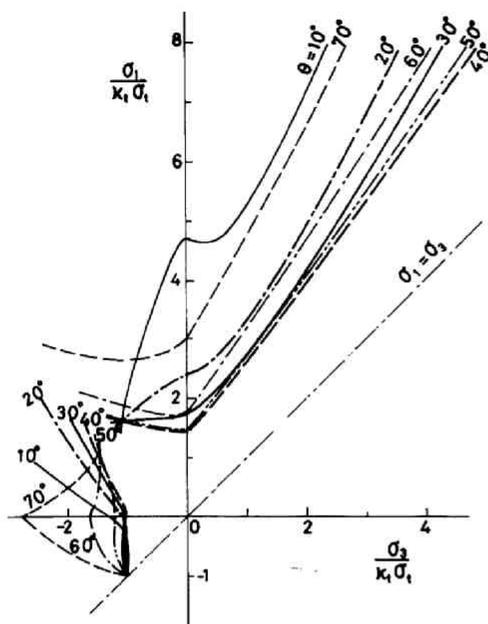


Fig. 1.2.10 Criterion for fracture initiation for various orientations of the mathematical slit.

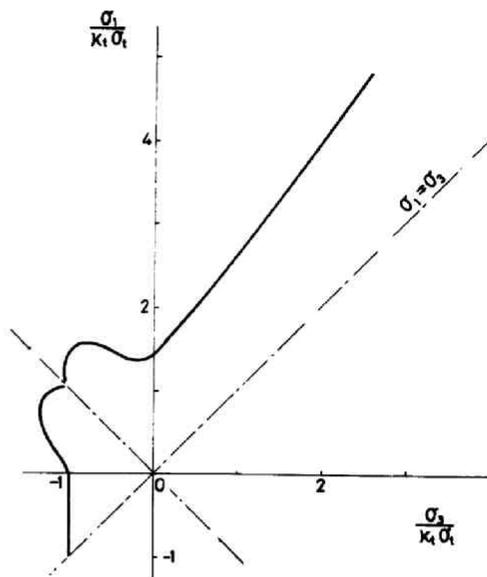


Fig. 1.2.11 Criterion for fracture initiation derived from a single mathematical slit.

となる。これは、Griffith 式 (2.3.21) および (2.3.22) に対応するものである。この破壊開始規準を閉じた形で求めるのは困難であるが、この破壊規準曲線は  $\theta$  をパラメータとして求めた破壊規準曲線 Fig. 1.2.10 のうちから最小の共通領域を含む複合曲線として求められることになる。これを Fig. 1.2.11 に示す。また、この曲線を  $\sigma_m - \tau_m$  平面上に表わすことは、i) の最後に述べたのと同様に容易にできる。

なお、Griffith およびその一般理論において間隙水圧  $\sigma_p$  の影響を考慮しなければならない場合には、 $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  の代りに  $\sigma_1 - \sigma_p$  および  $\sigma_3 - \sigma_p$  と置き換えれば、今までの議論はそのまま適用できることを附言しておく。

### 2.3.2 修正 Griffith 理論

岩質材料ないしそれより成る系の潜在欠陥は、一般には扁平であり、実際には圧縮荷重の下では容易に閉そくすることが考えられる。したがって、このような場合には、Griffith による基本仮定 (e) は必

ずしも正しくない。McClintock & Walshはこれを次のように考え直した。すなわち、(e)' 偏平クラックないしスリットは容易に閉そくし、閉そくしたクラックないしスリット面間にはAmontonの摩擦の法則に従うせん断抵抗が生じるものと仮定する。彼らは、仮定(a)~(d)はそのままとし、(e)の代りに(e)'を用いることによってGriffith理論を修正した。<sup>14)</sup>これが以下に述べるいわゆる修正Griffith理論といわれるものである。

今、クラックに垂直に作用し、クラックを閉そくさせるのに必要な応力を $\sigma_{cl}$ とし、閉そくしたクラック面に作用する垂直応力を $\sigma_n$ 、摩擦応力を $\sigma_f$ 、摩擦係数を $\mu$ とすると、Fig. 1.2.12から容易に分るように、 $\sigma_y$ の代りに $\sigma_y - \sigma_n$ 、 $\tau_{xy}$ の代りに $\tau_{xy} - \sigma_f$ を用い、Amontonの法則 $\sigma_f = \mu \sigma_m$ および $\sigma_n = \sigma_y - \sigma_{cl}$ という関係および応力の変換式

$$\sigma_y = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos 2\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin 2\theta$$

(2.3.35)

を用いれば、Griffith理論を誘導したのと全く同じ過程で修正理論が求められる。クラックは極めて偏平であるので、式(2.3.1)は

$$\sigma_b = \frac{u_0 \{ \sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta \} - v (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta}{u_0^2 + v^2}$$

$$= \frac{2 (u_0 \sigma_y - v \tau_{xy})}{u_0^2 + v^2} = \frac{2 u_0 \sigma_{cl} - 2 v \{ \tau_{xy} - \mu (\sigma_y - \sigma_{cl}) \}}{u_0^2 + v^2}$$

$$= \frac{2 u_0 \sigma_{cl} + v \sigma^*}{u_0^2 + v^2} \quad (2.3.36)$$

ここに、

$$\sigma^* = - (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta + \mu \{ \sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta - 2 \sigma_{cl} \}$$

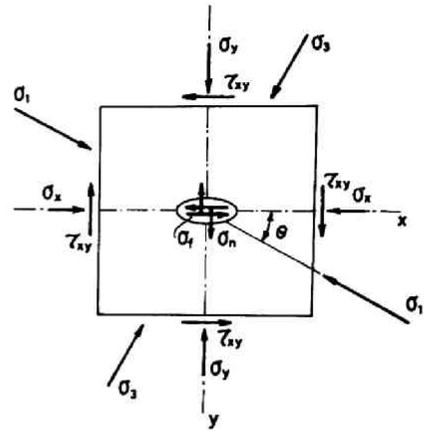


Fig. 1.2.12 Stress system acting upon a closed crack. Frictional forces are exerted between the closed surfaces.

$$= -(\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta) + \mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) \quad (2.3.37)$$

となる。この式は

$$\begin{aligned} \sigma_y &\geq \sigma_{cl} \\ \tau_{xy} &> \sigma_f \end{aligned}$$

で成立する。

$\sigma_b$  の極値は  $\frac{\partial \sigma_b}{\partial v} = 0$  から次のように見出されている。

$$(u_0^2 + v^2)\sigma^* - 2v(2u_0\sigma_{cl} + v\sigma^*) = 0 \quad (2.3.39)$$

を得、これを解いて

$$\frac{v}{u_0} = -\frac{2\sigma_{cl}}{\sigma^*} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{2\sigma_{cl}}\right)^2}\right) \quad (2.3.39)'$$

を得る。式(2.3.39)を(2.3.36)に代入すると、直ちに

$$\sigma_b = \frac{1}{u_0^2 + v^2} \left[ \frac{(u_0^2 - v^2)\sigma^*}{2v} + v\sigma^* \right] = \frac{\sigma^*}{2v}$$

を、式(2.3.39)'を用いて書き直すと、

$$\sigma_b u_0 = \frac{\sigma^*}{2\left(\frac{v}{u_0}\right)} = -\frac{\sigma^{*2}}{4\sigma_{cl} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{2\sigma_{cl}}\right)^2}\right)} \quad (2.3.40)$$

となる。今、一軸引張強度を  $\sigma_t$  とすると、Griffith 理論から、式(2.3.36)において、 $\sigma_1 = 0$ 、 $\sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t$ 、 $\theta = 0$  とすれば容易に

$$\sigma = -\frac{2\kappa_t \sigma_t}{u_0} \quad (2.3.41)$$

を得る。これを式(2.3.40)に代入して

$$\kappa_t \sigma_t = \frac{\sigma^{*2}}{8\sigma_{cl} \left(1 \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma^*}{2\sigma_{cl}}\right)^2}\right)}$$

を得、これを解いて

$$\sigma^* = 4\sqrt{(\kappa_t \sigma_t)^2 + \kappa_t \sigma_t \sigma_{cl}} = -4\kappa_t \sigma_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_{cl}}{\kappa_t \sigma_t}} \quad (2.3.41)'$$

を得る。或いは式 (2.3.37) を用いて書き改めると

$$\begin{aligned} & \mu (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta) \\ & = -4 \kappa_t \sigma_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_{cl}}{\kappa_t \sigma_t}} \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

となる。 $\sigma_{cl} \doteq 0$  において、この関係を図示すれば、Fig. 1.2.13 となる。さらに、主応力面上に表示すれば、Fig. 1.2.14 となる。なお、Figs. 1.2.13 および 1.2.14 には、ここでは不必要であるが、後の都合上引張応力域での曲線をも同時に示しておいた。

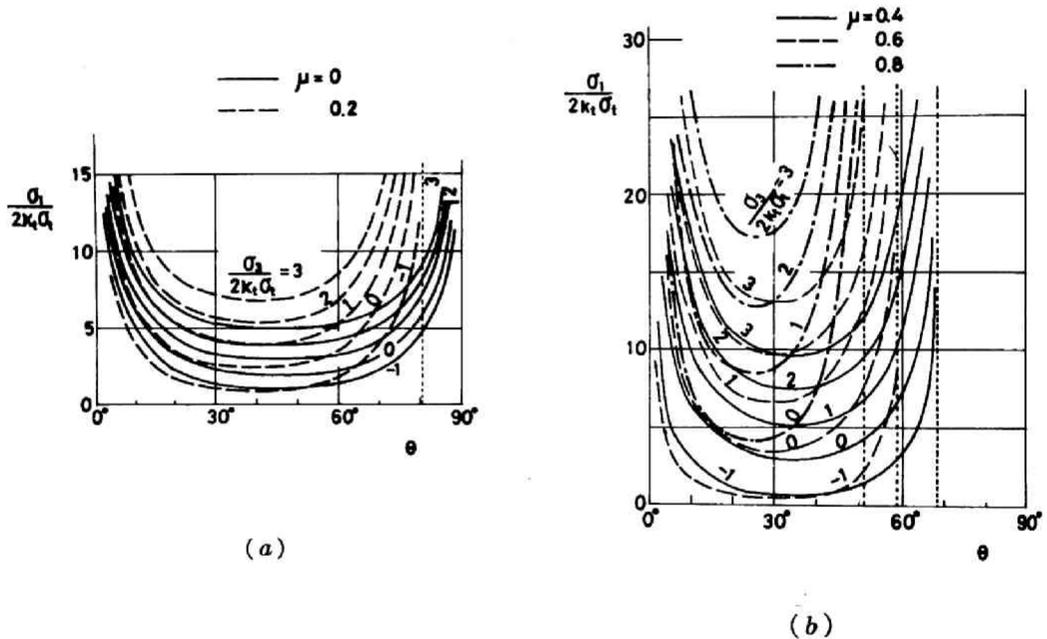


Fig. 1.2.13 The general modified Griffith criterion for various coefficients of frictions between the closed surfaces.

最大応力を生じるようなクラックの方向は、式 (2.3.42) の  $\theta$  に関する偏微分を零と置いて求められて、

$$\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\mu} \right) \quad (2.3.43)$$

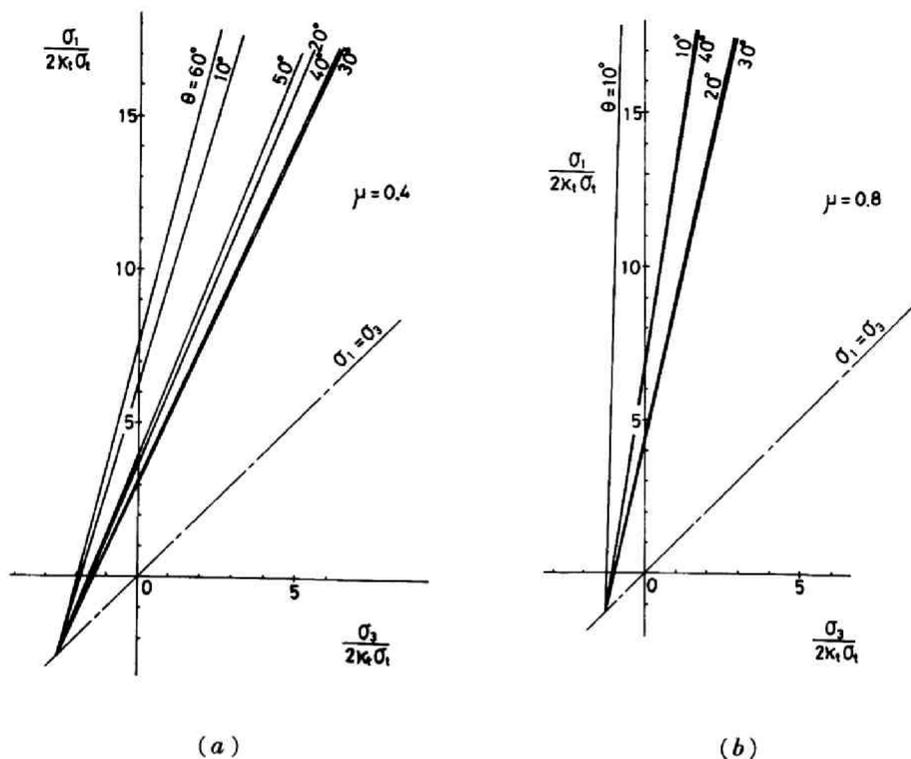


Fig. 1.2.14 The general modified Griffith criterion for various orientations of the crack represented in the maximum-minimum stress plane.

となる。これを式(2.3.42)に代入すると、求める式は、

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{c\ell}) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} = -4\kappa_t \sigma_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_{c\ell}}{\kappa_t \sigma_t}} \quad (2.3.44)$$

となる。ここで  $\kappa_t = 1$  としたものは修正 Griffith 理論と呼ばれている。クラックが極めて扁平であれば、 $\sigma_{c\ell} \doteq 0$  と考えられるので上式は

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} = -4\kappa_t \sigma_t \quad (2.3.45)$$

と簡単になる。式(2.3.45)を図示すると、Fig. 1.2.15 を得る。

なお、スリット・モデルについてこの考え方を適用すれば、次のように類似な結果が導かれる。すなわ

ち, Fig. 1.2.7 において,

$$p \rightarrow p - \sigma_n = \sigma_{cl},$$

$$q \rightarrow q - \sigma_f = q - \mu(p - \sigma_{cl})$$

と置き換えると, 式(2.3.29) から

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma_{cl} \sqrt{\ell} \\ k_2 &= \{q - \mu(p - \sigma_{cl})\} \sqrt{\ell} \\ &= \frac{\sqrt{\ell}}{2} \{-\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) \\ &\quad + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta)\} \end{aligned} \quad (2.3.46)$$

を得る。この  $k_1, k_2$  を式(2.3.31) および (2.3.33) に代入し, 連立して解くと,  $\theta$  および  $\mu$  をパラメータとして含む破壊開始規準が求められる。

$$\begin{aligned} 2\sigma_{cl} \sin \beta + \{\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) \\ - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta)\} \\ (3 \cos \beta - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\sigma_{cl} (1 + \cos 2\beta) \cos \frac{\beta}{2} \\ - \{\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3) \\ (\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta)\} 3 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} = -4 \kappa_t \sigma_t \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

特に,  $\sigma_{cl} \div 0$  とすると, 第1式から  $\cos \beta = \frac{1}{3}$  を得, 第2式に代入すると,

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta) = -\sqrt{3} \kappa_t \sigma_t \quad (2.3.48)$$

を得る。Griffith の概念を用いると, このうち極値を取るスリットの方向は式(2.3.48)の  $\theta$  に関する偏微分を零と等値して求められて,  $\theta = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left( \frac{1}{\mu} \right)$  となる。従って, 破壊規準は次のように求められる。

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} = -\sqrt{3} \kappa_t \sigma_t \quad (2.3.49)$$

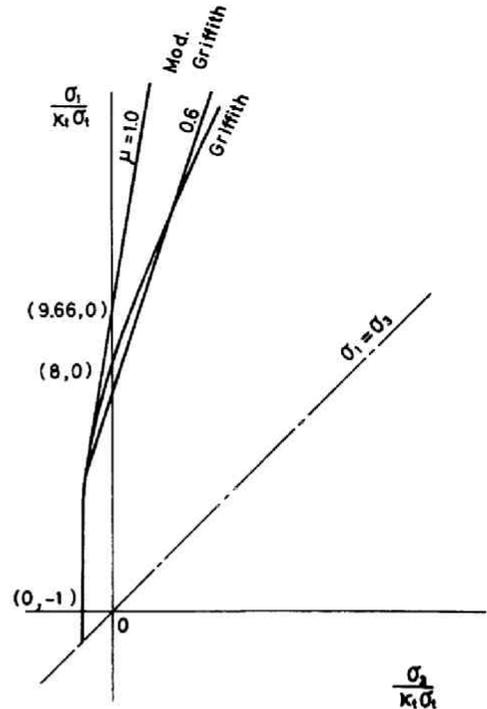


Fig. 1.2.15 Griffith and the modified Griffith criteria represented in the maximum-minimum stress plane.

この関係は修正 Griffith 理論と極めて類似している(式(2.3.45)と比較せよ)。

なお、式(2.3.44)、(2.3.45)或いは(2.3.47)、(2.3.48)、(2.3.49)などで与えられる破壊規準は破壊開始にしか適用できないことは、2.3.1で議論したところから明らかであろう。

### 2.3.3 セン断応力破壊説の適用

堅い岩質材料の常温低拘束圧下の破壊では、せん断応力に起因する破壊現象は殆んど見られないようである。しかしながら、高温・高拘束圧の下では、せん断すべりが生じることが知られており、また軟弱な岩石においても、例えば粘土におけるようなせん断破壊が生じる可能性がある。2.3.1および2.3.2では終始して、破壊開始はクラックないスリット周縁上の最大引張応力値が材料の固有引張強度に等しくなったとき生じると仮定した。ここでは、この仮説の代りに破壊開始の極限状態は、クラックないスリット周縁上の最大せん断応力が材料の固有のせん断応力強度に等しくなったときに達せられると仮定しよう。解析上の他の仮定2.3.1の(a)~(e)はそのまま採用する。

閉じない楕円クラックに対しては、せん断応力が最大となる点は、周縁上の縁応力が最大値を取る点に一致する。従って2.3.1の結果をそのまま適用することができる。この際には材料の固有引張応力強度  $N_\sigma$  の代りに、せん断応力強度  $T_\sigma$  の2倍、 $2T_\sigma$  用いればよい。

一方、スリット・モデルに対しては、先端近傍の応力状態は、すでに式(2.3.27)でも与えられているので、これを用いて  $\tau_{r\beta}$  が最大となるように選べばよい。与えられたスリットの傾き  $\theta = \theta_0$  に対しては、 $\frac{\partial \tau_{r\beta}}{\partial \beta} = 0$  より

$$k_1 \left( \cos \beta \cos \frac{\beta}{2} - \frac{1}{2} \sin \beta \sin \frac{\beta}{2} \right) + k_2 \left\{ 3 \sin \beta \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{2} \sin \frac{\beta}{2} (3 \cos \beta - 1) \right\} = 0 \quad (2.3.50)$$

を得、これより  $\beta_0$  が求められる。 $k_1, k_2$  は式(2.3.29)に与えられている。

一方、 $\tau_{r\beta}$  が最大値を取るための条件は、式(2.3.50)に更に、 $\frac{\partial \tau_{r\beta}}{\partial \theta} = 0$  より得られる次式を同時に満すことである。

$$\cos \frac{\beta}{2} \left\{ \sin 2\theta \sin \beta - \cos 2\theta (3 \cos \beta - 1) \right\} = 0 \quad (2.3.51)$$

これより得られる  $\theta = \theta_0, \beta = \beta_0$  を式(2.3.29)および(2.3.27)の  $\tau_{r\beta}$  に代入すると、 $\tau_{r\beta, \max}$  として、

$$\tau_{r\beta, \max} = \frac{1}{2\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_{10} \sin \beta_0 \cos \frac{\beta_0}{2} - k_{20} (3 \cos \beta_0 - 1) \cos \frac{\beta_0}{2} \right]$$

を得る。ここに  $k_{10}, k_{20}$  は  $\theta = \theta_0$  に対応する  $k_1, k_2$  の値である。これは  $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$  の特異性を有するが、 $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\ell}} \tau_{\max}$  は有限値を取ると考えられるので、 $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\ell}} \tau_{r\beta, \max} = T_\sigma = \text{const.}$  (材料固有の強度)と置くと、せん断応力破壊規準は、

$$2\sqrt{\ell} T_{\sigma} = k_{10} \sin \beta_0 \cos \frac{\beta_0}{2} - k_{20} (3 \cos \beta_0 - 1) \cos \frac{\beta_0}{2} \quad (2.3.52)$$

と求められる。この式は (2.3.34) と類似している。

$T_{\sigma}$  を求めることは一般に困難なので、この代りに純せん断応力強度  $\tau$  を用いて表わすことを考える。一般にせん断による破壊発生応力はせん断応力強度より小さいので、式 (2.3.52) において、 $\sigma_1$ ,  $\sigma_3 = -\sigma_1$ ,  $\theta = 45^\circ$ ,  $\beta_0 = 0$  とすると、

$$T_{\sigma} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \kappa_s \tau$$

となる。なお、せん断強度  $T_{\sigma}$  としては、常に絶対値をとることにする。破壊規準は、式 (2.3.33)' の場合と同様、式 (2.3.52) で与えられる曲線のうちから、最小共通領域を含む複合曲線として求められる。更に、外荷重が引張領域では、最大引張応力によって破壊発生が生じると仮定すれば、これらに式 (2.3.34) を組み合わせて適用することができる。

破壊は一般には元のスリット面内には成長しないので、この破壊規準は破壊開始に関するものとなり、適用に際しては、2.3.1, 2.3.2 の場合と同様な注意が必要である。さらに異なった仮説として、破壊はクラックないしスリット面内に、せん断応力  $\tau_{xy}$  によって生じると考えよう。<sup>15)</sup> スリットに関する式 (2.3.28) において、 $\beta = 0$  とすると、

$$\tau_{xy} = \frac{-1}{\sqrt{2\varepsilon}} k_2 \quad (2.3.53)$$

i. e.

$$-2 T_{\sigma} = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta = 2 \kappa_s \tau \quad (2.3.53)'$$

を得る。

更に、簡単のために Mossakovski & Rybka あるいは Cherepanov の仮説<sup>16)</sup>、すなわち引張応力による破壊はクラック面内に生じるといふ仮説を用いれば、引張破壊開始規準は簡単になって、式 (2.3.38) から

$$\sqrt{\ell} N_{\sigma} = k_1 = \frac{\sqrt{\ell}}{2} \{ \sigma_1 + \sigma_3 - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta \} \quad (2.3.54)$$

i. e.

$$2N_{\sigma} = -2 \kappa_t \sigma_t = (\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta \quad (2.3.54)'$$

を得る。

傾き  $\theta$  のスリットからの破壊規準は、式 (2.3.53)' および (2.3.54)' の両者の小さい方で表わされることになる。この関係を図示すれば、Fig. 1.2.16 となる。

また、式 (2.3.53)' および (2.3.54)' の極値は、 $\frac{\partial T_{\sigma}}{\partial \theta} = 0$  および  $\frac{\partial N_{\sigma}}{\partial \theta} = 0$  より求められて、それぞれ、

$$\sigma_1 - \sigma_3 = -2T_\sigma = 2\kappa_s \tau \quad (2.3.55)$$

および

$$\sigma_3 = N_\sigma = -\kappa_t \sigma_t \quad (2.3.56)$$

となる。

き裂の成長は元のスリット面内にあると仮定しているので、式(2.3.55)、(2.3.56)は、クラックが成長しても、そのままの形で刻々の状態に対して適用できる。従って、 $\kappa_s = 1$  となり、この式は破壊開始と共に破壊伝播の規準をも与えるものと解釈される。Fig. 1.2.17 は式(2.3.55)および(2.3.56)を示したものである。

間隙水圧  $\sigma_p$  を考慮しなければならない場合には、2.3.1 の場合と同様  $\sigma_1$  および  $\sigma_3$  をそれぞれ  $\sigma_1 - \sigma_p$ 、 $\sigma_3 - \sigma_p$  と置き換えればよい。

なお、スリットの閉そくの影響を考慮するならば、2.3.2 の場合と同様に Fig.

1.2.7 において、 $p$  および  $q$  の代りにそれぞれ  $p - \sigma_n$  あるいは  $\sigma_{cl}$ 、および  $q - \sigma_f$ 、あるいは  $q - \mu(p - \sigma_{cl})$  と置き換えればよい。この場合には、 $k_1$ 、 $k_2$  は、式(2.3.46)で与えられる。

これらを式(2.3.52)に代入すると、対応するせん断破壊規準を得る。引張応力域では、既に述べた引張破壊規準式(2.3.34)を適用することもできる。さらに、Cherepanov の修正を考えると、式(2.3.53)に式(2.3.46)を代入して、

$$2T_\sigma = -2\kappa_t \sigma_t = \mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin 2\theta + \mu \cos 2\theta) \quad (2.3.57)$$

を得る。この式は 2.3.2 の式(2.3.42) 或いは (2.3.48) と極めて類似している。最大値は、 $\tan 2\theta = \frac{1}{\mu}$  で与えられるので、修正 Griffith 式に対応した式として、

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} = 2T_\sigma = -2\kappa_t \sigma_t \quad (2.3.58)$$

を得る。この式(2.3.58)と修正 Griffith 式(2.3.44)とは形式的には全く同じである。しか

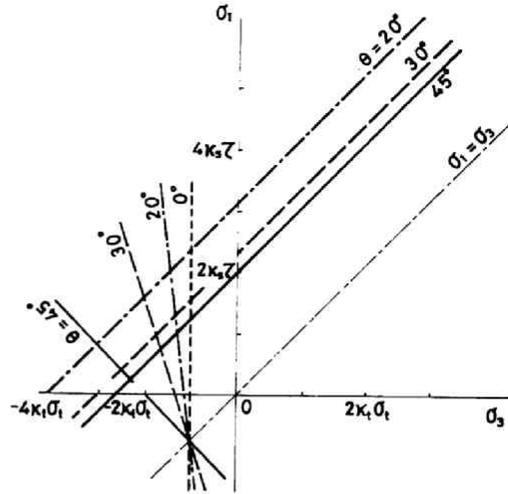


Fig. 1.2.16 Criteria for fracture initiation from a single mathematical slit derived with the maximum shear fracture hypothesis.

し前者は、材料固有のせん断応力破壊を、後者は引張応力破壊に基礎を置いていることが根本的に異なっている。式(2.3.58)では、スリットからのき裂の成長は元のスリット面内にあると仮定しているの、式(2.3.53)'の場合と同様にこの規準は破壊開始のみならず破壊伝播時の刻々の状態に対応する破壊規準をも示していることになる。終局破壊がこの破壊モードにのみ従うと仮定できれば、この規準は同時に終局破壊規準でもある。

#### 2.4 準微視的破壊規準と巨視的破壊規準の関係

2.2 で議論した巨視的破壊規準と 2.3 で検討した準微視的破壊規準の主なものを比較し、両者の関係を考察してみよう。比較の便のために、これらの主なものをまとめて再記すると以下のようである。

##### (i) 巨視的破壊規準

###### (a) Coulomb 式

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1+\mu^2}+\mu}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu} \sigma_3 + \frac{2C}{\sqrt{1+\mu^2}-\mu}$$

(2.2.11)

###### (b) Mohr 2 次式

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2\lambda(\sigma_1 + \sigma_3) + 4D - \lambda^2$$

(2.2.14)

##### (ii) 準微視的破壊規準

###### (a) Griffith 式

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0 \quad : \quad \sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t$$

(2.3.21)

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \geq 0 \quad : \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 8\kappa_t \sigma_t (\sigma_1 + \sigma_3) = 0$$

(2.3.22)

###### (b) 修正 Griffith 式 (圧縮応力域に対してのみ成立)

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1+\mu^2} = -4\kappa_t \sigma_t \sqrt{1 + \frac{\sigma_{cl}}{\kappa_t \sigma_t}}$$

(2.3.44)

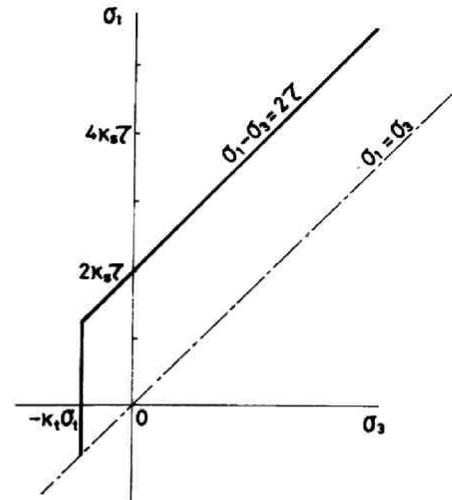


Fig. 1.2.17 Mossakovski-Rybka-Cherepanov criterion for fracture initiation.

(c) 一般 Griffith 式

$$\sigma_1 + \frac{3a+b}{a-b} \sigma_3 \leq 0 \quad : \quad \sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t - \sigma_1 \left( \frac{R-8}{R+4+4\sqrt{R+1}} \right) \quad (2.3.19)$$

$$\sigma_1 + \frac{3a+b}{a-b} \sigma_3 \geq 0 \quad : \quad (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - R \kappa_t \sigma_t (\sigma_1 + \sigma_3) = 0 \quad (2.3.20)'$$

$$R = \frac{\kappa_c \sigma_c}{\kappa_t \sigma_t}$$

(d) Mossakovski-Rybka-Cherepanov 式

$$\sigma_1 + \sigma_3 \leq 0 \quad : \quad \sigma_3 = -\kappa_t \sigma_t \quad (2.3.56)$$

$$\sigma_1 + \sigma_3 \geq 0 \quad : \quad \sigma_1 - \sigma_3 = 2 \kappa_s \tau \quad (2.3.55)$$

(e) 修正 Mossakovski-Rybka-Cherepanov 式 (圧縮応力域に対してのみ成立)

$$\mu (\sigma_1 + \sigma_3 - 2 \sigma_{c\ell}) - (\sigma_1 - \sigma_3) \sqrt{1 + \mu^2} = 2 \kappa_s \tau \quad (2.3.58)$$

なお、この他にスリット・モデルに基づいた Griffith 式 (2.3.34) およびその修正式 (2.3.52) があげられる。

これらの式を大別してみると、 $\sigma_1$  と  $\sigma_3$  との関係が直線的なものと、2次曲線で表わされるものとに分けられる。前者には、Coulomb式、修正 Griffith 式、一般 Griffith 式の第1式、Mossakovski-Rybka-Cherepanov 式およびその修正式などが属し、後者には、Mohrの2次式、Griffith式、一般 Griffith 式の第2式などが属している。従って、形の上では、第1グループは Coulomb式、あるいは

$$\sigma_1 = A \sigma_3 + B \quad (2.4.1)$$

で代表され、第2グループは Mohr の2次式あるいは

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 = C (\sigma_1 + \sigma_3) + D \quad (2.4.2)$$

に代表される。Brace は、Coulomb式と修正 Griffith 式との等価性<sup>17)</sup>を、また Murrell は Griffith 式から Mohr の2次式を導いている。<sup>18)</sup> 彼らは、 $\sigma_m$   $\tau_m$  平面上に表わした Coulomb および Mohr 2次式を用いているので見通しが悪く、誘導に手数を要したけれども、上記のような主応力表示を行なえば、証明するまでもなく一見して明らかである。例えば、Mohr の2次式 (2.2.14) と Griffith 式 (2.3.22) を比較すると、同者は、 $\lambda = -4 \kappa_t \sigma_t$ 、 $D = \frac{\lambda^2}{4} = 4 \kappa_t^2 \sigma_t^2$  とすれば一致することが直ちに分る。その他の式に関しても同様にして、等価性は容易に認められる。要するに、第一グループの破壊規準は Coulomb 式で、第2グループの破壊規準は Mohr の2次式で代表させることができる。

このようにして、巨視的破壊規準と準微視的破壊規準とは形の上では容易に関連づけられるので、前者

の物理的意味は準微視的な解釈に求めることができる。しかしながら、準微視的な破壊規準は微小潜在クラックからき裂が発生するための必要十分条件を与えるだけであり、その後のクラックの挙動に関しては何の情報も与えない。き裂の発生から終局破壊に至るまでの過程には、既に述べたように、クラックの閉そく、不安定き裂の発生と成長、それに伴う応力ないしひずみ場の変化、き裂の形状の変化、結合と相互干渉等々、終局破壊まで仮りに材料ないし要素が弾性的であると仮定しても、微視的には極めて複雑な伝播過程が存在する。したがって、一般に終局破壊規準と破壊開始規準とは一致しない。ここで見たように巨視的な破壊規準と準微視的な破壊開始規準とが等価であるということは、巨視的な破壊規準は破壊開始規準をも包含していることを意味している。すなわち、巨視的破壊規準は、材料定数2個を含んでいるが、これらを破壊開始時の特性を表わすものと考えれば破壊開始規準が求められ、また終局破壊時の特性を表わすものと解釈すれば終局破壊規準が求められることになる。従って、巨視的破壊規準の材料定数は一つの状態を表わすパラメーターと解釈することができる。破壊開始後の材料ないし系は微視的には刻々変化し、巨視的にはたとえ同一の形状を保ってはいても、材料ないし系自身の性質は最初のものとは次第に異なったものとなって来ている。従って、巨視的に同一の対象物を取り扱っていても破壊開始時の材料定数と任意時刻の材料定数とは、一般に異なっていると考えるべきである。この意味では、材料定数というよりも状態パラメーターと考えられるべきであろう。

さて、巨視的破壊規準の材料定数をこのように解釈すれば、巨視的破壊規準は破壊開始から終局破壊までの規準を表わしていることになる。

また、微視的破壊規準も、き裂発生時の応力と終局強度との比  $\kappa_i$ ,  $\kappa_c$  などをパラメーターとして含むことにより、 $\kappa_i$ ,  $\kappa_c$  などを実験的に定めれば、近似的に終局破壊を表わすことができる。また、 $\kappa_i$ ,  $\kappa_c$  を荷重履歴に依存するパラメーターと考えれば、これは逐次破壊規準でもある。このようにパラメーターの導入を行えば、いわゆる微視的破壊規準と巨視的破壊規準の差は全くなくなってしまうことに注意されたい。

なお、修正 Griffith 理論 ( $\kappa_i = \kappa_c = 1$ としている)は、一般に実験結果をよく説明すると言われているけれども、これは新しいパラメーターとして摩擦係数  $\mu$  を導入し、このパラメーターを巨視的な実験結果から逆に推定していることに原因がある。すなわち、このパラメーターは、微視的に見たき裂の発生から、終局破壊に至るまでの複雑な過程を全て総合した修正係数となっている。もしも、本来の意味に於て、摩擦係数と考えるならば、破壊開始の条件しか与えない修正 Griffith 理論が、更に複雑なクラック伝播過程をも含んだ終局破壊実験結果をよく説明できると考えること自体すでに、規準の適用範囲を越えた自己矛盾である。従って、修正 Griffith 理論における  $\mu$  は、上述のような総合パラメーターないし、修正係数と解釈する以外には論理的な説明ができない。逆に、このように解釈すれば、修正 Griffith 理論は最早や微視的破壊規準に止まらず、パラメーター  $\mu$  の値を適当に選ぶことにより任意時刻に対応する規準として考えることもできる。従って、これは物理的には、圧縮域のみに  $\kappa_c$  を導入したのと同じ効果となって表われる。

なお、これと全く逆に、機械的にき裂発生に必要な引張応力に補正を加えると同時に一軸圧縮の条件を

満足するように Griffith 式を修正すれば、圧縮域のみで適用できる式として、

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 - \sigma_c (1+k)(\sigma_1 + \sigma_3) - \sigma_c^2 k = 0$$

を得る。ここに  $k$  は、単なる修正係数であり、 $k=0$  とすれば Griffith 式に一致する。更に、準微視的破壊規準を種々の形で修正することは可能であるけれども、終局的には全て、Mohr の 2 次式、あるいは Coulomb 式と等価なものとなるのでこれ以上の具体的な議論はしない。

## 2.5 3次元主応力空間に表示した破壊規準—破壊曲面

岩質材料ならびにそれより成る系の一般的な破壊規準は、一般化した主応力ないし、主ひずみ空間内の凸曲面で表わされることは既に述べた。以下では、特に等方・均質岩質材料ないし、それより成る系の破壊曲面の具体的な形状について検討しよう。まず、対象とする材料ないし系の破壊強度は載荷履歴には影響されないと仮定する。一般にはこの仮定は正しくない。しかしながら載荷が比例的であるか、或いはそれに近い場合には、破壊強度はほぼ一義的に定められる。以下では特にこのような載荷を中心に議論を進めることにする。従って、破壊曲面は主応力ないし主ひずみ空間内に固定した曲面として表わされることになる。さらに、応力とひずみの関係は一義的に定められると仮定する。よって、破壊曲面は主応力空間内に表わすことができる。このような破壊曲面は対象とする材料ないし系の等方・均質性により、静水圧線を軸とし、主応力相互間に互換性のある凸曲面、すなわち静水圧線を 3 重対称軸とする凸曲面で表わされることになる。

さて、いま潜在クラックを含む 3 次元物体を考えると、最も危険な微小クラックは、中間主応力方向に平行な面（中間主応力面）内に潜在する 2 次元クラックであり、その応力集中度は中間主応力の影響を殆んど受けないことが知られている（附録 A.1 参照<sup>19)</sup>）。破壊はこのクラックの応力集中に起因すると考えられる。従って、破壊は最大および最小主応力のみの関数となり、中間主応力の影響を殆んど受けないと考えられる。また、破壊開始は中間主応力を含む面内に生じ、発生したき裂は一般にはこの面内に伝播すると考えられる。この考え方は破壊伝播過程全般を通じて適用され、終局破壊もまた、第一次近似としては最大および最小主応力の関数と考えることができるであろう。<sup>20)</sup> 以下、この考え方に基づいて、2.2、2.3 で述べた代表的な破壊規準を 3 次元主応力空間内に拡張してみよう。

### 2.5.1 3次元破壊規準の表示法

対象とする材料ないし系の等方・均質性の仮定から、破壊曲面は静水圧線に対して 3 重対称な曲面となっている。しかし 3 次元的な表示は困難であるので、破壊曲面をこの対称性に注目して 2 次元的に図示することを考えよう。<sup>21)</sup> 最も簡単な表わし方として、まず第一に静水圧線に垂直な平面、すなわち等圧面

( equipressure plane )  $\sigma_{ocl} = \frac{I_1}{3} = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \text{const.}$  による破壊曲面の切り口曲面

( 直截曲線 ; right sectional curve ) が考えられる。これは  $\sigma_{ocl}$  をパラメーターとして表わしているので、 $\sigma_{ocl}$  を適当に変化させることにより、破壊曲面の形状を知ることができる。この表示では静

水圧の影響が若干読み取り難いので、これを補うためには、静水圧を変数とするような表示、すなわち、静水圧線を含む平面による破壊曲面の切り口曲線を考えればよいであろう。特にこのうち、三軸圧縮ならびに伸張試験に対応するもの、すなわち、静水圧線と一主応力軸を含む平面 (Rendulic 応力面) による破壊曲面の切り口曲線は Rendulic の応力曲線と呼ばれている。

これらの表示法はいずれも静水圧線の対称性に注目しているので、これを軸とするような直交座標系を用いて、これらの切り口曲線を表現すれば簡単な形になることが予想される。このために、まず Fig. 2.5.1 のように座標系  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  から  $(\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3)$  へ次のような座標変換を行なう。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \end{pmatrix} \quad (2.5.1)$$

あるいは

$$\begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ \sigma'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix} \quad (2.5.1)'$$

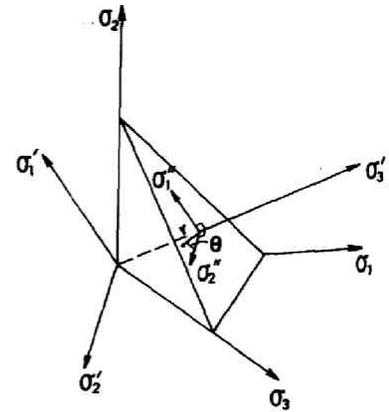


Fig. 1.2.18 Transformation of coordinates.

$\sigma'_3$  軸は静水圧線と一致し、 $\sigma'_1$  軸は  $\sigma'_3$  に垂直で、かつ  $\sigma_2$  および  $\sigma'_3$  軸を含む面内にある座標軸である。 $\sigma'_2$  軸は  $\sigma'_1$  軸および  $\sigma'_3$  軸に直交している。この座標変換を用いると、等圧面は  $\sigma'_3 = \text{const.}$  と表わせる。また、この等圧面、 $\sigma'_1 - \sigma'_2$  平面は、 $\sigma_1 - \sigma_2$  平面と平行であり、八面体面 (octahedral plane) のうちの一つである。なお、塑性力学関係では、 $\sigma'_1 - \sigma'_2$  平面は  $\pi$  面とも呼ばれている。

等圧面は、主応力の大きさの順序によって更に Fig. 1.2.19 に示す6つの応力領域に分けられる。等方・均質材料ないし系を対象とする場合には、主応力間の互換性により実際には、このうちの一つの破壊曲面を求めれば十分である。

さて、次に Fig. 1.2.19 において、原点を同じくし、軸方向を  $\sigma_3'$  とし、 $\sigma_2'$  軸から時計回りに極角を取る円柱座標を考える。動径、すなわち静水圧線  $\sigma_3'$  から或る応力点に至る距離  $r$  は

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(\sigma_1'')^2 + (\sigma_2'')^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} (I_1^2 - 3 I_2) \quad (2.5.2) \end{aligned}$$

で与えられ、また原点から等圧面までの距離  $d$  は

$$\begin{aligned} d = \sigma_3' &= \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \\ &= \sqrt{3} \sigma_{oct} = \frac{I_1}{\sqrt{3}} \quad (2.5.3) \end{aligned}$$

で与えられる。一方、極角  $\theta$  は

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_1''}{\sigma_2''} \right) = \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] = \tan^{-1} \left( -\frac{\lambda}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.5.4)$$

となる。ここに  $\lambda = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$  は Lode のパラメーターといわれている。

これらの関係は、また次のように表わすこともできる。すなわち、中間主応力  $\sigma_2$  の大きさを表わす一つのパラメーター  $m$  を用いて、

$$\sigma_2 = \sigma_3 + m (\sigma_1 - \sigma_3), \quad 0 \leq m \leq 1 \quad (2.5.5)$$

と表わすと、 $m=0$  はいわゆる三軸圧縮試験 ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$ ) に、 $m=1$  とすると三軸伸張試験 ( $\sigma_1 = \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) に対応している。式 (2.5.5) を式 (2.5.2) ~ (2.5.4) に代入すると、 $r$ 、 $d$ 、 $\theta$  はそれぞれ次のようにも表わせる。

$$r = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{1+m+m^2} (\sigma_1 - \sigma_3) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1+m+m^2} \sigma_2' \quad (2.5.2)'$$

$$d = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ (1+m) \sigma_1 + (2-m) \sigma_3 \} = \sigma_3' \quad (2.5.3)'$$

$$\theta = \tan^{-1} \left\{ -\frac{2m-1}{\sqrt{3}} \right\} = \tan^{-1} \left( \frac{1-2m}{\sqrt{3}} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{\sigma_1''}{\sigma_2''} \right) \quad (2.5.4)'$$

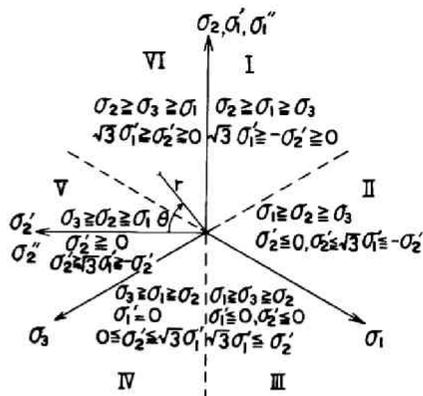


Fig. 1.2.19 Six regions of an equipressure plane.

主応力空間内の任意点  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  は、上述の新しい座標系  $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$  あるいは  $(r, \theta, d)$ 、すなわち  $(\sqrt{3} \tau_{oct}, \tan^{-1}(-\frac{\lambda}{\sqrt{3}}), \sqrt{3} \sigma_{oct})$  を用いて表わすことも容易である。従って、破壊曲面は、主応力座標系の代りにこの新しい円柱座標系を用いても便利に表わすことができる。特に、破壊曲面が静水圧線に対して完全対称、すなわち  $\theta$  に無関係ならば、破壊曲面は  $\sqrt{3} \tau_{oct}$  と  $\sqrt{3} \sigma_{oct}$  の関係だけで表現することができる。この関係で表わしたものは Nadai の八面体せん断応力規準 (octahedral shear stress failure criterion) と呼ばれている。

既に述べたように、岩質材料ないしその系の破壊には、破壊開始から終局破壊に至るまで、中間主応力の影響は極めて小さいと考えられるので、まず、2.2、2.3 の最大・最小主応力で表示した破壊規準の代表的なものを、3次元空間へ形式的に拡張してみよう。

### 2.5.2 Coulomb 式の拡張<sup>22)</sup>

Coulomb 式 (2.2.14) を、式 (2.5.1) を用いて書き直すと

$$\sigma_1' = \sqrt{3} \frac{\sqrt{1+\mu^2}}{\mu} \sigma_2' + \sqrt{2} \sigma_3' + \sqrt{6} \frac{C}{\mu} \quad (2.5.6)$$

を得る。この式の適用範囲は、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 、すなわち、Fig. 1.2.19 の応力領域 II であるが、等方性の仮定から、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  をサイクリックに置換することにより、全応力領域に適用することができる。さて、式 (2.5.6) に於て、 $\sigma_3' = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \text{const.}$  とすると、等圧面上の切口曲線 (直截面) が得られる。これは  $\sigma_1'$  と  $\sigma_2'$  に関する直線関係式となり、 $\sigma_1'' \sigma_2''$ -平面上の 2 点  $(\sqrt{\frac{2}{3}} I_1 + \sqrt{6} \frac{C}{\mu}, 0)$  および  $[0, -(\frac{\sqrt{2}}{3} I_1 + \sqrt{2} \frac{C}{\mu}) \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}]$  を通る直線となること分る。

次に、三軸圧縮ならびに伸張試験に対応する切り口曲線、すなわち Rendulic の応力曲線を求めてみよう。

(a) 圧縮試験に対しては、 $\theta = 30^\circ$ 、従って  $\sigma_2' = \sqrt{3} \sigma_1'$  となる。

これを式 (2.5.6) に代入して、

$$(3\sqrt{1+\mu^2} - \mu) \sigma_1' + \sqrt{2} \mu \sigma_3' + \sqrt{6} C = 0 \quad (2.5.7)$$

(b) 伸張試験に対しては  $\theta = -30^\circ$ 、従って  $\sigma_2' = -\sqrt{3} \sigma_1'$  となる。よって、

$$-(3\sqrt{1+\mu^2} + \mu) \sigma_1' + \sqrt{2} \mu \sigma_3' + \sqrt{6} C = 0 \quad (2.5.8)$$

式 (2.5.6) ~ (2.5.8) により表わされる破壊曲面の切り口曲線の概形は Fig. 1.2.20 に示したようになる。なお、 $I_1 = \text{const.}$ 、すなわち主応力とを一定とした場合の、三軸圧縮試験および伸張試験に対する  $\sqrt{3} \tau_{oct}$  をそれぞれ、 $r_{compr.}$  および  $r_{ext.}$  とすると、式 (2.5.2) および (2.

5.7), (2.5.8) を用いて

$$\frac{r_{compr.}}{r_{ext.}} = \frac{3\sqrt{1+\mu^2} + \mu}{3\sqrt{1+\mu^2} - \mu} \quad (2.5.9)$$

を得る。

この式において  $\mu = 1$  とすると,  $r_{compr.}/r_{ext.} \doteq 1.645$  に, また,  $\mu = 0$  および  $\infty$  に対しては, それぞれ

$r_{compr.}/r_{ext.} = 1.0$  および  $2.0$  となる。前者は Tresca の条件に, 後者は最大引張ひずみ一定説に一致する。

次に異なった表示法として, 式 (2.5.2)' ~ (2.5.4)' を用いて  $d$  と  $r$  との関係, すなわち,

静水圧線を含む平面による破壊曲面の切り口曲線を求めてみよう。式 (2.5.2)', (2.5.3)' から

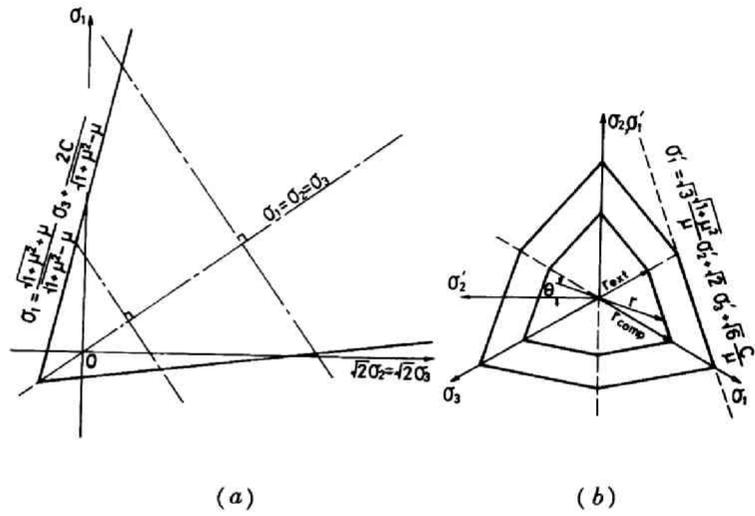


Fig. 1.2.20 Cross sections of fracture surface (the extended Coulomb criterion) cut by Rendulic plane (a) and equipressure planes (b).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{2-m}{\sqrt{2(1+m+m^2)}} r + d \right\} \\ \sigma_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{-(1+m)}{\sqrt{2(1+m+m^2)}} r + d \right\}, \\ \sigma_m &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1-2m}{2\sqrt{2(1+m+m^2)}} r + d \right\} \\ \tau_m &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2(1+m+m^2)}} r \end{aligned} \right\} \quad (2.5.10)$$

を得る。これらを式(2.2.22)に代入すると

$$d = \frac{1}{2\sqrt{2(1+m+m^2)}} \{3\sqrt{1+\mu^2} - \mu(1-2m)\} r - \sqrt{3} C \quad (2.5.11)$$

となる。この式は、 $(d, r)$  座標において、 $(-\sqrt{3}C, 0)$  および  $(0, \frac{2\sqrt{6(1+m+m^2)}C}{3\sqrt{1+\mu^2}-\mu(1-2m)})$

を通る直線を表わしている。式(2.5.11)の関係を図示すれば Fig. 1.2.21 のようになる。

### 2.5.3 Mohrの2次式の拡張<sup>23)</sup>

Mohrの2次式(2.2.17)を、 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ を用いて表わすと、

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{(\sigma_2')^2}{\lambda} \\ &+ \sqrt{2} \sigma_3' + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} (4D - \lambda^2) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

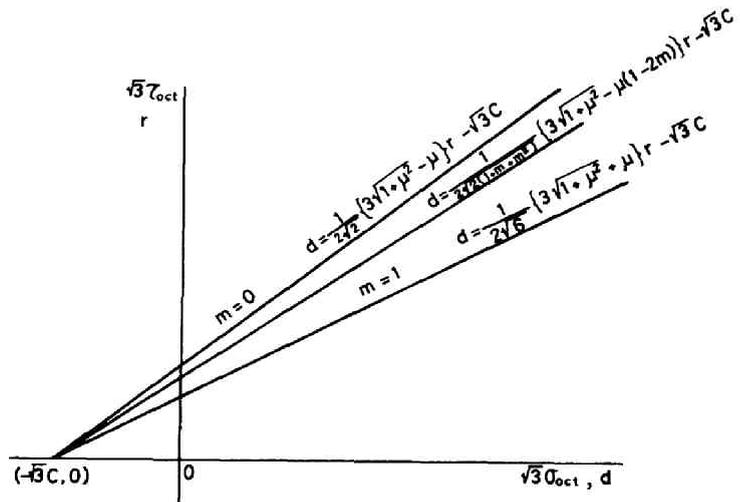


Fig. 1.2.21 Extended Coulomb criterion represented in the octahedral stress  $(\sigma_{oct} - \tau_{oct})$  plane.

となる。この式の適用範囲は  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  であるけれども、2.5.2の場合と同様全応力域に適用される。この式は  $\sigma_1''$

$\sigma_2''$ -平面上で  $\sigma_1'$  軸を対称軸とし、 $\{ \sqrt{\frac{2}{3}} I_1 + \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{3}{2}} (4D - \lambda^2), 0 \}$  を頂点とする放物線を表わしている。

Rendulicの応力曲線は

$$\sigma_3' = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{(\sigma_1')^2}{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1' - \frac{\sqrt{3}}{4\lambda} (4D - \lambda^2) \quad (2.5.13)$$

となる。 $\sigma_1' \leq 0$  は圧縮試験に、 $\sigma_1' \geq 0$  は伸張試験にそれぞれ対応している。式(2.5.12)および(2.5.13)から得られる切り口曲線の概形を Fig. 1.2.22 に示す。なお、三軸圧縮試験お

よび伸張試験に対応する

$\sqrt{3} \tau_{oct}$  の間には,

$$\begin{aligned} r_{compr.} &= r_{ext.} \\ &+ \frac{2\sqrt{6}}{9} \lambda \doteq r_{ext.} \\ &+ 0.544 \lambda \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

という関係が成立する。

$\lambda=0$  とすると,  $r_{compr.}$

$= r_{ext.}$  となる。

Von Mises-Huber-

Hencky 式, 或いは

Nadai の八面体せん断応

式はいずれも  $\lambda$  に無関

係であるので,  $r_{compr.}$

$= r_{ext.}$  となっている。

Mohr の 2 次式 (2.2.

23) を,  $r$  と  $d$  とを

用いて表わせば

$$d = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{1}{\lambda(1+m+m^2)} r^2 - \frac{1-2m}{2\sqrt{2}(1+m+m^2)} r + \sqrt{3} \left( \frac{\lambda}{4} - \frac{D}{\lambda} \right) \quad (2.5.15)$$

を得る。この式は,  $(d, r)$  座標で  $y = \frac{(1-2m)\sqrt{2(1+m+m^2)}}{3\sqrt{3}} \lambda$  を対称軸とし,  $(-\frac{\lambda}{12\sqrt{3}}$

$\{ (1-2m)^2 - 36(1 - \frac{4D}{\lambda^2}) \}$ ,  $\frac{(1-2m)\sqrt{2(1+m+m^2)}}{3\sqrt{3}}$  を頂点とする放物線を表わして

いる。式 (2.5.15) は  $0 \leq m \leq 1$  の全ての  $m$  に対応する曲線群を表わしており, この曲線群は

全て  $(0, \sqrt{3}(\frac{\lambda}{4} - \frac{D}{\lambda}))$  で交わることになる。式 (2.5.15) の関係を示すと Fig.1.2.23

のようになる。

#### 2.5.4 代表的な準微視的破壊規準の拡張

2.4 において, 準微視的な破壊規準は, Coulomb および Mohr の 2 次式で代表される 2 つのグループに大別され, それぞれのグループはこの両者に等価であることを述べた。従って, これら準微視的破壊規準

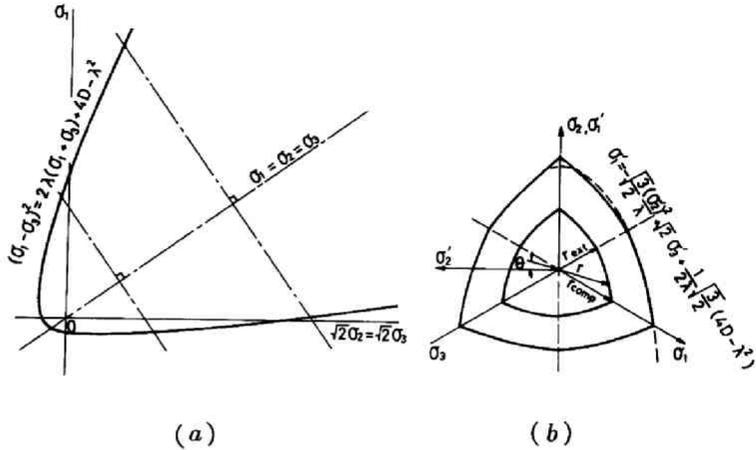


Fig. 1.2.22 Cross sections of fracture surface (the extended Mohr criterion) cut by Rendulic plane (a) and equipressure planes (b)

の3次元への拡張も同様にCoulombおよびMohr 2次式の拡張で代表させることができる。以下では、特に代表的な準微視的破壊規準、すなわち一般化した Griffith ならびに修正 Griffith 規準について述べるにとどめる。

(i) 一般 Griffith 式の拡張

一般 Griffith 式は、2つの異なった規準で規定されているので破壊曲面も2種類の合成曲面で表わされると考えられる。

式(2.3.19)および(2.3.20)を適用範囲を示す条件と共に、

$\sigma_1'$ ,  $\sigma_2'$ ,  $\sigma_3'$  を用いて書き表わすと次のようになる。

$$(a) \quad \frac{4}{1-r} (-\sigma_1' + \sqrt{2} \sigma_3') + 2\sqrt{3} \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \sigma_2' \leq 0 \quad \text{に対して}$$

$$(1+T) \sigma_1' - \sqrt{3} (1-T) \sigma_2' = \sqrt{6} \kappa_t \sigma_t + \sqrt{2} (1+T) \sigma_3' \quad (2.5.16)$$

$$(b) \quad \frac{4}{1-r} (-\sigma_1' + \sqrt{2} \sigma_3') + 2\sqrt{3} \left(\frac{1+r}{1-r}\right) \sigma_2' \geq 0 \quad \text{に対して}$$

$$\sigma_1' = -\sqrt{6} \frac{(\sigma_2')^2}{R \kappa_t \sigma_t} + \sqrt{2} \sigma_3' \quad (2.5.17)$$

ここに

$$r = \frac{b}{a}, \quad T = \frac{R-8}{R+4+4\sqrt{R+1}}, \quad R = \frac{\kappa_c \sigma_c}{\kappa_t \sigma_t}$$

である。

式(2.5.16)は  $\sigma_1''$   $\sigma_2''$ -平面上の2点  $(+\frac{\sqrt{6}}{1+T} \kappa_t \sigma_t + \sqrt{\frac{2}{3}} I_1, 0)$  および  $(0,$

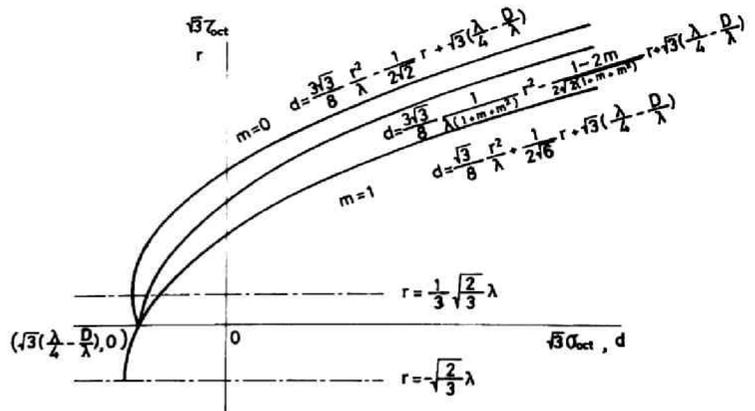


Fig.1.2.23 Extended Mohr criterion represented in the octahedral stress ( $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ ) plane .

$-\frac{2\sqrt{2}}{1-T} \kappa_t \sigma_t - \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{1+T}{1-T} I_1$ ) を通る直線式を、また、式 (2.5.17) は  $\sigma_1''$  軸を対称軸とし  $(\sqrt{\frac{2}{3}} I_1, 0)$  を頂点とする放物線を示している。この両曲面は

$$\sigma_2' = -\frac{R \kappa_t \sigma_t}{2\sqrt{2}} \frac{1-T}{1+T} \quad (2.5.18)$$

上で滑らかに接続している。このことは、式 (2.5.18) 上で両者の外向き法線ベクトルが一致することから次のように容易に証明される。すなわち、式 (2.5.16) および (2.5.17) の外向き法線ベクトルは、 $\sigma_1'$ 、 $\sigma_2'$ 、 $\sigma_3'$  方向の単位ベクトルを  $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$  とすると、それぞれ、

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i} - \sqrt{3} \frac{1-T}{1+T} \mathbf{j} - \sqrt{2} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + 2\sqrt{6} \frac{\sigma_2'}{R \kappa_t \sigma_t} \mathbf{j} - \sqrt{2} \mathbf{k}$$

で与えられる。一方、接続線は式 (2.5.18) より  $\sigma_2' = -\frac{R \kappa_t \sigma_t}{2\sqrt{2}} \frac{1-T}{1+T}$  で与えられているので、

これを上式に代入すると両者は一致することが分かる。以上の諸式の有効域は、 $|\theta| \leq 30^\circ$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ) であるが、応力の互換性により前述のように全領域に容易に拡張して適用される。

Rendulic の応力曲線は次のように与えられる。

(a) 圧縮試験

$$\left(1 + \frac{3}{r}\right) \sigma_1' + 2\sqrt{2} \sigma_3' \leq 0 :$$

$$(4T-2) \sigma_1' = \sqrt{2} (1+T) \sigma_3' + \sqrt{6} \kappa_t \sigma_t \quad (2.5.19)$$

$$\left(1 + \frac{3}{r}\right) \sigma_1' + 2\sqrt{2} \sigma_3' \geq 0 :$$

$$\sigma_1' = -3\sqrt{6} \frac{(\sigma_1')^2}{R \kappa_t \sigma_t} + \sqrt{2} \sigma_3' \quad (2.5.19)'$$

(b) 伸張試験

$$-\left(5 + \frac{3}{r}\right) \sigma_1' + 2\sqrt{2} \sigma_3' \leq 0 :$$

$$(4-2T) \sigma_1' = \sqrt{2} (1+T) \sigma_3' + \sqrt{6} \kappa_t \sigma_t \quad (2.5.20)$$

$$-\left(5 + \frac{3}{r}\right) \sigma_1' + 2\sqrt{2} \sigma_3' \geq 0 :$$

$$\sigma_1' = -3\sqrt{6} \frac{(\sigma_1')^2}{R \kappa_t \sigma_t} + \sqrt{2} \sigma_3' \quad (2.5.20)'$$

静水圧線から、破壊曲面までの距離は、圧縮試験の場合、伸張試験の場合に対してそれぞれ  $r_{compr.}$ ,  $r_{ext.}$  とすると、式 (2.5.19), (2.5.20) に対応して、(主として引張域で成立)

$$\frac{r_{compr.}}{r_{ext.}} = \frac{T-2}{2T-1} \quad (2.5.21)$$

また、式 (2.5.19)', (2.5.20)' に対応して、

$$r_{compr.} = r_{ext.} + \frac{2R\kappa_t\sigma_t}{3\sqrt{6}} = r_{ext.} + \frac{\sqrt{6}}{9}R\kappa_t\sigma_t \doteq r_{ext.} + 0.272R\kappa_t\sigma_t \quad (2.5.22)$$

という関係が求められる。式 (2.5.16), (2.5.17) で与えられる破壊曲面の概形を Fig. 1.2.24 に示す。なお一般 Griffith 式において、特に、 $\frac{b}{a} \equiv r \rightarrow 0$ ,  $\kappa_t = \kappa_c = 1$  とすると、Griffith の式が次のように得られる。<sup>24)</sup> この場合には  $T \rightarrow 0$ ,  $R = 8$  となる。

$$(a) \quad 2(-\sigma_1' + \sqrt{2}\sigma_3') + \sqrt{3}\sigma_2' \leq 0:$$

$$\sigma_1' - \sqrt{3}\sigma_2' = +\sqrt{6}\sigma_t + \sqrt{2}\sigma_3' \quad (2.5.23)$$

$$(b) \quad 2(-\sigma_1' + \sqrt{2}\sigma_3') + \sqrt{3}\sigma_2' \geq 0:$$

$$\sigma_1' = -\sqrt{6}\frac{(\sigma_2')^2}{8\sigma_t} + \sqrt{2}\sigma_3' \quad (2.5.24)$$

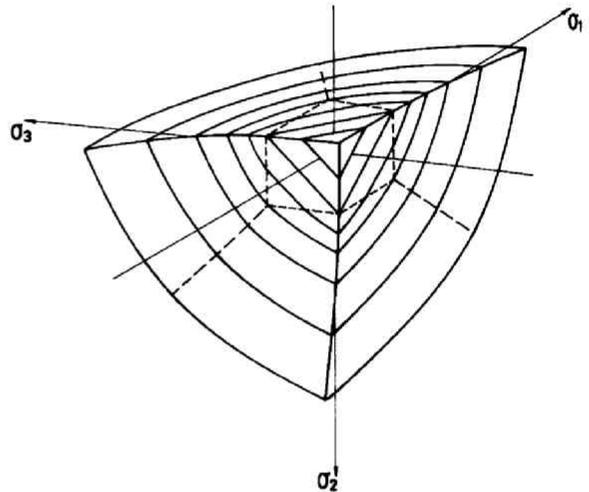


Fig. 1.2.24 Schematic view of fracture initiation surface.

式 (2.5.23) および (2.5.24) で表わされる両曲面は、 $\sigma_2' = -2\sqrt{2}\sigma_t$  で滑らかに接続している。その他の関係も全て一

般 Griffith 式において、 $\frac{b}{a} \rightarrow 0$ ,  $\kappa_t = \kappa_c = 1$ ,  $T \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow 8$  としたものとなる。

次に、一般 Griffith 式を  $d$  と  $r$  との関係で表わしてみよう。式 (2.5.10) を一般 Griffith 式 (2.3.19)', (2.3.20)' に代入すると、

$$2\sqrt{2}(R-2+2\sqrt{R+1})\sqrt{1+m+m^2}d + \{(R-2+2\sqrt{R+1})(1-2m) - 6(3+\sqrt{R+1})\}r = -\sqrt{6}(R+4+4\sqrt{R+1})\sqrt{1+m+m^2}\kappa_t\sigma_t \quad (2.5.25)$$

$$4(1+m+m^2)\kappa_c\sigma_c d - 3\sqrt{3}r^2 + \sqrt{2(1+m+m^2)}(1-2m)\kappa_c\sigma_c r = 0 \quad (2.5.26)$$

これらの式は、それぞれ

$$\{2a(1-2m) - 3(a+b)\}r + 4a\sqrt{2(1+m+m^2)}d \leq 0 \quad (2.5.27)$$

および

$$\{2a(1-2m) - 3(a+b)\}r + 4a\sqrt{2(1+m+m^2)}d \geq 0 \quad (2.5.28)$$

に於て成立する。

Griffith 式の場合には、式(2.5.25)～(2.5.28)において、 $b/a \rightarrow 0$ 、 $\kappa_t = \kappa_c = 1$ 、 $R \rightarrow 8$  とすればよく、それぞれ次のように与えられる。

$$4\sqrt{2(1+m+m^2)}d - (1+4m)r \leq 0 \text{ では} \\ \sqrt{2(1+m+m^2)}d - (1+m)r = -\sqrt{6(1+m+m^2)}\sigma_t \quad (2.5.29)$$

$$4\sqrt{2(1+m+m^2)}d - (1+4m)r \geq 0 \text{ では} \\ 4(1+m+m^2)\sigma_c d - 3\sqrt{3}r^2 + \sqrt{2(1+m+m^2)}(1-2m)\sigma_c r = 0 \quad (2.5.30)$$

曲線(2.5.25)と(2.5.26)とは、式(2.5.27)の等号で表わされる直線式上の点で、滑らかに接続していることが容易に確かめられる。(破壊曲面が滑らかに接続していることを既に証明してあるので、ここでは証明は不必要であろう)。式(2.5.25)～(2.5.30)の関係を一括して Fig. 1.2.5 に示す。

#### (ii) 修正 Griffith 式の拡張

修正 Griffith 式より導かれる破壊曲面は、Coulomb 式との等価性を考慮すると、2.5.2 の結果をそのまま用いることができる。この際には修正 Griffith 式では  $C$  の代りに  $\mu\sigma_{ct} + 2\kappa_t\sigma_t\sqrt{1 + \frac{\sigma_{ct}}{\kappa_t\sigma_t}}$  と置き代えるだけでよい。

## 2.6 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の逐次破壊

ぜい性破壊には、第1章で述べたように、破壊開始から逐次破壊(破壊伝播)を経て終局破壊に至る過程が存在する。破壊開始に比して、後二者は極めて複雑な過程を含んでおり、不明な部分が多い。本章では、これまで単一クラックないし単一スリットに基づく準微視的破壊規準を展開して来たが、これらは、一般には破壊開始の規準を与えるのみで、破壊伝播をも含めて適用することはできない。

一般にき裂の発生方向は、Fig. 1.2.5 からも明らかなように、元のクラックないしスリット面内にはなく、また発生したき裂は、荷重増加につれて次第に最大圧縮応力方向に平行になるように成長する。

き裂の伝播に要する応力は Fig. 1.2.3 からも明らかなように、き裂が成長し、最大圧縮軸との傾

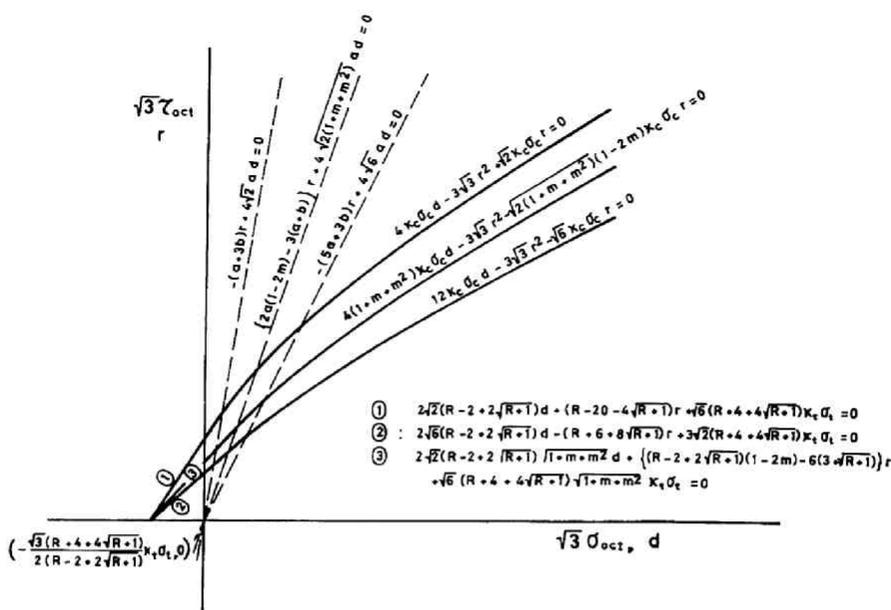


Fig. 1.2.25 Extended Griffith criterion represented in the octahedral stress ( $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$ ) plane.

きが小さくなるにつれて、急激に増大する。

単一クラックから、き裂がこのような過程により発生伝播して、終局破壊に至るという機構を仮定すれば、終局破壊時には、破壊開始に必要な応力に比して数倍も数十倍も大きな応力が必要となる。しかしながら、一方では、ぜい性破壊に関する実験事実によると、終局破壊強度は、圧縮では破壊開始強度の約 1.5~1.8 倍 ( $\kappa_c \doteq 0.6 \sim 0.7$ ) という結果が求められている。上述のような単一クラック・モデルによる破壊の機構では、この点の説明が困難である。この事実は、Griffith の概念を拡張して適用すれば、次のように説明されよう。<sup>25)</sup>

岩質材料ないしそれより成る系には、ランダムな形状、寸法および分布を示す欠陥が潜在する。今、最も簡単なモデル化として、これを、同程度の寸法の楕円クラックをランダムに含むモデルとして考えてみよう。

これらのクラックには Griffith の基本仮定 (2.3.1 (a) ~ (e)) をそのまま適用するものとする。クラックそれぞれが単独に含まれていると考えたモデルの破壊開始の規準は、既に 2.3.1 で述べたように式 (2.3.1) に  $\theta_0, \nu_0$  を代入して、また、き裂の発生角は式 (2.3.8) で与えられる。これらを

図示すると、Fig. 1.2.3～1.2.5 のようになる。

さて、多数のクラックをランダムに含むモデルを考えると、このモデルの破壊規準は、クラック間の相互干渉はないと仮定しているの、これらの全てのクラックに対応する破壊規準を全部重ね合わせたものと考えられる。

破壊開始は、これらのうち最も危険なものから発生する。

今、Fig. 1.2.4 (a) において或る載荷径路、例えば A B C D E …… に沿って応力が増加すると、まず C 点で  $\theta = 30^\circ$  の場合の曲線と C 点で交る。すなわち、この応力状態で、 $\theta = 30^\circ$  の傾きを成すクラックにき裂が発生する。これは、対象としたモデルの破壊開始を意味している。更に応力が増加すると、このき裂は若干成長するが、この間に次に危険な傾き  $\theta = 40^\circ$  のクラックから、き裂が発生する。

更に応力が増加すると、第 3 番目に危険なクラックからき裂が発生し、成長する。

き裂成長が、最大主応力軸と次第に平行になるにつれて、き裂成長のためには更に大きい応力が必要となる。実際には、この間に、順次危険なクラックからき裂の発生が相次いで生じることになり、モデル内には、最大主応力軸に平行なき裂が多数発生することになる。この過程が進むにつれてクラック間の相互干渉がないという仮定は次第に成立し難くなり、多数のき裂が発生した部分では、局所的な不安定域（破壊域）が形成されることになるであろう。更に荷重が増加すれば、この局所的な不安定域は、次第に発達し、また新しい不安定域が出現し、これらの相互干渉の結果、系全体としても不安定になり終局破壊に至ることになる。異なった載荷径路によれば、異なった逐次破壊過程が生じることになろう。また、破壊伝播過程は、初期欠陥の分布だけでなく、発生したき裂の成長と分布、同時に局所的な安定性にも支配されるであろう。

実際の岩質材料ないしそれより成る系では、初期欠陥は、ランダムな形状、寸法であり、またランダムに分布すると考えられるので、破壊伝播過程は更に複雑となる。しかしながら、破壊伝播の特性はこの簡単なモデルで一応は捉えられていると考えてよいであろう。

なお、修正 Griffith 理論を適用して、破壊伝播を説明することも試みられる。しかし、岩質材料ないしそれより成る系内にランダムな寸法の偏平クラックがランダムに潜在すると仮定し、修正 Griffith 理論のように、最も危険な方向および寸法の偏平クラックが閉そくしたとしても、実際には、この閉そくクラックからき裂が発生する以前に、次に危険であったクラックからのき裂発生が予想される。従って、ランダムに分布した偏平クラックを含む材料ないし系からの破壊開始の規準としては修正 Griffith 理論は適当でない。もし仮りにクラックが閉そくするとしても、閉そくクラックの摩擦係数はそれぞれ異なったものであり、単一クラックに基づく理論を拡張して適用することも困難である。

巨視的破壊規準は、このような内部機構の問題を表わすように、材料状態パラメーターを適当に取ることによって、全ての過程を表わすと見ることができる。現実の問題としては、このパラメーターを求めることは容易ではないが、実験的に、或いは Griffith 理論の拡張を基に推定されることになるであろう。

なお、ここで述べた破壊開始から終局破壊に至る破壊の全過程に関する概念は実験的にも確められてい

る。これに関しては第Ⅱ部で詳述する。

## 2.7 等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の一般的な破壊規準

等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の破壊規準は一般的には3次元主応力空間内の凸曲面として表示することができる。その概形は、2.5で議論した具体的な破壊曲面の特性に関する結果を総合して判断すると、次のようなものが考えられる。

“破壊開始規準は、3次元主応力空間内に静水圧線を3重対称軸とするような凸曲面で表わされ、この曲面は次のように滑らかに接続した2種類の面から成っている。その一つは、3組の平面から成り、その直断面の形状は正三角形である。他の一つは、静水圧の増加に伴って、ほぼ等方的に膨脹するような曲面であり、その直断面の形状は正三角形よりやや膨らんだものである。”

この破壊曲面の概形は、Fig. 1.2.24を見れば容易に理解されよう。この破壊開始曲面は、拡張した Griffith 規準より得られる曲面に類似したものとなろう。しかしながら、逐次および終局破壊曲面は複雑な破壊伝播過程を経るため、拡張した Griffith の曲面に比して、一般には静水圧の増加と共に速やかに膨脹する曲面となる。なお、破壊曲面の概形は、最大・最小主応力による2次元表示からある程度推察することもできる。三軸圧縮試験および伸張試験は、一般三軸圧縮試験として考え得る応力状態の両極端を示しており、破壊曲面の凸性を考慮すると、両者を基に破壊曲面の概形を推定することは充分可能である。

本章では、一般的な立場から岩質材料およびそれより成る等方・均質系の破壊規準について議論し、一般的な形の破壊規準を提案した。これが実際の岩質材料の破壊をよく説明するか否かは、個々の材料ないし系について検証する以外に方法はない。この点については第Ⅱ部で詳細に検討する。

### 第3章 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊規準

#### 3.1 はじめに

堆積岩とか広域変成作用を受けた岩石には、一般に卓越した層理や片理が見られるのが普通であり、また、一方、大きな規模で眺めると、等方・均質に近い岩石から成る系においても一般に節理やき裂、あるいは断層などが存在し、そのために系全体としては卓越した方向性を示すのが普通である。これら層理や片理、あるいは節理、き裂、断層などは力学的に見ると全て不連続な弱面ないし弱層を形成しており、その結果、これらを含む岩石あるいは系は異方性挙動を呈し、強度特性にも卓越した方向性、いわゆる異方性強度が現われることがよく知られている。しかしながら、如何なる条件の下で、如何なる機構によって異方性強度が現われるかに関しては、まだ不明の部分が多い。

既に2.1で述べたように一般的に岩質材料ないしそれより成る系は、微視的にみれば異方性、非均質性である。しかしながら、異方性・非均質性材料ないし系として解析を行なうことは極めて困難であるので、材料ないし系についての或る程度の理想化、単純化が必要となる。前章においては、対象とする材料ないし系について等方・均質という仮定の下に破壊規準を考察した。本章では、単純化の度合を若干緩和して、対象とする材料ないし系の構造組織が対象とする寸法に比して十分小さく、巨視的な均質性が保証されると仮定して、異方性・均質材料ないし系の破壊規準を考察する。

現在までに提案された異方性破壊規準としては、JaegerによるCoulomb式<sup>1)</sup>の拡張、およびHoek、およびWalsh & Brace<sup>3)</sup>のGriffithおよび修正Griffith理論<sup>2)</sup>の拡張があげられよう。これらはいずれも2次元理論である。

本章では、まず簡単な力学モデルに基づいて2次元異方性体の破壊規準を検討し、ついでこれらのうち代表的なものを3次元応力空間に拡張する。最後に、これらの結果に基づいて一般的な異方性破壊規準を提案する。

#### 3.2 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の2次元破壊規準

破壊規準は既に第1章および2.2で議論したところにより、最も一般的には式(1.3.1)あるいは(1.3.2)の形に表わされる。特に、一様応力状態を生じるような比例載荷、あるいはそれに近い載荷経路による場合には、破壊曲面は主応力空間内に固定されたものとなり、異方性材料ないし異方性系の一般的な破壊曲面は式(1.3.2)ないし(1.3.4)で表わされることになる。異方性岩および異方性系の一様な破壊規準を論じる場合、2次元、特に平面ひずみ状態での破壊規準は最も基礎となるので、本章では、2つの力学モデル、すなわち弱面群モデルおよび欠陥群モデルを基に2,3の破壊規準を検討しこ。なお、簡単のために載荷経路は、一様応力を生じるような短期間比例載荷とする。

##### 3.2.1 弱面群モデルに基づく破壊規準<sup>4)</sup>

最も簡単な2次元異方性モデルとして、Jaegerは“単一弱面(single plane of weakness)”<sup>4)</sup>

モデル，すなわち，等方・均質マトリックス内に単一の弱面が含まれているようなモデルを考えた。この考え方を拡張して，弱面群モデル，すなわち Fig. 1.3.1 に示すように，等方・均質マトリックス内に或る定まった方向を有する  $n$  個の規則的な弱面群を含むモデルを想定しよう。主応力を  $\sigma_1, \sigma_3$  ( $\sigma_1 \geq \sigma_3$ ) とし，第  $i$  番目の弱面の方向が最大主応力方向  $\sigma_1$  と成す角を， $\theta_i$  ( $|\theta_i| \leq 90^\circ$ ) とする。

以下においては，さらに次のような仮定を設ける。

- (a) 弱面群間の相互干渉は極めて小さく，省略され得る。従って  $n$  個の弱面群を含むモデルの特性は，それぞれの群の全体的な特性を示すような仮定の  $n$  個の弱面で近似的に表わすことができる。
- (b) 弱面の強度はマトリックス部分の強度に比してはるかに低い。従って，モデルの破壊は弱面のみに生じる。
- (c) 外荷重は一様応力を生じるような比例载荷とする。

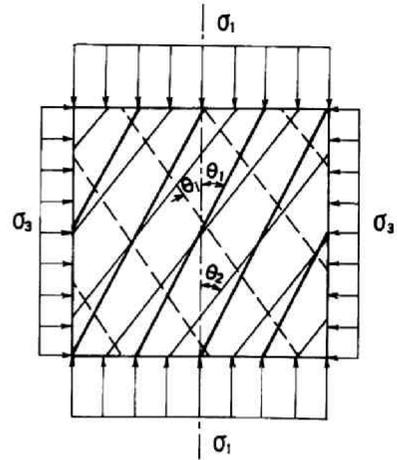


Fig. 1.3.1 A model containing systems of weak planes.

このような仮定によると，破壊規準は载荷径路には無関係に最終载荷状態のみに依存し，破壊曲面は主応力空間内に固定されることになる。

#### i) Coulomb 破壊規準の適用

上記のモデルの破壊を考える際に，上記の仮定 (a)~(c) に加えて，更に，各弱面は Coulomb の破壊規準に従って破壊されると仮定しよう。こうすると，第  $i$  番目の弱面の破壊は，その面上に作用する直応力  $\sigma$  とせん断応力  $\tau$  との間に次の関係が成立するとき生じることになる。

$$\begin{aligned} \tau &= \sigma \tan \varphi_i + C_i \\ &= \sigma \mu_i + C_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

ここに  $\varphi_i, \mu_i = \tan \varphi_i, C_i$  は  $i$  番目の弱面の材料定数である。この関係を主応力  $\sigma_1, \sigma_3$  および傾き  $\theta_i$  を用いて表わすと，次のようになる。

$$\sigma_1 = \frac{\sin 2\theta_i + \mu_i (1 + \cos 2\theta_i)}{\sin 2\theta_i - \mu_i (1 - \cos 2\theta_i)} \sigma_3 + \frac{2 C_i}{\sin 2\theta_i - \mu_i (1 - \cos 2\theta_i)} \quad (3.2.2)$$

この式は Jaeger の “単一弱面”モデルの破壊規準を表わす式である。この関係を図示すれば、Fig

1.2.13 において  $C = -2\sigma_c$  としたものとなる。この図は、モデルの強度は材料定数および拘束圧のみならず、弱面の方向角にも強く支配されることを示している。なお、式(3.2.2)に於て、 $\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2}$  とすれば、容易に Coulomb 式(2.2.14)が導ける。

さて、ここで対象としているモデルは異なった方向角および材料特性を有する  $n$  個の弱面を含んでいるので、これらの弱面の影響を総括して考慮しなければならない。仮定(a)、(b)および(c)により各弱面の影響は、あたかもそのモデル内に弱面が1個のみ存在するように考えて独立に解析することができるので、全モデルの強度は主応力方面から定まった方向角の単一弱面のみが存在するようなモデルに対して、独立に求めた強度のうちの最も小さいものに支配されることになる。従って、モデル全体としての強度は必ずしも最も弱い材料特性の弱面によって支配されるとは限らないことに注意しなければならない。

$n$  個の独立に求めた破壊規準のうち最小強度を示すような複合破壊規準曲線を Fig. 1.3.2 に示した。破壊規準は、材料定数および拘束圧のみならず、弱面群の方向角にも大きく左右されることが分る。最小強度に対応する弱面の方向角は拘束圧と共に変化する。

実際の異方性岩質材料あるいは異方性系では、載荷時にも、破壊時にも弱面間の相互干渉が全くないとは考えられない。従って、この破壊曲線は、或る弱面に対応する曲線から他の弱面の曲線への連続部分で幾分円滑になり、また強度も全体として幾分低下するであろう。なお、図示したように破壊規準は拘束圧  $\sigma_3$  の関数であるので、最小強度を与える角度  $\theta$  は、 $\sigma_3$  につれて変化することに注意しなければならない。

破壊規準(3.2.2)を主応力平面に表示すれば、Fig. 1.2.14 に於て  $C = -2\sigma_c$  としたものとなる。

もし、材料ないし系内に種々の強度の弱面が統計的にランダムに存在し、その方向もランダムであると仮定できれば、その材料ないし系の強度は、弱面の方向には無関係となり、巨視的に等方・均質な材料ないし系の強度が求められることになる。

## ii) Mohr の破壊規準(2次式)の適用

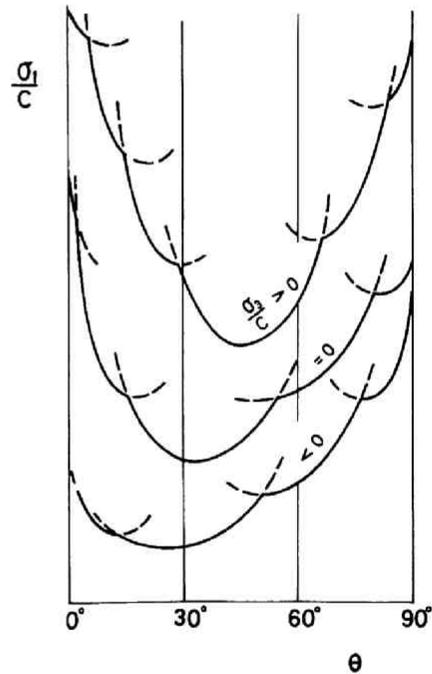


Fig. 1.3.2 Fracture criterion for a model containing systems of planes of weakness (based on the Coulomb criterion).

仮定 (a), (b) および (c) に, 更に弱面の破壊は Mohr の破壊規準 (2 次式) に従うと仮定すると, 第  $i$  番目の弱面の破壊は

$$\tau^2 = \lambda_i \sigma + D_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.2.3)$$

が満されたとき生じることになる。ここに  $\lambda_i, D_i$  は第  $i$  番目の弱面の材料定数である。この式を, 主応力および方向角を用いて表わすと, 次のようになる。

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 \sin^2 2\theta_i = 2 \lambda_i \{ \sigma_1 (1 - \cos 2\theta_i) + \sigma_3 (1 + \cos 2\theta_i) + 4 D_i \} \quad (3.2.4)$$

或いは

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sin^2 2\theta_i} \left[ \sigma_3 \sin^2 2\theta_i + \lambda_i (1 - \cos 2\theta_i) \pm \{ \lambda_i^2 (1 - \cos 2\theta_i)^2 + 4 \sin^2 2\theta_i (\lambda_i \sigma_3 + D_i) \}^{1/2} \right] \quad (3.2.5)$$

この式は, "単一弱面" を含むモデルの強度を表わすものである。式 (3.2.5) を図示すると, Fig.

1.2.3 に於て  $b/a \rightarrow 0$ , すなわち, Fig. 1.2.3 (a) に類似したものとなる。多数の弱面を含むモデルに対しては, 既に述べたところにより, 全材料ないし系の破壊規準 (曲線) は, Fig. 1.3.2 で示したのとほぼ同様になる。なお, 式 (3.2.4) 或いは (3.2.5) を主応力面上に表示すれば Fig. 1.3.3 のようになる。

### 3.2.2 潜在欠陥群モデルに基づく破壊規準<sup>5)</sup>

層理ないし片理の卓越した岩石には, 層理面ないし片理面に沿って細長いクラックあるいは欠陥が存在すると想定され, また大きな規模で眺めると, 岩石系にも或る卓越した方向を有するクラック, 欠陥とか節理ないし断層が存在することが考えられる。これらの岩石や岩石系の理想化したモデルとして, 等方・均質マトリックス内に, Fig. 1.3.4 に示すように等間隔に平行に存在するようなクラック群より成る  $n$  個のクラック群が含まれるモデルを考えよう。このモデルの解析に際しては, 次の仮定を設ける。すなわち,

(a) クラック群間には, 相互干渉はない。

(b) 外荷重群は一様応力を生じるように比例的に増

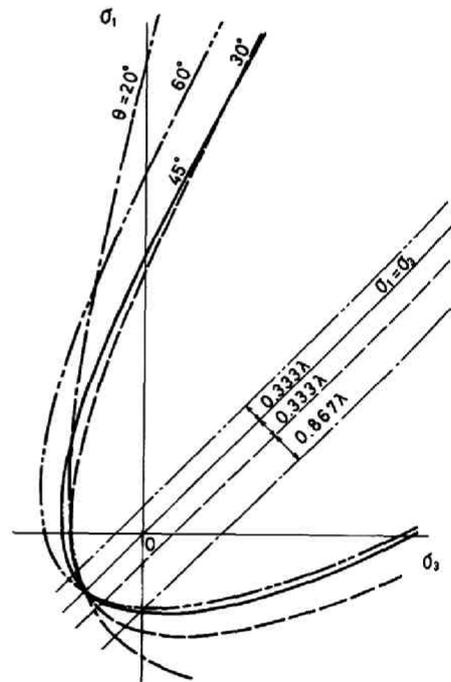


Fig. 1.3.3 Fracture criterion for a model containing a single plane of weakness represented in the maximum-minimum stress plane (based on the Mohr criterion).

加する。

(c) 材料ないし系は破壊まで弾性的とし、またクラックには微小変形弾性論が適用できる。

これらの仮定により、 $n$ 個のクラック群を含むモデルの特性は、あたかも単一のクラックのみが存在するように考えたモデルによって近似的に表わすことができる。従って、モデル全体としての強度は 3.2.1 で議論したのと同様な方法で求められる。以下では、Griffith および修正 Griffith 理論ならびにせん断応力破壊規準を適用した破壊規準を議論しよう。

i) Griffith および修正 Griffith 理論の適用

Walsh & Brace, および Hoek はそれぞれ独立に岩石の異方性強度は或る方向性をもった卓越したマイクロ・クラックに起因すると考えて、等方・均質マトリックス内に 2 種類のマイクロクラック、すなわち、主として層理面に沿う細長いクラックとランダムに分布している比較的短いクラックが存在すると仮定し、これらに

Griffith および修正 Griffith 理論を適用して異方性強度を論じている。この考え方を拡張して、 $n$ 個のクラ

ック群を含むモデルに Griffith および修正 Griffith 理論を適用してみよう。Fig. 1.3.4 に示すように主応力  $\sigma_1$  方向から  $\theta_i$  だけ傾いた第  $i$  番目のクラックに対して Griffith 理論を適用すると、クラック先端近傍からのき裂発生 (破壊開始) の条件は、次のように与えられる。

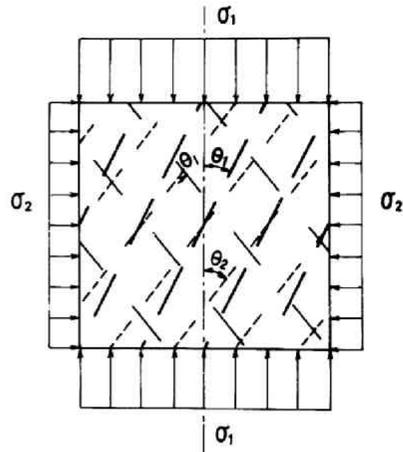


Fig. 1.3.4 A model containing systems of cracks or slits.

$$\begin{aligned}
 -2 \kappa_i \sigma_i &= \frac{1}{2} \{ (\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta_i \} \\
 &\quad \pm \left[ \frac{1}{2} \{ (\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 - \sigma_3^2) \cos 2\theta_i \} \right]^{1/2} \\
 &= \frac{1}{2} \{ \sigma_1 (1 - \cos 2\theta_i) + \sigma_3 (1 + \cos 2\theta_i) \} \\
 &\quad \pm \left[ \frac{1}{2} \{ \sigma_1^2 (1 - \cos 2\theta_i) + \sigma_3^2 (1 + \cos 2\theta_i) \} \right]^{1/2} \quad (3.2.6)
 \end{aligned}$$

ここに  $\sigma_i$  はマトリックスの引張強度とする。

一般化した Griffith 理論を用いれば、破壊開始の条件は、式 (2.3.5) より求められる  $v_0$  を式 (2.3.1) に代入し、 $\sigma_b = -\kappa_i \sigma_i$  とおいて求められる。

外荷重が圧縮の場合には、クラックが閉そくすることが考えられ、上式は使用できなくなる場合がある。このような場合には修正 Griffith 理論を用いると、破壊規準は次のように与えられる。

$$-4 \kappa_i \sigma_i = (\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2 \theta_i - \mu_i [\sigma_1 (1 - \cos 2 \theta_i) + \sigma_3 (1 + \cos 2 \theta_i)] \quad (3.2.7)$$

ここに  $\mu_i$  は、閉そくしたクラック面の摩擦係数である。

なお、間隙水圧  $\sigma_p$  の影響を考慮しなければならないときには、式 (3.2.6) の  $\sigma_1, \sigma_3$  をそれぞれ  $\sigma_1 - \sigma_p, \sigma_3 - \sigma_p$  で置きかえなければならない。Griffith の拡張式 (3.2.6) より求められる破壊規準曲線は、Fig. 1.2.2 において、 $b/a \rightarrow 0, \kappa_i = \kappa_c = 1, R = 8$  としたもの、すなわち Fig. 1.2.3 (a) と同様であり、また、修正 Griffith の一般化した式 (3.2.7) より得られる破壊規準曲線は、Fig. 1.2.13 に示したものと一致する。破壊規準式 (3.2.6) と、式 (3.2.4) あるいは (3.2.5) とは本質的には差異がない。また、式 (3.2.7) は式 (3.2.2) と類似している。従って、これに対応する破壊規準曲線は、Fig. 1.3.2 のようになるであろう。Griffith および一般化した Griffith 理論を拡張した破壊規準は、主応力面に表示すると Fig. 1.2.5 のようになる。なお、式 (3.2.7) からは、Fig. 1.2.14 と同様な直線が求められる。

以上の議論は全て楕円形状の潜在クラックを中心にしたものであるが、スリットに対しても、2.3.1 および 2.3.2 の後半の議論を殆んどそのまま適用することができる。閉そくしないスリットの場合に対する強度と方向角の関係を  $k = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$  をパラメーターとして表わすと Fig. 1.2.9 のようになる。また、閉そくするスリットに対しては、式 (2.3.52) (式 (3.2.7) と比較せよ) より、Fig. 1.2.13 と同様な破壊規準曲線が求められる。

以上の議論は全て単一クラックのみを含むモデルに対する破壊開始規準であるが、潜在クラックあるいは欠陥群を含むモデル全体に対しては、破壊開始規準は、3.2.1 で述べたように或る定まった方向角の単一クラックを含むモデルに対してそれぞれ独立に求めた強度のうち最小のものより構成される。従って破壊開始規準曲線は既に示した Fig. 1.3.2 に類似したものとなるであろう。このことは、Griffith 理論および一般化した Griffith 理論と Mohr の 2 次式、および修正 Griffith 理論ないし一般化した Griffith 理論の一部と Coulomb 規準の等価性を考えれば容易に理解される。事実、式 (3.2.5) および (3.2.2) の  $\lambda_i, D_i$  および  $C_i$  を単に、 $-4 \kappa_i \sigma_i, 4 \kappa_i^2 \sigma_i^2$  および  $2 \kappa_i \sigma_i$  と置換えるだけで、それぞれ式 (3.2.6) および (3.2.7) を得ることができる。

Griffith および修正 Griffith 理論に基づくこれらの破壊規準は、既に 2.4 でも述べたように、破壊開始の条件を与えるだけであり、それ以後の破壊現象に関しては何の情報も与えない。

多数の潜在クラックないし欠陥群を含む材料ないし系では、荷重が増加するとき、き裂は潜在クラックないし発生したき裂の先端近傍から連続的に発生あるいは伝播することになり、1.3 で議論したように、この過程は局所的な安定性を喪失せしめ、逐には全体的な破壊、すなわち終局破壊を生じることになる。換言すれば、逐次ならびに終局破壊強度は潜在クラックないし欠陥の形状と分布ならびに方向角に左右されるばかりでなく、発生したき裂の伝播状態および局所的な複雑な安定性の過程にも支配される。従って、逐次および終局破壊に関しては、はっきりした破壊規準が求め難い。なお、詳細な点に関しては、2.4

参照されたい。

i) せん断破壊規準の適用

Griffith および修正 Griffith 理論を誘導する際には、潜在欠陥ないしクラックからの破壊開始は引張応力により生じると仮定している。しかしながら、異方性岩石あるいは異方性岩系では潜在欠陥は理面とか節理面ないし断層に沿って発達していると考えられ、またき裂はこれらの面に沿って伝播成長すると仮定してもよいであろうから、破壊はこれらの面上のせん断強度によって支配されると考えること十分可能であろう。

以下では、圧縮破壊は潜在クラック面に働くせん断力によって、その面内に生じるものと仮定し、引張破壊は引張応力により、クラック面内に生じるものと仮定する。

楕円形状の単一クラックに対しては、クラック先端でのせん断応力は、式(2.3.1)において  $v=0$  したのから容易に計算されて

$$\sigma_b |_{v=0} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) \sinh 2u_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)(e^{2u_0} - 1) \cos 2\theta}{\cosh 2u_0 - 1}$$

なる。従って圧縮域ではせん断破壊規準として

$$2T_\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) \sinh 2u_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)(e^{2u_0} - 1) \cos 2\theta}{\cosh 2u_0 - 1} \quad (3.2.8)$$

得る。ここに  $T_\sigma$  は固有せん断応力強度を表わす。

また、引張域に対しては、破壊規準として、

$$N_\sigma = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3) \sinh 2u_0 + (\sigma_3 - \sigma_1)(e^{2u_0} - 1) \cos 2\theta}{\cosh 2u_0 - 1} \quad (3.2.9)$$

得る。破壊曲線は兩者のうち原点に近いものを組み合わせたものとなる。

一方、クラックの開そくを考えると、式(2.3.36)で  $v=0$  と置くと、

$$T_\sigma = \frac{\sigma_{cl}}{u_0} \quad (3.2.10)$$

なる。しかしながら、この式では  $\sigma_{cl}$  を求めることが困難なので、この表わし方ではあまり意味がない。従って、このような場合には以下に述べるスリット・モデルによる方法が適当であろう。

単一スリット モデルに関してはスリット先端近傍の応力状態は既に式(2.3.28)で与えられているので、これを用いる。スリットが開そくしないと仮定すると、 $\beta=0$  において、第3式から

$$\tau_{xy} |_{\beta=0} = -\frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} k_{2i}$$

を得、 $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\ell_i}} \tau_{xy} |_{\beta=0} = T_{\sigma i} = \text{const.}$  (材料固有のせん断応力強度) でき裂が発生すると考えると、式 (2.3.29) を用いて、結局、せん断破壊応力基準は、

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta_i = 2 T_{\sigma i} \quad (3.2.11)$$

となる。ここに添字  $i$  は第  $i$  番目のクラックを意味する。なお、引張域では、引張応力  $\sigma_y$  によって破壊すると考えると、式 (2.3.28) から、 $\beta = 0$  に対して、

$$\sigma_y |_{\beta=0} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} k_{1i}$$

を得、 $\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\ell_i}} \sigma_y |_{\beta=0} = N_{\sigma i} = \text{const.}$  という固有引張応力強度によりき裂が発生すると考えると、引張応力破壊規準は、式 (2.3.29) を用いて

$$(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta_i = 2 N_{\sigma i} \quad (3.2.12)$$

となる。破壊曲線は、両規準 (3.2.11) および (3.2.12) のうち、原点に近い部分を組み合わせた複合曲線となる。これらの関係を図示すると Fig. 1.2.17 のようになる。

スリットが閉そくする場合には、2.3.3 の後半部で議論したところにより、

$$\mu_i (\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_{cl}) - (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin 2\theta_i + \mu_i \cos 2\theta_i) = 2 T_{\sigma i} \quad (3.2.13)$$

を得る。ここに  $\mu_i$  は閉そくしたスリット面間の摩擦係数である。 $\sigma_{cl}$  が非常に小さいならば、式 (3.2.13) は簡単になって、

$$\mu_i (\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin 2\theta_i + \mu_i \cos 2\theta_i) = 2 T_{\sigma i} \quad (3.2.14)$$

となる。この式は、修正 Griffith 式の拡張した式 (3.2.7) と同様な形をしている。しかしながら、破壊開始の物理的意味は両者では全く異なっている。

なお、間隙水圧  $\sigma_p$  を考慮する場合には、上式 (3.2.8) ~ (3.2.12) において  $\sigma_1 \rightarrow \sigma_1 - \sigma_p$ 、 $\sigma_3 \rightarrow \sigma_3 - \sigma_p$  としなければならない。

式 (3.2.13) 或いは (3.2.14) は、式 (3.2.7) 或いは式 (3.2.2) と類似しているの、これらより求められる破壊規準曲線は、Fig. 1.3.2 と同様なものとなる。

クラック群ないしスリット群を含むモデルのせん断破壊規準は、3.1.1 (i) で述べた理由により最終的には既に述べた Fig. 1.3.2 のようになるであろう。

なお、せん断破壊の仮説が正しく、また、き裂は偏平楕円クラック或いはスリット面内に留るとした仮定が正しければ、き裂発生に伴いクラックはより偏平に、また、スリット長はより長くなり、より容易に破壊され易くなる。従って、破壊開始は直ちに終局破壊に至ることをも意味する。従って、ここで与えた

準は上記の仮定が正しければ、破壊開始のみならず、終局破壊にも対応した規準である。

なお、 $N_\sigma$ ,  $T_\sigma$  をそれぞれ降伏条件を与える定数と見做せば、上記破壊開始規準は降伏開始条件を与えものと解される。

### 3.2.3 直交異方性マトリックス内の潜在クラック群モデルに基づく破壊規準<sup>6)</sup>

3.2.2 の考え方を拡張して、岩質材料ないし系自体が直交異方性を示し、かつ、この異方性材料ない系内に異方性主軸方向に卓越した潜在クラック（スリット）が存在するようなモデルを考えてみよう。

なわち、Fig. 1.2.7 において座標系を異方性の主軸に一致するように選び、 $x$  軸に平行に潜在するクラック群を含むモデルを考える。この場合にも 3.2.2 で用いた基本的な仮定、すなわち、クラック相互の干渉はなく、また、外荷重は比例載荷により一様応力場を生じるように作用しており、かつ、材料ない系は破壊まで線形弾性的とし、クラックは微小変形理論が適用できるという仮定を設ける。3.2.2 で述べたところにより、この場合の特性は、単一クラックのみが存在すると考えたモデルによって近似的に表わることができる。従って、3.2.1 或いは 3.2.2 で議論した方法を用いてモデル全体としての強度—破壊準—を求めることができる。

長さ  $2\ell$  のスリットのみを取り出して考える。最大主応力方向から  $\theta$  だけ傾いたスリットの先端近傍の応力は次のように与えられている。<sup>7)</sup>

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_2}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} - \frac{s_1}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_2^2}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} - \frac{s_1^2}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} \right) \right\} \right\} \right] \\ \sigma_y &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} \right) \right\} \right\} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} \left[ k_1 \operatorname{Re} \left\{ \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_1}{\sqrt{\cos \beta + s_1 \sin \beta}} - \frac{s_2}{\sqrt{\cos \beta + s_2 \sin \beta}} \right) \right\} \right\} \right] \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

こに  $\operatorname{Re}$  は実部を意味する。 $k_1$ ,  $k_2$  は式 (2.3.29) から求められ、また  $s_1$ ,  $s_2$  は直交異方性弾体の特性方程式

$$a_{11} s_i^4 + (2 a_{12} + a_{66}) s_i^2 + a_{22} = 0 \quad (i=1, 2) \quad (3.2.16)$$

の根である。 $a_{ij}$  は弾性係数  $E$ , Poisson 比  $\nu$ , せん断弾性係数  $G$  を用いて, 次のように表わされる。

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y} \quad (3.2.17)$$

$$a_{66} = \frac{1}{G_{xy}}$$

今, 弾性係数間の関係として, 新しく

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{E_x}{E_y}}, \quad \beta_0 = \frac{E_x}{2 G_{xy}} - \nu_{xy}; \quad \alpha_0 > \beta_0$$

を導入すると,  $s_1, s_2$  の関係は次のようになる。

$$s_1 s_2 = -\alpha_0, \quad s_1 + s_2 = i \sqrt{2(\alpha_0 + \beta_0)}, \quad s_1 - s_2 = \sqrt{2(\alpha_0 - \beta_0)} \quad (3.2.18)$$

破壊はこのスリット面内に生じるという 3.2.2 の仮説, すなわち, 圧縮域ではスリット先端からせん断破壊が生じ, 引張域ではスリット先端から引張破壊が生じると仮定すると, 3.2.2 と全く同様にして, 次のような破壊規準を得る。

圧縮域ではスリットが閉そくしないと仮定すると,

$$(\sigma_1 - \sigma_3) \sin 2\theta_i = 2 T_{\sigma i}' \quad (3.2.19)$$

引張域では,

$$(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3) \cos 2\theta_i = 2 N_{\sigma i}' \quad (3.2.20)$$

となる。ここに  $T_{\sigma}'$ ,  $N_{\sigma}'$  はそれぞれ直交異方性材料の固有のせん断ならびに引張応力強度であり, 次のようにも与えられている(附録 A. I 参照)。<sup>8)</sup>

$$\left. \begin{aligned} N_{\sigma}' &= \left( \frac{2\pi^2 \tau^2}{a_{11} a_{22}} \right)^{1/4} \left( \frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{2 a_{12} + a_{66}}{2 a_{11}} \right)^{-1/4} \\ T_{\sigma}' &= \left( \frac{2\pi \tau}{a_{11}} \right)^{1/2} \left( \frac{a_{22}}{a_{11}} + \frac{2 a_{12} + a_{66}}{2 a_{11}} \right)^{-1/4} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.21)$$

なお, 圧縮域でスリットの閉そくすることを考慮すれば, 3.2.2 或いは 2.3.2 と全く同様にして,  $k_1, k_2$  に式(2.3.46)を用いなければならない。この場合には, 式(3.2.19)は次のように変

形される。

$$\mu_i (\sigma_1 + \sigma_3 - 2 \sigma_{oct}) - (\sigma_1 - \sigma_3) (\sin 2 \theta_i + \mu_i \cos 2 \theta_i) = 2 T_{oi}' \quad (3.2.22)$$

式 (3.2.19) ~ (3.2.22) は、式 (3.2.11) ~ (3.2.13) と全く同じ形をしている。唯異なっているのは、材料の固有強度のみである。従って、単一クラックあるいはクラック群を含む直交モデルに対しても、3.2.2 で述べたのと同様な規準曲線が得られることになる。

以上、本節では弱面群モデル或いはクラック群モデルを基に異方性岩質材料ないし異方性岩系の2次元破壊規準をいくつか議論してきたが、いずれも極めて類似した形をしており、結局のところ、Coulomb および Mohr の2次式の破壊規準を拡張した形にまとめられることになる。種々の破壊規準とこの両者との対応は、すでに2.4 で議論したところから明らかである。

次節では、Coulomb および Mohr の2次式の破壊規準を中心に3次元異方性破壊規準を検討しよう。

### 3.3 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊曲面

第1章ならびに2.5 で議論したところにより、破壊強度が載荷径路(履歴)の影響を受けない場合には、破壊開始および終局破壊曲面は、主応力空間に固定した凸曲面で表わされることが知られている。強度が載荷履歴に影響されないという条件は極めて厳しく、厳密な意味では実現されそうにはないが、載荷が比例的であるか或いはそれに近い場合には、破壊強度はほぼ一義的に定められると考えられる。以下では、主応力空間内に固定された破壊曲面が存在することを前提として、その特性を考察してみよう。

破壊曲面の表示法としては、既に2.5.1 で述べたように、主として、等圧面による破壊曲面の切り口曲線(直截面)によることにする。なお、静水圧線を軸とする円柱座標系  $(\sqrt{3} \tau_{oct}, \tan^{-1}(\frac{-\lambda}{\sqrt{3}}), \sqrt{3} \sigma_{oct})$  による表示も同様に便利に用いられる。

一般に、層理や片理は平面的であり、また卓越した節理や断層も一つの平面を形成しており、破壊は一般にこれらの弱面に沿って、或いはその近傍で生じると考えられるので、3.2 で検討した2次元モデルに基づく破壊規準は殆んどそのままの形で3次元にまで拡張できる場合も多い。しかし、弱面群の方向が3主応力軸からそれぞれ任意の傾きを成しているような最も一般的な3次元問題ではこの拡張は複雑となる。

破壊曲面を求めるための基本モデルとしては、以下では弱面群モデル(3.2.1 参照)のみを考える。その他のモデルも同様に考えられるが、これらより得られる結果は全て、弱面群モデルに基づくCoulomb および Mohr の破壊規準の拡張したものに含まれてしまうので、以下は、この二者以外は議論の対象としないことにする。

本節においても、3.2.1 と同様な仮定を設ける。仮定(a)および(b)により、モデル全体としての強度は、それぞれの弱面群の特性を表わすようなそれぞれ独立な弱面が、あたかもモデルに単一に含まれていると想定した場合の強度のうち最も弱いもので決定されることになり、また、(c)により破壊曲面は主応力空間に固定されることになる。今、最も簡単な例として、3次元等方・均質マトリックス内に

単一の弱面が存在するモデルを想定しよう。Fig. 1.3.5 のようにマトリックスの破壊曲面としては、 $S_0$  が求められており、また、単一弱面の破壊曲面として  $S_1$  が求められるとしよう。この場合、両曲面は同一空間内に固定されているとすると、荷重がほぼ比例的に増大して行けば、応力は或る径路、例えば  $OA$  に沿って変化し、先ず  $A$  点で  $S_1$  に到達する。この点で破壊が生じることになり、これ以上外側の応力状態は実現され得ないので  $S_0$  上の点  $A'$  に達することはない。一方、 $OB$  に沿って載荷すれば、先ず  $B$  点で  $S_0$  曲面に達し、その状態でマトリックスの破壊が生じるので、 $B'$  点は実現し得ないことになる。同様な議論が全ての比例載荷径路に対しても成立する。従って、このように単一弱面を含む材料ないし系の破壊曲面は、 $S_0$  曲面および  $S_1$  曲面から合成される曲面のうち、原点を含み最も小さい  $\tau_{oct}$  を示す曲面で決定されることになる。この考え方は、一般的に曲面群を含む場合にも拡張される。破壊曲面は、単一弱面を含むモデルの破壊曲面群のうち、原点を含み原点からの距離が最も小さい、すなわち、最小  $\sqrt{3} \tau_{oct}$  を与えるような合成曲面となる。換言すれば、この曲面は、全ての曲面群に含まれる共通領域のみを含む曲面である。

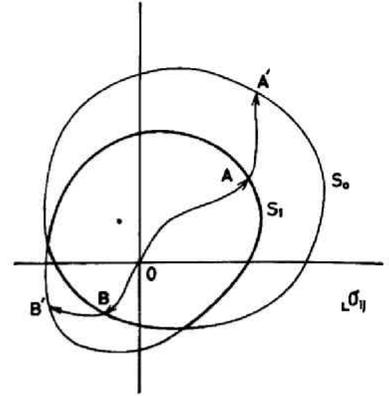


Fig. 1.3.5 Composite fracture surface in stress space.

### 3.3.1 一主応力方向と平行な弱面群を含むモデルに基づく破壊曲面<sup>9)</sup>

弱面群が三主応力方向のうちの1つの方向、 $\sigma_2$  方向、と一致するようなモデル、すなわち、3.1.1の弱面群モデルと同様なモデルを考えてみよう。この場合には、中間主応力  $\sigma_2$  はこのモデルの破壊には殆んど影響を及ぼさないと考えられるから、3.2.1 で用いた破壊規準を直ちに3次元にも適用することができる。

#### i) Coulomb破壊規準の拡張

弱面の破壊は全てCoulombの破壊規準に従うものと仮定する。第  $i$  番目の単一弱面のみを含むモデルの破壊規準は、式(3.2.2)で与えられる。これを式(2.5.1)'で定義した新しい座標系  $(\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3')$  で表わすと、

$$\sigma_1' = \sqrt{3} \frac{\sin 2\theta_i + \mu_i \cos 2\theta_i}{\mu_i} \sigma_2' + \sqrt{2} \sigma_3' + \sqrt{6} \frac{C_i}{\mu_i} \quad (3.3.1)$$

を得る。ここに、 $\mu_i, C_i$  は材料定数、 $\theta_i$  は第  $i$  番弱面の主応力  $\sigma_1$  方向からの傾きを表わしている。この式は、 $\sigma_2$  の値如何に拘らず、 $\sigma_1 \geq \sigma_3$  ならば成立する。すなわち、Fig. 1.2.19の領域I、

『および』で成立する。等圧面  $\sigma_3' = \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \text{const.}$  による上式の切り口曲線(直截面)は、次の2点  $(\sqrt{\frac{2}{3}} I_1 + \sqrt{6} \frac{C_i}{\mu_i}, 0)$  および  $(0, -(\frac{\sqrt{2}}{3} I_1 + \sqrt{2} \frac{C_i}{\mu_i}) \frac{\mu_i}{\sin 2\theta_i + \mu_i \cos 2\theta_i})$  を通る直線で与えられる。

一方、マトリックスに対しては、材料定数  $\mu_0 = \tan \varphi_0$ 、および  $C_0$  とし、これも Coulomb 規準に従って破壊すると仮定すると、 $\theta_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0}{2}$  とおけばよいことになる。従って、マトリックスの破壊規準は、式(3.3.1)の添字  $i$  を添字  $0$  で置きかえれば容易に求められて、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_1' &= \sqrt{3} \frac{\sigma_2'}{\mu_0} (\cos \varphi_0 + \mu_0 \sin \varphi_0) + \sqrt{2} \sigma_3' + \sqrt{6} \frac{C_0}{\mu_0} \\ &= \sqrt{3} \frac{\sqrt{1+\mu_0^2}}{\mu_0} \sigma_2' + \sqrt{2} \sigma_3' + \sqrt{6} \frac{C_0}{\mu_0} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

この式は、勿論、等方・均質材料の破壊規準式(2.5.6)と一致している。この式の成立する範囲は、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 、すなわち、Fig. 1.2.19の領域Ⅱであるが、2.5.2で述べたところにより全域に容易に拡張される。式(3.3.2)の等圧面  $\sigma_3'$

$= \frac{I_1}{\sqrt{3}} = \text{const.}$  による切り口は、2点  $(\sqrt{\frac{2}{3}} I_1 + \sqrt{2} \frac{C_0}{\mu_0}) \frac{\mu_0}{\sqrt{1+\mu_0^2}}, 0)$  および  $(0, -(\frac{\sqrt{2}}{3} I_1 + \sqrt{2} \frac{C_0}{\mu_0}) \frac{\mu_0}{\sqrt{1+\mu_0^2}})$  を通る直線で与えられる。

破壊曲面は、式(3.3.1)および(3.3.2)で表わされる二曲面のうち、共通領域を含む曲面で表わされることになり、その曲面の等圧面による切り口は、Fig. 1.3.6のようなになる。 $n$ 個の弱面群を含むモデル全体としての破壊曲面は、それぞれの破壊曲面とマトリックスの破壊曲面の  $(n+1)$ 個の破壊曲面の共通領域を含むものとなる。実際には弱面間の相互干渉もあるので、破壊曲面は幾分小さなものになるであろう。

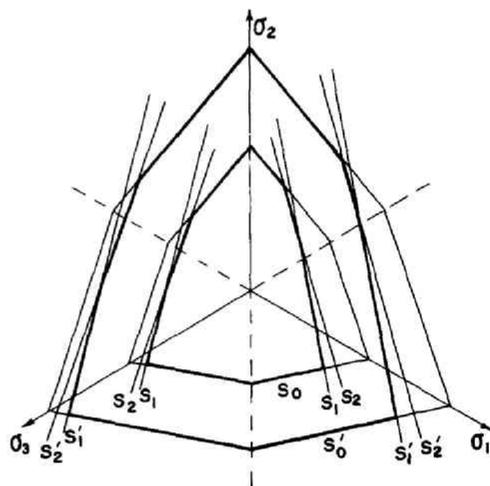


Fig. 1.3.6 Cross sections of fracture surface cut by equipressure planes (based on the extended Coulomb criterion).

ii) Mohrの破壊規準(2次式)の拡張

上記のモデルの弱面およびマトリックスの破壊は Mohrの破壊規準(2次式)に従うものと仮定すれば 単一弱面  $i$  を含むモデルの破壊は, 式(3.2.4) および(2.5.1) から

$$\sigma_1' = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sin^2 2\theta_i}{\lambda_i} \sigma_2'^2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 2\theta_i \sigma_2' + \sqrt{2} \sigma_3' + \sqrt{6} \frac{D_i}{\lambda_i} \quad (3.3.3)$$

を得, また, マトリックスの破壊規準は, 式(2.5.10) より

$$\sigma_1' = -\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sigma_2'^2}{\lambda_0} + \sqrt{2} \sigma_3' + \frac{1}{2\lambda_0} \sqrt{\frac{3}{2}} (4D_0 - \lambda_0^2) \quad (3.3.4)$$

と与えられる。ここに  $\lambda_0$ ,  $D_0$  はマトリックスの定数である。式(3.3.3)は  $\sigma_2$  如何にかかわらず  $\sigma_1 \geq \sigma_3$  で成立し, 式(3.3.4)は  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  で成立するが, 2.5.2 で述べたところにより 容易に全域に適用される。

従って, 破壊曲面は式(3.3.3), (3.3.4) より決定される。多数の弱面群を含むモデルに対しては, 前項 i) で述べた方法により容易に求められる。この破壊曲面の等圧面による切り口曲線の概形を Fig. 1.3.17 に示す。

なお, モデルが Coulomb および Mohr の破壊規準に従う弱面群を同時に含んでいる場合には, 破壊曲面は上記の i) および ii) の両者を同時に考慮して, 同様にして求められる。

その他の2次元モデルに基づく破壊規準も上述の考え方により容易に3次元に拡張することもできるが, いずれも上記の Coulomb, Mohr あるいはそれらを結合した破壊規準の拡張したもので表わすことができるので, それらに関してはこれ以上言及しない。

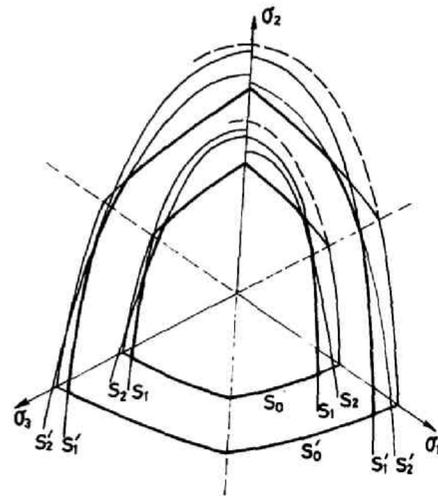


Fig. 1.3.7 Cross sections of fracture surface cut by equipressure planes (based on the extended Mohr criterion).

3.3.2 任意方向の弱面を含むモデルに基づく破壊曲面

一般的な場合として弱面群が主応力方向から任意に傾いているようなモデルを考えよう。

デカルト座標軸  $x_1, x_2, x_3$  を主応力方向と一致させて選び, 第  $k$  番目の弱面の方向余を  ${}^k \nu_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) と記すと, この

弱面に働く直応力  $N$  およびせん断応力  $S$  はそれぞれ、次のように与えられる。

$$N = \sigma_i^k \nu_i^2 \quad (3.3.5)$$

$$S^2 = \sigma_i^2 k \nu_i^2 - (\sigma_i^k \nu_i^2) \quad (3.3.6)$$

ここに添字は総和規約に従うものとする。

弱面の破壊が Coulomb の規準に従うとすると

$$S = N \mu_k + C_k \quad (3.3.7)$$

で与えられる。ここに  $\mu_k$ ,  $C_k$  は第  $k$  番目の弱面の材料定数である。主応力で表示すると、式 (3.3.7) は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 (1 - \nu_1^2 (1 + \mu^2)) \nu_1^2 + \sigma_2^2 [1 - \nu_2^2 (1 + \mu^2)] \nu_2^2 + \sigma_3^2 [1 - \nu_3^2 (1 + \mu^2)] \nu_3^2 \\ & - 2 (1 + \mu^2) (\sigma_1 \sigma_2 \nu_1^2 \nu_2^2 + \sigma_2 \sigma_3 \nu_2^2 \nu_3^2 + \sigma_3 \sigma_1 \nu_3^2 \nu_1^2) \\ & - 2 \mu C (\sigma_1 \nu_1^2 + \sigma_2 \nu_2^2 + \sigma_3 \nu_3^2) \\ & = C^2 \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

$$\text{ここに } \nu_i \nu_j = \delta_{ij} \quad (3.3.9)$$

なお、上式では簡単のために添字  $k$  は省略した。

一方、弱面の破壊が Mohr の 2 次式に従うとすると、

$$S^2 = N \lambda_k + D_k \quad (3.3.10)$$

で表わされ、対応する主応力表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sigma_1^2 (1 - \nu_1^2) \nu_1^2 + \sigma_2^2 (1 - \nu_2^2) \nu_2^2 + \sigma_3^2 (1 - \nu_3^2) \nu_3^2 \\ & - 2 (\sigma_1 \sigma_2 \nu_1^2 \nu_2^2 + \sigma_2 \sigma_3 \nu_2^2 \nu_3^2 + \sigma_3 \sigma_1 \nu_3^2 \nu_1^2) \\ & - \lambda (\sigma_1 \nu_1^2 + \sigma_2 \nu_2^2 + \sigma_3 \nu_3^2) \\ & = D \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

この場合にも、もちろん式 (3.3.9) は成立している。なお添字  $k$  は省略した。

式 (3.3.8), (3.3.11) および附帯条件 (3.3.9) で与えられる曲面は、いずれも主応力空間内の 2 次曲面を表わしている。単一弱面モデルでは、これらの曲面とマトリックスの曲面を合成したもの

から、3.3.1 で述べたところにより破壊曲面は、共通領域を囲む曲面として与えられる。 $n$  個の弱面群が存在するモデルを考えれば、 $n$  個の同様な 2 次曲面が得られ、これにマトリックスの破壊曲面、計  $(n + 1)$  個の破壊曲面が得られる。モデル全体としての破壊曲面はこれらの曲面に囲まれた共通領域を含む曲面として求められる。

### 3.4 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の逐次破壊

破壊現象には、破壊開始からこれに引き続いて生じる逐次破壊さらには終局破壊に至る極めて複雑な現象があり、今まで述べてきた破壊規準がこれらの各段階に適用できるか否かを知ることは重要である。

本章で検討した破壊規準はモデルのき裂の成長方向によって分類すると、(a)き裂が元の弱面ないし、クラックあるいはスリット面に成長するという仮説に基づくものと、(b)き裂が元のクラックないし、スリット面内に成長しないという仮説に基づくものとに分けられる。

前者を取れば、一たんき裂が発生すると、クラックないしスリットは益々成長するので、より小さな応力の下で、逐次破壊を径て終局破壊に至ることになる。(a)の破壊規準に属するものには、弱面群モデルに基づく規準、式 (3.2.2), (3.2.5) およびクラックないしスリット面内のせん断によりき裂が生じるとした規準、式 (3.2.8), (3.2.9), (3.2.11), (3.2.12), (3.2.19), (3.2.20) などがある。これらの式は、破壊開始規準と同時に終局破壊規準をも表わしていると見ることができる。一方、(b)の破壊規準に属するものには、Griffith ならびに修正 Griffith 理論より導いた規準、式 (3.2.6), あるいは (3.2.7) などがある。

一般に異方性岩質材料ないし異方性岩系では、潜在欠陥は、層理面とか節理面ないし、断層に沿って発達していると考えられる。従って、き裂の成長はこれらの弱面に沿って成長すると近似してよい場合も多いであろう。この場合には、逐次および終局破壊までを含めて破壊規準は (a) で表わすことができる。

また、場合によっては、クラックないしスリット群モデルで近似し、(b)の規準を適用する方が適切なものもあるであろう。この場合には、既に 2.6 で述べた考え方に従って、この規準を多数のクラックないしスリットを含むモデルに適用することにより逐次破壊にまで拡張して適用することができる。ただ、2.6 の場合と異なるところは、異方性の場合には、それぞれのクラックないしスリット群は同一方向を向いていることである。従って、今、仮に、単一のクラック群を含むモデルを考えてみると、き裂は全てのクラックに同時に発生し、また同程度に成長することになる。成長したき裂の相互干渉は、潜在クラック群の方向と分布(間隔)によって異なって来るので、逐次破壊過程ならびに終局破壊は、主としてこれらに支配されることになる。

なお、これらの規準の当否は、実験的に検証されるべきことであり、これに関しては、第 II 部で検討する。

### 3.5 異方性岩質材料ならびに異方性岩系の一般的な破壊規準

異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊規準は、一般的に 3 次元主応力空間内の凸曲面で表わすこと

できる。この曲面の概形は、3.3 で議論した具体的な破壊曲面から判断して、次のような特徴を有していると考えられる。すなわち、

“破壊曲面は、3次元主応力空間内に凸曲面として表わされ、対象とする岩質材料ないし系が有する最強度に対応した仮想の等方・均質材料ないし等方・均質系の破壊曲面から、弱面ないし弱層の特性を表す曲面により切り取られた残りの曲面である。換言すれば、これは、等方・均質材料ないし等方・均質の破壊曲面と弱面ないし弱層の特性破壊曲面との合成曲面のうち、共通領域を含む曲面 ( $\tau_{ocf}$  が最小なるような曲面) で表わされる。”

この曲面は、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の特性が通常は横等方性ないし直交異方性的なものであることを考えると、2次元破壊規準(破壊曲線)から容易に推定される。2次元異方性破壊規準は近似には Mohr の 2 次式或いは Coulomb 破壊規準を拡張したものと、等方・均質マトリックス材料ないし系破壊規準との合成した破壊規準で表わされると考えられる。従って、3次元の一般的な破壊規準は、これを3次元に拡張したもので近似されることになる。特に、異方性主軸と荷重方向が少なくとも一つ一致する場合には、破壊曲面は簡単になり、その概形は、Fig. 1.3.8 のようになる。一般的な異方性破壊曲面の表示は容易ではないが、2.6 で述べた等方・均質岩質材料ないし等方・均質系の一般的な破壊曲面と、実在ないし仮想の弱面に Mohr の 2 次式ないし Coulomb 破壊規準を適用して得られた破壊特曲面から、上述のようにして合成した曲面となる。

上述の破壊規準が、実在の岩質材料ないし系の破壊強度をどの程度よく説明できるかは、個々の具体的材料ないし系について検証しなければならない。これについては、第 II 部で検討する。

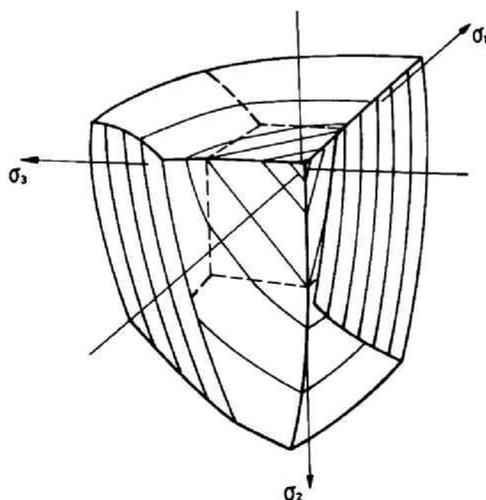


Fig. 1.3.8 Schematic view of fracture surface for anisotropic material or system.



## 第Ⅱ部 岩質材料ならびにそれより成る系の ぜい性破壊規準に関する実験的考察



# 第 1 章 破壊開始ならびに破壊伝播に関する基礎的実験

## 1.1 はじめに

第1部の理論的考察では、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊は、それらに潜在する欠陥周辺の応力集中に起因するというを前提として、比較的簡単な数学モデルに基づいて破壊規準を推論した。しかしながら、このような前提が認められるかどうか、また認められるとしても、これに基づいて諸仮定の下に展開した破壊規準が実際の破壊をどの程度予測し得るか、あるいは、また、どのような条件の下で最もよく適用し得るかなど、実在の材料ならびに系に関する本質的な問題は、実験的に検証されなければならない課題である。さらに、破壊開始、破壊の伝播、終局破壊などはどのような機構に支配されるか、あるいは、さらにそれを支配する因子は何かなどに関しても、本質的には実験的に検討する以外に手段はない。実験的な検討は、このような意味で重要であり、必要不可欠である。

ぜい性破壊は、一般に欠陥周辺の応力ないしひずみ集中に起因するといわれており、また実験的にも確められている。岩質材料ならびにそれより成る系の破壊も同様な原因によるものと考えてよいであろう。(この推測の妥当性は本章のモデル実験からも確められるであろう)。このような見地からすると、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊の研究においては、潜在欠陥からのき裂の発生条件ならびにその伝播過程の研究は最も基本的であり、最も重要な課題である。しかしながら、これらに関する研究は意外に少なく、岩石のき裂の発生とその成長に関しては、Brace と Bombolakis,<sup>1)</sup> および Hoek & Bieniawski があげられる程度であり、また、コンクリートなどに関しても直接にき裂の開始から、分布までを含めて研究したものは、Hsu, Slate, Struman & Winter,<sup>3)</sup> Hansen,<sup>4)</sup> 丹羽他<sup>5)</sup> および加藤<sup>6)</sup> などがあげられる程度である。なお、この他に、き裂の発生条件を基に、逐次破壊現象の説明を試みたものに Paul & Gangal<sup>7)</sup> がある。これらは、いずれも破壊開始ならびに逐次破壊の解明を意図したものではあるが、その意図はほとんど達成されていない。

本章では、スリットあるいはインクルージョンを含む簡単なモデルを用いて、特に圧縮荷重の下での破壊開始条件、き裂の発生方向、き裂の伝播過程などに関して、系統的な基礎実験を行ない、これを基に微視的な面から岩質材料ならびにそれより成る系の破壊特性を明らかにすると共に、第1部で得た理論的な結果の検証を試みる。

なお、本章の一部は既に発表済みであるので文献<sup>8)</sup>を参照されたい。

## 1.2 単一スリットおよびインクルージョンからのき裂の発生と伝播

### 1.2.1 供試体の作製

破壊開始は、応力あるいはひずみの急激な変化点あるいは不連続点近傍に生じることが知られている。このような状態を作り出す目的で、次のような単一スリットおよびインクルージョンを含むモデルをそれぞれ3種類作製して実験に供した。

#### 1) 単一スリット・モデル

#### a) PMMAモデル

市販の 10<sup>mm</sup> 厚ポリメチル・メタクリレート ( polymethylmethacrylate, アクリライト ) 板から, 10.5<sup>mm</sup> × 10.5<sup>mm</sup> の正方形板を成形し 中央に φ 1.5<sup>mm</sup> の穿孔を行なった後, 糸のこでこれより両側に 10.0<sup>mm</sup> づつ切り抜けて 20.0<sup>mm</sup> × 0.4<sup>mm</sup> のスリットを作製した。なお, 糸のこ仕上げには, 常時油を滴下して冷却しながら注意深く作業し, 特に, 残留熱応力を減少させるように努めた。光弾性試験の結果から, この残留応力は充分小さいことが確められた ( 後述, Fig. 2. 2. 1. 参照 )。

#### b) FCPモデル

セメント, 水およびフライアッシュを重量比で, 1.0 : 0.55 : 1.0 に配合し, 十分練り上げた後 10.5<sup>cm</sup> × 10.5<sup>cm</sup> × 10.5<sup>cm</sup> の金属性型枠に打設し, 十分突き固めて, できるだけ空隙を少なくした後, 塩化ビニールの薄片 20.0<sup>mm</sup> × 0.5<sup>mm</sup> × 130<sup>mm</sup> あるいは 20.0<sup>mm</sup> × 1.0<sup>mm</sup> × 130<sup>mm</sup> を型枠側壁に対して適当な角度で供試体中央部に垂直に挿入し, 数時間を経て静かに抜き取ってスリットを形成した。従って, スリットの寸法は, 20.0<sup>mm</sup> × 0.5<sup>mm</sup>, および 20.0<sup>mm</sup> × 1.0<sup>mm</sup> の 2種類である。なお, スリット端は半円形状となるように仕上げた。打設後 1日を経て脱型し 12~13日間 20 ± 1°C で水中養生を行なった後, ダイヤモンド・カッターで厚さ約 15<sup>mm</sup> に平行に切断し, 恒温室 ( 95 ± 5% ) に 1日間放置し, 表乾状態として材令 14日 で試験に供した。なお, この材料の試験時の弾性係数は  $1.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  であった。

#### c) NCPモデル

セメントのみをセメント水比 1.0 : 0.3 ( 重量比 ) で練り上げ, b) の場合と全く同様にしてモデルを作製した。この場合には, スリットは 20.0<sup>mm</sup> × 1.0<sup>mm</sup> のみとした。この材料の弾性係数は,  $2.5 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  であった。

#### ii) 単一インクルージョン・モデル

インクルージョンとマトリックスの弾性係数の比によってインクルージョンモデルの特性は異なってくる。従って, ここでは, 代表的な 3種類のインクルージョン・モデル, すなわち軟インクルージョン, 硬インクルージョンおよび同質インクルージョン・モデルとして, 塩化ビニール, 鋼およびモルタル・インクルージョン・モデルを作製した。

#### a) 塩化ビニール・インクルージョン・モデル

マトリックス材料としては, i), b) の FCP を用い, インクルージョンには, i), b) の塩化ビニール薄片をそのまま用いた。打設方法, 養生方法等は i), b) で述べたのと全く同様である。この場合には, 塩化ビニールの薄片をそのまま放置することにより, 容易に目的とする供試体が作製できる。試験材令は 14日 とした。

#### b) 鋼インクルージョン・モデル

ii), a) に於て, インクルージョンとして, 塩化ビニールの代りに, 20.0<sup>mm</sup> × 0.5<sup>mm</sup> × 130<sup>mm</sup> の軟鋼薄片を使用した。その他の点に関しては, a) と全く同様である。なお, この場合にもインクルージョンの先端は半円形状となるようにした。試験材令は 14日 とした。

### c) モルタル・インクルージョン・モデル

インクルージョンとして、セメント・モルタル（重量配合比，水：セメント：砂＝ 0.5：1.0：0.5）を用いた。モルタルの打設にはできるだけ空隙を少なくするよう配慮し，i), b) の FCP モデルと同様に約 14 日間水中養生し，ダイヤモンド・カッターで切断して，ほぼ  $2.0\text{ mm} \times 2.0\text{ mm} \times 13.0\text{ mm}$  の薄片を作成し，その隅角部はターン・テーブル上で研磨して，インクルージョンとして埋設したときの先端部がほぼ半円形となるように仕上げた。このインクルージョンを用いて，ii), a) の場合と同様にしてモデルを作製した。試験材令は，マトリックスは 14 日，インクルージョンは約 28 日である。なお，試験時のインクルージョンの弾性係数は  $2.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$  であった。

### 1.2.2 試験方法

試験は一軸圧縮試験を中心とし，一部二軸圧縮ならびにインデンテーション試験も試みた。各試験における供試体内の応力分布に関しては，第Ⅱ部を参照されたい。圧縮試験では，供試体と加圧盤間の摩擦が供試体内の応力分布に大きく影響するので，この摩擦を減少させるよう配慮し，シリコン・グリースを塗布した  $0.05\text{ mm}$  厚のテフロンシートを減摩剤として供試体と加圧盤間に挿入した。この場合の見掛けの摩擦係数は，0.02 程度であった（第Ⅱ部 2.4.1 参照）。

載荷速度は，最大応力が約  $5 \text{ kg/cm}^2 / \text{sec}$  となるように選んだ。なお，二軸圧縮試験においては，拘束圧を一定に保ち，最大荷重を増加させる方法によった。インデンテーション試験では， $1.05\text{ cm} \times 1.05\text{ cm}$  角，厚さ約  $1.5\text{ cm}$  の正方形板の対向辺中央部を幅  $5.0\text{ mm}$  の軟鋼盤を介して加圧した。

負荷方法は，き裂の発生ならびに伝播状況の記録の便を計って， $10 \sim 20 \text{ kg/cm}^2$  毎に数秒保持し，断続的に増加させることにした。き裂の検出については次節で改めて述べる。

### 1.2.3 き裂の検出方法

PMMAモデルのき裂の発生，伝播は肉眼で，あるいは光弾性縞から容易に検出される。FCPあるいはNC Pモデルの場合には，初期のき裂は，そのままでは肉眼ではもち論，顕微鏡を用いて，数十倍の倍率の下でも検出は困難であった。種々の方法を試みた結果，次に述べる方法によった。この方法は，アセトンの浸透性と揮発性を利用したものであり，最も確実な上にしかも容易であった。すなわち，載荷途中段階において，供試体の表面，特にスリットないしインクルージョン周辺を，脱脂綿に含ませたアセトンで拭き，速やかに揮発させると，き裂部分は多量のアセトンを含むため他の部分より揮発が遅れ，そのために他とは異なった明瞭な色差が生じることになる。本実験では，他の部分は灰白色であるが，き裂部分だけは黒灰色となった。これより検出されるき裂は，数 $\mu$ のオーダーと推定される。因みに，顕微鏡と比較してみたところ，100倍程度の倍率では判別不可能な微小き裂も，この方法では容易に検出され，肉眼で認められた。

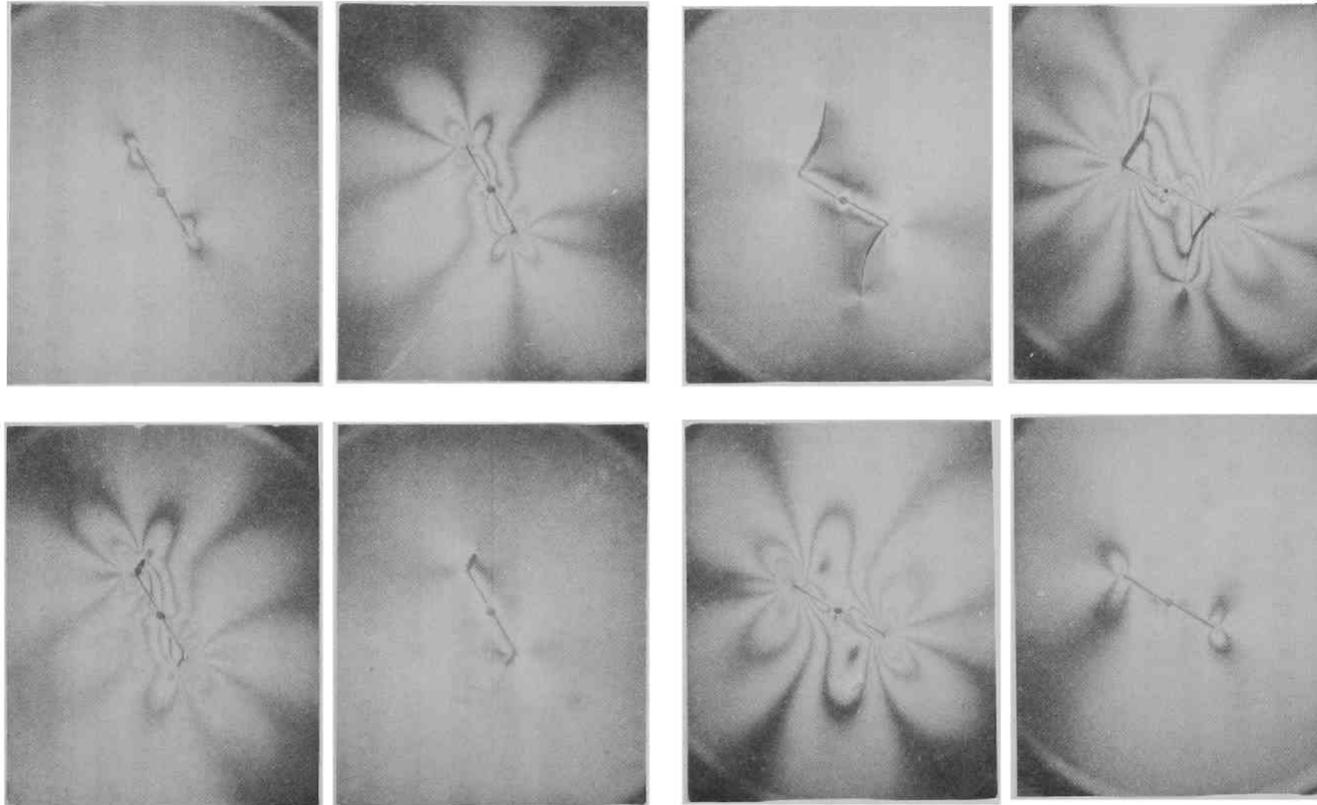
き裂の発生，成長，伝播の記録には，この方法により検出される可視き裂を鉛筆で供試体上にそのまま記録する方法によった。なお，場合によっては同時に写真撮影をも併用した。

1.2.4 試験結果とその考察

1) PMMAスリット・モデルの試験結果とその考察

2) 一軸圧縮試験結果

一軸圧縮試験によるPMMAスリット・モデルの光弾性縮写真をFig. 2.1.1に示す。光弾性試



$$\theta = 30^\circ$$

Top, left to right, 76,380 (kg/cm<sup>2</sup>)  
 Bottom, left to right, 420 (kg/cm<sup>2</sup>), resid.

$$\theta = 60^\circ$$

Top, left to right, 76,380 (kg/cm<sup>2</sup>)  
 Bottom, left to right, 495 (kg/cm<sup>2</sup>), resid.

Fig. 2.1.1 Photoelastic patterns around a single slit in a PMMA plate.

験より次のことが明らかとなった。

スリット形成に伴う加工残留ひずみは荷重下の応力集中によるものに比して十分小さく、無視してもよい。スリットの傾角 $\theta$ によって若干の差はあるけれども、 $\theta$ が $30^\circ \sim 70^\circ$ では、スリットは平均圧縮応力が $100 \sim 60 \text{ kg/cm}^2$ 程度で中央部から容易に閉そくする。荷重増加に伴って、この閉そく部分は次第にスリット先端部へと及び、ほぼ完全に圧着されて肉眼下ではスリットの存在が認め難くなる。スリットがほぼ完全に圧着されていることは、光弾性縞がスリット部分を横切って連続していることから容易に分る。しかしながら、スリット先端部はき裂の発生近くまで閉そくしない。従って、極めて高い応力ないしひずみ集中を起し、極めて高い縞次数が現われる。この部分は、局部的には比例限界をはるかに越えていると思われる。このPMMAのモデルでは、微小変形の条件も、スリットが閉そくしないという解析上の仮定も満されないであろう。

スリット周辺応力はこの縞写真からは求め難く、特に問題となるき裂発生時の応力を求めることは困難であり、またき裂の発生をこの縞写真から適確に予測することも容易ではない。

スリットの傾角 $\theta$ が小さい間は、き裂が発生しても光弾性縞の概形はあまり乱されない。しかし $\theta$ が大きくなると、き裂の発生および成長に伴って縞模様は大きく変化する。このことから、き裂の発生ならびに成長に伴う応力場の変化はスリット傾角 $\theta$ の大きい程著しいこと、すなわち、スリット傾角が大きい程き裂が発生する角度も大きく、き裂の発生する角度が大きい程応力場が攪乱され易いことを示している。

き裂は微小音を伴って発生し、ほとんど瞬間的に約 $2 \sim 10 \text{ mm}$ 程度成長し、以後は荷重増加と共にほぼ比例的に、細かく見れば断続的に、次第に荷重軸に平行に向くように成長する。き裂先端部の応力はき裂の成長に伴って急激に減少し、き裂の先端が荷重軸にほぼ平行になると応力集中は激減し、き裂の成長は止る。

圧縮によるき裂の成長は、既に述べたように一般に断続的である。この理由は、供試体内に貯えられたひずみエネルギーが、閉そく面間の摩擦の stick-slip 的な性質に支配されて、断続的に解放されることによると思われる。き裂の断続的な成長の様子は、Fig. 2.1.2 のき裂中の模様からも伺われるであろう。

き裂発生応力とスリット傾角との関係を Fig. 2.1.3 に示す。き裂発生応力はスリット傾角に大きく左右される。スリットは、既に述べたように容易に閉そくするので、き裂発生条件は一般 Griffith 理論では十分な説明ができないであろう。スリット傾角 $\theta = 40^\circ$ のときのき裂発生応力を基準値とすると、一般 Griffith 理論は $40^\circ < \theta < 60^\circ$ では比較的良好に実験値を説明し、また $\theta = 30^\circ$ のき裂発生応力を基準とすると、 $20^\circ < \theta < 30^\circ$ の実験結果とよく一致する。しかしながら、スリット傾角全体にわたってき裂発生応力を単一の一般 Griffith 理論から予測することは困難である。

スリット傾角 $\theta = 40^\circ$ に対するき裂発生応力を基準値として、修正

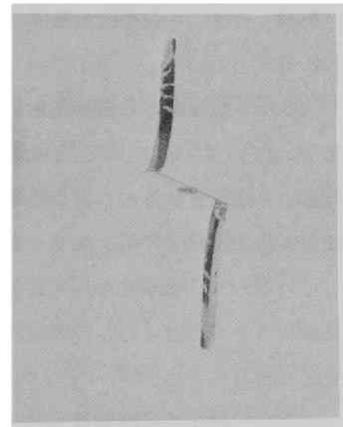


Fig. 2.1.2 Typical path of crack propagated in a PMMA plate under uniaxial compression.

Griffith 理論を適用してみると、 $\theta < 40^\circ$ では、 $\mu = 0$ としたものが、 $\theta > 40^\circ$ の範囲では $\mu = 0.2 \sim 0.3$ としたものが実験結果と比較的よく一致している。

スリットはき裂発生以前に既にほとんど閉そくしている。この点を考えて、スリット幅が無限小であるようないわゆる数学的なスリット (mathematical slit) と考えることもできよう。スリット傾角 $\theta = 40^\circ$ のき裂発生応力を基準値とすると、数学的スリットによる計算結果は、Fig. 2.1.3に示したように、スリット傾角の小さい範囲では実験結果と比較的よく一致するが、スリット傾角の大きいところでは一致しない。

以上のことから、いずれの破壊開始規準を適用しても、全ての傾きのスリットに対してき裂発生応力を予測することはできないことが分る。この原因を考えてみると、閉そくスリットからのき裂発生機構は単一のものではないかも知れないという疑念が生じる。事実、実験的には $\theta = 20^\circ \sim 30^\circ$ では、スリット先端部の局部応力集中に伴って、極めてゆるやかに迂りき裂が発生し、この応力集中に伴って2次的に引張りき裂が成長するようである。これに反して、 $\theta = 45^\circ \sim 75^\circ$ では、き裂は微小音を発して瞬間的に発生し、同時に2~10 mm程度まで急激に成長するようである。これらの事実からも、スリット傾角の大きい範囲と小さい範囲とでは、き裂発生の機構が異なっていると考えられる。

スリット傾角 $\theta$ とき裂の発角 $\beta$ (方向)との関係をFig. 2.1.4に示す。実験結果は、一般Griffith理論より推定されるものより約 $20^\circ$ 大きい。スリット傾角が約 $30^\circ$ 以上では、スリットはほぼ完全に閉そくしているので、数学的なスリットからのき裂の発生と見做すこともできよう。その結果は比較的よく実験結果と一致している。

#### b) 二軸圧縮試験結果

二軸圧縮下でのき裂発生応力とスリット傾角との関係は、一軸圧縮試験結果と共にFig. 2.1.3に

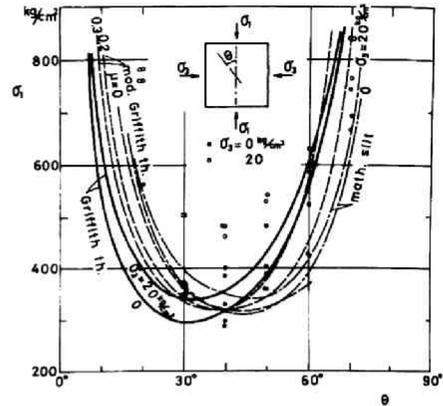


Fig. 2.1.3 Fracture initiation from a single slit contained in a PMMA plate in uniaxial and biaxial compression.

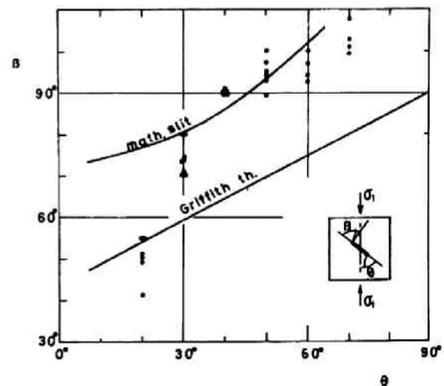


Fig. 2.1.4 Direction of branch crack initiated from a single slit in a PMMA plate in uniaxial compression.

併示した。き裂発生応力とスリット傾角との全体的な関係は、二軸圧縮の場合でも一軸圧縮の場合によく類似している。一軸圧縮試験結果より求めた $\theta=40^\circ$ の値を基準値として、二軸圧縮での破壊開始規準を Griffith および修正 Griffith 理論ならびに数学的スリットに基づいて推定すると、Fig. 2.1.3 に併示した曲線となる。実験結果は、拘束圧の影響は極めて著しいことを示しており、き裂発生時応力 $\sigma_1$ は、いずれの理論的な推定値よりもはるかに大きくなっている。

二軸圧縮下でのき裂の成長と応力比(荷重比) $\sigma_3/\sigma_1$ の関係をスリット傾角 $\theta$ をパラメーターとして Fig. 2.1.5 に示す。き裂の成長は、スリット傾角にも大きく左右される。き裂は発生と同時に瞬間的に或る距離だけ成長し、以後は断続的ではあるが、全体的には荷重増加は( $\sigma_1$ )とほぼ比例的に成長する。瞬間的に成長する長さは、一般にスリット傾角 $\theta$ が大きくなる程大である。また、スリット傾角が小さい程、き裂先端の方向は最大圧縮応力軸に速やかに平行になりき裂の成長は止る。従って、一般にき裂の成長はスリット傾角が大きくなる程大きくなる。なお、図中には Hoek & Bieniawski による結果<sup>9)</sup>をも参考のために示しておいた。

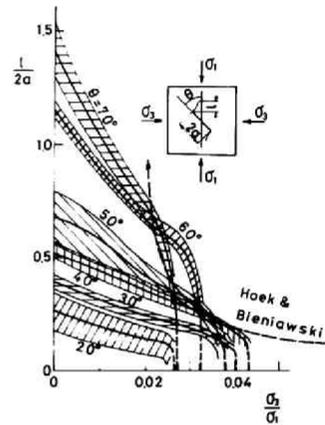


Fig. 2.1.5 Length of stable crack propagated from a single slit in a PMMA plate under biaxial compression.

## ii) FCP および NCP モデルの試験結果とその考察

### a) スリット・モデルに関する一軸圧縮試験結果

一軸圧縮の下でのき裂発生応力とスリット傾角との関

係を Fig. 2.1.6 に示す。FCP および NCP モデルによる差は認められず、また、スリット幅  $2b$  とスリット長  $2a$  の比、 $b/a=1/20$  の場合の結果と、 $b/a=1/40$  の場合のものとの間にも殆んど差は認められない。なお、図中には、一軸圧縮強度を基準値として、 $b/a=1/20$  に対する一般 Griffith 理論をも示しておいた。き裂発生応力は、最小応力に関しては一般 Griffith 理論から予測されるものとほぼ一致しているけれども、スリット傾角を考えに入れると、理論的に予測される強度は実験結果からは相当異なっていることが分る。特に、スリット傾角が大きくなると両者は全く異なった傾向を示している。Griffith 理論に基づいたき裂発生応力は、スリット傾角 $\theta$ が $30^\circ$ で最小となり、 $\theta=0^\circ$ および $90^\circ$ に近づくと増加するのに対して、実験結果によると最小き裂発生応力は $\theta=70^\circ$ に対応して生じ、 $\theta$ が $90^\circ$ に近づいてもわずかしき裂発生応力は増加しない。このような大きな差が生じる原因は不明であるが、多分 Griffith 理論が立脚する仮定そのものに根本的な原因があると思われる。すなわち、Griffith 理論では、き裂の発生は最大引張応力により生じると仮定しているけれども、実在の材料の破壊には、スリット周縁上の最大引張応力のみならずスリット周辺の応力勾配あるいは応力領域の大きさ、ひずみないしひずみ勾配、さらには

構成粒子(要素)の局所的な回転なども同時に寄与していると思われる。

これらを全て含んだ理論を構成することは極めて困難であり、そのような企ては試みられてはいない。が、ここでは、最も簡単な思考モデルとして、一軸圧縮下のスリット周辺の引張応力状態を若干検討してみよう。引張応力域は、スリット傾角の小さい間はスリット先端部の極めて小さい範囲に限定されるのに対し、スリット傾角が大きくなるにつれて、次第に増大する。スリット傾角が90°に近くなれば、スリット先端部を除いて他の部分は全て引張となる。すなわち、スリット傾角が増大すれば、スリット周縁上の最大引張応力は減少する代わりに、引張応力域が増大する。従って、また、応力勾配は急激に減少していることにもなる。問題は、き裂は極めて限られた高い引張応力を生じる点(応力勾配もまた大である点)に発生し易いか、あるいは、また全体として広い引張応力域(応力勾配も小

である領域)に発生し易いかということになる。両者に同程度の引張応力が生じているとすれば、もちろん後者の方がき裂発生の可能性が高く、従ってき裂発生応力が低いことは Weibull の確率強度理論<sup>10)</sup>から明らかであろう。今、もし仮りに材料の強度は引張応力域の大きさ、あるいはその勾配と最大引張応力値との積に逆比例する、換言すれば、或る大きさの領域の平均引張応力が或る一定値になったときにき裂が発生すると考えてみよう。最大引張応力の逆数は、既に Griffith 理論曲線により与えられているので、これにスリット傾角による補正、すなわち  $\theta = 40^\circ$  で1.0となるように選んだ引張応力域の大きさを表わす係数 $\gamma$ を導入して、実験結果と合致するようにこれを選んでみる。この補正係数は、 $\theta = 50^\circ, 60^\circ, 70^\circ, 80^\circ$  に対しては、それぞれ  $\gamma = 1.25, 1.85, 2.9, 4.0$  となり、また、 $\theta = 30^\circ, 20^\circ, 10^\circ$  に対しては、それぞれ  $\gamma = 0.77, 0.5, 0.3$  程度となる。この推定は粗雑ではあるが、引張応力域の大きさの比は、光弾性縞写真から推定してみると大略この程度である。従って、このような形で引張応力域の大きさを導入することは、破壊発生過程を考える上で一つの手がかりとなると思われる。さらに、複雑な条件、例えばひずみ、ひずみ勾配、局所変形能などを導入すれば、より適確な説明が可能であろう。しかしながら、このような影響を公式化することは極めて困難であるので、その試みは本文では一応断念した。

スリットからのき裂の発角度とスリット傾角との関係を Fig. 2. 1. 7 に示す。スリット傾角が小さい範囲( $\theta < 25^\circ$ )では、き裂の発角度は、一般 Griffith 理論より推定したものより小さく、逆に  $\theta > 30^\circ$  では大きくなっている。このことも、上の思考モデルのような引張応力域という考え方を導入すれば、

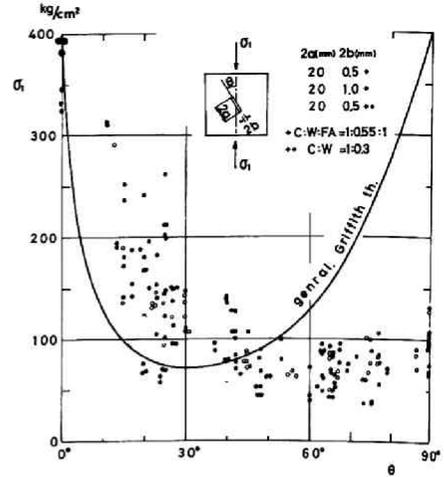


Fig. 2. 1. 6 Fracture initiation from an open slit contained in flyash cement and neat cement paste.

若干の説明はつくようである。

スリットからのき裂の成長と圧縮応力との関係を Fig. 2. 1. 8 に示す。図中シェードをつけた部分は実験のばらつきの範囲を、太線は平均値を示す。この図より、スリット傾角が大きい程低い応力でき裂が発生し、瞬間的に成長するき裂長も、各荷重段階に対するき裂長も大となり、逆にスリット傾角が小さくなるとき裂の成長は極めて緩慢となることが分る。同図には、今までに得られている唯一の実験結果である

Hoek & Bieniawski による結果<sup>1)</sup>も比較のために示した。彼らは、ガラスを用いているので、この結果とは若干異なるかも知れないが、大体の傾向はよく一致している。スリット傾角に関しては、彼ら

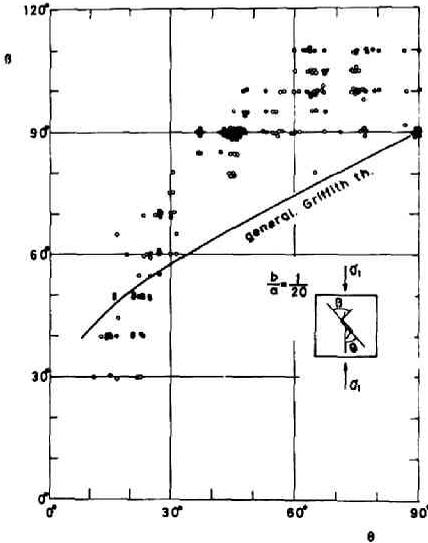


Fig. 2.1.7 Direction of branch crack initiated from an open slit.

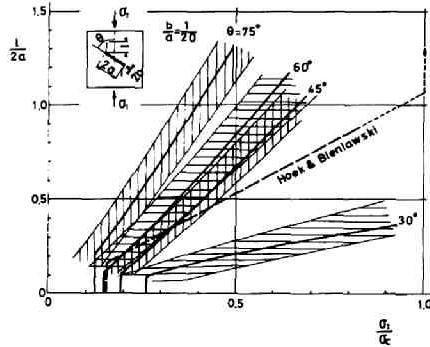


Fig. 2.1.8 Length of stable crack propagated from an open slit under uniaxial compression.

は何も言及していないけれども、彼らの結果は文脈から推して、傾角 $30^\circ$ に対するものと思われる。実験結果から見て、き裂の成長はスリット傾角に大きく左右されるので、この点にも十分配慮する必要がある。

#### b) インクルージョン・モデルに関する一軸圧縮試験結果

偏平で2次元的なインクルージョンからのき裂発生応力とインクルージョン傾角との関係を Fig. 2.1.9 に示す。塩化ビニール・インクルージョンの場合には、き裂発生応力は一般 Griffith 理論から予測されるものに比較的よく合致する。修正 Griffith 理論を用いて、 $\mu = 0.1$  程度とすれば全体にわたってさらによく一致する。この原因には、インクルージョンの弾性変形が寄与していると思われる。インクルージョンの傾角が小さい範囲 ( $\theta < 50^\circ$ ) では、インクルージョン周辺の応力度は高く、き裂発生以前にインクルージョンの周縁の大部分がマトリックスから分離してしまうのが普通であり、従って、スリット・モデルの場合と大差ない結果が得られる。これに反して、インクルージョン傾角が大きくなるにつれて、インクルージョンがマトリックスから分離することはなくなり、従ってき裂発生の可能性のある傾

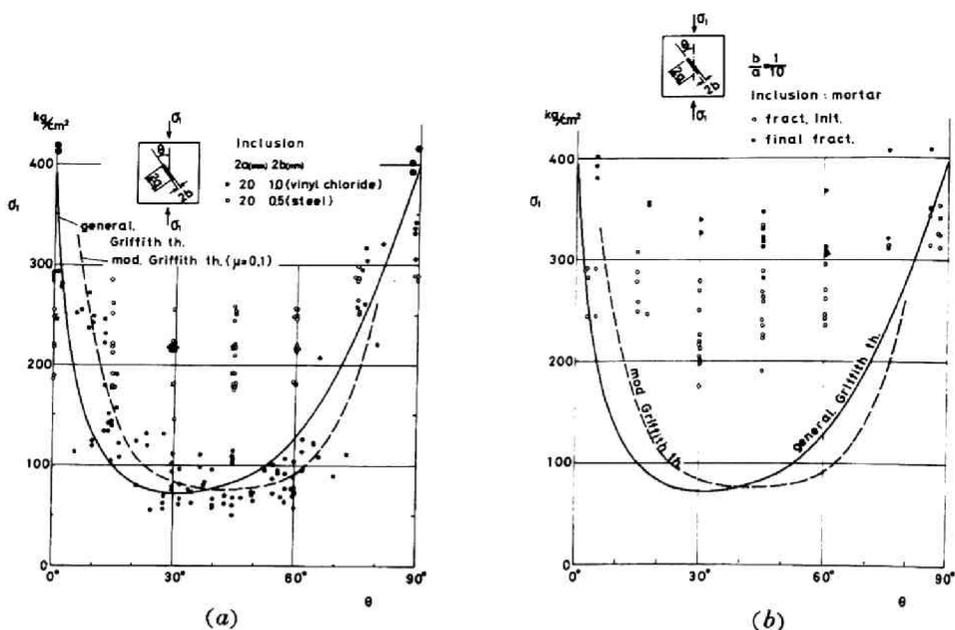


Fig. 2.1.9 Fracture initiation from a flat inclusion contained in flyash cement paste under uniaxial compression.

域の引張応力はスリットの場合よりはるかに緩和され、特に傾角が大きい場合には引張応力は小さいので、インクルージョンによって容易に大きく緩和されると考えられる。この場合にも、スリット・モデルの場合と同様に、引張域の大きさと最大引張応力とを同時に考慮するとさらによく説明がつくであろう。

鋼インクルージョンの場合には、インクルージョンとマトリックスとの接着部に十分な強度（ボンド強度）があれば、き裂が発生することは考え難い。実際には、マトリックスとインクルージョン間のボンドは、インクルージョン傾角が小さい範囲（ $\theta \leq 50^\circ$ ）では、比較的容易に破壊されることが実験的に確められた。特に、傾角が小さい範囲（ $\theta = 20^\circ$ ）では、ボンドの破壊はインクルージョン先端周辺に生じて、き裂発生応力が、スリットあるいは塩化ビニール・インクルージョンの場合より低くなるという結果となる。全体的な傾向として、鋼インクルージョンの場合には、き裂発生応力はインクルージョン傾角にはあまり左右されない。従って、ボンドき裂がマトリックス内のき裂の発生に先行して、インクルージョン周辺上の或る部分に生じ、これがスリットとして作用すると考えても、残ったボンドの作用により鋼インクルージョンが補強材の役割を果たすと考えられる。従って、Griffithあるいは修正Griffith理論を適用することはできないであろう。き裂発生機構は、塩化ビニール・インクルージョンの場合と若干異なるかも知れないが、鋼インクルージョン周辺からもき裂の発生があり、しかも塩化ビニール・インクルージョンの場合と同じオーダー（高々数倍）の圧縮応力の下でき裂が発生するという事は極めて興味深い事実である。

Fig. 2.1.9には、さらにインクルージョンがマトリックスとほぼ同質の材料、すなわちモルタルか

ら成るモデルに関する結果も併示した。この場合には、き裂発生応力は前二者に比して全般に相当高くなる。き裂発生応力は $\theta=30^\circ\sim 40^\circ$ で最小値を取るけれども、インクルージョン傾角の影響は鋼インクルージョンの場合よりさらに小さい。単純に考えれば、インクルージョンからのき裂発生応力は、インクルージョンの弾性係数が大きい程高くなると思われるが、き裂は応力ないしひずみの急激な不連続点に生じ易いことを考えると、同質のインクルージョンの場合のき裂発生応力が最も高いことは容易に了解できよう。特に、この実験ではモルタルを用いているので、ほぼ同質の材料であるという点以外に、若干の反応性が残っていること、ダイヤモンド・カッターによる切断面の凹凸、さらにインクルージョンの微細空隙へのセメント・ミルクの注入によるインクルージョンとマトリックス間ボンドの強化など、前二者のインクルージョンにはない特徴的な影響も見逃し得ないであろう。

インクルージョン傾角とき裂の発生角との関係を Fig. 2.1.10 に示す。実験より得られたき裂発生角は、一般 Griffith および Griffith 理論より予測されるものより全体的に小さい。特に、インクルージョン傾角が小さい範囲ではその差は著しい。

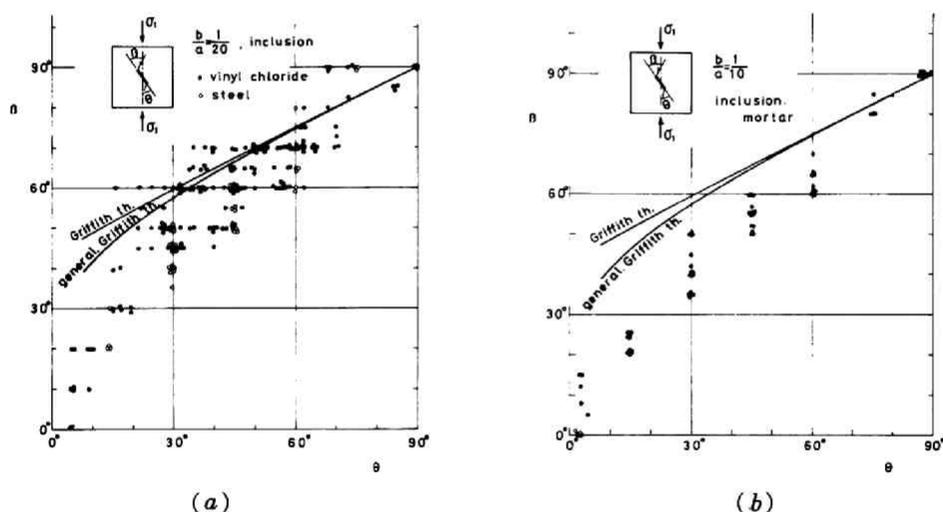


Fig. 2.1.10 Direction of branch crack initiated from a flat inclusion.

$0^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ では、その差は $15^\circ \sim 20^\circ$ 、 $30^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ では $15^\circ \sim 0^\circ$ である。また、鋼インクルージョンからのき裂発生角は、塩化ビニール・インクルージョンからのものより、全体的に $5^\circ \sim 10^\circ$ 程度小さい。これらの差が現われる原因は、スリットより塩化ビニール・インクルージョンの方が、更に塩化ビニール・インクルージョンより鋼インクルージョンの方が、剛性が高いので、最大引張応力の発生点はこの順序にインクルージョン先端部により近くなり、従って、き裂の発生点は、鋼インクルージョン、塩化ビニール・インクルージョン、さらにスリットの順序にインクルージョン先端からより遠ざかることになり、き裂の発生角はこの順序でより大きくなることにあると考えられる。なお、モルタル・インクル

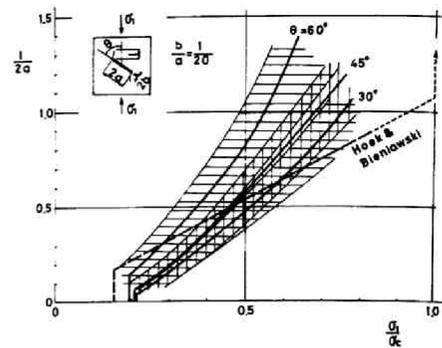
ージョンの場合のインクルージョン傾角とき裂発生角との関係も Fig. 2.1.10 に示した。この結果は、鋼インクルージョンの場合により近い。

一軸圧縮試験の下での塩化ビニール・インクルージョンおよびモルタル・インクルージョンからのき裂の成長過程を Fig. 2.1.11 に示す。図中のシェードは、実験値のばらつきを、太線は平均値を示したものである。インクルージョンの傾角が  $30^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  の範囲では、き裂発生応力に大差はない。き裂は発生した瞬間に 2~5 mm 程度成長し、以後は荷重増加と共に若干加速的に成長する。この範囲では、インクルージョン傾角が大きい程き裂の成長も大である。き裂の成長過程は、インクルージョン傾角が小さい範囲では、前述のスリットの場合とはかなり異なっている。すなわち、スリットの場合にはき裂発生角がインクルージョンの場合より大きく、従って、Fig. 2.1.8 のように荷重軸に平行に計ったき裂長はあまり長くないうちにき裂先端の方向が荷重軸に平行になってき裂の成長が止るのに反して、インクルージョンの場合にはき裂発生角が小さい上に、インクルージョンのボンド破壊を生じた部分が楔のように作用してき裂の成長を助けることにより、き裂は荷重増加と共に若干加速的に成長することになる。なお、図中には、Hoek & Bieniawski による結果も<sup>12)</sup> 比較のために併示した。

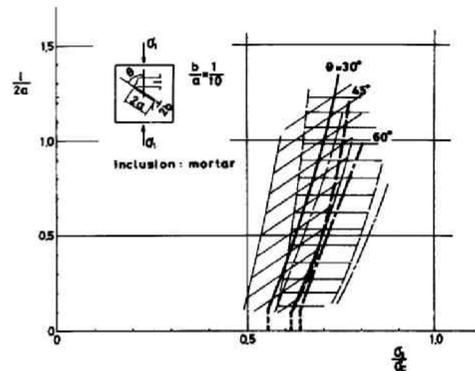
代表的なき裂成長状態の例を Fig. 2.1.12 に示す。スリットの場合に比して、インクルージョンからのき裂発生角は小さいことに注意されたい。

#### c) スリットならびにインクルージョン・モデルに関する二軸圧縮試験結果

スリットならびにインクルージョンからのき裂発生応力と傾角との関係を Fig. 2.1.13 に示す。この場合の拘束圧は  $10 \text{ kg/cm}^2$  であり、一軸圧縮時の最小応力の約  $1/7$  程度である。傾角が小さい範囲 ( $\theta < 20^\circ$ ) ならびに大きい範囲 ( $\theta > 70^\circ$ ) では、二軸圧縮の場合のき裂発生応力は一軸の場合と殆んど差がないけれども、傾角が  $30^\circ < \theta < 60^\circ$  では、より大きな応力が必要となる。特に、インクルージョンの場合にこの傾向が著しく、二軸圧縮での最小き裂発生応力は、一軸圧縮の場合の約 2 倍となっている。全体的に見て、スリットの場合には二軸圧縮でのき裂発生応力は一軸の場合とほとんど変

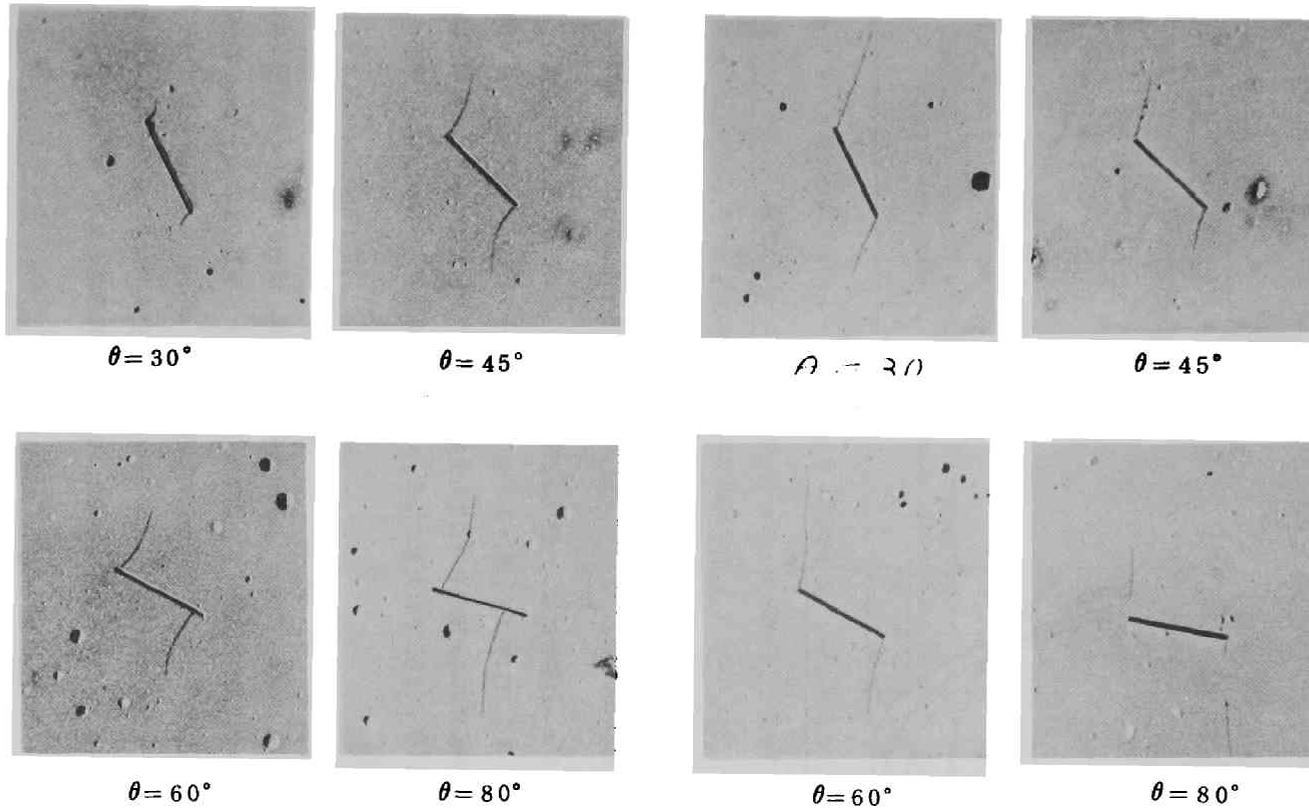


(a)



(b)

Fig. 2.1.11 Length of stable crack propagated from an open slit (a) and from a flat inclusion (b).



Slit( 20.0mm × 1.0mm )

Inclusion ( 20.0mm × 1.0mm )

Fig. 2.1.12 Typical path of cracks propagated from an open slit and from a flat inclusion.

らないのに反して、インクルージョンの場合のき裂発生応力は相当増大する。この事実、多軸応力下の破壊現象を解釈する上で興味深い。

Fig. 2.1.14には、き裂発角とスリットあるいはインクルージョンの傾角との関係を示した。き裂

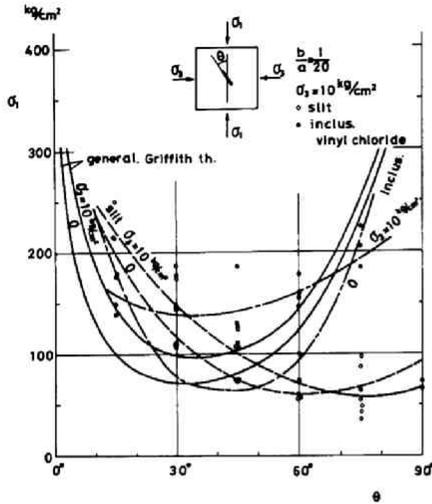


Fig. 2.1.13 Fracture initiation under biaxial compression.

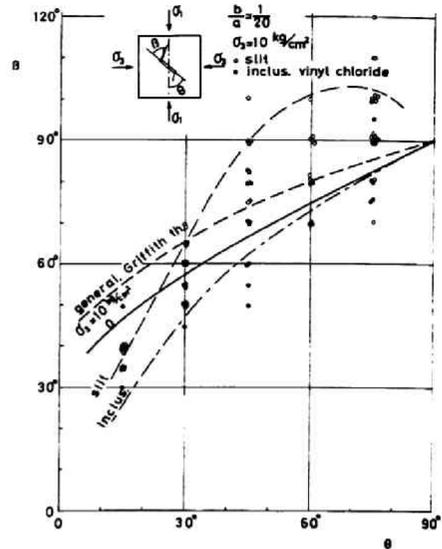
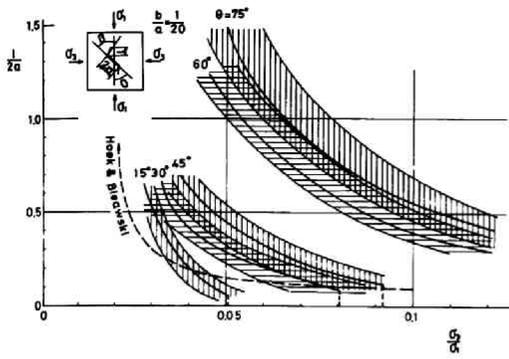


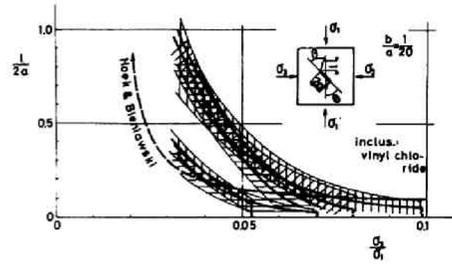
Fig. 2.1.14 Direction of branch crack initiated under biaxial compression.

の発角は、インクルージョンの場合には、一般 Griffith 理論から求められるものより小さく、スリットの場合には、傾角  $\theta < 30^\circ$  では小さく、 $\theta > 30^\circ$  では大きくなっている。二軸圧縮によるき裂の発角は、インクルージョンの場合には一軸のものよりも全般に大きくなり、また、スリットの場合には、傾角  $\theta > 30^\circ$  では小さく、 $\theta < 30^\circ$  では大きくなる。いずれの場合にも、一般 Griffith 理論による予測とは差がある。

二軸圧縮下での、き裂の成長過程を Fig. 2.1.15 に示す。図中シェードした部分は実験値の範囲を、太線は平均値を示す。スリットの場合には、一軸圧縮の場合と同様に、傾角  $\theta$  が大きい程き裂発生応力は小さくなり、また、発生時に瞬間的に成長するき裂長ならびに以後のき裂長も共に大となる。拘束圧を一定に保って、荷重  $\sigma_1$  を増加させると、き裂は加速的に成長する。Hoek & Bieniawski の結果<sup>13)</sup>と比較されたい。インクルージョンの場合には、スリットの場合とは全く異なり、き裂の成長は傾角  $\theta = 45^\circ$  の場合が最も著しく、これより傾角が増減すると、き裂の成長は緩慢となり、き裂長も短くなる。



(a)

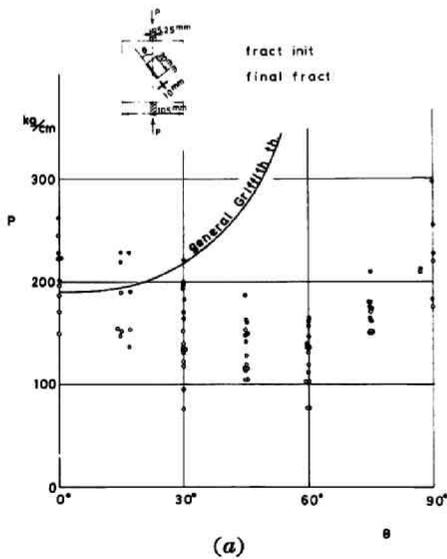


(b)

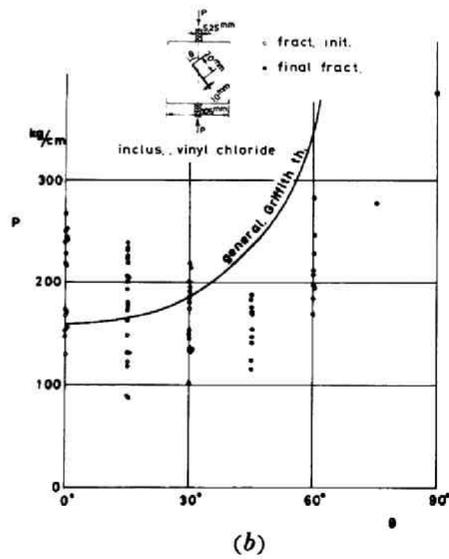
Fig. 2.1.15 Length of stable crack propagated from an open slit (a) and from a flat inclusion (b) under biaxial compression.

d) スリットならびにインクルージョン・モデルに関するインデンテーション試験結果

スリットならびに塩化ビニール・インクルージョン・モデルのき裂発生応力ならびに終局破壊応力とスリットあるいはインクルージョンの傾角との関係を Fig. 2.1.16 に示す。供試体を線形弾性体と仮定すると、中央部の応力は第 III 部第 5 章で示すように、荷重軸方向の圧縮応力とこれに垂直な引張応力の



(a)



(b)

Fig. 2.1.16 Fracture initiation and final fracture from an open slit (a) and from a flat inclusion (b) under tension (due to indentation test).

比が3:1となる。従って、ここで用いたスリットあるいはインクルージョン周辺の応力状態は、近似的に圧縮応力:引張応力=3:1の応力場にあると考えてよいであろう。この応力状態の下で一般 Griffith 理論を適用すると、図中の曲線を得る。なお、図示の際には、スリットあるいはインクルージョン傾角 $\theta = 0^\circ$ の強度を基準値として取った。一般Griffith理論によれば、最小強度はスリットあるいはインクルージョン傾角 $\theta = 0^\circ$ で生じ、傾角が増加するにつれて強度は増加する。しかしながら、スリットからのき裂発生応力に関する実験結果はこれとは異なった傾向を示している。インクルージョンの場合には、一般 Griffith 理論より予測されるものにかなり近い。インクルージョンの傾角が大となると欠陥からはき裂が発生せず、他の原因で終局破壊に至るようである。これは、供試体中央部が延性材料で補強されたような状態になっているためと思われる。

実験結果と一般 Griffith 理論による予測値が異なる原因は明らかではないが、既に圧縮試験結果の解釈の際に述べたように引張応力域の大きさないし応力勾配を考慮しなければならないであろう。

なお、一軸圧縮試験の結果とインデンテーション試験の結果とを比較してみると、前者の場合にはき裂発生から終局破壊に至るまでの荷重増加が著しい(数倍が普通)のに対して、後者では安定なき裂成長の期間が短かく、概して荷重増加が少なくて比較的容易に終局破壊に至る。しかしながら、引張応力域での破壊でも、応力状態によっては、必ずしもき裂発生後直ちに終局破壊に至るとは限らないことに注意しなければならない。

き裂の発生角とスリットならびにインクルージョンの傾角との関係を Fig. 2.1-17 に示す。スリット・モデルの場合には、き裂の発生角は一般 Griffith 理論より予測されるものより相当大きくなり、スリ

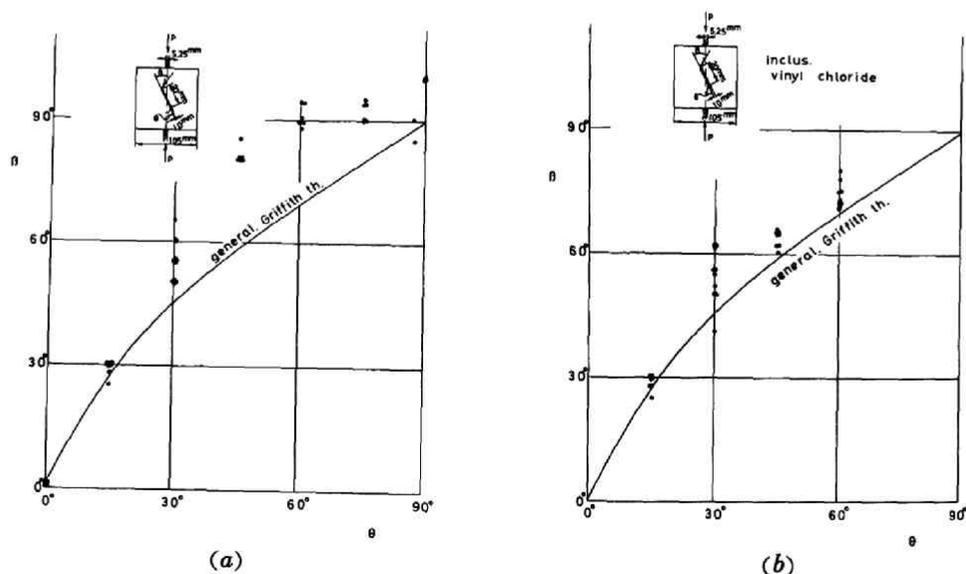


Fig. 2.1.17 Direction of branch crack initiated from an open slit (a) and from a flat inclusion (b) under tension (due to indentation test).

ット傾角が  $45^\circ \sim 60^\circ$  でその差は最大  $20^\circ$  程にもなる。インクルージョン・モデルの場合には、実験結果と一般 Griffith 理論より予測される結果は傾向的には一致しているが、前者の方が後者より大きく、その差は最大約  $10^\circ$  程度となる。

インデンテーション試験の際のき裂成長過程を Fig. 2.1.18 に示す。シェードの部分は実験値のばらつきを、また太線は平均値を示す。インデンテーション試験の場合のき裂の成長は、一軸圧縮試験の場合より相当速い。このことは、スリット・モデルならびにインクルージョン・モデルの両者共にあてはまる ( Figs. 2.1.8, 2.1.11, 2.1.12 と Fig. 2.1.18 を比較せよ )。なお、代表的なき裂成長過

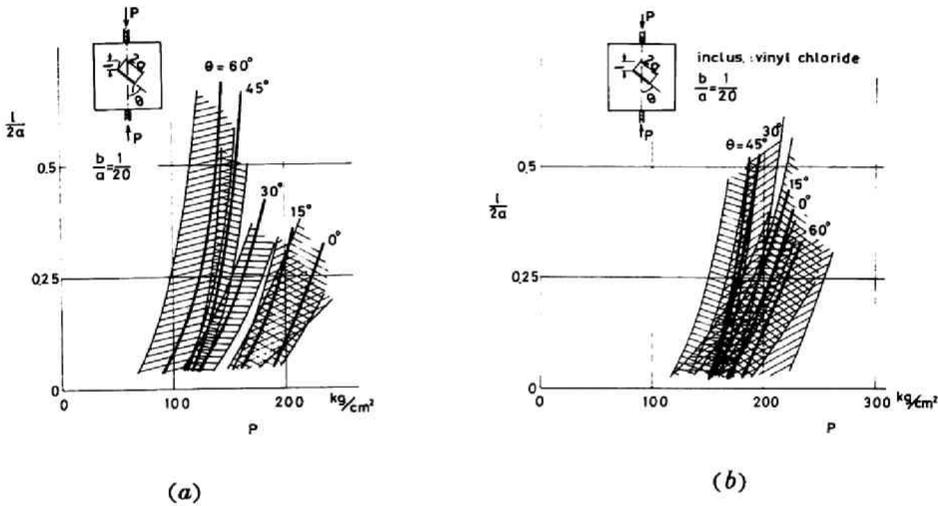
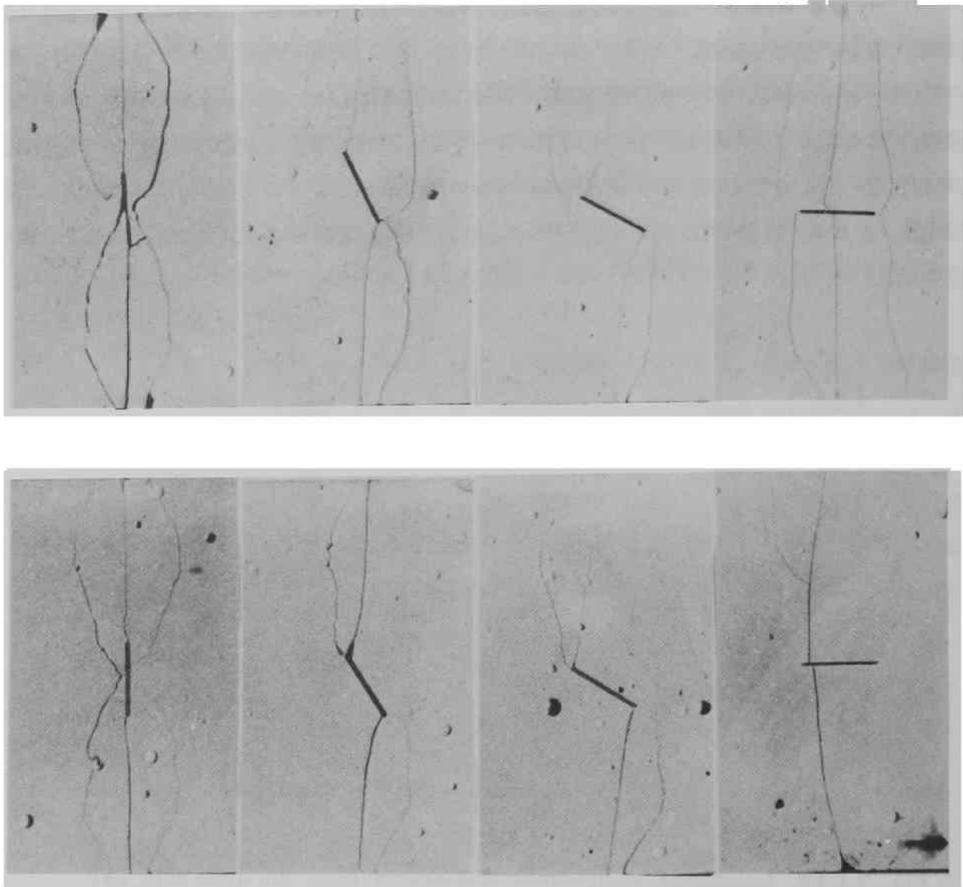


Fig. 2.1.18 Length of stable crack propagated from an open slit (a) and from a flat inclusion (b) under tension ( due to indentation test ).

程を Fig. 2.1.19 に、また破断面の状態を Fig. 2.1.20 に示す。き裂は、シェブロン模様 ( chevron pattern ) より、スリットないしインクルージョン先端に発生したことが分る。

なお、インクルージョンとして鋼を用いた場合には、インクルージョン傾角が小さい場合 ( $\theta < 30^\circ$ ) でもき裂は発生し難く、発生したき裂も容易に成長しなかった。インクルージョン傾角  $\theta > 30^\circ$  では、インクルージョンからのき裂の発生は認められなかった。これは、供試体中央部が鋼で補強されることに原因があると思われる。



Top, slit, left to right  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Bottom, flat inclus., left to right  $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$

Fig. 2.1.19 Fracture patterns due to indentation test.

### 1.3 多数スリットおよびインクルージョンからのき裂の発生と伝播

#### 1.3.1 供試体の作製

##### i) 規則的に配列したスリット・モデル

前述のFCPモデル(1.2.1 b)参照)をマトリックスとして用い、塩化ビニールの薄片  $2.00\text{mm} \times 1.0\text{mm} \times 1.30\text{mm}$  を、規則的に  $10\text{mm}$  間隔となるように供試体中央部に数個垂直に挿入し、数時間後静かに抜き取って規則的なスリットを含むモデルを作製した。なお、各スリットの先端は半円形となるようにした。その他供試体の打設方法、養生、準備、材令などは全て1.2.1.b)の場合と同様である。

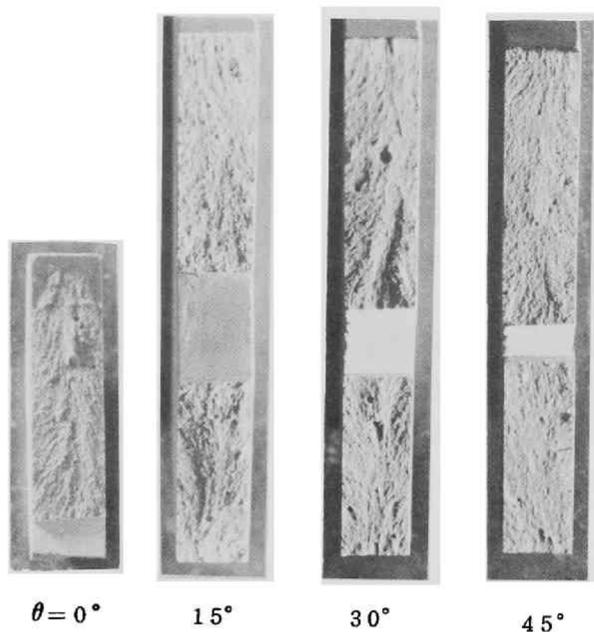


Fig. 2.1.20 Patterns of the splitted surface.

##### ii) 規則的に配列したインクルージョン・モデル

i)と同様にして塩化ビニールの薄片を挿入し、マトリックスが硬化した後も抜き取らずにインクルージョンとしてそのまま残しておいた。その他のことは全て i)に準じる。

##### iii) 不規則な多数のスリットおよび、あるいはインクルージョンを含むモデル

岩質材料内の初期欠陥の寸法および形状はランダムであると考えられる。これに対して、FCPマトリックス内に、a)同一寸法のスリットあるいはインクルージョンがランダムに分布したモデル、b)寸法、形状の異なるスリットあるいはインクルージョンがランダムに分布したモデル、およびc)寸法、形状の異なるスリットおよびインクルージョンがランダムに分布したモデルを作製した。供試体の作製方法は、今まで述べてきた方法を組み合わせたものである。供試体の養生、準備、材令などは上述のものと同様である。

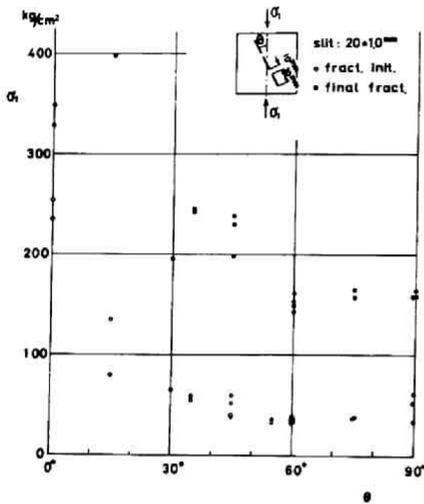
#### 1.3.2 試験方法

試験は一軸圧縮試験のみとした。この場合には、特に供試体と加圧盤間の摩擦を減少させるように配慮し、既に1.2.2で述べたのと同様にシリコン・グリースを塗布した  $0.05\text{mm}$  厚のテフロン・シートを減摩剤として供試体端面と加圧盤間に挿入した。載荷速度は、最大平均応力が約  $5\text{kg/cm}^2/\text{sec}$  となるようにした。その他荷重のかけ方、き裂の検出、記録などは1.2.3で述べた方法に準じるものとする。

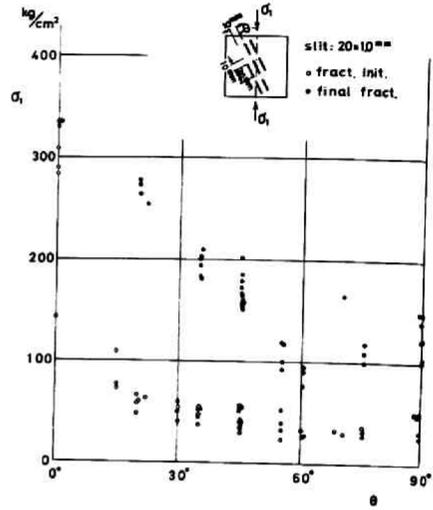
### 1.3.3 試験結果とその考察

#### i) 規則的に配列したスリット・モデルの試験結果とその考察

規則的に配列したスリット・モデルのき裂発生ならびに結局破壊応力とスリット傾角との関係をFig. 2.1.21に示す。き裂発生応力は、単一スリットの場合と比較して、スリット数が多い程若干低くなっている。全体的な傾向は、単一スリットの場合とほぼ同じであるが、スリット傾角が小さい場合にはき裂発

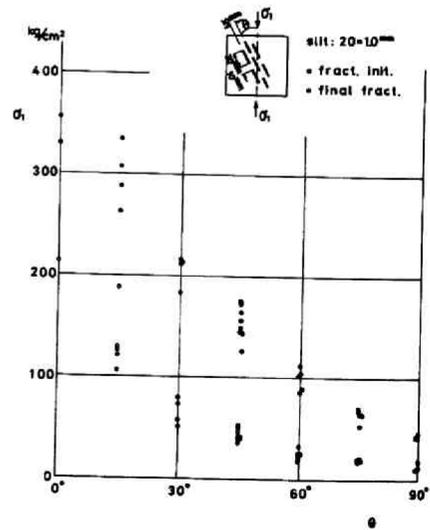


(a)



(b)

Fig. 2.1.21 Fracture initiation and final fracture of the model containing slit system.



(c)

生応力は相当減少していることが分る。特に、並列型（A型）の場合にはその差が大きいためである。また、千鳥型（B型）の場合には、さらに傾角が特に大きい場合にき裂発生応力が減少するという特徴がある。次に、多数スリットを含むモデルのき裂発生応力の低下について簡単な推定を行なってみよう。一直線状に並んだ同一寸法のスリット（colinear slit）のスリット間隔と強度低下率との間には、弾性論を適用すると次の関係がある。<sup>14)</sup>

$$\frac{\sigma_{a/c}}{\sigma_0} = \sqrt{\frac{\pi a}{2c} \cot\left(\frac{\pi a}{2c}\right)}$$

ここに、 $\sigma_{a/c}$  はスリット長が  $2a$ 、その中心間隔が  $2c$  のスリット群に対するき裂発生応力を、また  $\sigma_0$  は単一スリットからのき裂発生応力を表わす。これより、この実験の場合の強度低下率を求めてみると、単一スリットの場合の約 80% となる。これは、スリット傾角が  $30^\circ \sim 60^\circ$  に対して比較的よく合っているようである。もちろん、並列ないし千鳥型のスリットの場合には、スリット相互間の作用が大きくなり、強度低下率はさらに減少するであろう。

終局強度は、スリット数が増加すると相当大きく減少する。スリット傾角が大きくなると、*i.e.*,  $\theta > 60^\circ$ 、一直線状のスリットおよび並列スリット・モデルの場合には強度低下は殆んど認められないが、千鳥型の場合には、さらに急激に減少している。これは、き裂の成長に伴って生じるき裂同志の干渉により、局所的な不安定域の状態が異なってくるためである。き裂の成長は、初期段階では、単一スリットの場合と大差はないけれども、荷重が増加するにつれて、隣接スリットとの干渉が目立ってくる。

一直線状スリット群の場合には、隣接スリット間にき裂が発生し、 $\theta < 30^\circ$  ではこのき裂部分が破壊されて隣接スリットが連なって、全体として一直線状の破壊面が形成されて終局破壊に達する。また、 $\theta > 40^\circ$  では、スリット間に発生したき裂も荷重軸に平行に成長し、その結果荷重軸に平行な多数のき裂群が生じ座屈現象のような機構で終局破壊が生じる。

並列型スリットの場合には、スリットから発生したき裂は単一スリットの場合よりも成長が遅く、載荷面に最も近い 2 個のスリット先端からのき裂のみが急速に成長する。しかしながら  $\theta < 30^\circ$  では、終局破壊の直接の原因は、全く別に発生・成長したき裂との相互作用によるようである。 $\theta > 40^\circ$  の場合には、スリットから外方に成長したき裂群とスリット間に発生したき裂群の干渉により、供試体中央部が不安定となって終局破壊に至る。

千鳥型のスリットの場合には、 $\theta < 30^\circ$  では発生したき裂同志が連結し、中央部に弱面ないし弱層を生じて崩壊を生じるのに対し、 $\theta > 40^\circ$  では、スリット先端より発生したき裂はスリット同志を連絡するよりはむしろ外側へ成長し、同時にスリット先端以外からも多数のき裂が発生し、全体として特に供試体中央部が不安定となって終局破壊を生じることになる。代表的なき裂伝播の様子を Fig. 2.1.22 に示す。

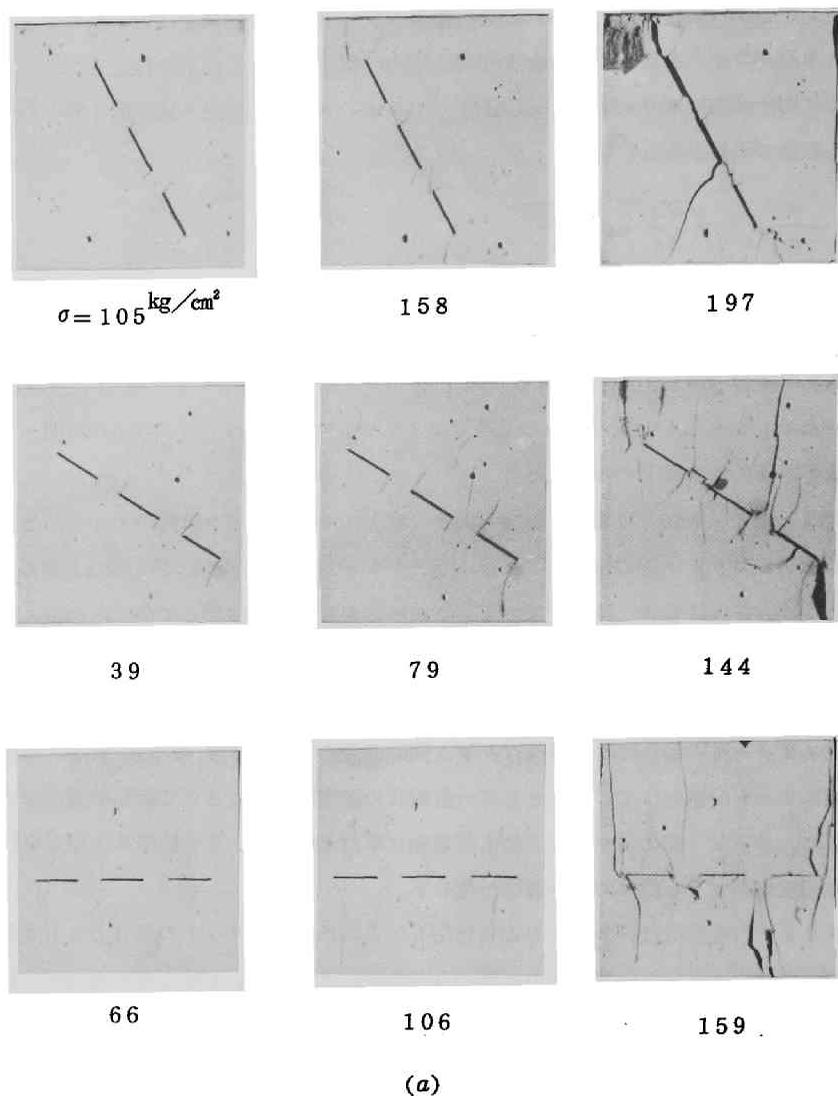
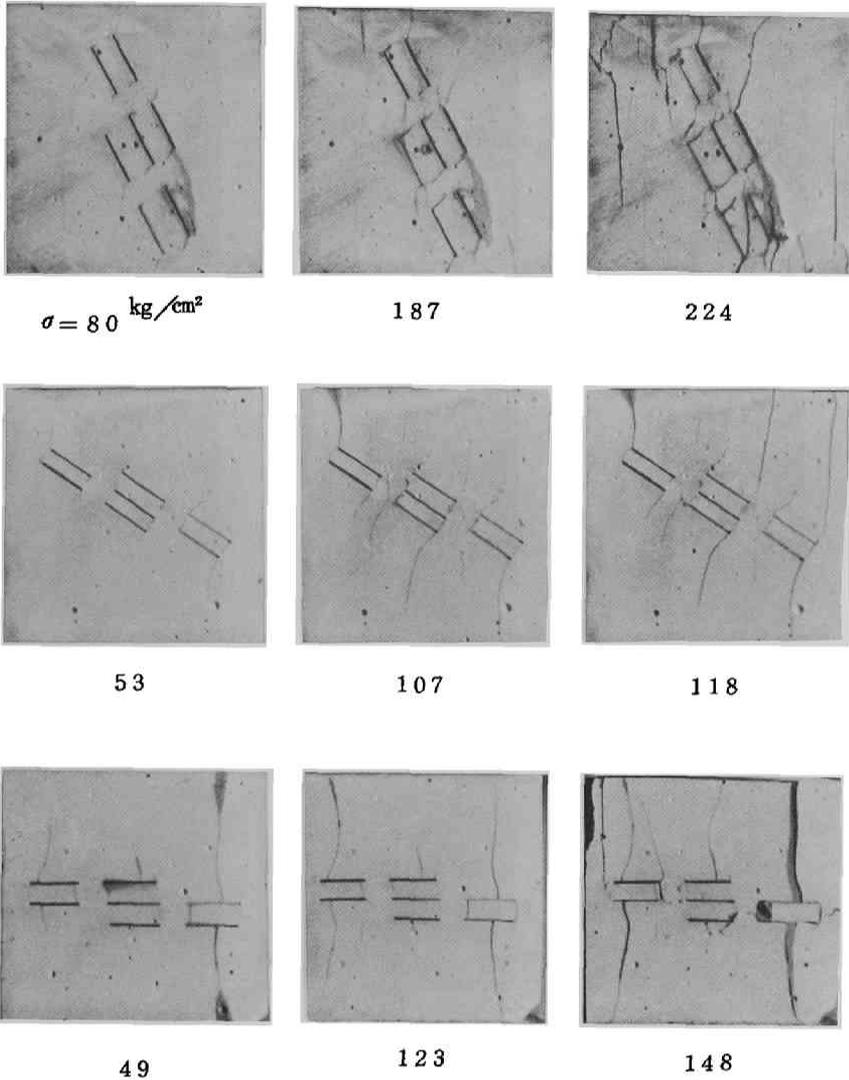


Fig. 2.1.22 Fracture patterns of models containing slit system.

ii) 規則的に配列したインクルージョン・モデルの試験結果とその考察

規則的に配列した扁平な塩化ビニール・インクルージョン・モデルのき裂発生応力ならびに終局破壊応力とインクルージョン傾角との関係を Fig. 2.1.23 に示す。この結果を単一インクルージョンの場合の結果 (Fig. 2.1.9) と比較してみると、一直線状ならびに並列インクルージョンの場合には、インクルージョン傾角が特に小さい場合  $\theta < 15^\circ$  , および大きい場合  $\theta > 75^\circ$  で若干き裂発生応力は低くなっていることが認められるが、全体的には単一インクルージョンの場合によく一致し、また、千鳥型の場



(b)

Fig.2. Fig. 2.1.2.2 (continued).

合には、ほぼ全般にわたって単一インクルージョンの場合と一致していることが分る。従って、この実験程度に欠隔間の間隔があれば、欠陥相互間の干渉は極めて小さいと考えてよいであろう。

多数スリットを含むものと多数インクルージョンを含むものとの比較をしてみると、単一インクルージョンの場合とほぼ同じような関係が見られる。スリットの場合には、傾角 $\theta$ が大きくなればき裂発生応力は低下するのに対して、インクルージョンの場合には $\theta < 45^\circ$ ではき裂発生応力はほぼ同様に減少するが、 $\theta \doteq 45^\circ$ で最小となり、 $\theta > 45^\circ$ では $\theta$ の増加と共に急激に増加し、ほぼ $\theta = 45^\circ$ を対称軸と

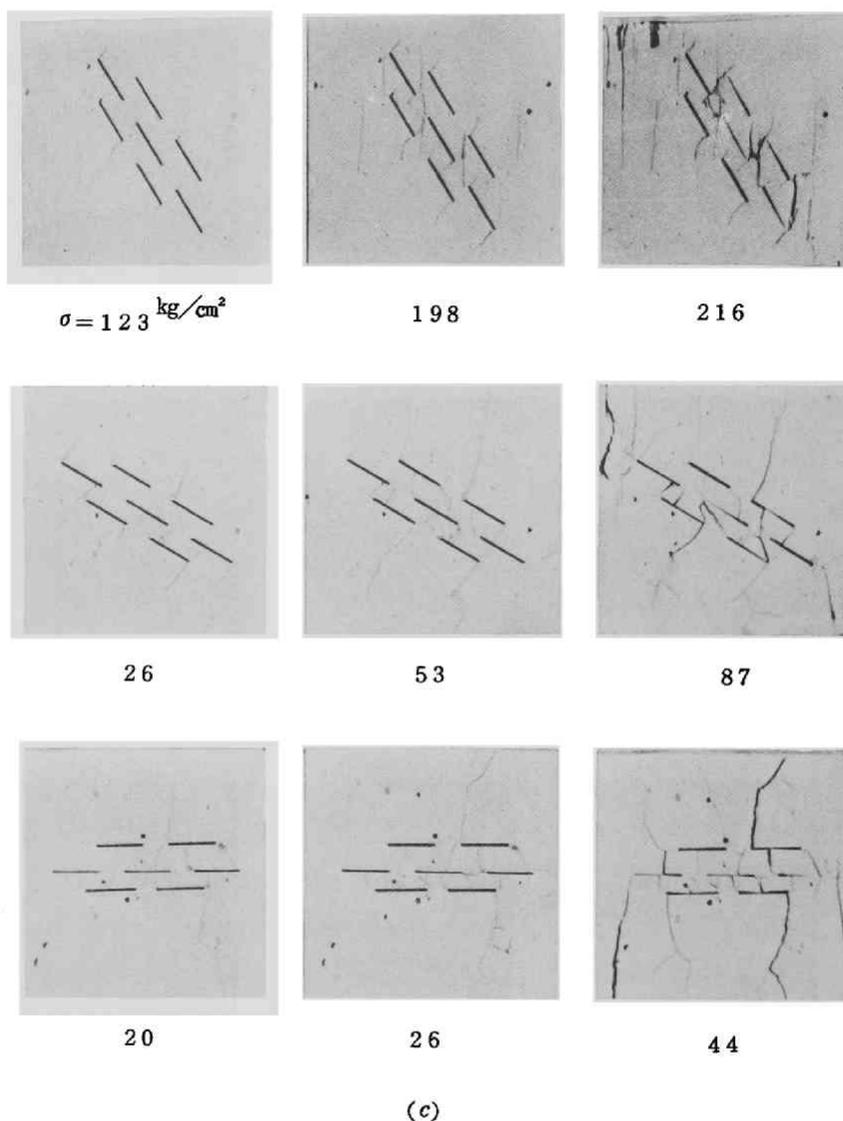
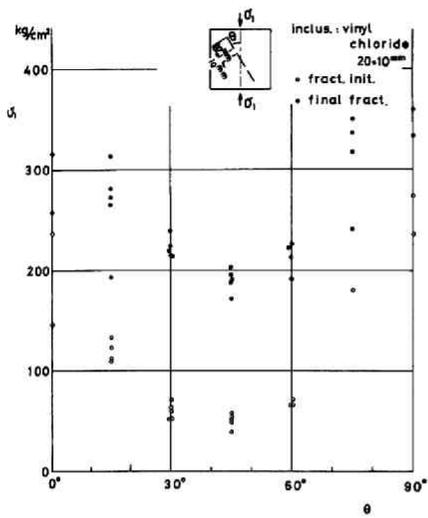
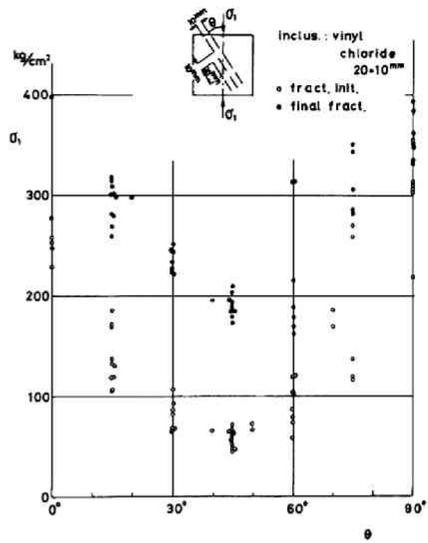


Fig. 2.1.22 (continued).

するような概形となる。特に  $\theta = 90^\circ$  では、 $\theta = 0^\circ$  の場合よりき裂発生応力は若干大きくさえなっているようである。終局破壊応力に関してもほぼ同様な傾向が見られる。これは、弾性係数がマトリックスの約  $1/8$  程度のインクルージョンでも、スリットの場合に生じるような応力集中を相当緩和する傾向のあることを示している。特に、インクルージョン傾角が大きい場合には、引張応力域を減少させるので、その効果は著しいと思われる。その他、単一インクルージョンの場合に検討したことがこの場合にも大略当てはまると考えてもよいであろう。

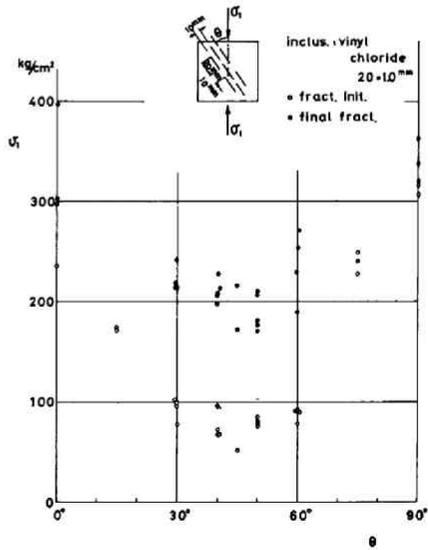


(a)



(b)

Fig. 2.1.23 Fracture initiation and final fracture of the model containing inclusion system.



(c)

き裂の発生と成長に関しては、初期の段階では、単一インクルージョンの場合と大差はないけれども、荷重増加に伴って次第に隣接インクルージョンの干渉が顕著になってくる。

一直線状インクルージョンの場合には、スリットの場合とほぼ同様なき裂伝播を示して終局破壊に至る。インクルージョン傾角  $\theta < 30^\circ$  では、隣接インクルージョン間に発生、成長したき裂が破壊されて隣接インクルージョンが連結され、全体として一直線状の破断面が形成されて終局破壊に至る。また、 $\theta > 40^\circ$  では、インクルージョン間に発生したき裂は荷重軸に平行に成長し、インクルージョン先端から発生し、成長したき裂と共に荷重軸に平行なき裂群をつくり、これによって供試体全体が座屈に近いような形で終局破壊する。

並列型インクルージョンの場合にも、スリットの場合とほぼ同じ傾向を示している。インクルージョン先端から発生したき裂は、 $\theta < 30^\circ$  では、急激には成長せず、他の場所に発生したき裂が成長して全体として不安定となって終局破壊に至り、 $\theta > 40^\circ$  の場合には、インクルージョンから発生したき裂が供試体中央部で干渉して、あるいは供試体端まで成長して不安定域を生じて終局破壊に至る。

千鳥型インクルージョンの場合には、傾角  $\theta < 30^\circ$  では、隣接インクルージョンが連結するように破壊域が形成され、中央部の弱面、ないしこれを含む弱層が形成されて終局破壊するのに対し、 $70^\circ > \theta > 40^\circ$  では、発生したき裂は供試体端面方向へ急速に成長して、全体として数片の柱状体となって終局破壊に至る。さらに  $\theta > 75^\circ$  では、インクルージョン先端から発生したき裂は成長せず、終局破壊はこのき裂群には直接にはあまり影響されないようである。代表的なき裂の伝播過程を Fig. 2.1.24 に示す。

### Ⅲ) 不規則な多数のスリットおよび、あるいはインクルージョンを含むモデルの試験結果とその考察

不規則なスリットあるいはインクルージョンを含む場合には、き裂の発生、伝播は複雑となり終局破壊の機構も個々の場合によって若干差があり、筆舌には尽し難いが、ほぼ共通した特性のみについて略述する。

同一のスリットあるいは偏平インクルージョンがランダムに分布した場合には、個々を単一欠陥と考えた場合に最も危険な傾角のスリットあるいはインクルージョンから順次き裂が発生する。初期段階では、隣接欠陥の影響を余り受けないので、荷重が増加するにつれて、き裂の発生数は多くなり、ついには殆んど全ての欠陥からき裂が発生するようになる。この段階までは、単一欠陥の場合と大差はないが、き裂の成長につれて相互干渉が起り、隣接欠陥間のマトリックス部分にもき裂が発生、成長する。荷重が増加するにつれて、次第に局所的な破壊域が形成され、これが終局破壊の形態を支配することになる。

寸法、形状の異なるスリットあるいはインクルージョンがランダムに分布したモデルに関しては、次のようなことが観察される。この場合には、上の場合より現象はさらに複雑となるが、き裂の発生ならびに伝播の初期段階では、単一欠陥の場合と殆んど差はない。荷重が増加するにつれて、き裂は成長し、これにつれて初期のき裂とは全く異なった新しいき裂が発生し、連結されて次第に局所的な破壊域が形成される。終局破壊の形態は、この破壊域に支配されるようである。このモデルの範ちゅうに属する実在の材料は相当多いと思われる。なかでも、インクルージョンとして、モルタル片を含む場合は、コンクリートの

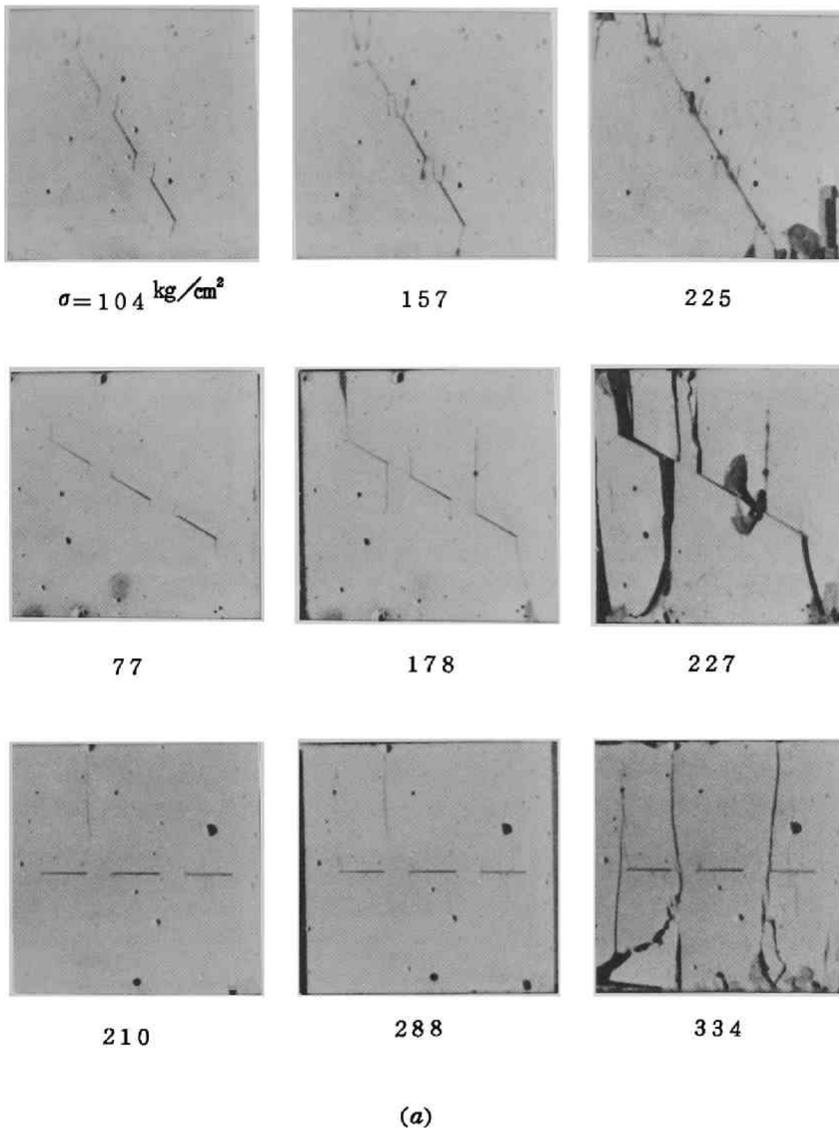
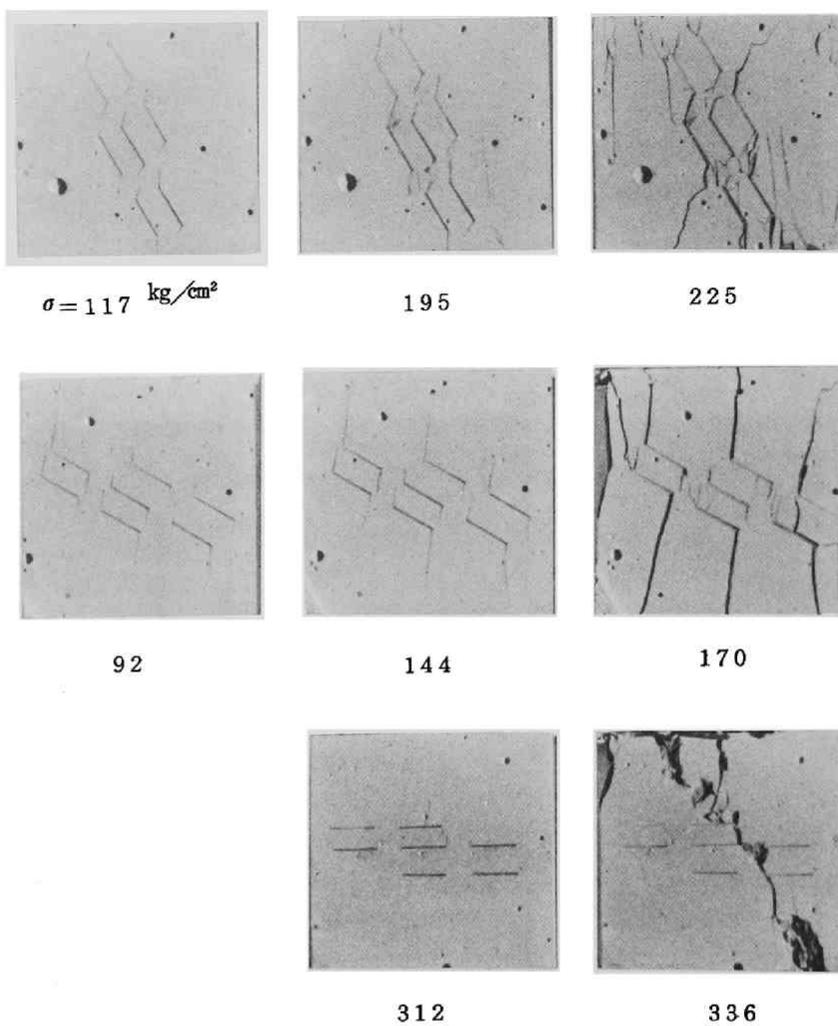
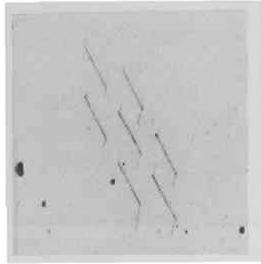


Fig. 2.1.24 Fracture patterns of the models containing inclusion system.

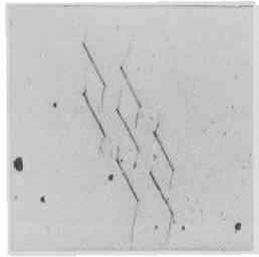


(b)

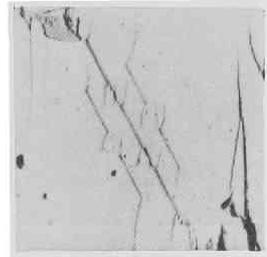
Fig. 2.1.24 (continued).



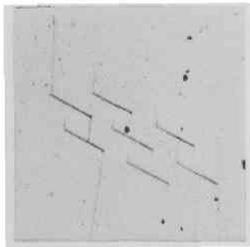
$\sigma = 106 \text{ kg/cm}^2$



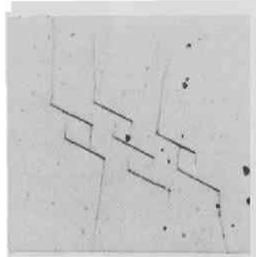
158



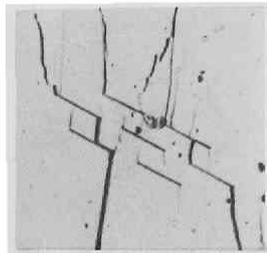
214



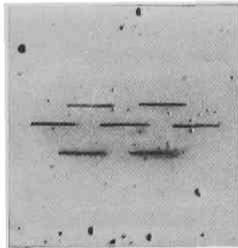
159



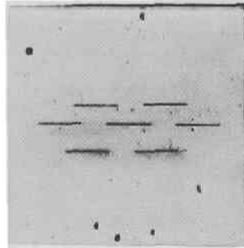
210



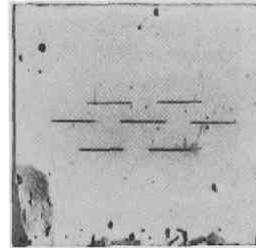
254



257



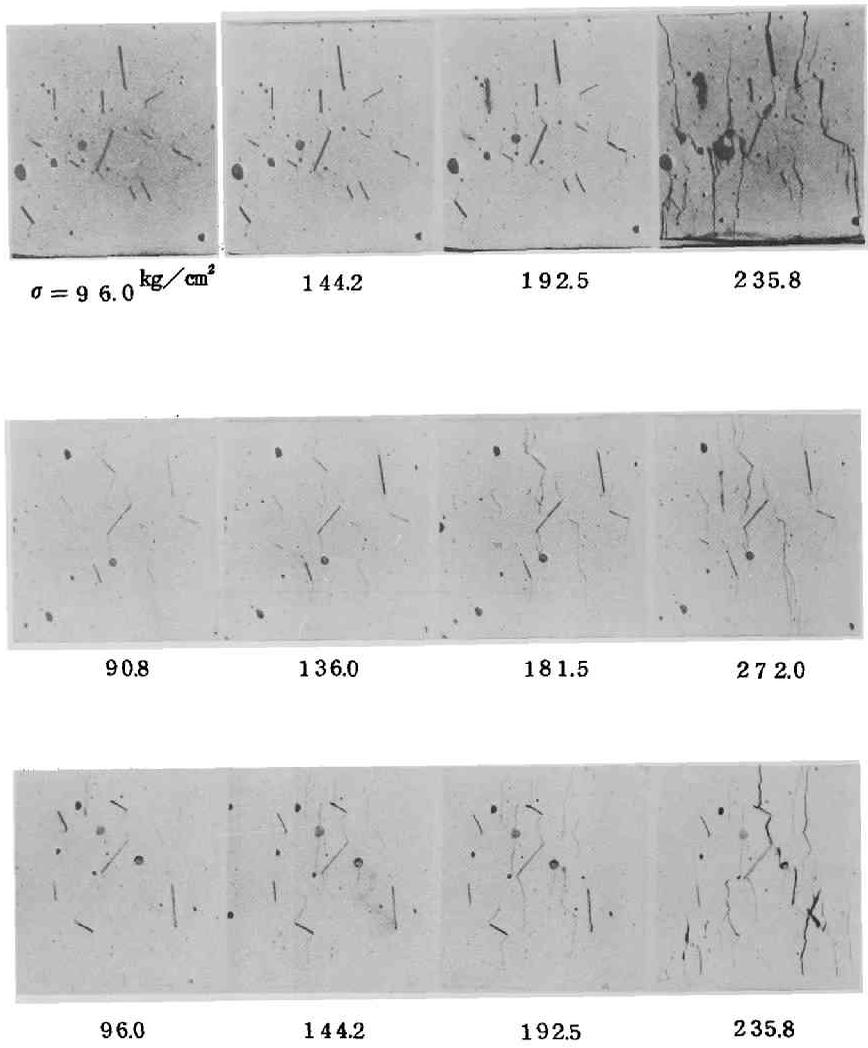
308



338

(c)

Fig. 2.1.24 (continued).



(a)

Fig. 2.1.25 Fracture patterns of the models containing a large number of randomly orientated flaws with various sizes.

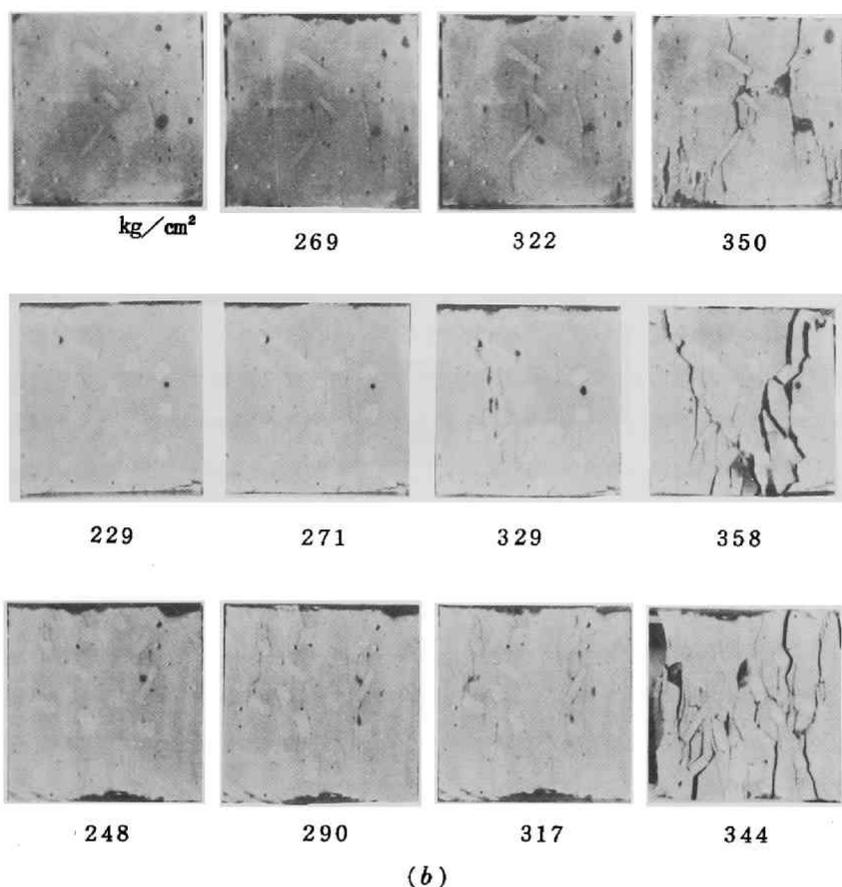


Fig. 2.1.25 (continued).

モデル化として重要であろう。

さらに、寸法、形状の異なるスリットおよびインクルージョンなどを含む場合には、上述の現象が複合した極めて複雑な破壊伝播ならびに終局破壊形態が現われる。その過程を記述することは極めて困難である。

代表的な破壊過程の例を Fig. 2.1.15 に示す。

破壊の進行過程と応力レベルおよびひずみレベルの関係は、実際の材料では極めて興味ある問題である。ここに、モルタルをインクルージョンとして含むモデルの応力ひずみ曲線とき裂分布との関連を Fig. 2.1.16 に示す。

この図はき裂が急激に発生、発達しはじめる点と、応力ひずみ曲線の曲率が急変する点とがほぼ一致することを示している。この意味で以下、この状態に対応する応力を破壊開始応力と呼ぶことにしよう。また、この値は、このモデルでは終局強度の約70～80%である。この値はもち論個々の材料によって異なるであろうが、破壊過程の一つの変化点であることは間違いないであろう。

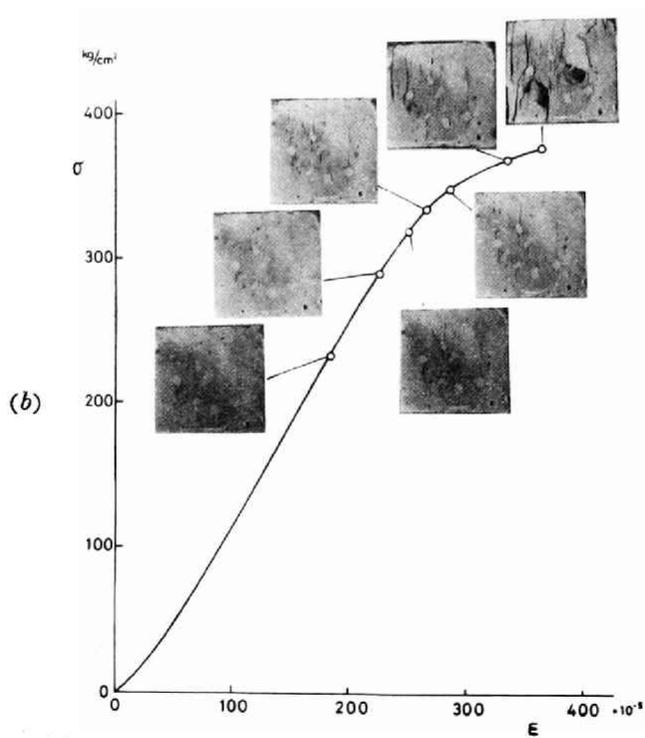
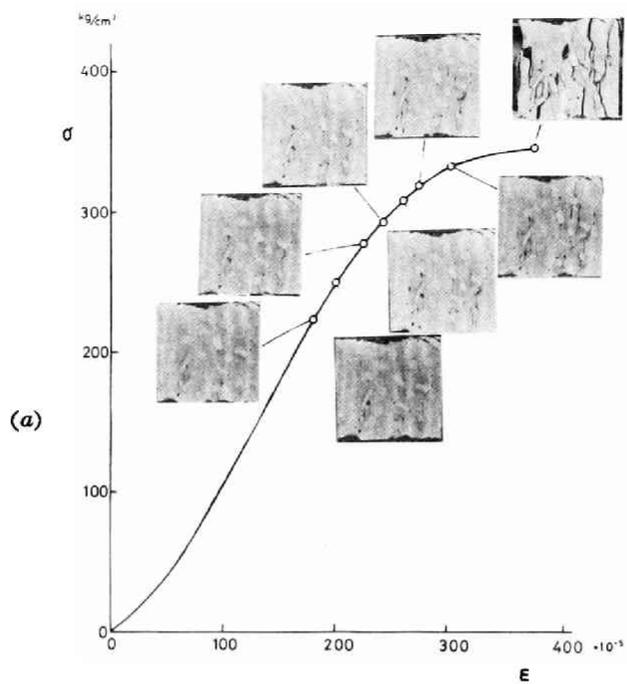


Fig. 2.1.26 Fracture propagation reflected on the stress-strain curve.

#### 4 おわりに

本章では、人工的に作製したモデルを基にぜい性き裂の発生から、その伝播、終局破壊に至るまでの過程を概観した。これらの実験より得られた結果は、限られた材料およびモデルに対するものであり、これぜい性き裂の発生、伝播ないし破壊過程全般にわたって適用することはできないかも知れないが、その性はこのモデル実験により十分捉えられているものと考えてよいであろう。この結果に基づいて岩質材の破壊特性を考えてみると、以下のことが言えるであろう。

岩質材料には結晶粒界とかインクルージョン境界とかに沿って分布した潜在欠陥が存在すると考えられる。今、ある荷重径路に沿って荷重を加えると、ある欠陥周縁上の応力ないしひずみが材料固有の強度にしてき裂が発生する。き裂の発生の条件は、近似般には一般 Griffith あるいは修正 Griffith 理論、Mohr ないし Coulomb 規準で与えられると考えてもよいであろう。さらに荷重が増加すると、一たん発生したき裂は成長するが、その間にあるいはき裂の成長が止ってから、次に危険な欠陥周辺からき裂が発生する。次第に荷重が増加すると、それにつれて同様な過程により次第に多数のき裂が発生し、成長して、それらが相互干渉を起して局所的な破壊域が形成される。ついには、この局所的な破壊域が発達して、あるいは他の隣接破壊域を併合して系全体としての破壊、すなわち終局破壊に至る。破壊伝播は、供試体中欠陥の分布だけでなく、一たん発生したき裂の成長と分布、同時に局所的な安定性に支配される。終局破壊近くでは、供試体中には全体にわたって、かなり局所的な不安定域が卓越しており、供試体全体としての安定性もあまりよくないので、終局破壊の条件はさらに試験機をも含めた試験機-供試体系全体としての特性にも左右されるであろう。

破壊現象は、一言にして言えば、安定域内の不安定域の発生から拡大、さらに系全体としての不安定域へと移行する一連の不安定域の拡大、成長の過程であるといえよう。

## 第 2 章 等方・均質岩質材料の破壊規準に関する基礎的実験

### 2.1 はじめに

前章では、簡単なモデルを基に岩質材料の破壊開始と破壊伝播を中心に実験的な検討を加え、極めて限られた範囲内ではあるが、第 1 部で述べた岩質材料の破壊に関する概念の理想化ならびにそれに基づく基礎理論の妥当性についてある程度検証することができた。しかしながら、一般に岩質材料の破壊では、初期欠陥の形状も分布も未知であり、また供試体に作用する荷重条件も一般に多軸状態となるので、前章で与えた基礎モデルとは比較にならない程複雑である。したがって、個々の未知初期欠陥からの破壊現象を追跡し全てを集積した形で巨視的な破壊規準を求めることは現実問題としては不可能である。本章では眼を転じて、巨視的に現われた現象だけから破壊規準を構成してみよう。

既に、第 1 部で検討したように、対象とする材料が Drucker の意味で安定でさえあれば、材料内に生じる応力ないしひずみ場は外荷重の関数として表わすことができるので、巨視的な一様応力を生じるような短時間静荷重の下では、破壊開始、逐次破壊（破壊伝播）ならびに終局破壊に対応して、一つの関数条件式、すなわち主応力空間に表わした曲面が存在することが保証されている。また、この曲面は、比例載荷とか、一定拘束圧下での載荷などの場合には、一般には座標原点を含む凸曲面となることが知られている。第 1 部では、簡単なモデルに基づいて破壊曲面の概形を検討し、以下のような結論を得ている。

“巨視的に等方・均質岩質材料の破壊曲面は、3 次元主応力空間内に静水圧線を 3 重対称軸とするような凸曲面で表わされる。この曲面は、滑らかに接続した 2 種類のものから成り、そのうちの一つは等圧面による切り口曲線が正三角形となるような 3 組の平面から成り、他の一つは静水圧の増加に伴って、ほぼ等方的に膨脹するような 3 組の曲面から成り、その等圧面による切り口曲線は正三角形よりやや膨らんだものとなる。破壊開始曲面は、Griffith 理論より得られるものに類似し、逐次的ならびに終局破壊曲面は、静水圧の増加と共にさらに膨脹したものとなる。”

破壊曲面は、上述のような概形をしたものであるか否か、もし、上述のようなものであるとすると、どの程度の組み合わせ応力状態を考えれば破壊曲面が推定でき得るか、また、多軸荷重載荷径路の影響あるいは載荷順序の影響はどの程度であるかなどに関しては、種々の材料について実験的に検証しなければならない問題であり、また、個々の材料ないし系に関する破壊曲面は実験的に求める以外に手段はない。しかしながら、個々の材料の破壊曲面を求める際に、破壊曲面の概形が妥当として肯認されていれば、破壊曲面を決定するために必要な実験資料は、限られた組み合わせ応力状態に対するものだけで十分であり、実験上からも労力の非常な節約となり、また新しい応力状態に対しても容易に破壊強度を推定することができることなど、破壊曲面の概形を知ることには非常な利点がある。

本章は以上のような観点から、典型的な個々の岩質材料について実験的に破壊曲面を決定すると共に、これを基に第 1 部で概念的に得られた破壊曲面の妥当性についても検討する。なお、実験の際には、試験装置ならびに試験方法、条件なども重要であるので、これらについても検討を加えることにした。

なお、本章の大部分は既に発表済である。文献<sup>1)~10)</sup>をも併せて参照されたい。

## 2.2 試験装置

一般的な破壊曲面を求めるためには、種々の組み合わせ応力状態の下での試験を行なうことが必須であり、このためには主応力比を任意に制御し得るような試験装置あるいは試験方法が必要である。本実験では、この目的のために主として変形（固体）負荷の三軸万能試験装置を使用し、補助として円柱ならびに円筒状試体試験用の内外軸圧の組み合わせ試験装置を用いた。以下、それらの概要を述べる。

### 2.2.1 三軸万能試験装置

本試験装置は直交した三軸方向からの対向負荷試験を行なう目的で設計されたものであり、各軸とも独立な油圧駆動負荷機構、計量機構ならびに制御機構を備えており、三軸方向からの単軸負荷はもちろん、種々の連携負荷ならびに定荷重負荷ができるようになっている。負荷には加圧盤を介して行なわれ、いわゆる変形負荷（固体負荷）方式を採用している。試験装置の概観を Fig. 2.2.1 に示す。まず、装置の構成、容量を一括して示し、次に主要部について略述しよう。

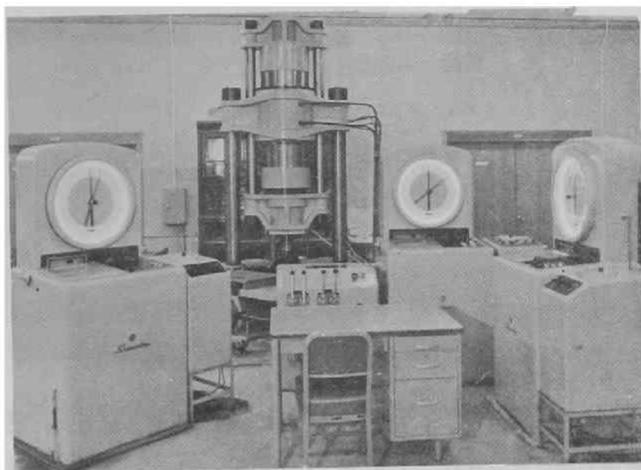


Fig. 2.2.1 General view of the triaxial testing machine.

#### i) 構成

- a) 負荷機構本体： 上下軸負荷機構，水平二軸負荷機構
- b) 計量機構： 振り子式 RH 型計力機 3 台，変形記録装置 RY 型 3 台
- c) 荷重制御機構： 荷重制御装置 1 台，定荷重制御装置 2 台
- d) 油圧駆動装置： 上下軸負荷機構用 1 台，水平軸負荷機構用 2 台

#### ii) 要項

- a) 負荷能力： 上下軸（圧縮，引張） $200^t, 100^t, 50^t, 20^t, 10^t$   
水平軸（圧縮） $100^t, 50^t, 25^t, 10^t$   
水平軸（引張） $50^t, 12.5^t, 5^t$
- b) 計力秤量： 上下軸  $200^t, 100^t, 50^t, 20^t, 10^t$   
水平軸  $100^t, 50^t, 25^t, 10^t$

最小秤量目盛：  $1/500$

- c) 加圧盤間の変位計量： 測定範囲  $4\text{ mm}$  ,  $1\text{ mm}$   
 指示誤差 1%以内  
 荷重-変位記録方式, RY型ドラム式
- d) 加 圧 盤：  $200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$  ,  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$  ,  $50\text{ mm} \times 50\text{ mm}$   
 装着,  $200\text{ mm} \times 200\text{ mm}$  加圧盤をベースとして, その上に加圧盤を積み替える。  
 その他, 下方加圧盤以外は球座式, 但しほぼ固定することが可能
- e) 引張用摺具：  $100\text{ t}$  上下軸用  $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$   
 $10\text{ t}$  上下軸用  $50\text{ mm} \times 50\text{ mm}$
- f) 負 荷 操 作： 単独負荷, 連携負荷, 定荷重制御  
 負荷ラム速度,  $0 \sim 20\text{ mm/min}$   
 ラム・ストローク, 最大  $150\text{ mm}$
- g) 上下軸ネジ棒の昇降： 電動式, 昇降速度  $200\text{ mm/min}$
- h) 油 圧 装 置： ラジアル7連ピストン・ポンプ 3台
- i) 安全 装 置： 過負荷制限スイッチ, ネジ棒昇降ストローク用制限スイッチ, 上下軸ラム・ストローク制限スイッチ

### iii) 負荷機構

負荷機構部は, 上下ならびに水平2軸の直交3軸方向に対向して配置した3組の負荷機構から成り, 各軸方向に各々独立な油圧駆動負荷機構を有している。負荷機構の中心点は不動点となるように設計されており, 上下軸ならびに水平軸のラムの動きはこの点に対して完全に対称となるように設計されている。

上下軸方向および水平一軸方向には圧縮, または引張負荷が, また残りの水平軸方向には圧縮負荷ができるようになっている。ラム先端には加圧盤あるいはユニバーサル・ジョイント式の引張試験用摺具が具備されている。加圧盤は最大  $200\text{ mm}$  角で, これをベースにして他の大きさのものを積み替えるようになっており, また, 引張用摺具は装置し換えるようになってい

### iv) 計量機構

計力機は島津RH型振子式計力機が各負荷機構に対応して計3台あり, 各々単独に指示されるようになってい

また, 変位記録装置は, 加圧盤間の変位を差動トランス2個を用いた平均変位検出器 ( Fig. 2.2.2 ) により検出された入力信号を自動平衡方式によって測定する方法を取り, RY型記録ドラム ( Fig. 2.2.3 ) を駆動することにより, 荷重と共に荷重-変形曲線を自記記録することができるようになってい

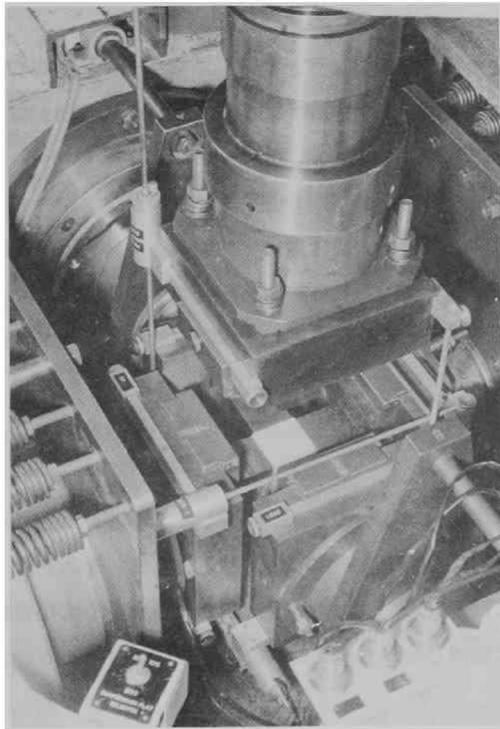


Fig. 2.2.2 Arrangement of differential transformer for displacement measurement.

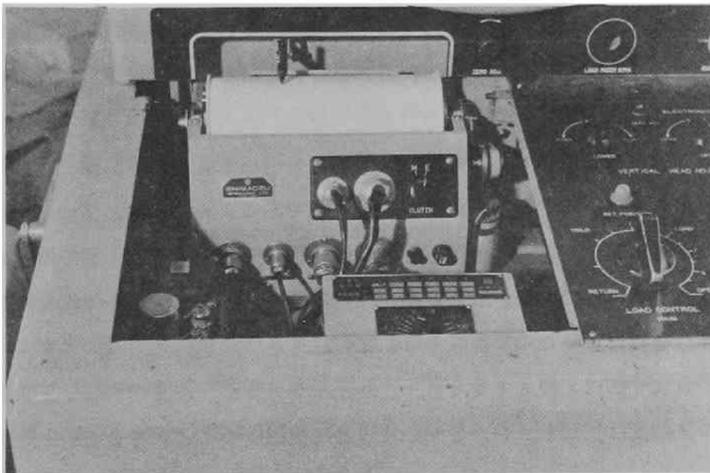


Fig. 2.2.3 Drum-type load-displacement recorder.

## V) 制御機構

荷重制御装置は、荷重を自動的に制御しようとするものであり、計力機の主制御弁と荷重制御装置の自動制御弁とは並列に結ばれているので、主制御弁を締めておいて、自動制御弁によって負荷シリンダーの油量を調節することができるようになっている。

主計力機の荷重検出用振り子には、荷重検出用の差動トランスが取り付けられており、荷重値は電気信号に変換され、一方の制御荷重設定指標には設定用のポテンショ・メーターが取り付けられており、この設定値は電気信号に変換されている。この両者は制御回路内で常時比較されて、その差はサーボ・アンプで増幅され、サーボ・モーターを駆動して自動制御弁を作動させて、荷重が設定値に等しくなるように制御されている。

設定指針を一定値にセットしておくことと一定荷重制御が、また、等速運動で動かすと等速度荷重制御が行なわれることになる。

荷重制御装置は、上下軸制御用として1台、これと連携して、あるいは独立に作動する電子管式定荷重装置（原理的には上述の装置と同様な装置）が水平軸制御用として、それぞれ1台ずつ装備されている。これらを用いることにより、三軸方向の荷重比を一定に保ちつつ負荷（比例負荷）することも、また、任意方向の荷重を自動的に一定に保持しながら他軸に負荷（定順序負荷）することも容易に実施される。

### 2.2.2 内外軸圧組み合せ試験装置

この試験装置は従来から土ならびに岩石試験用として広く用いられている側面液圧負荷、軸方向変形負荷型の試験装置を改良して、円筒供試体の内圧負荷を可能とし、さらにねじり負荷をも追加したものである。試験装置の構造図をFig. 2.2.4に示す。

本試験装置は小型であり、大供試体の試験を行なうことはできないが、従来の試験装置に比して極めて多種、多様の荷重条件をつくり出すことができる利点がある。特に、引張試験をも含む直接試験法には便利に用いられるものである。

負荷装置としては、手動の油圧ポンプを用い、切り換え弁を用いて、内、外、軸またはねじり負荷を行なうように設計されており、従って、定順序負荷のみが可能である。計力には、ブルドン型油圧ゲージを用いている。軸荷重の検定には、アムスラー型万能試験機を用いて、0～20<sup>t</sup>まで検定した。上下軸方向のラムの可動距離は±20<sup>mm</sup>である。また、内、外圧は400<sup>kg/cm<sup>2</sup></sup>まで負荷可能である。ねじり負荷は、本実験では行なわなかったので省略する。

試験可能な供試体の最大寸法は、高さ150<sup>mm</sup>、外径φ140<sup>mm</sup>程度である。変位計測装置は具備していないが、ラムの移動量は差動トランスを用いて容易に検出することができる。

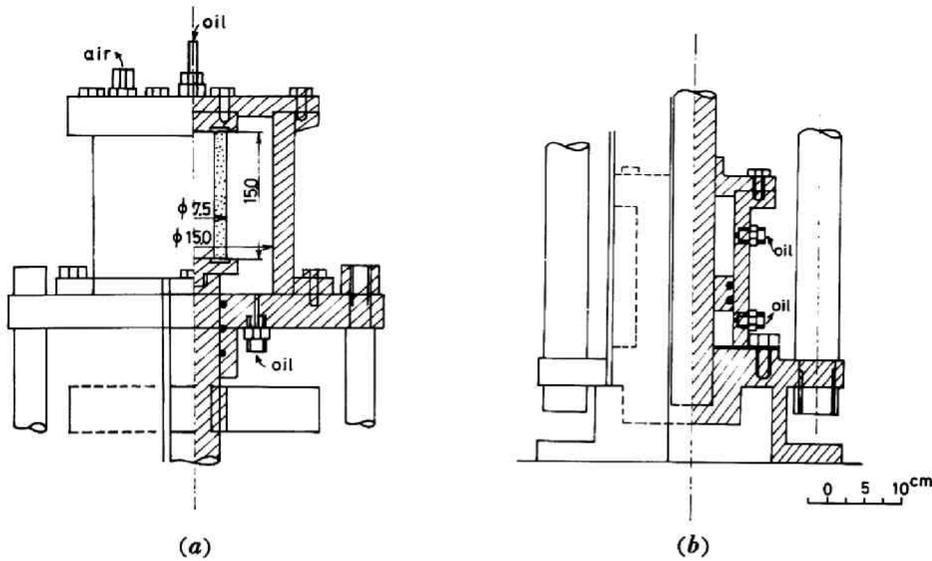


Fig. 2.2.4 Sketch of the hydraulic pressure triaxial equipment, top half (a) and bottom half (b).

## 供試体の作製

### 3.1 セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリート供試体の作製

#### セメント・ペースト供試体

普通ポルトランド・セメントを使用し、重量配合比はセメント：水＝1.0：0.3とした。練り混ぜに動ミキサーを使用し、空練り約1分30秒後、所定の水を加えて約3分間で練り上げ、 $105\text{ mm} \times 5\text{ mm} \times 105\text{ mm}$ の立方供試体用鋼製型枠に2層に分けて打設した。供試体は、打設後約24時間経型し、直ちに恒温水槽（ $20 \pm 1^\circ\text{C}$ ）内で材令28日まで養生し、水中より取り出して直ちに試験し、これは、乾燥により生じるクレージング（crazing）を防ぎ、できるだけ同一な条件で試験することとしたためである。

#### モルタル供試体

普通ポルトランド・セメント、豊浦砂および水を重量比で、水：セメント：砂＝0.6：1.0：2.0にした。練り混ぜ、供試体の打設、脱型、養生等はセメント・ペーストの場合と同様に行なった。なお、前日には、水中より取り出し恒温恒湿室（温度 $20 \pm 1^\circ\text{C}$ 、相対湿度 $90 \pm 5\%$ ）内で1日間空中養生した。試験時の材令は28日あるいは56日とした。

裂軸圧の組み合わせ試験用の供試体は、 $\phi 7.5\text{ mm} \times 150\text{ mm}$ の円柱供試体を同様にして打設、養生。また、インデンテーション側方圧縮試験用供試体は、上記の立方体供試体を厚さ約 $20\text{ mm}$ に切断作製した。内圧軸圧用の円筒供試体としては、外径 $75\text{ mm}$ で高さが $150\text{ mm}$ のものとして $70\text{ mm}$ の

2種類、肉厚 20 mm および 10 mm の2種類の供試体を作製した。なお、これらの組み合わせ試験は全て材令 28 日で行なった。

### iii) 普通コンクリート供試体

普通ポルトランド・セメント、吉野川産砂、砂利を使用した。骨材の物理的な性質は Table 2.2.1 に示す。また、貧富両配合のコンクリートの示方配合を Table 2.2.2 に示す。コンクリートの練り混ぜには、2切可傾式ミキサーを使用し、1回の打設量は 105 mm × 105 mm × 105 mm 立方供試体 16 個、φ100 mm × 200 mm 円柱供試体 8 個分である。打設時スランプは、A 配合コンクリートでは 2.5 ~ 5.0 cm、B 配合コンクリートでは 1 ~ 2 cm であった。型枠には 2 層に分けて打設し、バイブレーターを用いて振動締固めを行なった。

A 配合コンクリートでは、打設後約 4 時間後に磨きガラス板を用いて供試体上面を平滑に仕上げた。B 配合コンクリートでは、約 6 時間後に同方法による表面仕上げを行なった。

供試体の脱型、養生はセメント・ペーストの場合と同様にし、材令 27 日で水中より取り出して、1 日間恒温恒湿室内で空中養生を行なった後、材令 28 日で試験に供した。

Table 2.2.1 Physical properties of aggregate.

Kind	Specific gravity	Unit weight (kg/m <sup>3</sup> )	Retaining protion in sieves (%)								Fineness modulus
			15 mm	10 mm	5 mm	2.5 mm	1.2 mm	0.6 mm	0.3 mm	0.15 mm	
Sand	2.58	1715	0	0	0	16	34	58	81	97	2.86
Gravel (5-10 mm)	2.58	1655	0	1	95	100	100	100	100	100	5.96
Gravel (10-15 mm)	2.58	1567	0	85	100	100	100	100	100	100	6.85

Table 2.2.2 Mix proportions of concrete.

Mix	Max. size (mm)	C (kg/m <sup>3</sup> )	W (kg/m <sup>3</sup> )	W/C (%)	S/A (%)	S (kg/m <sup>3</sup> )	G (kg/m <sup>3</sup> )	
							5~10 mm	10~15 mm
A	15	418	184	44	50	860	287	573
B	15	200	164	82	51	982	313	629

### iv) 軽量コンクリート供試体

使用材料は普通ポルトランド・セメントおよび造粒系人工軽量骨材（ライオナイト）である。骨材の物理的性質を Table 2.2.3 に、またコンクリートの示方配合を Table 2.2.4 に示す。コンクリートの

Table 2.2.3 Physical properties of lightweight aggregate.

Grade	Specific gravity	Water absorption %	F. M.
Coarse agge.			
10-15 mm	1.36	3.21	6.00
5-10 mm	1.58	3.21	5.00
Fine aggr.	1.98	4.41	2.77

Table 2.2.4 Mix proportion of lightweight concrete.

Max. size (mm)	C (kg/m <sup>3</sup> )	W (kg/m <sup>3</sup> )	W/C (%)	F. A./A (%)	F. A. (kg/m <sup>3</sup> )	C. A.	
						5-10 mm	10-15 mm
15	417	187	44.7	41.6	558	398	196

り混ぜには、アイリッヒ型パンミキサーを使用し、1回の打設量は、105 mm × 105 mm × 105 mm 方供試体16個、φ100 mm × 200 mm 円柱供試体6個分とした。打設方法、養生等は普通コンクリーの場合と同様にした。打設時のスランプは4~6 cm であった。打設後約3時間を経て、立方供試体の上面を磨きガラスで平滑に仕上げを行なった。円柱供試体は、材令1日でセメント・ペーストによるキッピングを行なった。材令28日で試験に供した。

### 2.3.2 岩石供試体の作製

ダム・サイトより採掘した2種類の砂岩およびチャートについて供試体を作製した。これらを、一応等・均質と見做して、採掘した岩塊よりダイヤモンド・カッターを用いて約50 mm × 50 mm × 50 mm 立方体に仕上げた。平行面を完全に仕上げ、高精度の立方体を整形することは困難であるので、本実験は簡易法によって供試体を作製した。この際には、内容積が5.5 mm × 5.5 mm × 5.5 mm である正確な枠を用い、岩石試料が立方供試体の中央に来るように若干加工した。また、セメント・ペーストと岩石の接着をよくするために、岩石は打設に先立って約1週間程水中に浸しておいた。セメント・ペーストと岩石の強度および弾性係数は等しくすることが望ましい。本実験では、セメント・ペーストの配合は、セメント：水=1.0：0.35（重量比）とした。打設に際しては、先ず型枠内にセメント・ペーストを流しておいて、その上から型枠中央に岩石を圧入した。これによると、型枠側面に沿って、セメント・ペーストがあふれ出し、岩石は完全に被服されることになる。脱型、水中養生はセメント・ペーストの場合に準じる。なお、この際には、水中養生期間は約3カ月程度であった。材令の影響はほとんど現われないと思われる。試験は、供試体を水中より取り出して直ちに行なった。

なお、このような簡易供試体の信頼性と適用性を検証する目的で、砂岩の供試体数個はターン・テーブルで研磨し、0.05 mm 以内の整形誤差で55 mm × 55 mm × 55 mm の立方供試体を作製した。これら

は、数週間水中放置した後、一軸圧縮試験に供した。

## 2.4 試験条件および試験方法

材料の強度試験の究極の目的は、材料固有の物理的特性を求めることである。そのためには、試験装置、加圧方式ならびに供試体の形状・寸法等の影響を受けないような試験が望まれる。

圧縮ならびに直接引張試験に於ては、仮りに実験装置による偏心、ねじれ等の影響が完全に除かれるとしても、普通の変形荷型の試験装置では供試体内の応力分布は供試体の形状・寸法ならびに加圧盤の状態によって理想的な一様応力状態とはならず、強度・変形および破壊の形態も異なったものとなると思われる。供試体の形状・寸法効果は、主として供試体端面と加圧盤間の摩擦に基づくものと、材料固有の構造特性に起因するものが考えられる。供試体の応力分布に及ぼすこれらの影響に関しては、第Ⅲ部で詳細に検討する。本節では如何にして寸法形状効果を解消するかという方法について述べよう。

### 2.4.1 供試体端面拘束の減少

立方体供試体とか円柱供試体を用いて圧縮ないし直接引張試験を行なう場合には、加圧盤の拘束は端面からほぼ供試体幅の範囲にも及び、特に幅に対する高さの比が小さい場合には、応力分布は相当大きな影響を受けることになる（第Ⅲ部第3章参照）。材料試験に於ては、上述のような供試体端面拘束を緩和して、できるだけ一様応力状態に近い応力状態を生ぜしめることが望ましい。端面摩擦の応力分布に及ぼす影響についても第Ⅲ部3.3で簡単に触れておいた。要約すれば、摩擦係数が小さければ小さい程一様応力状態が期待でき、摩擦係数が0.05程度であると、立方、円柱供試体の端面隅角部の微小部を除き、ほぼ一様応力状態にあると見做して差しつかえないということになる。現実の問題としては、何らかの方法を用いて端面摩擦を減少させることが必要である。

二軸および三軸圧縮ないし直接引張試験においても、端面拘束の影響は一軸圧縮ないし引張試験の場合より幾分は緩和されることが期待できるが、一様応力状態に近づけるためには端面摩擦をできるだけ減少させなければならないのは当然である。

端面摩擦の大きさは、実際には供試体端面の応力分布が一様でないので、厳密な意味でのAmontonの摩擦係数をもって表現することはできないけれども、ここでは一軸圧縮あるいは二軸圧縮状態にある供試体に第三軸方向から供試体とほぼ同じ大きさの加圧盤を用いて荷重を増加して行った場合に、供試体が初めて滑り出すときの荷重を臨界荷重と考えて、側面からの圧縮荷重に対する臨界荷重の比 $\mu$ をもって摩擦を表わす指標とした。以下、これを摩擦係数と呼ぶことにする。

Table 2.2.5には、種々の減摩剤に対する摩擦係数を示した。これらの値は、 $105^{\text{mm}} \times 105^{\text{mm}} \times 105^{\text{mm}}$  のモルタル立方供試体数箇を用い、側圧を一軸圧縮強度の約20～95%まで変化させて求めた摩擦係数の値の平均値である。この結果得られた摩擦係数の値は、荷重の大きさには殆んど無関係に一定値を示した。その一例をFig. 2.2.5に示す。

Table 2.2.5 から分るように、両面にシリコン・グリースを塗布した柔かいゴム・シート ( $0.23^{\text{mm}}$

厚)は著しく端面摩擦を減少させる。この場合の摩擦係数は減摩剤を用いない場合の約2~3%となる。また、シリコン・グリースを塗布したテフロン・シート(0.05 mm厚)を用いると、摩擦係数は減摩剤を用いない場合の約4~5%となる。いずれの場合にも、用いるシートは極めて薄いものであり、これら減摩剤使用の妥当性は一軸圧縮強度ならびに破壊形状からも確認される(後述 2.5.1)。

本試験では、主としてこの両者のいずれかを用いることにした。その他の場合には、その都度述べることにする。

なお、参考のためにモルタル立方供試体の一軸圧縮強度と端面摩擦係数との関係を、おのおの約10個の平均値をとって Fig. 2.2.6(a) に示した。この図からも、摩擦係数が小さくなると、圧縮強度は一定値に近づくことが分る。また、供試体の高さ幅比を変化させた場合の一軸圧縮強度を Fig. 2.2.6(b) および(c) に示す。<sup>11)</sup> Fig. 2.2.6(b) よりシリコン・グリースを塗布した塩化ビニール・シートは比較的一定な強度を示していることが分る。塩化ビニールの代りにテフロン・シートを用いれば更らにより結果が期待できよう。なお、ラバー・シートを用いたものは、供試体が小さいので、若干弱く出ていることにも留意されたい。

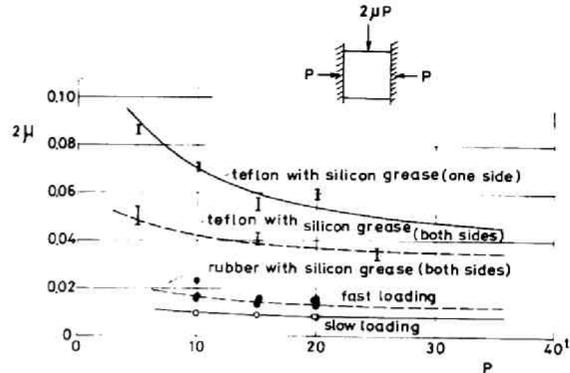
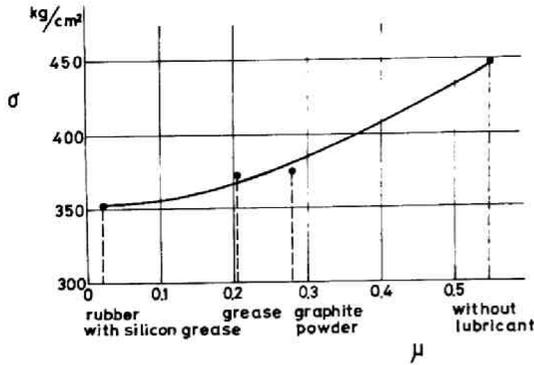


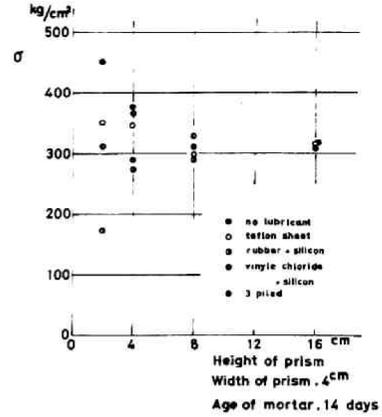
Fig. 2.2.5 Variations of the apparent coefficient of friction with applied load.

Table 2.2.5 Results of lubrication test.

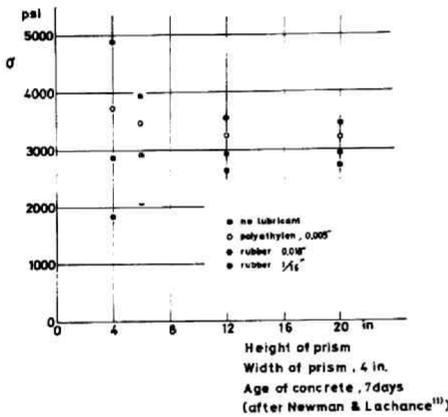
Lubricant	Apparent coefficient of friction ( $\mu$ )
without lubricant	0.46 - 0.65
graphite powder	0.28 - 0.31
cup grease	0.15 - 0.24
2 sheets of vinyl chloride (0.15 mm thick) with silicon grease	0.092
teflon sheet (0.05 mm thick) with silicon grease	0.018 - 0.023
rubber sheet (0.23 mm thick) with silicon grease	0.008 - 0.012



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.2.6 Relations between uniaxial crushing strength and the apparent coefficient of end friction. Tests on cube specimens (a) and prismal specimens (b & c).

#### 2.4.2 加圧盤の問題

三軸万能試験装置を用いて、多軸圧縮試験を行なう場合には、機構上加圧盤の寸法は供試体に比して若干小さくならざるを得ない。本実験で用いた加圧盤は供試体寸法より一辺5.0 mm 程度小さい100 mm × 100 mm 加圧盤を使用したので、全面載荷が行なわれない。そのために、破壊の機構および破壊強度が正確に求められない恐れがあると考えられる。この点を検討するために一軸圧縮試験(この試験が条件として最も苛酷である)について、次の3種類の方法で比較試験を行なった。すなわち、供試体をこの加圧盤で載荷したもの、同じ加圧盤を用いるが供試体の稜を切り取って全面載荷できるようにしたもの、および大きい加圧盤を用いて全面載荷したものとを比較した。第一の場合には、加圧盤線上的特異線上では引張応力が生じ、そのために周縁に沿ったき裂が発生することが考えられる。事実、そのようなき裂は生じた

けれども、端面摩擦が小さい場合には、このき裂は数mm程度で止り、供試体全体の破壊機構および強度には影響しない。3者の結果は、破壊強度、破壊形態ともにほとんど一致することが認められた。

なお、多軸応力状態では、この部分載荷の影響は供試体の稜近傍に限られるので、供試体全体の応力分布および破壊には、この程度の部分載荷による影響はないと考えてよいであろう。したがって、本実験で得られた値は、以下では全面載荷のものと同見做すことにする。

### 2.4.3 試験方法

#### i) 一軸圧縮試験

一軸圧縮試験では、供試体端面摩擦をできるだけ減少させることが必要である。本実験では、シリコン・グリースを塗布した柔らかいゴム・シート(0.23 mm厚)あるいはテフロン・シート(0.05 mm厚)を用いた。載荷速度は3~4 kg/cm<sup>2</sup>/secに取り、偏心のないように特に注意した。

#### ii) 二軸圧縮試験

二軸主応力 $\sigma_1$ 、 $\sigma_2$ の比を一定に保ちながら荷重を増加させて破壊に至らしめる、いわゆる比例載荷を主体とした。なお、載荷径路の強度に及ぼす影響を調べる目的で、定順序載荷ならびに任意径路による載荷も行なった。載荷速度は、最大主応力について3~4 kg/cm<sup>2</sup>/secとした。

#### iii) 三軸圧縮試験

比例載荷ならびに静水圧線に沿って所定の主応力和まで達したのち、その主応力和を一定に保持しつつ等圧面上の主応力比を一定に設定して荷重を変化させて破壊に至らしめる載荷(等圧面上の比例載荷)、および順次小さい荷重を一定に保持して、残りの荷重を増加させる定順序載荷を行なった。載荷速度は、最大主応力について約3~4 kg/cm<sup>2</sup>/secとした。

#### iv) 圧縮-引張試験(割裂軸圧試験、側方圧縮インデンテーション試験)

圧縮および引張応力を発生させる試験法として、割裂試験法あるいはインデンテーション試験法と他の試験法を組み合わせた試験法を採用した。割裂試験およびインデンテーション試験供試体内の応力分布は第Ⅱ部第4章および第5章に示すようになり、これと軸方向圧縮あるいは側方圧縮を組み合わせると、応力分布は一軸引張-二軸圧縮、あるいは一軸引張-一軸圧縮状態を生ぜしめることができる。また、軸方向圧あるいは側方圧を変化させることにより、引張-圧縮応力比を任意に変化させることも可能である。

割裂軸圧試験では、円柱供試体の軸方向に一定の圧縮荷重を加圧盤を介して作用させた後、供試体中心に対して対称な母線上加圧盤により荷重を加えて割裂をおこなった。

側方圧縮インデンテーション試験では、角板供試体の対向面に圧縮荷重を加圧盤により変形負荷させた後、これと直角方向に角板中心に対して対称にインデンテーション試験の方法で荷重を作用させた。側方圧縮とインデンテーションの荷重比を種々に変化させることにより、任意の応力状態を生じさせることがで

きる。

いずれの試験法に於ても、加圧盤と供試体間にはシリコン・グリースを塗布した柔らかいゴム・シート (0.03 mm 厚) を挿入して、摩擦を減少させた。また、荷重速度は、約  $2 \sim 4 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$  となるようにした。

#### V) 圧縮-引張試験 (内圧軸圧試験)

これは薄肉円筒供試体を用い、内圧を液圧により、軸圧を加圧盤を用いて変形負荷により負荷する試験法であり、軸圧による圧縮応力と内圧により生じるフープ引張応力により、圧縮-引張強度を試験することになる。本実験では、試験装置の性能から、軸圧を先ず加えた後、内圧を加える定順序载荷によった。なお、荷重速度は  $5 \sim 6 \text{ kg/cm}^2/\text{sec}$  とした。

#### 2.4.4 供試体の変形の測定

一軸、二軸および三軸圧縮試験においては、前述の RY 型自記記録装置を用いて、供試体の荷重-変形曲線を求めた。この変位計は厳密には加圧盤間の変位を計測するものである。供試体の真の変形を捉えているかということに関しては若干の疑問がある。特に、テフロン・シートを挿入した場合 (変位計を用いた場合にはゴム・シートは使用しなかった) には、

この変形も加味されたものとなっている。この点は、埋込みストレーン・ゲージを用いて検照した。荷重の小さい範囲 ( $50 \text{ kg/cm}^2$  程度まで) では、精度および信頼度は低いが、荷重が高くなるにつれて精度および信頼度は高くなると考えられる (Fig. 2.2.7 参照)。

本実験の荷重変形曲線は、その勾配が急変する点を確認し、この点を破壊開始点として使用する目的で記録したものであり、絶対量としての精度はそれ程は要求されないので、実験結果は十分その責を果していると考えられる。

なお、以上、試験法の概要を総括して述べたけれども個々の材料に対しては若干この試験法が修正されている点もあるので、注意すべき点については、その都度述べることにしよう。

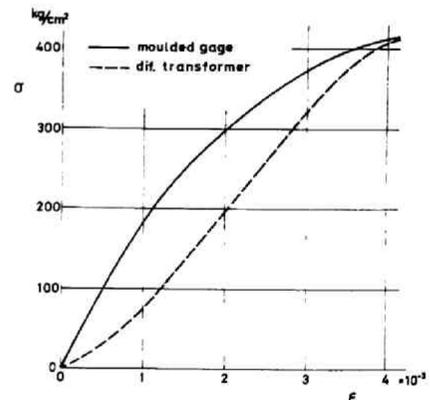


Fig. 2.2.7 Comparison between the stress-strain curves by moulded gage and differential transformer.

## 5 試験結果およびその考察

### 2.5.1 セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの一軸圧縮試験結果とその考察<sup>12)</sup>

一軸圧縮試験結果を一括して Table 2.2.6 に示す。モルタルの試験は数回にわたって異なった時期に行なったので、配合、養生等は同一としても若干の強度差はまぬがれなかった。モルタルAは初期に行なった二軸、三軸圧縮試験に、モルタルBは後期に行なった二軸、三軸圧縮試験ならびに圧縮-引張試験用いたものである。モルタルCは、いずれも同一時期に行なった圧縮-引張試験に用いたものであるが、試体の寸法、形状により若干の強度差が認められる。コンクリートAおよびBは富貧両配合のものを比する目的で作製したものである。

Table 2.2.6 Collected results of the uniaxial strength of cement paste, mortar, concrete and lightweight concrete.

Material	Uniax. comp. strength (kg/cm <sup>2</sup> )	Variation %	Nos of specimen	Size of specimen	Use
Cement paste	604 (28d)	8.9	12	10.5×10.5 × 4.2 <sup>cm</sup>	Uniax. & Biax. comp.
Mortar A	373 (56d)	7.8	26	11.0 <sup>cm</sup> cube	Uniax., Biax. & Triax. comp.
B	405 (28d)	10.0	9	10.5 <sup>cm</sup> cube	Uniax., Biax. & Triax. comp.
C <sub>1</sub>	369 (28d)	9.0	18	φ 7.5 × 15.0 <sup>cm</sup>	Uniax. comp.
	402 (28d)	12.0	22		Comp.-Tens.
C <sub>2</sub>	355 (28d)	9.0	7	*	Comp.-Tens.
	348 (28d)	9.0	4	**	Comp.-Tens.
Concrete A	436 (28d)	8.0	27	10.5 <sup>cm</sup> cube	Uniax., Biax. & Triax. comp.
B	149 (28d)	5.8	19		
Light-weight concrete	316 (28d)	6.3	27	φ 10.0 × 20.0 <sup>cm</sup>	Uniax. comp.
	298 (28d)	7.0	16	10.5 <sup>cm</sup> cube	Uniax., Biax. & Triax. comp.

\* ; Ext. dia. × Height × Thickness = φ 7.5 × 15.0 × 2.0<sup>cm</sup>

\*\* ; " " = φ 7.5 × 15.0 × 1.0<sup>cm</sup>

なお表中には、標準円柱試体と立方供試体の一軸圧縮強度を軽量コンクリートについて比較して示している。立方供試体を用いた試験では、供試体端面摩擦を極力減少させるように配慮しており、見掛けの摩擦係数は  $\mu \approx 0.01$  程度であるので、端面拘束の影響はほとんどなくなり（第Ⅲ部3.3参照）、供試体一様に圧縮され、載荷方向に平行な無数の柱状片に瞬間的に分離破壊する。この破壊形態は、減摩剤をいかなかった場合の鼓型破壊形態とは対照的である。立方供試体の一軸圧縮破壊形態の例（軽量コンクリ

ート)を Fig. 2.2.8 に示す。標準円柱供試体の圧縮強度は減摩剤を用いない場合には、真の強度より若干大きい値を示すこと、ならびに供試体の破壊形態などを考慮すると、本実験で求めた圧縮強度は、ほとんど純粋な一軸圧縮によるものと考えてよいであろう。その他の材料に対する結果もほぼ同様と考えられる。セメント・ペースト供試体は最も脆性的であり、最も激しく爆発的に破壊し、次いで、モルタル、軽量コンクリート、普通コンクリートの順に破壊の激しさは減少する。いずれの場合にも、無数の柱状片に分離破壊した。以上のことから、Table 2.2.6 に示す一軸圧縮強度(以下  $\sigma_c$  と記す)は、後の多軸応力下での試験結果の基準として用いるのに十分な精度を有していると考えられる。

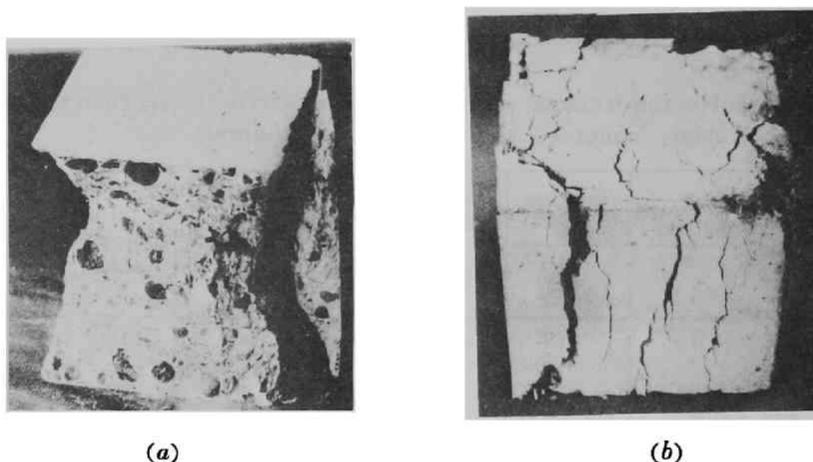


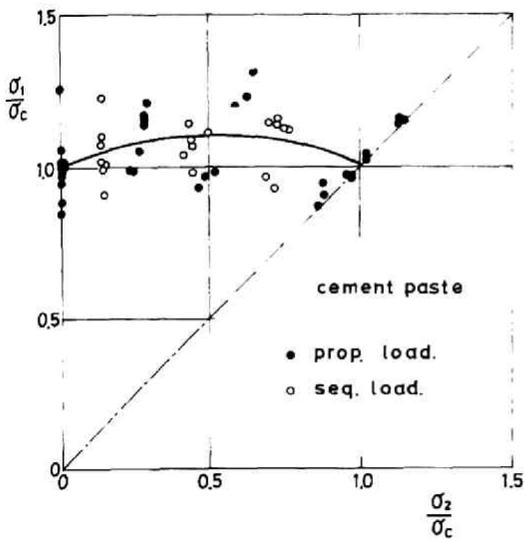
Fig. 2.2.8 Fracture patterns due to uniaxial compression without lubricant (a) and with rubber sheet with silicon grease (b)

### 2.5.2 セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの二軸圧縮試験結果とその考察<sup>15)</sup>

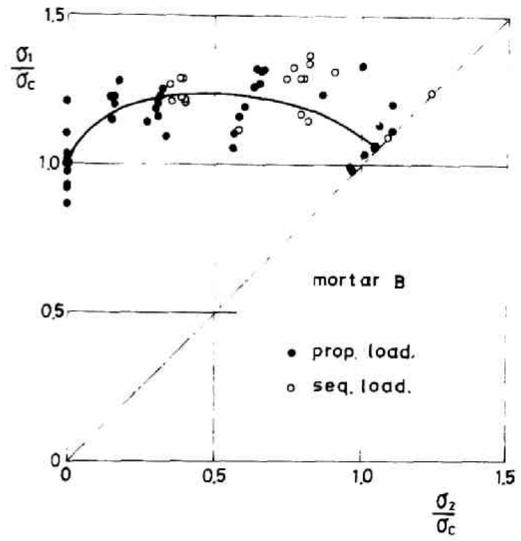
セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの二軸圧縮試験結果を、Table 2.2.6 に示す一軸圧縮強度を用いて無次元化して、Fig. 2.2.9 に示す。図中の黒丸は比例載荷による結果を、白丸は任意載荷径路を含む定順序載荷による結果を示す。なお、Fig. 2.2.10 には、載荷径路の一例として、Fig. 2.2.9 (d) に対応する載荷径路を示しておいた。これらの結果より、二軸圧縮強度はこの程度の載荷径路の影響はほとんど受けないと考えてよいであろう。

二軸圧縮破壊の例(軽量コンクリート)を Fig. 2.2.11 に示す。他の材料の場合もほぼこれと同様であり、いずれの場合にも破壊面は自由面にほぼ平行な薄片状となった。

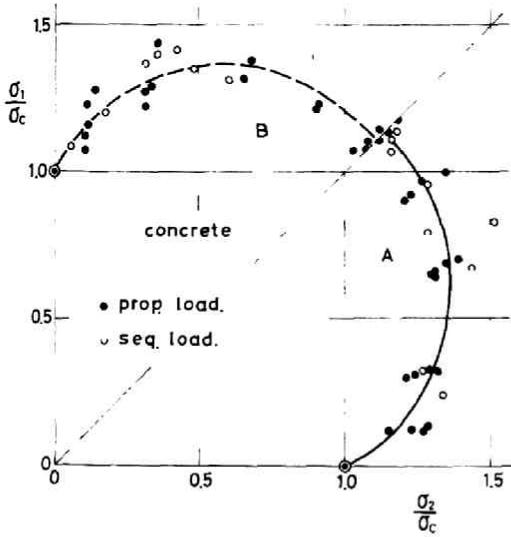
なお、現在までに試みられた主な二軸圧縮試験結果<sup>14)~24)</sup>を一括して Fig. 2.2.12 に示した。対応する試験条件等は Table 2.2.7 に示す。Берг и Смярновの結果<sup>25)</sup>以外は、いずれも  $\sigma_2(\sigma_1)$  の増加につれて  $\sigma_1(\sigma_2)$  は次第に増大し、 $\sigma_2(\sigma_1) = 0.4 \sim 0.6 \sigma_c$  で  $\sigma_1(\sigma_2)$  は最大となり、 $\sigma_1 =$



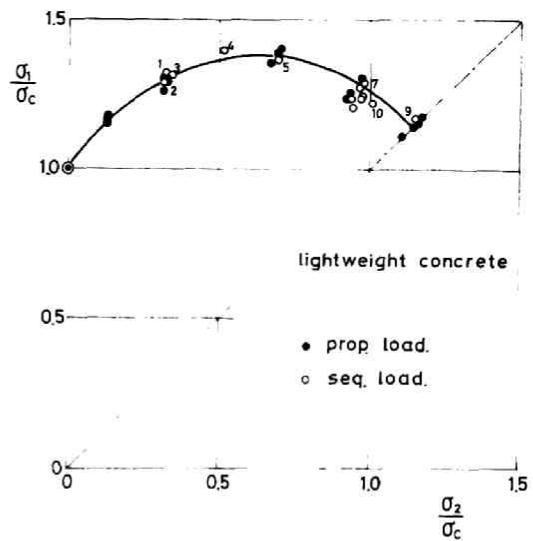
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.2.9 Results of biaxial compression test.

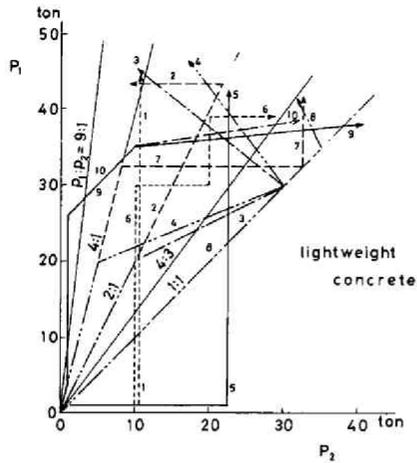


Fig. 2.2.10 Loading paths in biaxial compression test.

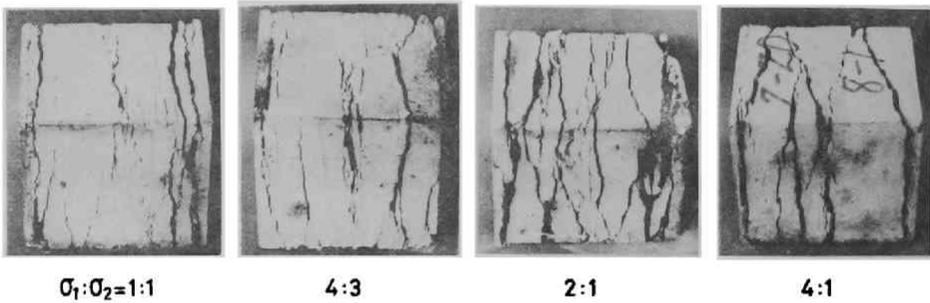


Fig. 2.2.11 Fracture patterns under biaxial compression.

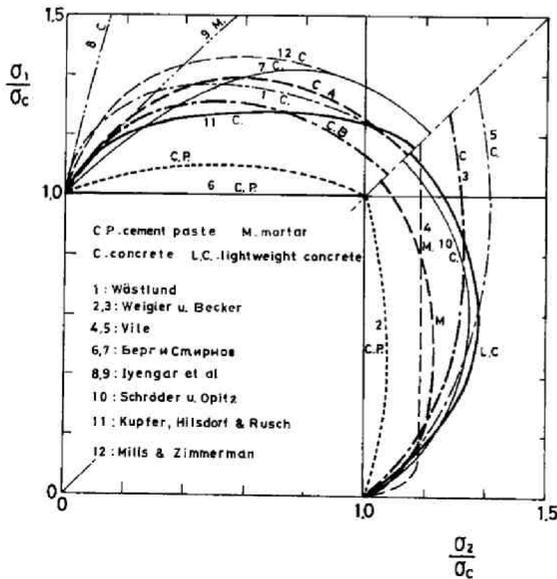


Fig. 2.2.12 Collected results of biaxial compressive strengths of cement paste, mortar, concrete and lightweight concrete (see Table 2.2.7).

Table 2.2.7 Researches in biaxial compressive strength and test conditions.

Research worker	Lubricant	Published	Note
Wästlund (14)	Rubber pad	1937	Concrete, 15 <sup>cm</sup> cube
Weigler u Becker (15)		1963	Cement paste, Concrete 10 <sup>cm</sup> × 10 <sup>cm</sup> × 2.5 <sup>cm</sup>
Vile (16)	Febcure	1965	Mortar, Concrete, Lightweight concrete, 10" × 10" × 4"
Берг и Смирнов (17)	Without lub. Duralumin plate (5 <sup>mm</sup> ) + rubber pad (4 <sup>cm</sup> )	1965	Concrete, 40 <sup>cm</sup> × 40 <sup>cm</sup> × 96 <sup>cm</sup>
Sundara Raja Iyengar, Chandra Shekhara & Krishnaswamy (18)	unsufficient	1965	Concrete, Mortar, 4" & 6" cube
Niwa & Kobayashi (19)	Cup grease	1967	Mortar, 11.0 <sup>cm</sup> cube
Niwa, Kobayashi & Koyanagi (20)	Silicon grease + rubber sheet (0.23 <sup>mm</sup> )	1967	Lightweight concrete 10.5 <sup>cm</sup> cube
Kobayashi & Koyanagi (21)	Silicon grease + rubber sheet (0.23 <sup>mm</sup> )	1967	Concrete, 10.5 <sup>cm</sup> cube Rich and Poor
Schröder u Opitz (22)	foil (0.5 <sup>mm</sup> ) + teflon plate	1968	Concrete, 20 <sup>cm</sup> × 20 <sup>cm</sup> × 5 <sup>cm</sup>
Kupfer, Hilsdorf & Rusch (23)	Brush bearing platens	1969	Concrete, 20 <sup>cm</sup> × 20 <sup>cm</sup> × 5 <sup>cm</sup>
Mills & Zimmerman (24)	gaxle grease + teflon sheet (0.076 <sup>mm</sup> )	1970	Concrete, 2 ¼" cube

$\sigma_2$  では、 $\sigma_1 = 1.0 \sim 1.3 \sigma_c$  程度となる。

Fig. 2.2.13 には、セメント・ペーストおよびモルタルの二軸圧縮破壊開始曲線を示した。この曲線は、供試体の荷重変形曲線の勾配が急変する点、すなわちき裂の発生、成長が顕著になり始めた時点に対応する応力より求めたものである。(荷重変形曲線は、2.5.3 で述べる三軸圧縮試験の場合と類似しているので、それを参照されたい)。

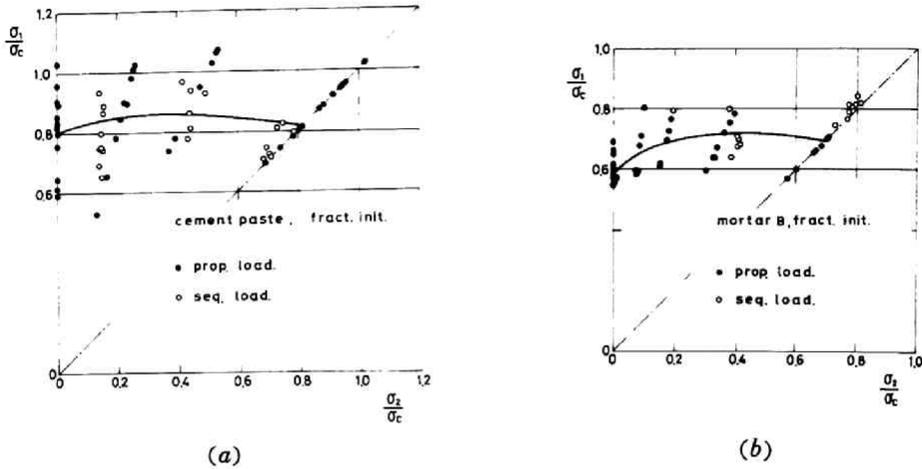


Fig. 2.2.13 Fracture initiation in biaxial compression test.

Griffithおよびその拡張された規準が適用されると考えると、平面応力状態では、き裂の発生、成長は自由面に平行な面内に含まれるので、破壊は自由面に平行な薄片状となる筈である。このことは、既に述べた試験結果と一致する。今、二軸圧縮破壊においても、一軸圧縮破壊の場合と同程度のき裂の成長があれば破壊すると仮定すると、 $\sigma_1$  によるき裂の成長に対して  $\sigma_2$  は理論上何の影響も示さないで、二軸圧縮破壊強度は、Берг и Смирновの結果のように、 $\sigma_2$  に関係なく  $\sigma_1$  は一定値  $\sigma_c$  である筈である。多くの実験は、異なった結果を示している。端面摩擦の影響を考慮してみても、たかだか数パーセントの強度増加となるだけであり、この試験結果の説明としては不十分である。我々が対象とする実在の材料の破壊は複雑であり、仮りにき裂の発生は  $\sigma_1$  のみに左右されると考えても、自由面に平行な面内に発生し、あるいは成長したき裂が成長中に材料内の結晶、粗細骨材などによって妨げられて成長が止り、さらに高い荷重の下でこれら障害物を迂回し、あるいは他のき裂が成長することになる。き裂は、このような粗細骨材の妨げを受けながら成長し、ある程度のき裂網が発達して全体的な不安定域が形成されて破壊することになるので、この過程において  $\sigma_2$  の影響が現われると考えられる。従って、より粒子の細かい均質な材料ほど、またより脆性な材料ほど、 $\sigma_2$  の影響は小さく、また破壊開始から終局破壊に至るまでの荷重増加も少ないと推論される。Fig. 2.2.9 から、この推論は一応当を得たものといえるであろう。さらに、この推論を検証するために、破壊開始曲線と終局破壊曲線とを比較してみよう。実験値のバラツキは大き

いが、Fig. 2.2.13から破壊開始時の $\sigma_1$ に及ぼす $\sigma_2$ の影響は、終局破壊の場合程は大きくないことが分る。

以上のことを要約すれば、破壊開始はGriffith規準(平面応力)により比較的よく説明できる。微細粒子でかつ均質性の高い材料ほどその適用性は高い。終局破壊規準は、材料の構造特性により、また応力状態により異なり、破壊開始規準を等方性に(比例的に)膨脹させたものとはならない。一般には、 $\sigma_2 / \sigma_1 = 1/2 \sim 2/3$ で強度増加が最も大であり、 $\sigma_1 (\sigma_2) = 1.0 \sim 1.5 \sigma_c$ となる。

### 2.5.3 セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの三軸圧縮試験結果とその考察<sup>26)</sup>

#### 1) 応力-ひずみ曲線<sup>27)</sup>

2.2.1 Vi)で略述した三軸万能試験装置のRY型自記記録装置を用いて、三軸圧縮試験時の荷重変形曲線を記録し、これを基に応力-ひずみ

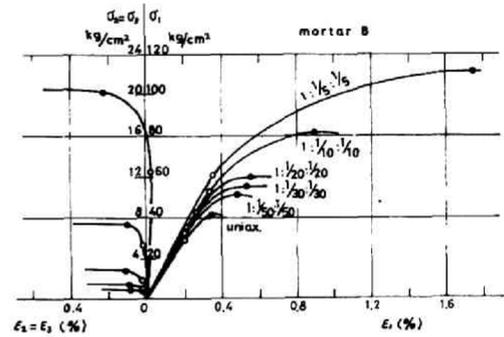
曲線を求めた。典型的な応力-ひずみ曲線をFig. 2.2.14に示す。応力の小さい間、すなわち図中の○印までの範囲では、

応力とひずみの関係は直線的であり、除荷することによりひずみは回復してほぼ零となる。この範囲内の荷重では、供試体は巨視的にはもちろん、局所的にも安定である。き裂の発生はほとんどないか、あるとしても巨視的な挙動には影響を与えない程度のものである。

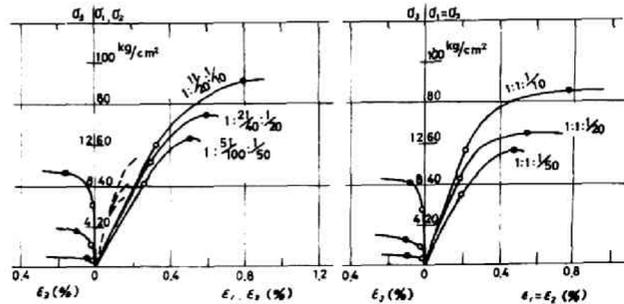
荷重を増加して行けば、

応力-ひずみ曲線の勾配は次第に減少する。除荷すれば、初期の直線部分にほぼ平行な除荷の応力-ひずみ曲線が得られる。この応力域では、

供試体内部には、局所的な破壊が次第に進行しており、その集積されたものが巨視的な挙動となって現われていると考えられる。微視的な破壊の進行過程は、第1章の結果からも推察されるように極めて複雑



(a)



(b)

(c)

Fig. 2.2.14 Typical stress-strain curves in triaxial test.

であり、多数の潜在欠陥を有する実在の材料では、き裂の発生ならびに成長の過程は個々の部分を考えれば無数の可能性があると思われるが、供試体全体として巨視的に見ればこれらが全て集積されたものとして現われるため、複雑な構造組織の材料でも大体において再現性のある応力-ひずみ曲線を描くことになる。荷重を増加して行けば、変形は加速的に進行し、応力-ひずみ曲線の勾配は、次第に小さくなり、ついには零に達する(●印)ことになる。この荷重(応力)域を局所的不安定域と呼ぶことにする。この●印の点で応力は最大となり、この後は荷重は一定か、あるいは減少しながらも変形は増大する。この荷重域では、局所的な不安定域が次第に発達し、集積された結果として、全体的な不安定までに達した状態である。この域を不安定域と呼ぶことにする。終局破壊は、一般には最大荷重(応力)値、あるいはこれを経過してから生じる。低拘束圧域では、終局破壊は、最大荷重で生じると考えてもよく、以下では終局破壊応力としては最大応力値を取るものとする。

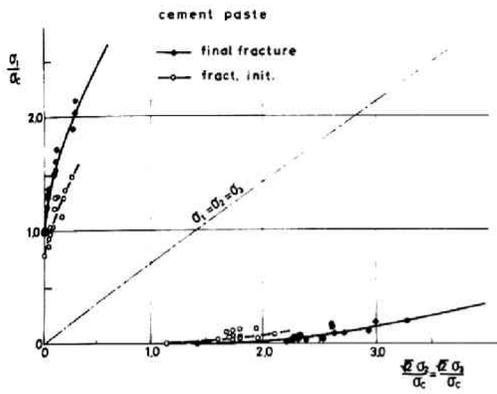
安定域から局所的不安定域への移行は、上述のように供試体内部において、潜在欠陥からのき裂が発生、伝播してくる過程であり、応力-ひずみ曲線の勾配の急変点(○印)は、き裂の発生、発達が顕著になり始めた時点に相当し、これが供試体全体としての挙動にも現われ始めたことを意味している。(Fig. 2. 1. 26を参照されたい)。この意味で、この変曲点を破壊開始に対応する点と考え、その時の応力を破壊開始応力と呼ぶことにする。なお、McCreath & Newmanは同じ意味で、この点を不連続点(discontinuity point)と呼んでいる。<sup>28)</sup>以下に述べる破壊開始応力(曲線)は、上述のようにして応力-ひずみ曲線から求めたものである。

## ii) 三軸圧縮試験結果とその考察

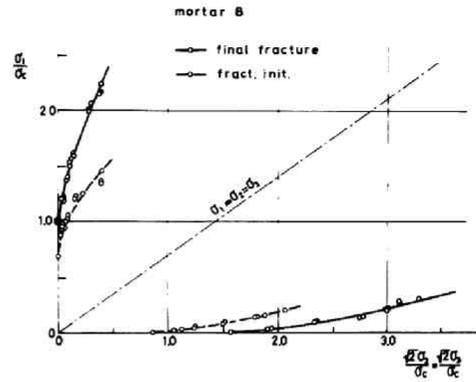
セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートならびに軽量コンクリートのRendulic 破壊曲線を Fig. 2. 2. 15 に示した。なお、Fig. 2. 2. 15 (a) および(b)には、破壊開始曲線も示しておいた。また、現在までに得られている主な Rendulic 破壊曲線を一括して Fig. 2. 2. 16 に示した。Fig. 2. 2. 17 には、等圧面による破壊曲面の切り口曲線(直截曲線)を示した。図中の破線は二軸圧縮試験に対応し、その内側の部分は、圧縮-引張応力状態に対応する部分である。

セメント・ペーストおよびモルタルの試験結果は、主として比例載荷によるものであり、また、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの試験結果は、等圧面内の比例載荷によるものである。いずれの場合にも、荷重の急激な変動点あるいは急激な変形増加に対応する荷重は容易に認められるので、この荷重に対応する応力を終局破壊応力と考えた。また、破壊開始応力は、前述したところにより応力-ひずみ曲線の急変点から求めたものである。

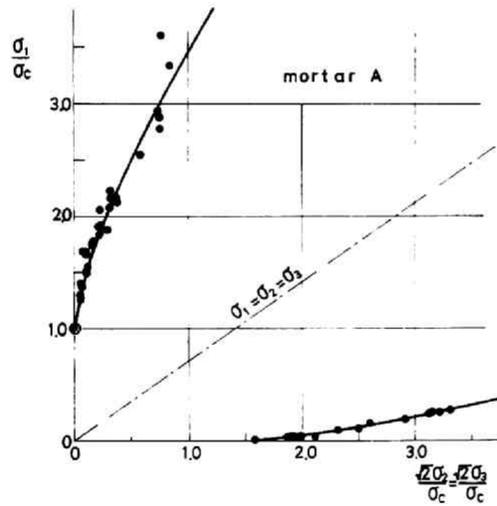
ここに示した試験結果から、セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートおよび軽量コンクリートの破壊開始曲面ならびに終局破壊曲面は、静水圧増加に伴ってほぼ等方性に膨張し、またその曲面の等圧面による直截曲線は、正三角形よりやや膨らんだ形状をしていることが分る。終局破壊は、破壊開始からき裂の成長、伝播という複雑な局所不安定状態を経て、巨視的な系全体としての不安定状態に到達した結果であり、このために費やされる仕事量も大きいと考えられ、従って、終局破壊曲面は破壊開始曲面



(a)

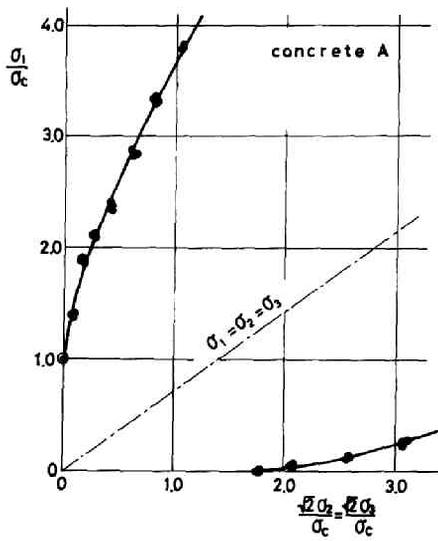


(b)

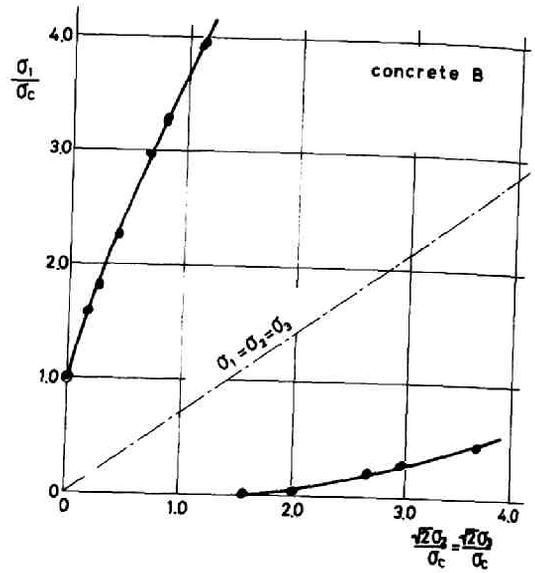


(c)

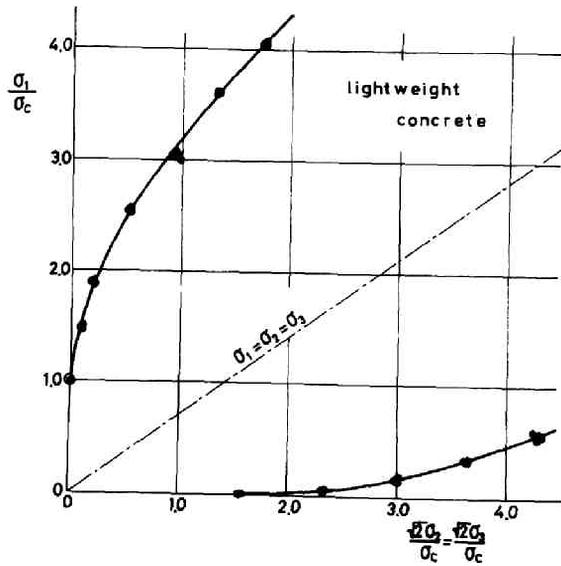
Fig. 2.2.15 Results of triaxial test expressed in Rendulic stress plane.



(d)



(e)



(f)

Fig. 2.2 15 (continued).

より相当広がった形（静水圧増加につれて、より急激に膨張する形）となることが予想される。試験結果はこの予想の妥当性を示している。破壊開始から終局破壊に至るまでの荷重増加は、拘束だけでなく材料の構造組織にも影響されると考えられる。一般的には、二軸圧縮の場合と同様に、微細粒子でかつ均質性の高い材料ほどこの荷重増加量は小さいと考えられる。

ここに示した破壊曲面の形状は、第1部第2章で提案した破壊規準とよく合致していることが分る。

Fig. 2.2.18には、上述の試験結果を異なった形で表示した。図の横軸には、原点から等圧面までの垂

直距離を、また縦軸にはこの面上で静水圧線から破壊曲面に至る距離を取った。従って、図中の曲線は、静水圧線を含み一つの主応力軸方向（例えば  $\sigma_1$  方向）に対して、ある傾きを有する平面による破壊曲面の切り口曲線を表わしたものと解釈される。なお、破線は二軸圧縮試験結果に対応するものである。

これらの曲線群の傾きからは、静水圧の増加に伴う破壊曲面の拡大の状態が読み取れる。これらの曲線群が、静水圧線に平行であれば、破壊曲面は静水圧の影響を受けないといえる。本試験結果は静水圧の影響が極めて大きいことを示している。また、一つの曲線に関しては、主応力間の比、すなわち Lode のパラメーターは一定であるので、曲線群が平行であれば破壊曲面は静水圧増加と共に等方的に膨張することを意味している。Fig. 2.2.18 より低拘束圧の下では、破壊曲面はほぼ等方的に膨張することが分る。

なお、岩質材料の破壊として八面体せん断応力破壊説（第1部、2.2.4 参照）も議論されているが、<sup>29)</sup> 上述の表示から明らかなように、一定な  $\sigma_{oct}$  に対して、 $\tau_{oct}$  の値は主応力比によって異なるので、全結果を一本の曲線上に表わすことは不可能であり、 $\tau_{oct}$  と  $\sigma_{oct}$  の一義性を主唱する八面体せん断応力破壊説は、岩質材料の破壊規準として採用することはできないことは明らかであろう。

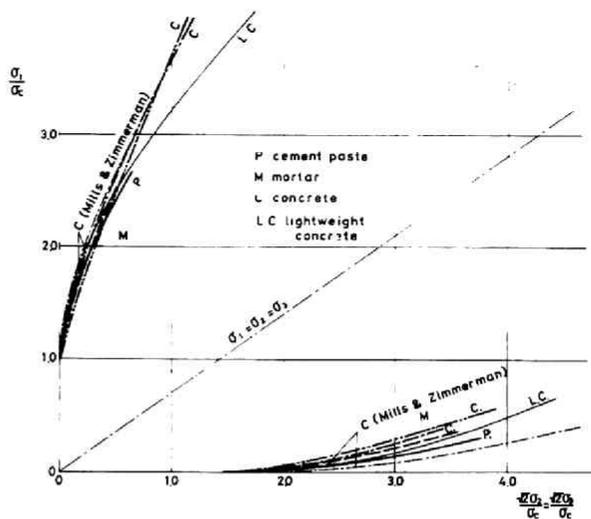
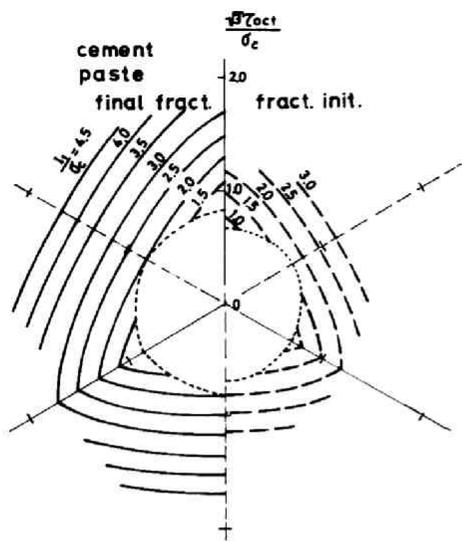
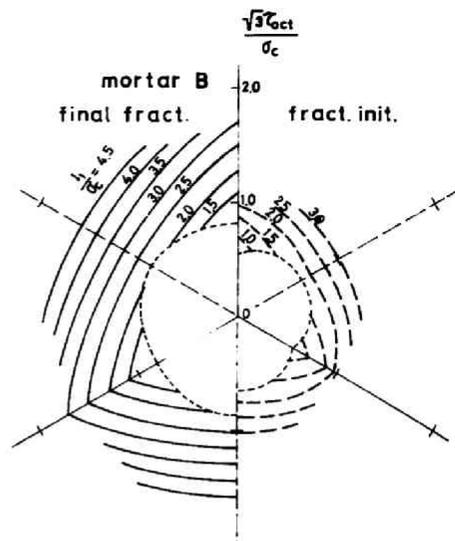


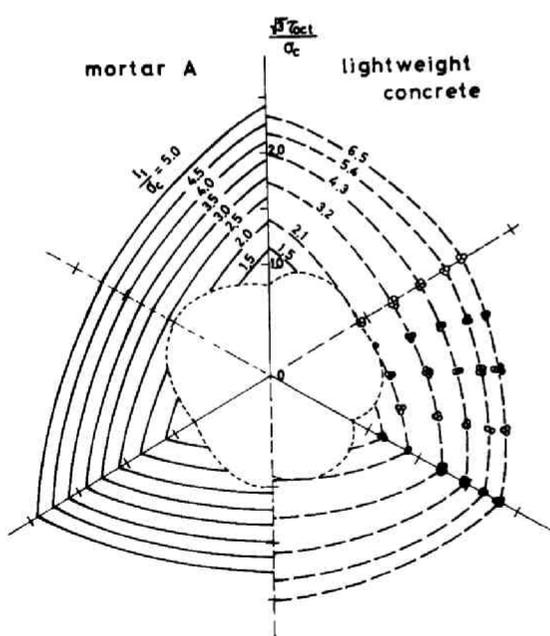
Fig. 2.2.16 Collected results of triaxial test expressed in Rendulic stress plane.



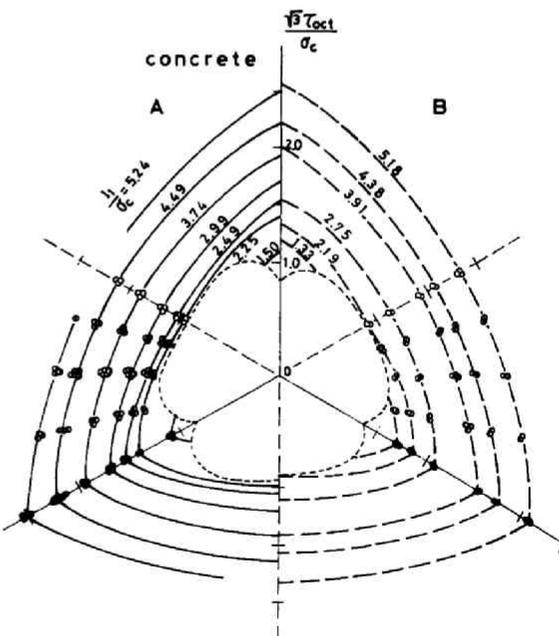
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 2.2.17 Results of triaxial test expressed in equiressure planes.

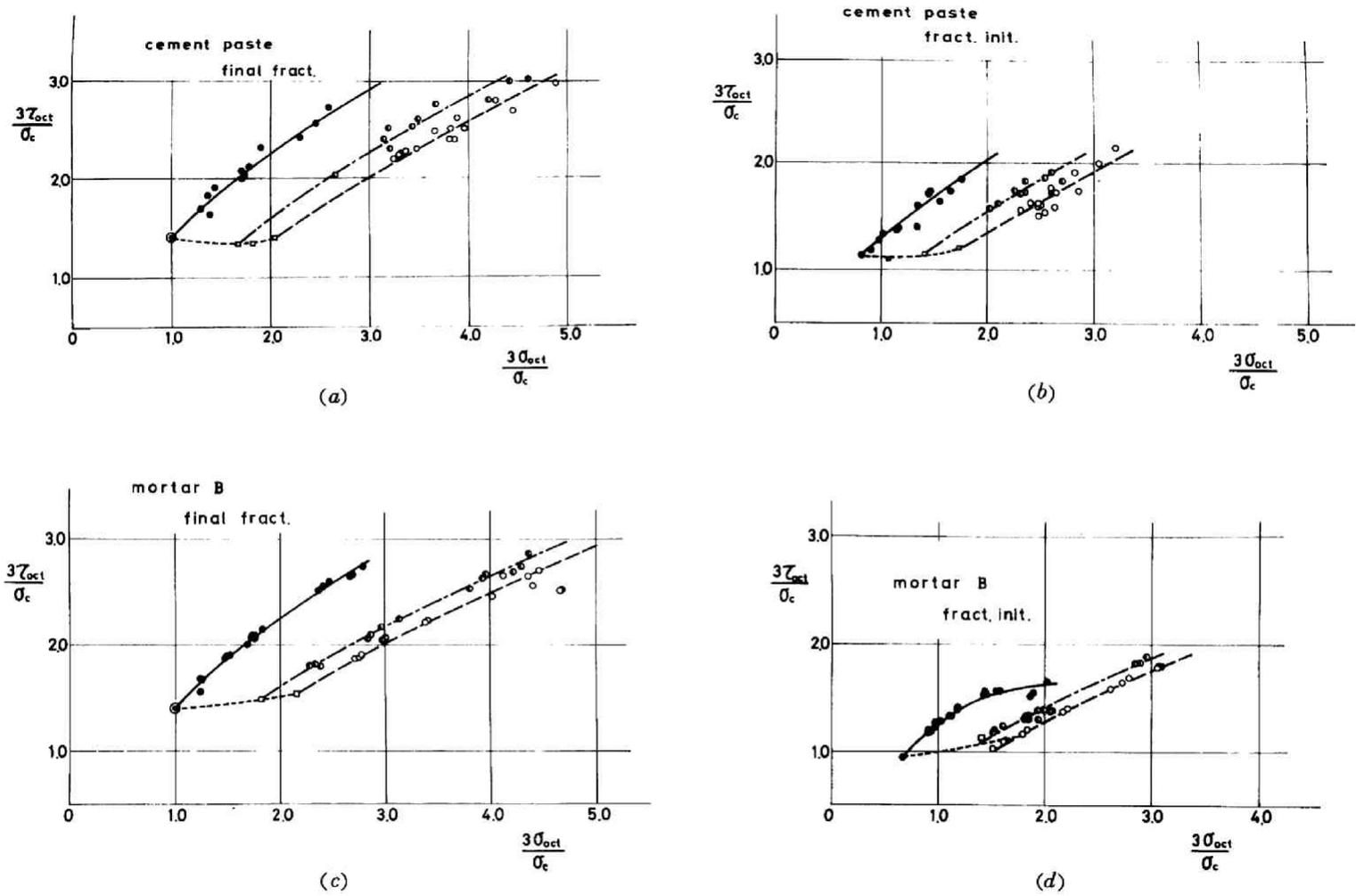


Fig. 2.2.18 Results of triaxial test expressed in the octahedral stress plane.

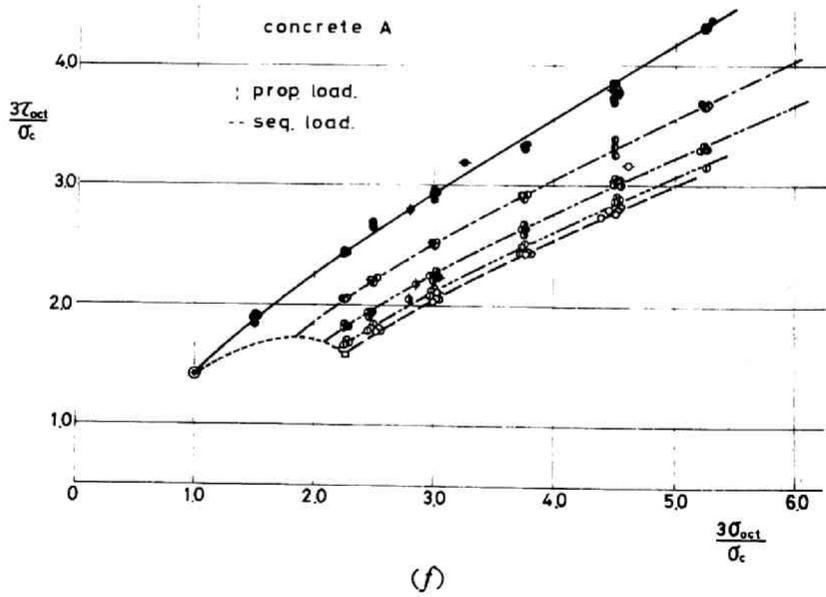
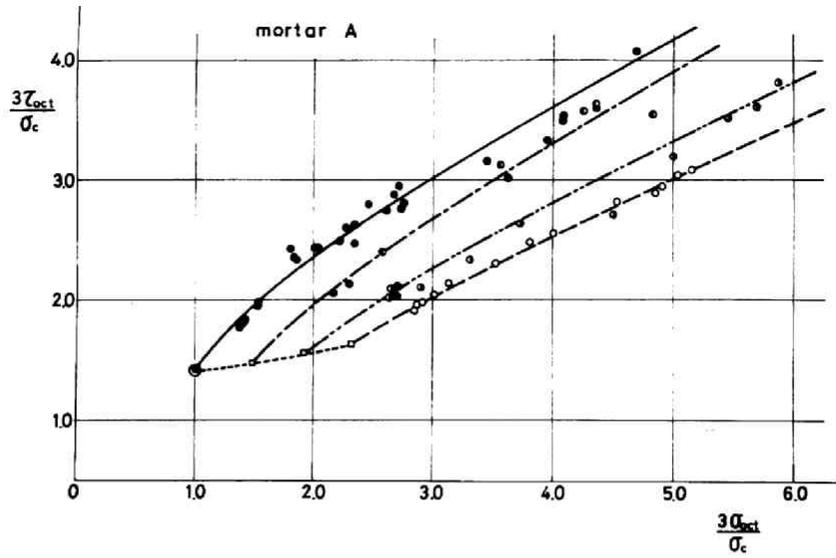


Fig. 2.2.18 ( continued ).

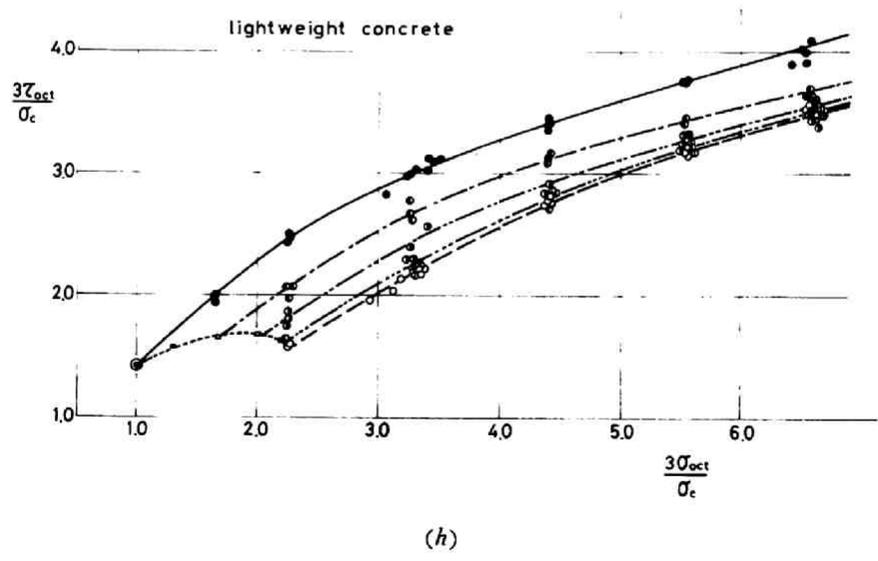
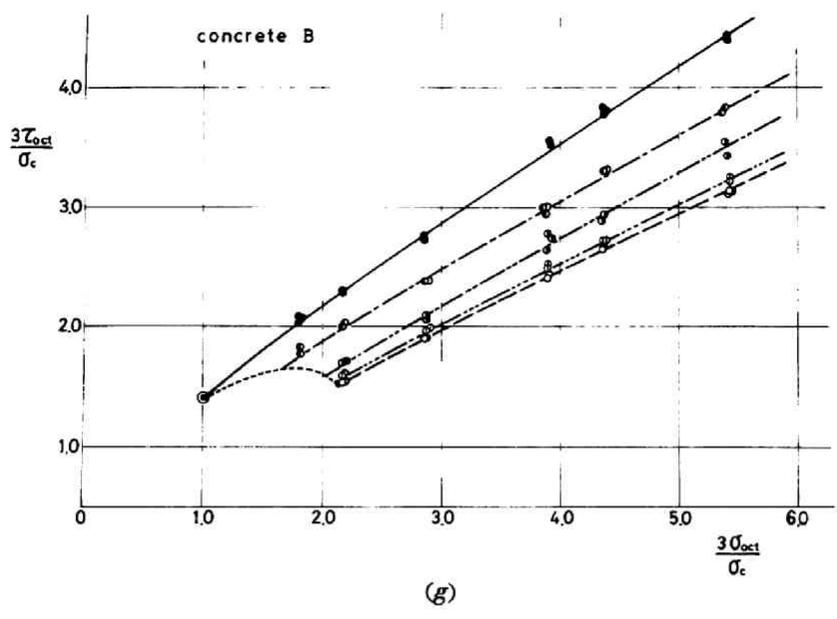


Fig. 2.2.18 (continued).

試験結果をさらに異なった関係、すなわち最大および最小主応力の和と差との関係として整理してみる。Fig. 2.2.19 にその結果を示した。試験結果は比較的良好に一本の曲線で表わされる。この表示は、第1部 2.2.6 で述べたところにより容易にCoulombあるいはMohrの破壊規準に変換することができる。従って、形式的にはCoulombあるいはMohrの破壊規準が適用されると考えられる。ただし、破壊そのものは後述するように、せん断応力に起因するものとは考えられず、また破壊面の傾きもMohrの破壊説によるものとは一致しないことに注意しなければならない。

Fig. 2.2.20 は、セメント・ペースおよびモルタルの破壊開始ならびに終局破壊曲線を示したものである。図中にはMcCreath et al.<sup>31)</sup>の結果も同時に示した。破壊開始と終局破壊との強度比は、主応力が増加すると若干増加する傾向にある。すなわち、破壊開始から終局破壊に至る破壊過程が長くなるようである。

Fig. 2.2.21には、代表的な三軸試験結果<sup>32)~38)</sup>を、圧縮引張域までも含めて、最大および最小主応力の和と差の関係として図示したものである。図より、セメント・ペースト、モルタル、普通コンクリートの結果には大差が認められないが、軽量コンクリートでは主応力増の増加と共に急激に強度が低下することが分る。なお、試験結果が最大および最小主応力の和と差の関係でほぼ一義的に表わされるということは、いわゆる中間主応力の影響は極めて少ないことを意味している。特に低拘束圧下での岩質材料の破壊を対象とする場合には、この影響は無視して差し支えないであろう。

供試体の破壊形態の例をFig. 2.2.22に示す。Case (e), (c)および(a)は、それぞれ三軸圧縮、中間( $2\sigma_2 = \sigma_1 + \sigma_3$ )および伸張試験による結果を示し、Case (b)および(d)は、それぞれCase (e)と(c)およびCase (c)と(a)との丁度中間の応力状態に対応するものである。

Case (e)および(d)では、最小主応力方向に垂直な面からある傾きをもった数個の平面にひびわれが生じ、またCase (c)~(a)では、ひびわれは中間主応力を含む2面に生じている。この傾向は、静水圧が大きくなると若干不規則にはなるが、ほぼ保持されると見てよい。破壊面の傾きはCase (e)および(d)では、最小主応力に垂直な面から約 $20^\circ \sim 27^\circ$ であり、またCase (c)~(a)では最大主応力方向から約 $20^\circ \sim 30^\circ$ であった。破壊面を詳細に調べてみると、引張に近い状態で破断された後強制的にすべりを受けた形跡が認められた。特に、軽量コンクリートの場合には、粗骨材の破壊状態からこのような形跡は顕著に認められる。したがって、各Case毎に若干の特徴は認められるとしても、ここで行なった程度の三軸圧縮破壊がせん断破壊であることは考えられず、また上述の角度がいわゆる内部摩擦角を表わしているとも考え難い。最終的な破壊の形態は、試験機一供試体系全体としての特性にも大きく左右されると思われる。

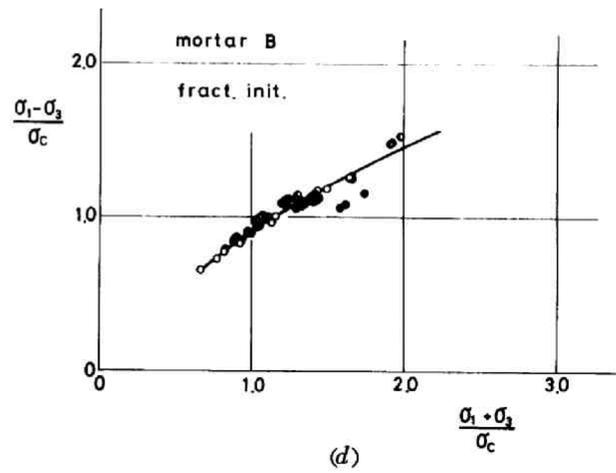
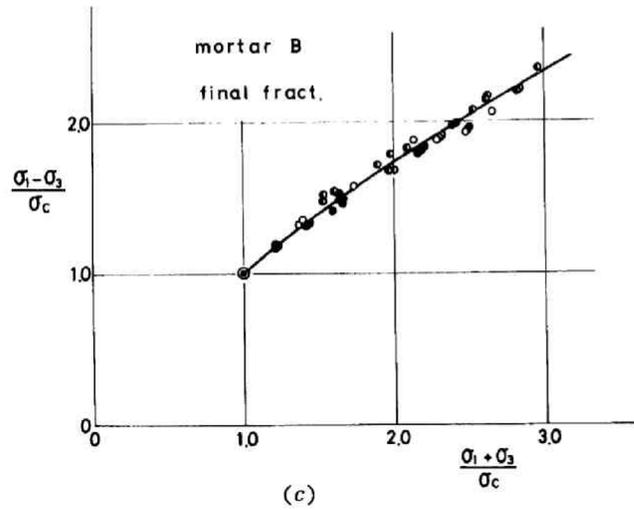
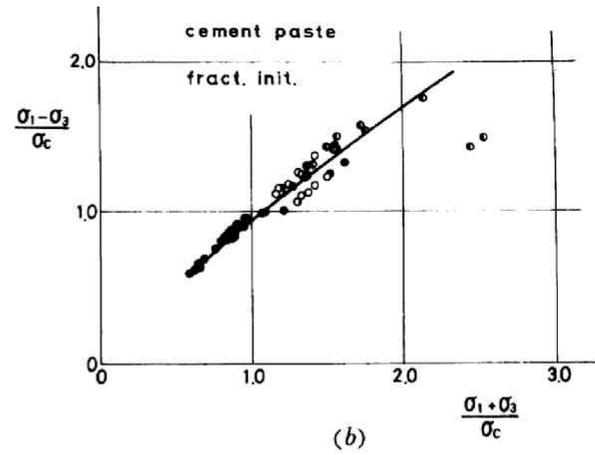
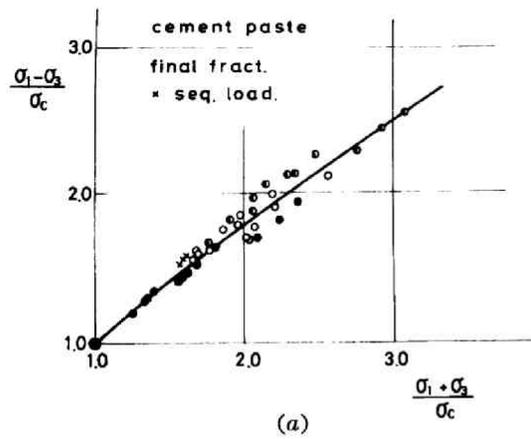
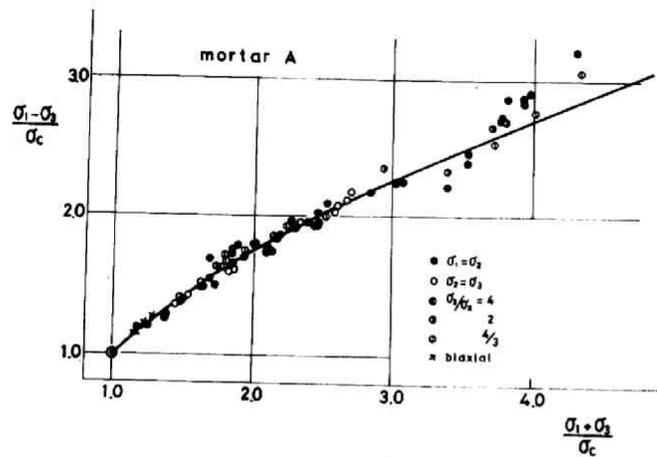
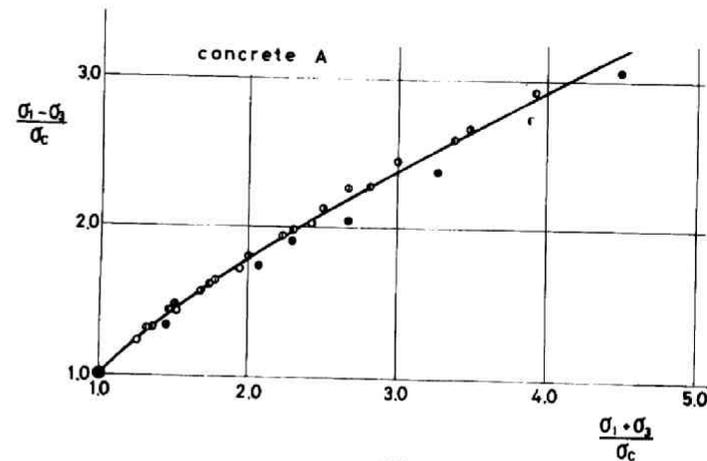


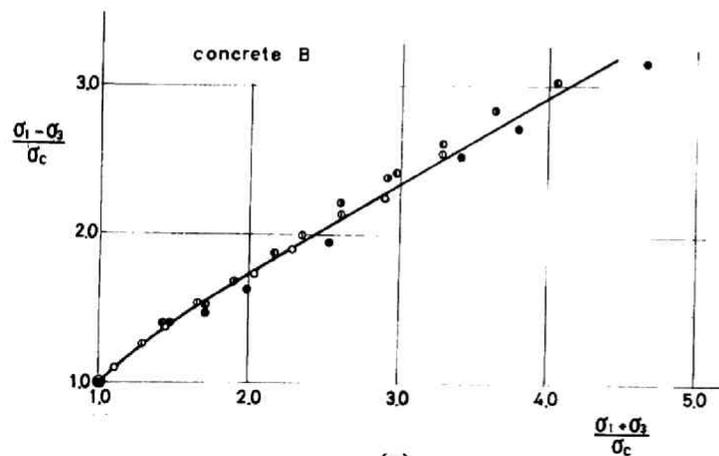
Fig. 2.2.19 Results of triaxial test expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses.



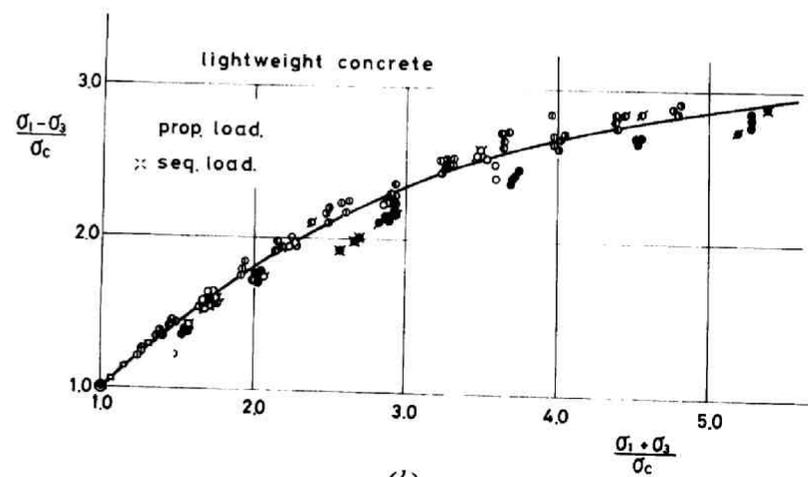
(e)



(f)



(g)



(h)

Fig. 2.2.19 (continued).

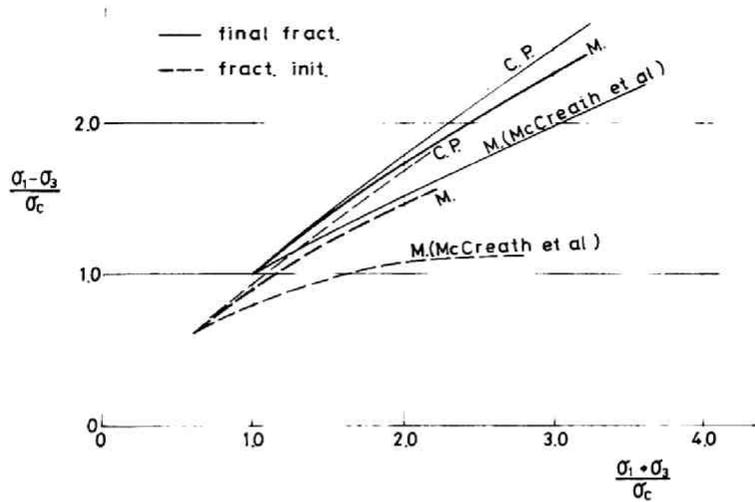


Fig. 2.2.20 Fracture initiation in triaxial test expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses.

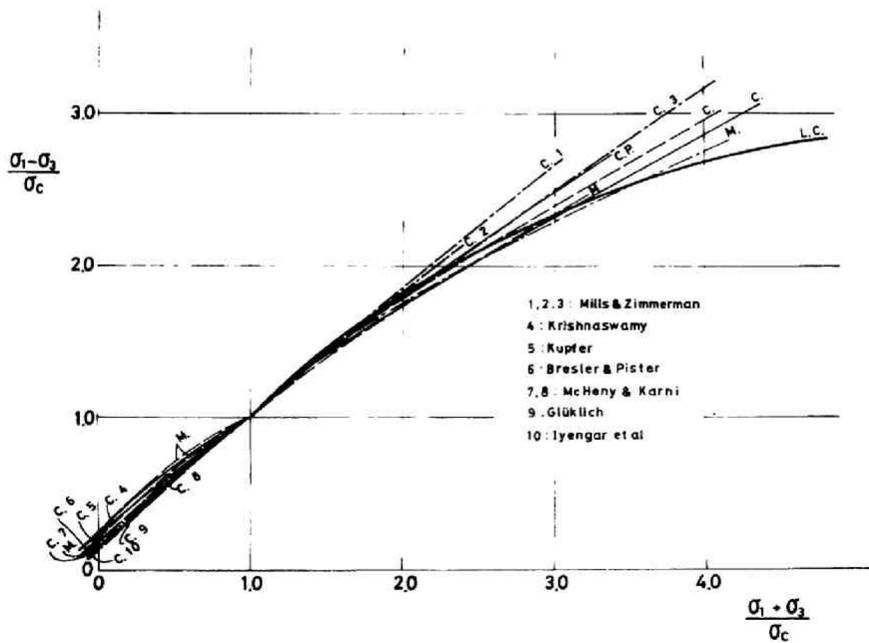


Fig. 2.2.21 Collected results expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses.

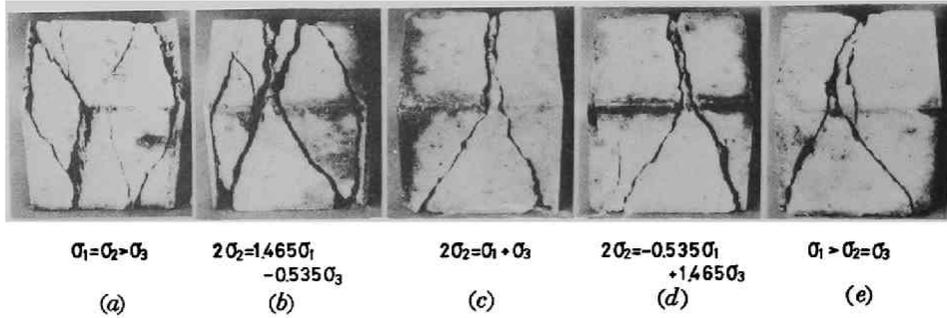


Fig. 2.2.22 Fracture patterns of triaxial test in compression.

#### 2.5.4 モルタルの圧縮-引張試験結果とその考察<sup>39)</sup>

既に前節 2.5.2, 2.5.3 で述べたようにセメントを安定剤(硬化剤)として使用した材料の圧縮破壊では、工学的に問題とする範囲では正規化した応力表示を行なえば材質の差は破壊強度に本質的な影響を及ぼさないと考えられる。このことは、最も脆性的なセメント・ペーストと脆性度の低い貧配合コンクリートないし軽量コンクリートの試験結果を比較して見れば容易に認められよう。引張域での破壊では、第Ⅱ部 1.2.4 から推察されるように一般にき裂の発生から終局破壊に至るまでの過程は圧縮域の破壊に比して短く、より脆性的な傾向を示すことになり、また材料の構造組織にもより敏感であると考えられる。しかしながら、正規化した応力表示を行なえば、その差は顕著には現われなくても考えられる。本試験では、供試体の寸法が限られていること、また材料構成粒子の寸法が供試体寸法に比して十分小さく、かつ均質性が高いことなどの諸点を勘案して、モルタルのみについて試験を行なった。もちろん、構造組織の影響に関しては、さらに微視的な立場からも詳細な検討を加えなければならないのでこれ以上は言及しないことにする。

供試体としては、2.3.1.ii)の後半部で述べた円柱、円筒および角板供試体を使用し、また試験方法は2.4.3.Ⅳ)およびⅤ)によった。

円柱を用いた割裂軸圧試験および角板を用いた側方圧縮インデンテーション試験では、供試体の想定破断面上にはこの面に垂直なほぼ様な引張応力が、またこれと直角方向(荷重方向に平行)に一樣ではない圧縮応力が生じており、前者の試験では二軸圧縮-引張応力状態となり、また後者では一軸圧縮-引張応力状態となっている。このような間接的な多軸応力下の試験を行なう場合には、一般に応力分布は一樣とならないので特に供試体内の応力分布を適確に把握することが必要である。応力分布の詳細に関しては、第Ⅱ部第4章および第5章を参照されたい。本試験では、想定破断面での圧縮応力は供試体断面中心で最小となり、荷重境界に近づくにつれて増大しているため、試験結果を解釈する場合、破壊発生点をどこに取るかが最も大きな問題となる。ここでは、この点を予測する予備実験として、供試体の想定破断面上にストレーン・ゲージを貼布して、破断時までのひずみ測定を行なった。測定結果の例を Fig. 2.2.23 に示す。この結果および破断面の放射状の破断模様を観察の結果より、破壊発生点は、供試体中心ではなく、これより荷重境界の方へ約  $0.30 \sim 0.38d$  ( $d$ : 荷重点間の距離) だけ離れた点であることが認められ

た。この結果は他の観測結果とも一致している。また、既に述べたように、引張域を含む破壊では、き裂発生から比較的容易に終局破壊に至ることが考えられるので、上述の破壊発生点の破壊発生時応力を終局破壊応力と見做してもよいであろう。以上のような考え方に基づいて、試験結果を整理する。

角板供試体を用いた試験では、側圧を種々に変化させることにより、種々の圧縮-引張試験を行なった。試験結果を

Fig. 2.2.24 に示す。円柱供試体を用いた試験では、軸圧を加減することにより、引張を含む種々の三軸応力状態が得

られた。破壊には、中間主応力の影響は無視されると考えて、試験結果を図示した。また、円筒供試体を用いた、内圧-軸圧による試験結果を Fig. 2.2.25 に示す。

さらに、比較のために現在までに得られているコンクリートの圧縮-引張試験結果を<sup>40~48)</sup> Fig. 2.2.26 に一括して示す。これらの結果は、一軸圧縮強度を基準として正規化して表示したものであるが、これより引張強度は圧縮強度の  $1/16 \sim 1/8$  の範囲で変化し、また得られた破壊曲線にも大きな差があることが認められる。

この結果は、材料の引張強度は、構造組織特性に極めて敏感であることを示していると同時に、試験法により得られた強度そのものも

大きく左右されることを示している。因みに、主な試験法について略記しておこう。

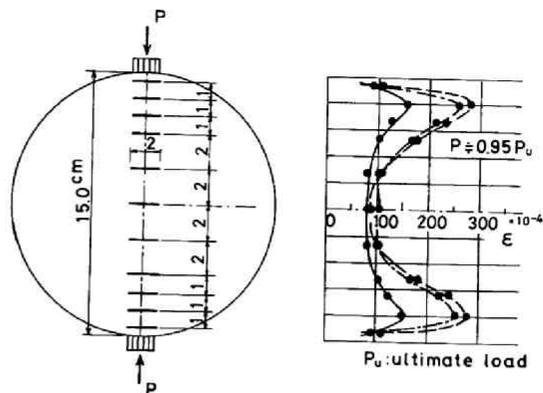


Fig. 2.2.23 Strains on the diametral plane in the split test specimen.

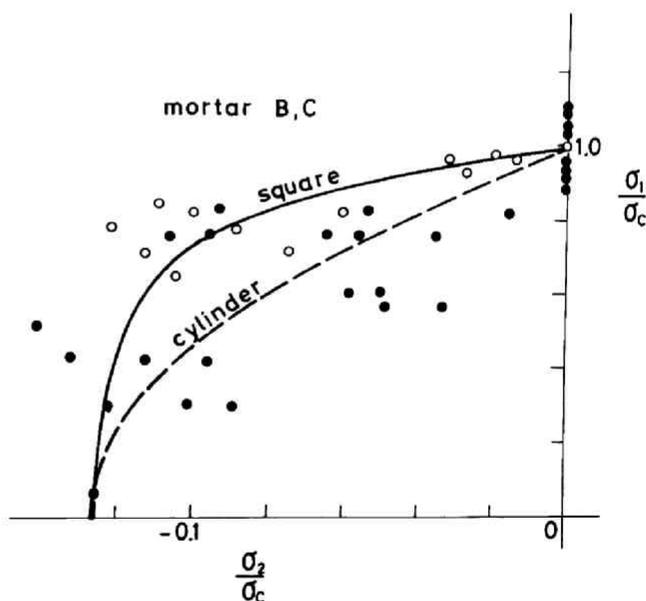


Fig. 2.2.24 Results of biaxial compression-tension test on solid disc specimens.

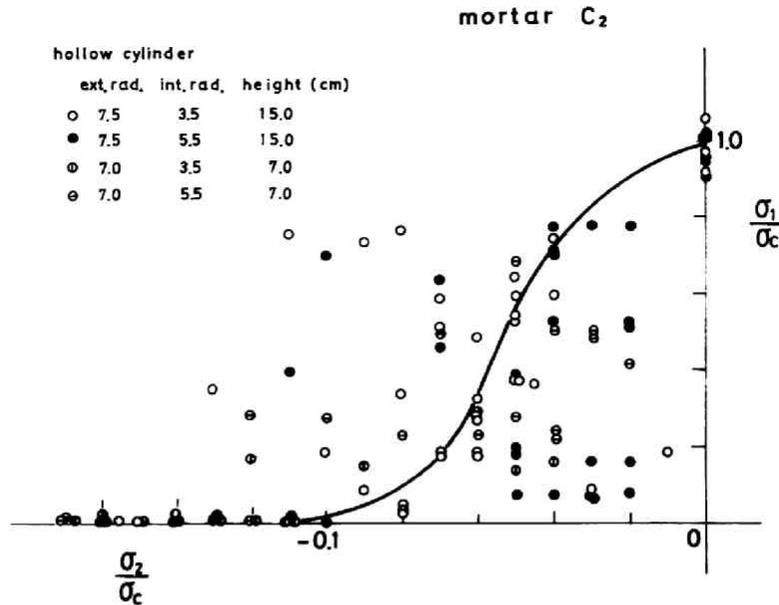


Fig. 2.2.25 Results of biaxial compression-tension test on hollow cylindrical specimen.

Krishnaswamy<sup>49)</sup>は円柱ならびに楕円柱を用いて割裂試験を、また Kupfer et al<sup>50)</sup>は角板を用いてインデンテーションおよび側方圧縮インデンテーション試験を行なっており、これらの試験結果はここで得られた同様な試験結果と比較的よく類似している。また、Hatano et al<sup>51)</sup>は、側方圧を加えた梁の曲げ試験を行なっている。これら以外の結果は全て円筒供試体を用いた内圧一軸圧試験、あるいは軸圧一振り試験より求められたものである。この2種類の試験結果には相当なへだたりがあり、実際には試験条件が異なっているのではないかという疑問が生じる。

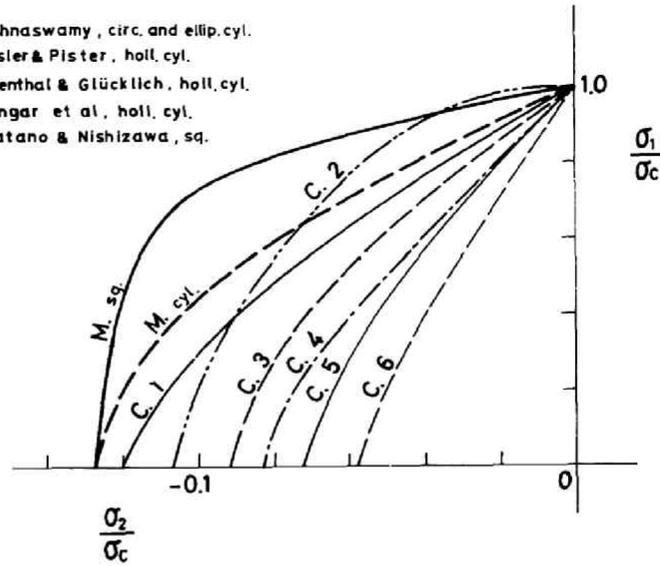
割裂ないしインデンテーション試験と組み合わせた前者の試験では、加圧盤は割裂破断面の分離を拘束するように作用し、軸圧もまた割裂面の分離を端面摩擦を介して拘束し、さらに側圧は発生した破壊の進展を妨げる方向に働くので、これらの条件は全て終局破壊引張強度が若干大き目なることを示している。これに反して、円筒供試体を用いた後者の試験では、薄肉になればなるほど、偏心荷重による影響が大きくなること、また内圧の作用により端面は拘束されたまま供試体中央部が外側に变形し圧縮荷重による座屈破壊を容易ならしめること、さらに円筒内側面の軸応力が平均より増加しており、このためにより小さい引張応力の下でも破壊が生じ易くなること、さらに供試体内にはほぼ一様な引張応力状態が生じているため潜在的な破壊確率は大きく、かつ発生した破壊は直ちに終局破壊に至ることなど、いずれも終局破壊引張強度が若干低下する要因が考えられる。さらに、材料の構造組織までも考慮すれば、第Ⅱ部第3章および第4章で示すように割裂ないしインデンテーション試験供試体の想定破断面上での引張応力は、

弾性学より求められ  
算結果より相当小さ  
るのに反して、円筒  
体を用いた試験法で  
一様応力状態であるの  
そのような応力状態  
化はないことも注意  
おこう。

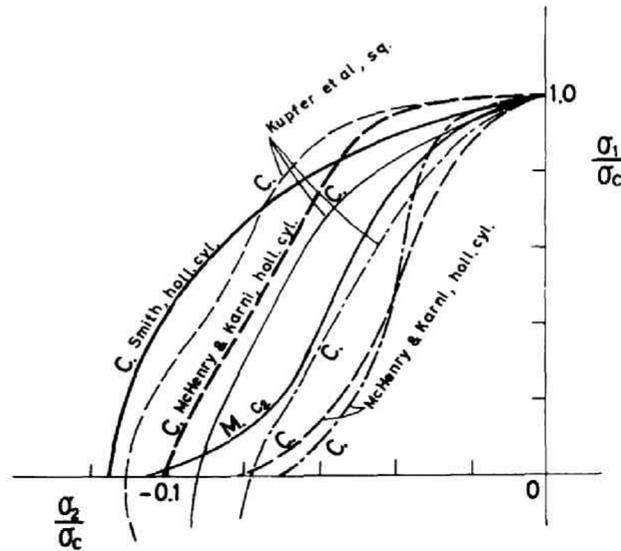
以上要するに、割裂な  
インデンテーション  
と組み合わせた試験法  
得られる結果は若干  
く出ているようであ  
また、円筒を用いて  
試験と組み合わせた試  
より得られる結果は、  
小さく出る傾向にあ  
うである。

なお、最後にコンクリ  
の破壊条件に関する  
としてこの方面の動  
よく伝えていると思  
る文献2編<sup>52, 53</sup>)  
上げておく。

- 1: Krishnaswamy, circ. and ellip. cyl.
- 2: Bresler & Pister, holl. cyl.
- 3: Rosenthal & Glücklich, holl. cyl.
- 4: Iyengar et al., holl. cyl.
- 5, 6: Hatano & Nishizawa, sq.



(a)



(b)

Fig. 2.2.26 Collected results of biaxial compression-tension test on mortar and concrete.

### 2.5.5 砂岩およびチャートの圧縮試験結果とその考察

#### 1) 一軸圧縮試験結果とその考察

関西電力株式会社喜撰山地下発電所より採取した砂岩（喜撰山砂岩），建設省大滝ダムサイト左岸より採取した砂岩（大滝砂岩）ならびにチャート（大滝チャート）について圧縮試験を行なった。一軸圧縮試験結果を一括して Table 2.2.28 に示す。

Table 2.2.8 Collected results of uniaxial strength of rocks tested.

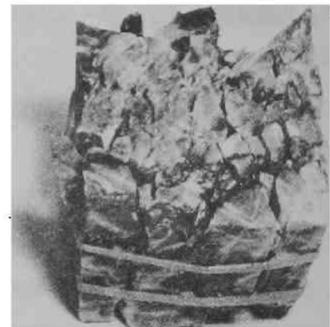
Rock	Uniax. comp. strength ( kg/cm <sup>2</sup> )	Variation %	Nos of specimen	Size of specimen	Note
Kisenyama Sandstone	1130	7.2	8	5.5 <sup>cm</sup> cube	Clad with cement paste
	1200	8.6	8	5.5 <sup>cm</sup> cube	Without clad
Otaki Sandstone	837	15.5	13	5.5 <sup>cm</sup> cube	Clad with cement paste
Otaki Chert	762	15.7	6	5.5 <sup>cm</sup> cube	Clad with cement paste

この表から分るように，供試体をモメント・ペースで被覆した場合には，完全に立方体に研磨仕上げた供試体の強度より約 6.5%程度低下している。逆に，後者の場合には，前者の場合より変動係数が若干大となる。この原因には整形誤差も含まれているものと考えられる。供試体整形の点からは，モルタル・ペーストで被覆して型枠に打設する方がより正確であり，またはるかに容易であるので，本試験ではこの方法によった。

大滝砂岩ならびにチャートの一軸圧縮破壊の例を Fig. 2.2.27 に示す。端面摩擦の減摩剤としては，シリコン・グリースを塗布したテフロンシートを使用した。見掛けの摩擦は 0.02 程度に減



sandstone



chert

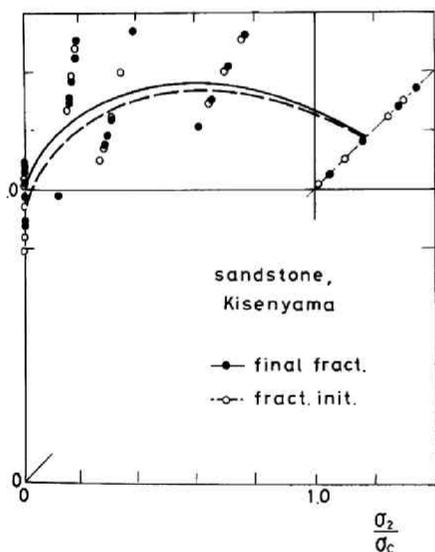
Fig. 2.2.27 Fracture patterns under uniaxial compression.

ており、供試体は荷重方向に平行な多数の柱状片に瞬間的に分離破壊した。この破壊は、モルタルおよびコンクリートに比してはるかに激しいものであった。砂岩の場合には、破壊形態から見て若干の異方性予想されるが、実験的には明瞭な強度差は認められなかった。破壊形態に関しては、軽量コンクリート (Fig. 2.2.8) とも比較されたい。

なお、この岩石試験結果を見ると変動係数が大きいのが眼につくが、地表近くの現場から採取してきた岩石としてはこの程度のばらつきは止むを得ないと思われる。ここで得られた一軸圧縮試験結果は、二軸および三軸試験結果を無次元化表示するための基準とした。

### 1) 二軸圧縮試験結果とその考察

二軸圧縮試験結果を Fig. 2.2.28 および Fig. 2.2.29 に示す。ここに○印は平均値を、—は分散範囲を示す。なお、Fig. 2.2.28 には、破壊開始曲線をも併示した。これより、この岩石では破壊から速やかに終局破壊に至ることが分る (2.5.2 で述べたモルタルおよびセメント・ペーストに関する結果とも比較されたい)。



2.2.28 Results of fracture initiation and final fracture under biaxial compression.

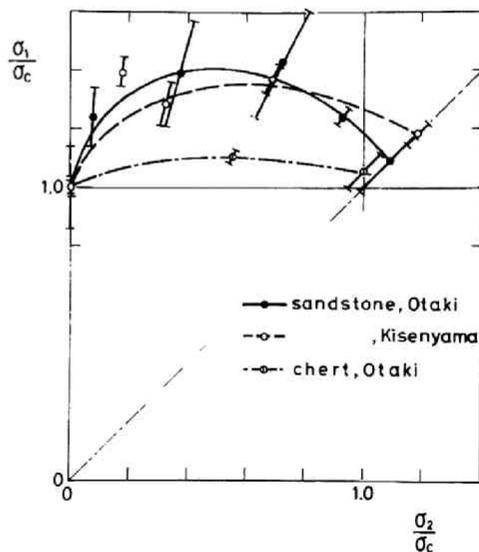


Fig. 2.2.29 Results of biaxial test on sandstones and chert.

これらの結果より、チャートは極めて脆性的に破壊し、二軸圧縮応力の下での耐力増加はほとんどないことが分る（モメント・ペーストの結果と比較されたい）。これに対して、砂岩では  $\sigma_2 / \sigma_c$  ( $\sigma_1 / \sigma_c$ )  $\doteq 0.5$  で、耐力は最大となり、 $\sigma_1 / \sigma_c$  ( $\sigma_2 / \sigma_c$ )  $\doteq 1.4$  となる。 $\sigma_1 / \sigma_2 = 1.0$  では、 $\sigma_1 / \sigma_c$  ( $= \sigma_2 / \sigma_c$ )  $\doteq 1.2$  程度となる。

Fig. 2.2.30には、今までに求められている二軸圧縮強度<sup>54), 56)</sup>を一括して示した。この結果より試験法による若干の差異はあると考えても、二軸圧縮強度は岩石の種類によって相当異なることが推察される。

### iii) 三軸圧縮試験結果とその考察

三軸圧縮試験結果を Fig. 2.2.31 に示す。

Fig. 2.2.31(a)には破壊開始規準をも示した。

試験結果にも相当のばらつきが見られるが、これは採取資料のばらつきとして止むを得ないであろう。

砂岩では破壊開始は、終局破壊の約85~90%で生じている。もちろん、この値は岩石の種類によって異なるであろう。

三軸圧縮強度は、拘束圧ないし静水圧の関数であり、一般には、静水圧の増加につれてほぼ2次曲線ないし直線的に増大するようである。この傾向は、セメント・ペースト、モルタル、コンクリートなどと同様である（Fig. 2.2.15 および Fig. 2.2.16 参照）。ただし、その形状は個々の岩石の種類によって当然異なってくるであろう。今までに知られている代表的な試験結果<sup>57~63)</sup>を一括して示すと Fig. 2.2.32 のようになる。なお、Fig. 2.2.32(c)~(e)には、引張応力域に関する結果も含めて示していた。これらより、岩石の種類により破壊曲線が相当異なることが分る。一般的には、脆性度の低い岩石では、破壊曲線は静水圧線に平行に近づき、また脆性度の高い岩石では、静水圧が増加すれば破壊曲線は静水圧線から遠ざかり、急激に強度が高くなることが分る。いずれの場合でも破壊曲線の概形は、第1部第2章で推定したものと一致している。

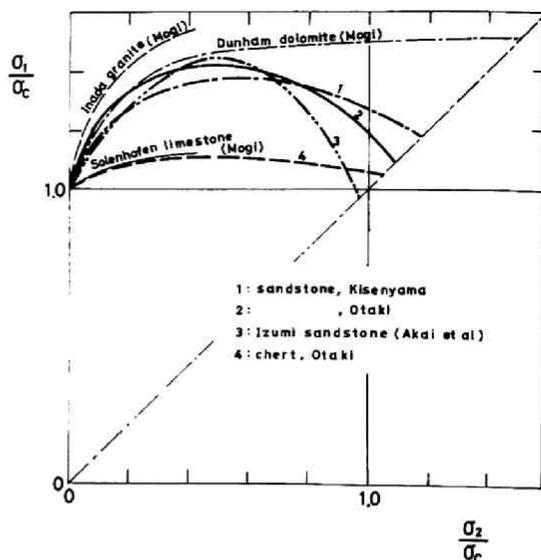


Fig. 2.2.30 Collected results of biaxial test.

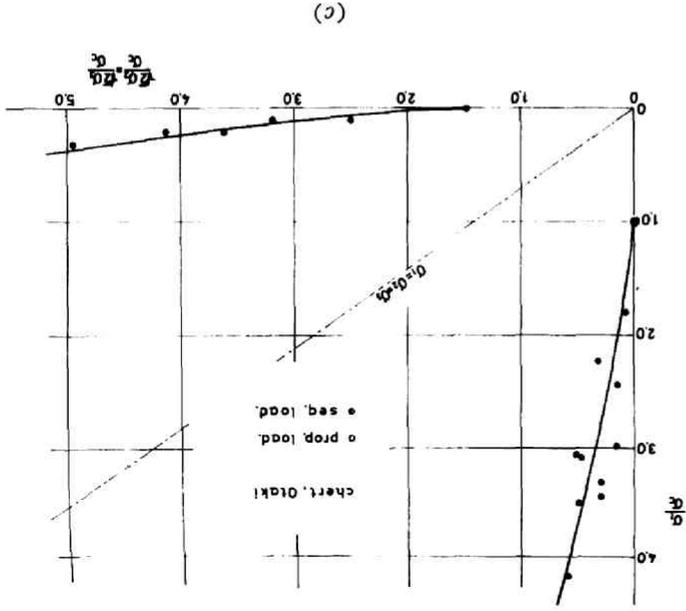
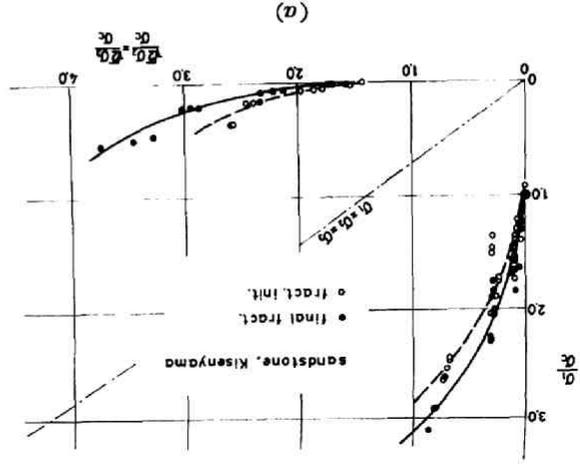
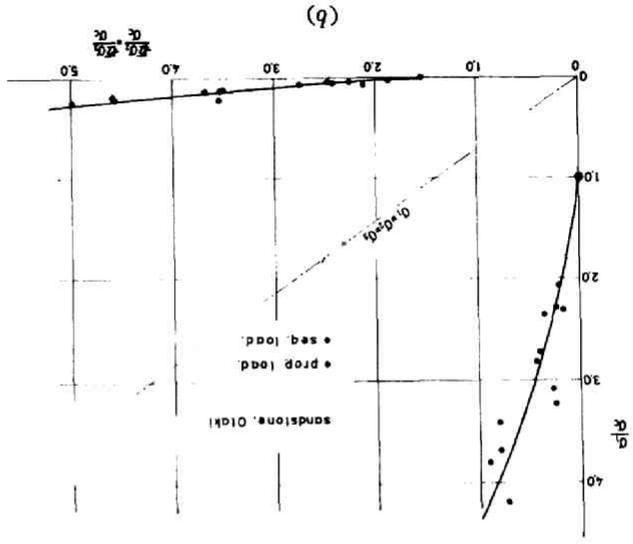
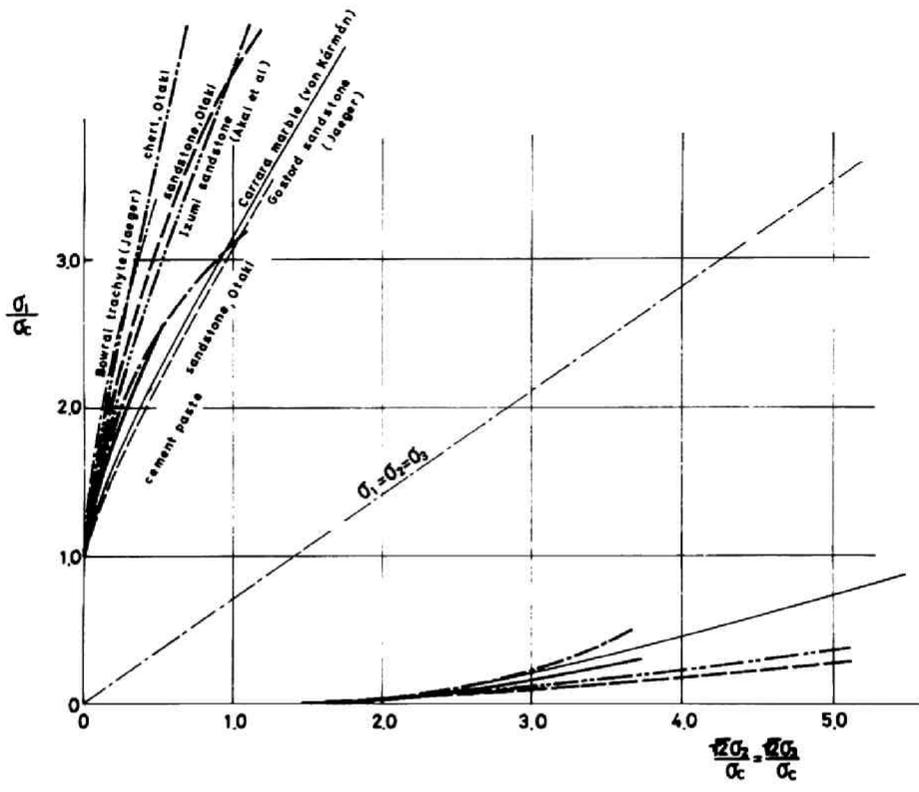
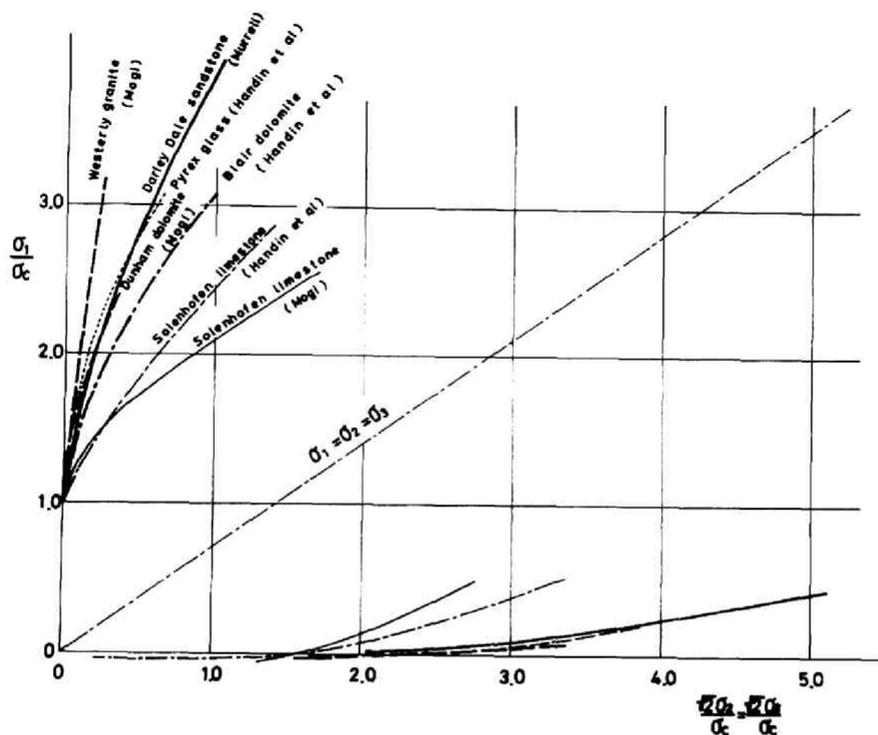


Fig. 2.2.31 Results of triaxial test expressed in the Rendulic stress plane.



(a)

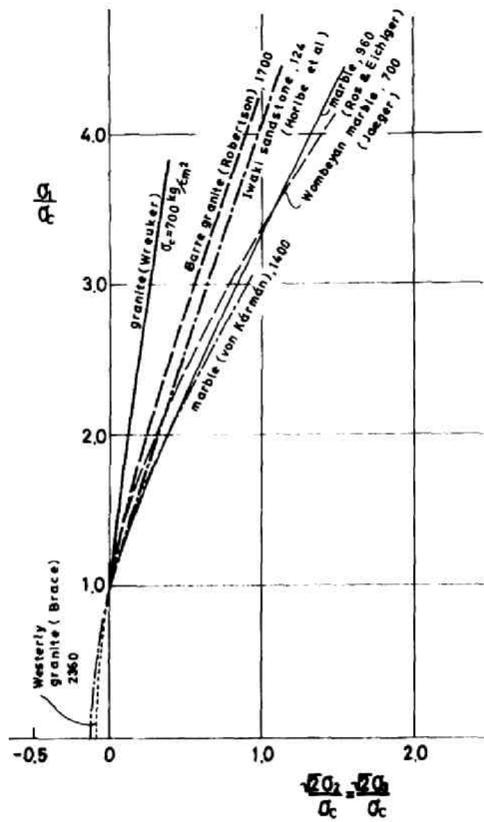
Fig. 2.2.32 Collected results of triaxial test expressed in the Rendulic stress plane ((c)~(e) are compiled from Hoek & Bieniawski<sup>63</sup>).



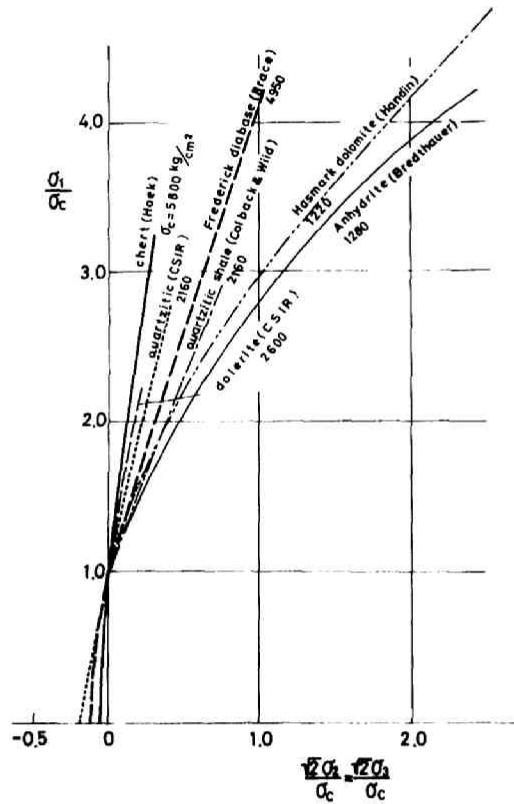
(b)

Fig. 2.2.32 (continued).

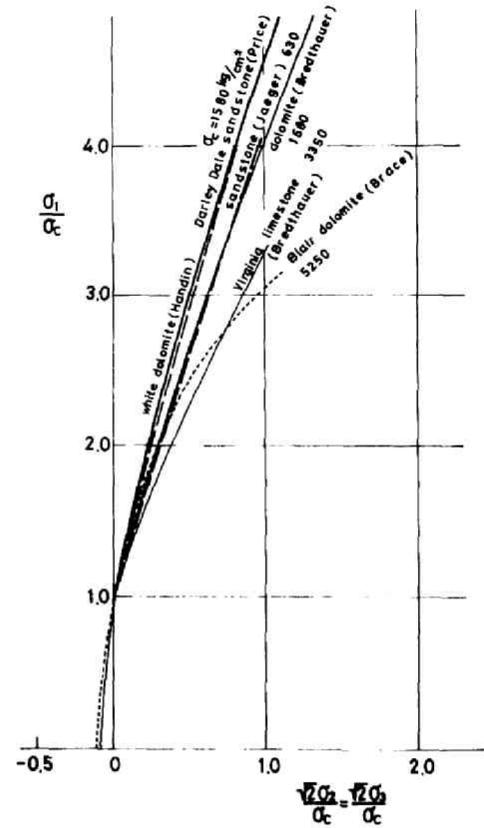
三軸試験結果を  $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$  の関係で表わすと Fig. 2.2.33 のようになる。この曲線の意味は、2.5.3.iii) を参照されたい。このような3曲線の組が求まれば、これより破壊曲面の概形は容易に求められるのでこれ以外の試験は省略した。なお Fig. 2.2.33 には、破壊開始曲線をも示した。Fig. 2.2.34 には、セメント・ペーストも含めて試験結果を比較した。



(c)



(d)



(e)

Fig. 2.2.32 (continued).

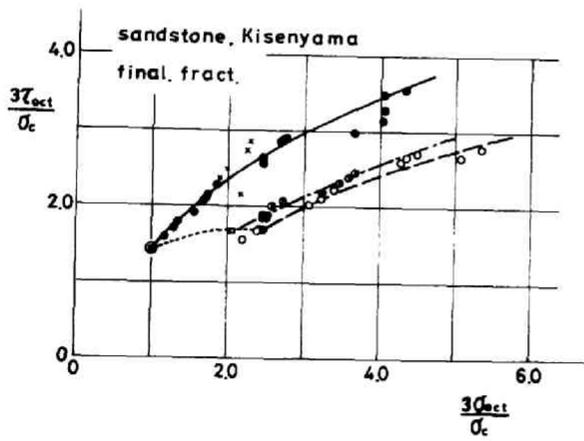
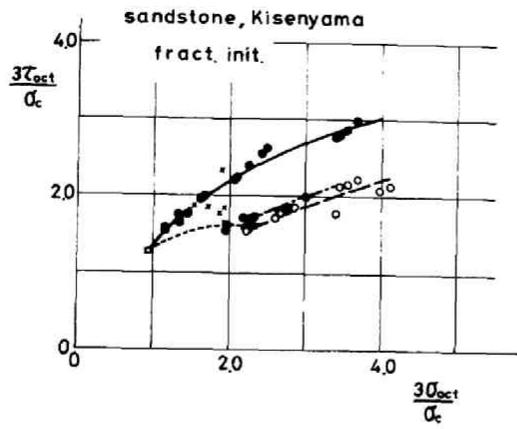
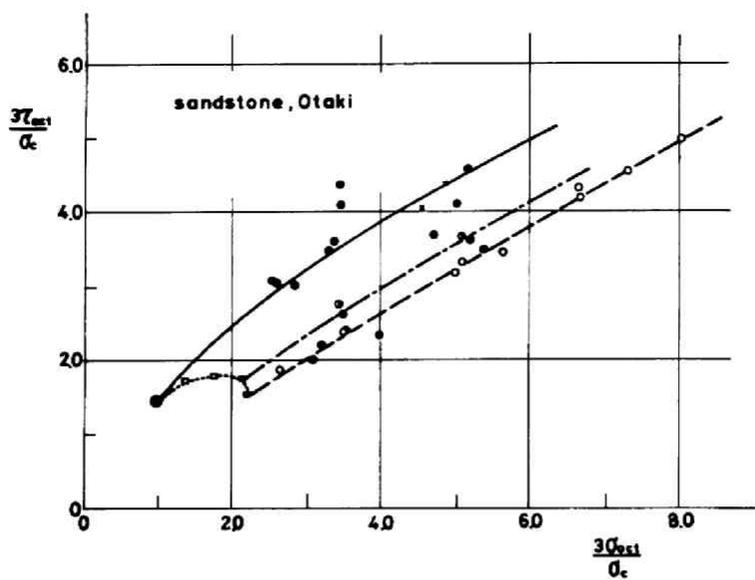
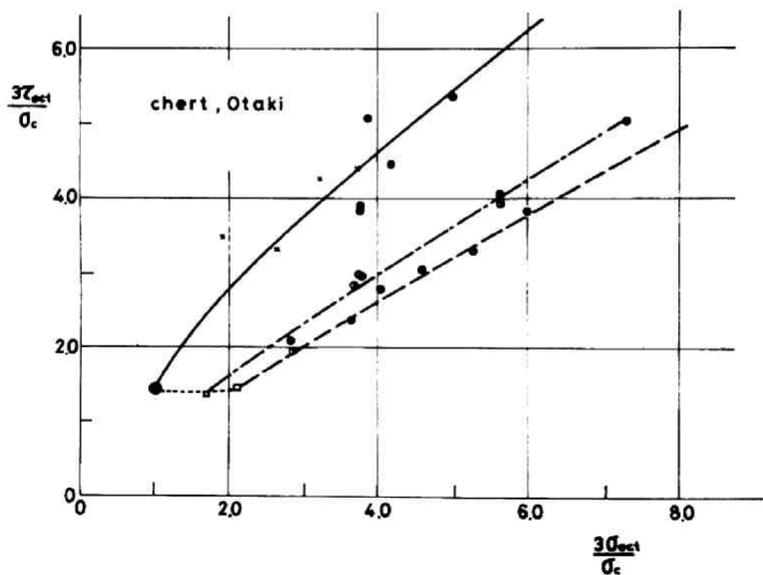


Fig. 2.2.33 Results of triaxial test expressed in the octahedral stress plane.



(c)



(d)

Fig. 2.2.33 (continued).

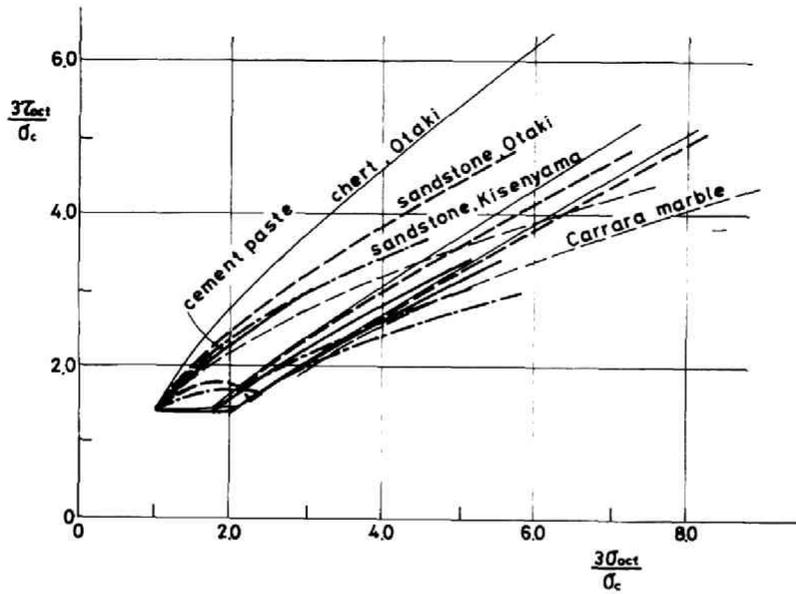
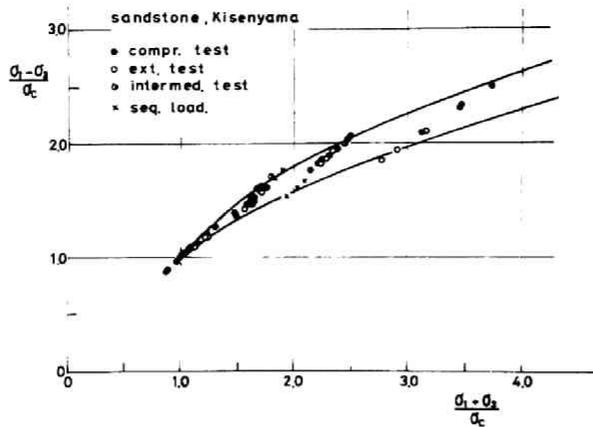


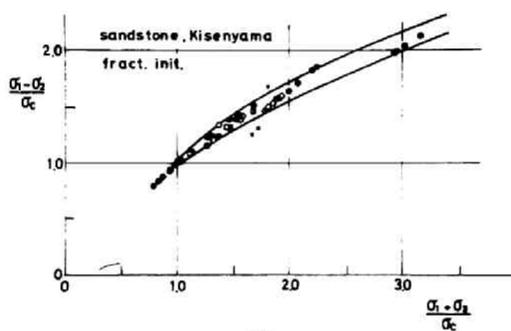
Fig. 2.2.34 Collected results of triaxial test expressed in the octahedral stress plane.

また、最大および最小主応力の和と差の関係を示すと、Fig. 2.2.35 のようになる。これらの図には、応力比ならびに載荷方法の異なったものをも比較して示した。ここで行なった試験範囲では、これらによる差異は見られないようである。最大および最小主応力の和と差の形で求めた実験結果<sup>64~66)</sup>は相当多くあり、これらを一括して示せばFig. 2.2.36 のようになる。岩石の種類によって、破壊曲線の形状は相当異なっていることが分る。

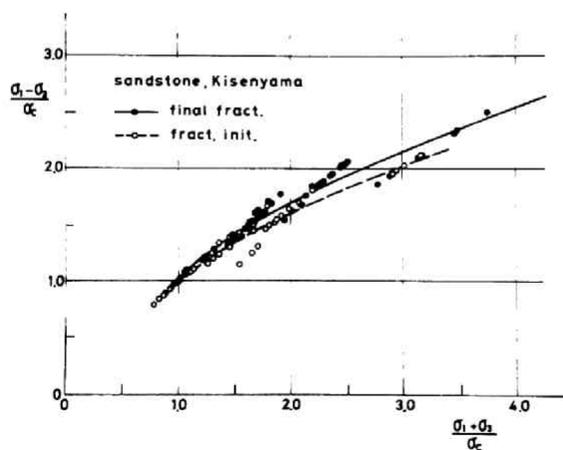
なお、岩石の試験法、強度などに関しては、C. Fairhurst (Ed.); *Failure and Breakage of Rock*<sup>67)</sup> に興味ある論文が掲載されていることを付記しておく。



(a)

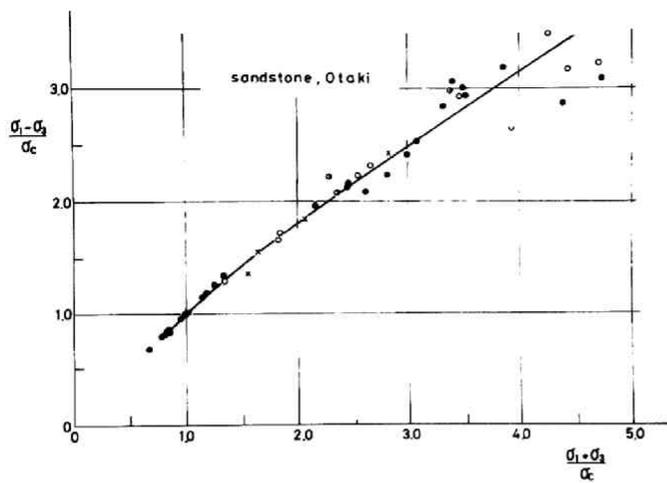


(b)

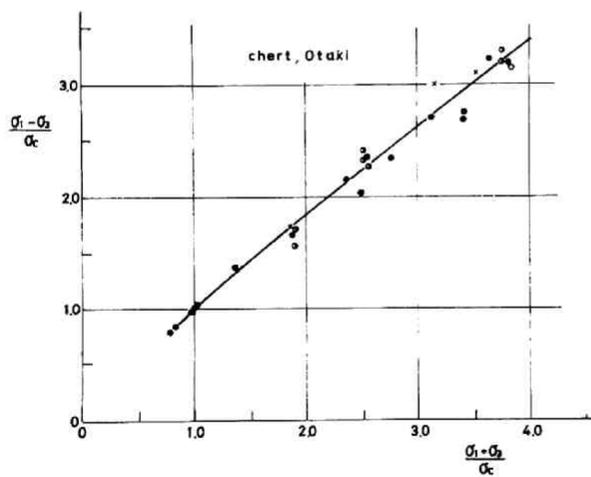


(c)

Fig. 2.2.35 Results of triaxial test expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses.



(c)



(d)

Fig. 2.2.35 (continued).

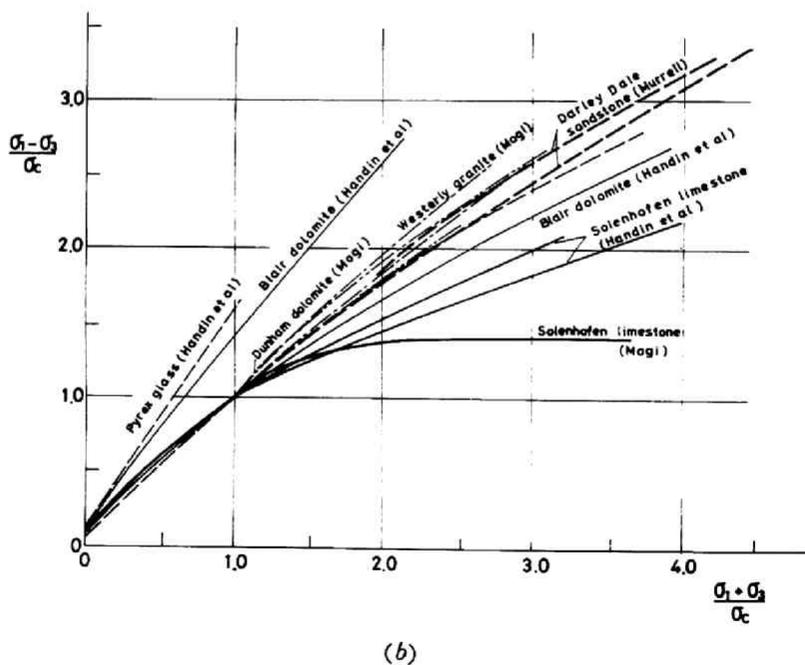
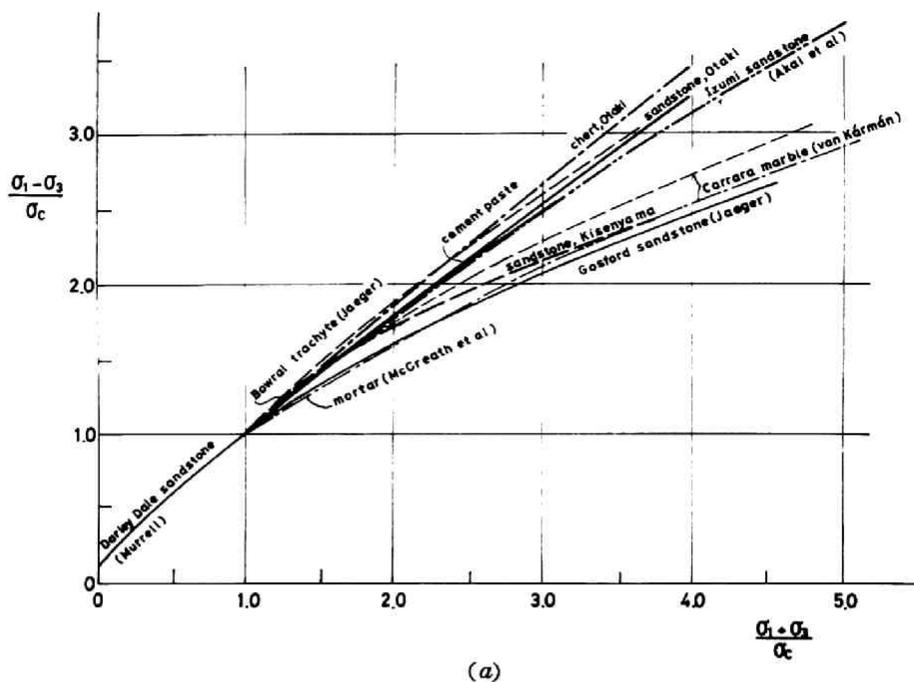
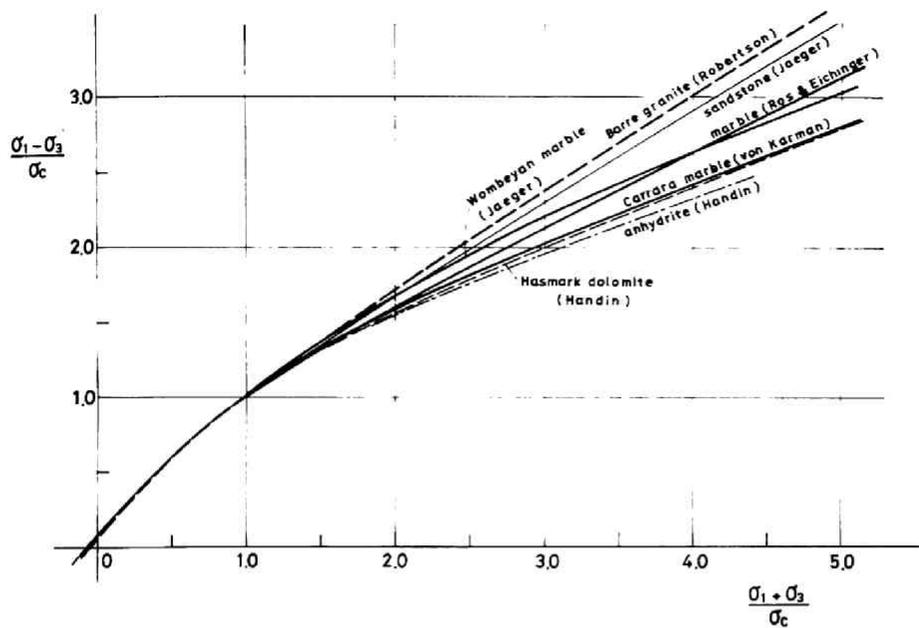
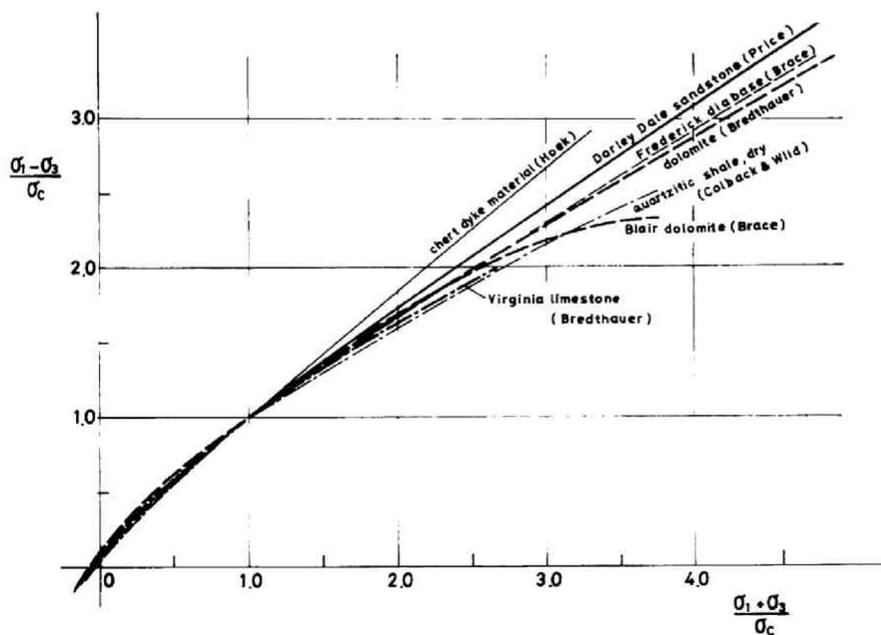


Fig. 2.2.36 Collected results of triaxial test expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses (compiled from Hoek and Bieniawski<sup>63</sup>)



(c)



(d)

Fig. 2.2.36 (continued).

### 2.5.6 その他の材料のぜい性破壊強度の考察

以上述べてきた岩質材料の他に、黒鉛、鑄鉄、ジルコニウム、チタニウムなどは低拘束圧下ではぜい性破壊することが知られており、第1部で推定した一般的な破壊規準を検証する意味からも、また、岩質材料の破壊強度特性と比較する意味からも、これら材料の破壊強度特性に言及することは無意味ではないであろう。

一軸圧縮強度を基準に取って、黒鉛、ジルコニウム、鑄鉄などについて行なわれた圧縮一引張試験結果(68~71)を整理して図示すると、Fig. 2.2.37 および Fig. 2.2.38, Fig. 2.2.39 のようになる。これらの試験は全て円筒供試体を用いて、内圧軸圧試験法により行なわれたものである。これらの結果は、全般的に 2.5.4 で述べたモルタルの試験結果より高い強度を示している。この原因は、破壊発生の起因となる潜在欠陥の形状にあると考えられよう。個々の破壊曲線の形状は材料によって相当異なっているのは当然であるが、定性的には第1部第2章で推定した破壊規準によく合致していることが分る。

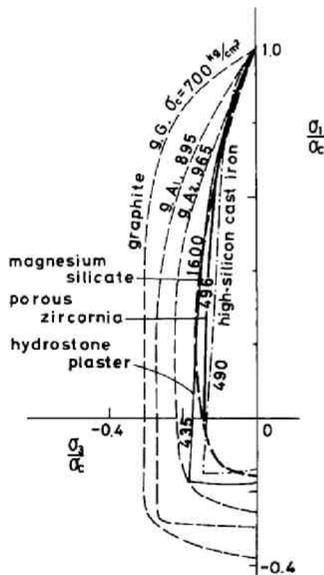


Fig. 2.2.37 Collected results of biaxial compression-tension and tension-tension tests.

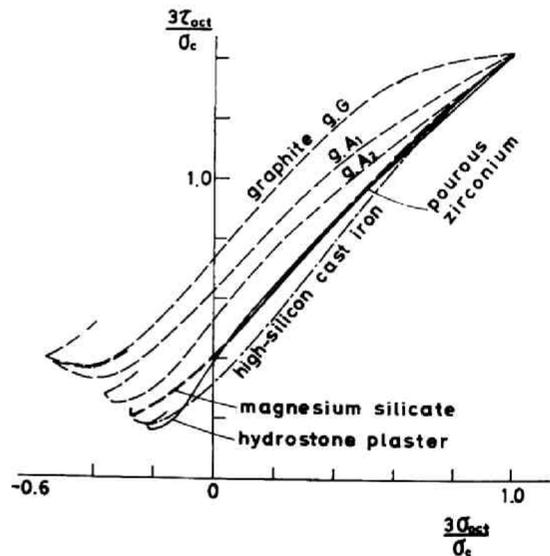


Fig. 2.2.38 Collected results biaxial compression-tension and tension-tension tests expressed in the octahedral stress plane.

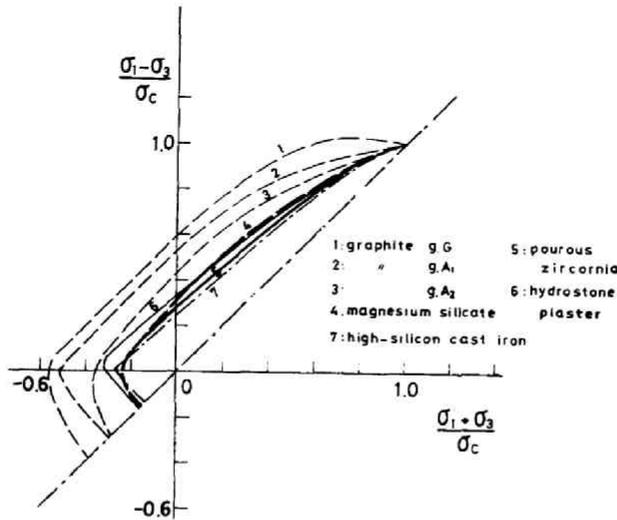


Fig. 2.2.39 Collected results of biaxial compression-tension and tension-tension tests expressed in terms of the sum and the difference of the maximum and the minimum stresses.

## 2.6 おわりに

本章では、巨視的な立場から等方・均質岩質材料の破壊条件を実験的に求め、これを基に第1部第2章で推定した破壊規準の検証を試みた。この結果特に圧縮域での破壊に関して明らかとなった諸点を再記する。

- a) 第1部第2章で推定した破壊規準(曲面)は、全般的に実験的に求められた条件とよく合致する。一般的な傾向としては、脆性度の高い材料ほど、静水圧増加に伴う破壊曲面の開きが大きく、また構造組織の複雑なものほど、曲面の開きは小さくなるようである。
- b) 等圧面による破壊曲面の切り口曲線は、正三角形よりやや膨らんだものとなる。しかし、この形状は個々の材料によって若干異なる。
- c) 破壊曲面は、静水圧増加につれてほぼ等方的に膨脹する。
- d) 破壊開始曲面は、終局破壊曲面内に完全に含まれる。破壊開始から、終局破壊に至る過程は材料によって異なる。

なお、引張応力域をも含む一般的な多軸応力状態での破壊実験の資料はなく、この領域での破壊規準の検証は行なえないが、圧縮-引張試験結果から推定して、第1部第2章で推定した破壊規準は、この領域の破壊特性をも十分表わしていると考えられる。

## 第 3 章 異方性岩質材料ならびに異方性系の破壊基準 に関する基礎的実験

### 3.1 はじめに

堆積岩や広域変成作用を受けた岩石には、一般に卓越した層理や片理が見られ、また大きな規模で眺めると、等方・均質に近い岩石から成る岩盤(系)においても、一般に節理やき裂、あるいは断層などが存在しているのが普通である。これら層理や片理、あるいは節理、き裂、断層などは力学的に見ると全て不連続な弱面ないし弱層を形成しており、その結果これらを含む岩石あるいはその系は異方性挙動を呈し、強度にも異方性特性が現われることは広く知られている。

第 1 部第 3 章では、異方性強度の特性を簡単なモデルに基づいて検討し、一般的な異方性破壊規準は 3 主応力空間内の合成曲面として表わされるとの推論を得、その概形についても検討した。さらに第 II 部第 1 章では、単一スリットあるいはインクルージョン・モデル、一直線状、並打および千鳥型スリットおよびインクルージョン群モデルなど簡単な異方性モデルについて、き裂の発生、伝播から終局破壊に至るまでの過程を実験的に検討した。これらの結果は、第 1 部 3.2 で与えた 2 次元異方性破壊規準の妥当性を示してはいるが、この破壊規準を全面的に容認するにはまだ不十分である。特に、実在の異方性および層状材料(体)などに対する破壊規準と破壊機構に関しては実験的な検証を必要とし、また、一般的な応力状態に対しても、適用性をさらに検討する必要がある。しかしながら、異方性岩質材料および系という表現は極めて広範囲な材料ないし系を含み、これらを全て包含するような一般的な検証を行なうことは容易ではない。

本章では、特に異方性の卓越した岩石、例えば片麻岩とか結晶片岩、人工的に作製した弱面ないし弱層を含む岩盤(系)多層モデル、多数の規則的なスリットないしインクルージョンを含む岩盤系モデルなどについて破壊規準を求め、第 1 部第 3 章で推定した異方性破壊規準の妥当性を検討することにする。

3.2 ではモデル供試体の作製について、また、3.3 では、試験装置、方法、条件などについて略述し、最後に、3.4 でこれら個々のモデルについて破壊規準を求め、推定した破壊規準と比較検討する。なお、本章の一部は既に発表してある<sup>1)</sup>ので参照されたい。

### 3.2 モデル供試体の作製

#### 3.2.1 岩石供試体(緑泥片岩)

別子産の緑泥片岩塊からコア・ボーリングにより  $\phi 30$  mm の円柱を抜き取り、長さ約 60 mm に切断して、切断面をターン・テーブルを用いて研磨して円柱供試体を作製した。特に、供試体軸と端面は垂直となるように、また端面は平行かつ平滑となるように充分注意を払った。層理面の傾きは、供試体軸から計って  $0^{\circ} \sim 90^{\circ}$  まで種々に変化させた。

### 3.2.2 スリットおよびインクルージョン・モデル供試体

第1章で述べたスリットおよびインクルージョン・モデル供試体の他に、モルタル（重量配合比水：セメント：砂＝0.6：1.0：2.0）をマトリックスとして幅10<sup>mm</sup>，厚さ0.5<sup>mm</sup>の平行ならびに千鳥型のスリット群を含むモデル供試体を作製した。供試体の作製方法，養生等は，1.2.1で述べたのと同様である。後者のモデル供試体は材令28日で試験に供した。なお，供試体の寸法諸元は，Fig. 2.3.3および2.3.4に併示した。

### 3.2.3 単一不連続面を含むモデル供試体

前述の均質なモルタル供試体中に単一の不連続面（打ち継ぎ面）を含むようなモデル供試体を作製した。供試体軸から或る傾きを成すように打ち継ぎ面を定め，先ず供試体の片側のみを打設し，硬化後翌日残りの部分を打ち継ぐことにした。脱型，養生等は前述の場合と同様である。材令約28日で，一軸，二軸および三軸圧縮試験に供した。

### 3.2.4 層状体モデル供試体

前述のモルタルをマトリックスとし，その中に中心間隔が20<sup>mm</sup>となるように平行な弱層（厚さ約1.5<sup>mm</sup>～8<sup>mm</sup>）を含むモデル供試体10.5<sup>cm</sup>×10.5<sup>cm</sup>×10.5<sup>cm</sup>立方供試体，ならびに21<sup>cm</sup>×21<sup>cm</sup>×5<sup>cm</sup>の平板供試体を作製した。弱層部分には，フライアッシュ・セメントを用いた。各材料の配合および特性をTable 2.3.1に示す。

Table 2.3.1 Mechanical properties of layer model materials.

Material	Mix proportion	Young's modulus (kg/cm <sup>2</sup> )	Poisson's ratio	Compr. strength (kg/cm <sup>2</sup> )	Tens. strength (kg/cm <sup>2</sup> )
Matrix, Mortar	C: W: S=1:0.4:1	$2.2 \times 10^5$	0.22	470	
Layer A	C: W: FA=1:1.8:2	$2.8 \times 10^4$	0.30	47.5	19.3
B	=1:1:1	$5.5 \times 10^4$	0.24	147	48.2

供試体の作製は，スリット・モデルの場合と同様に行ない，スリット形成後直ちにフライアッシュ・セメント・ミルクを注入充填した。脱型，養生等は前述の場合と同様である。試験材令は立方供試体では28日，平板供試体では14日とした。前者は，一軸，二軸および三軸圧縮試験に，後者は一軸および二軸圧縮試験に適用した。なお，供試体諸元はFig. 2.3.9に併示した。

### 3.3 試験装置と試験方法

試験には、リレー型万能試験ならびに三軸万能試験装置（第Ⅱ部、2.2参照）を用いた。試験には、加圧盤と供試体間の摩擦を減少させるよう努め、シリコン・グリースを塗布した薄いゴムシートを使用した。減摩効果に関しては、第Ⅱ部2.4.1.を参照されたい。なお、他の試験条件、寸法等は全て第Ⅱ部2.4に準じるものとする。

一軸、二軸、三軸試験においては、層理、スリットおよび弱層の傾きは、常に $\sigma_1$ 方向から計るものとし、また中間主応力 $\sigma_2$ は常に、層理、スリットおよび弱層面内（奥行き方向）にあるものとする。なお、二軸、三軸圧縮試験で、荷重は或る一定の大きさまで静水圧線に沿って増加させた後、 $\sigma_2 = \sigma_3$ はそのまま保持し、 $\sigma_1$ のみを増加させるような定順序载荷によった。

### 3.4 試験結果とその考察

#### 3.4.1 岩石供試体の試験結果とその考察

一軸圧縮試験は、供試体側面に貼布した4枚のストレイン・ゲージでチェックしながら偏心のないように特に注意して行なった。試験結果は、層理面の傾角 $\theta$ を横軸に、破壊応力を無次元化して縦軸に取り、拘束圧をパラメーターとして、今までに知られている資料<sup>2~7)</sup>と共にFig. 2-3-1に示した。異方性岩石に関する実験結果は極めて乏しく、ここに示した数種の岩石に関するもの以外は見当たらないようである。

岩石の種類によって、強度特性は相当異なっているけれども、異方性強度の全体的な傾向としては、拘束圧が低ければ層理面傾角が約 $30^\circ$ で最小となり、拘束圧が増加するにつれて最小強度を示す傾角は若干次第に大きくなり約 $30^\circ$ 程度になるようである。ここに示した岩石に関しては、緑泥片岩を除き層理面の傾角が $0^\circ$ および $90^\circ$ のときの破壊強度は同程度である。しかし岩石によっては、特に層理面が発達しているような岩石では、後者の場合の破壊強度が前者の場合の強度より大きくなるも稀ではない。

拘束圧の増加は、破壊強度曲線の形状をあまり変えることなく、ほぼ平行に、あるいは若干右上方に移動させるような結果となって現われる。すなわち、拘束圧増加に伴って、ほぼ一様な強度が付加されることになる。これらの実験結果は、第Ⅰ部3.2で推定した2次元異方性破壊規準の妥当性を示していると考えられる。

なお、三軸試験結果の1例<sup>8)</sup>を、直截曲線として示せばFig. 2-3-2のようになる。この形状は、第Ⅰ部3.3-1で推定したものとよく一致している。

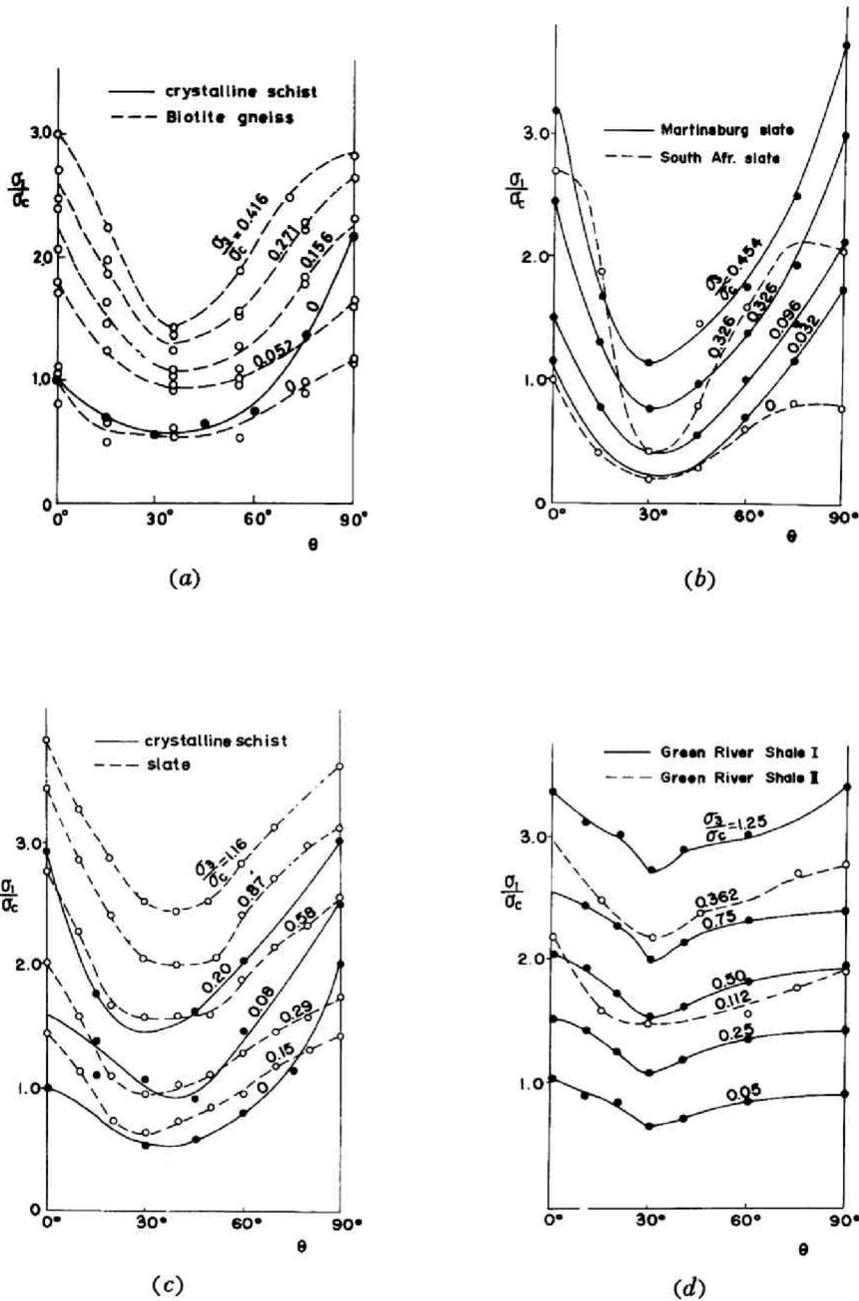


Fig. 2.3.1 Collected results of tests on anisotropic rocks. (Biotite gneiss by Jaeger<sup>7)</sup>, Martinsburg slate by Donath<sup>2)</sup>, south Afr. slate by Hoek<sup>3)</sup>, crystalline schist in (c) by Akai et al<sup>6)</sup>, slate by Donath<sup>2)</sup>, and Green River shale by McLamore and Gray<sup>4)</sup>).

### 3.4.2 スリットおよびインクルージョン モデル供試体の試験結果とその考 察

単一スリットあるいはインクルージョンからのき裂の発生と伝播に関しては、第Ⅰ部第3章および第Ⅱ部第1章で解析的ならびに実験的に検討した。これらは、異方性材料のモデルとして最も簡単なものと考えることができる。単一スリットおよびインクルージョンの場合について実験的に得られた破壊開始強度特性 (Fig. 2.1.6 および 2.1.9 参照) は、第Ⅰ部 3.2 で推定した 2次元異方性破壊規準の特性をよく示している。また、多数スリットならびにインクルージョンの場合 (Fig. 2.1.21 および 2.1.23 参照) についても、ほぼ同様なことが認められる。

終局破壊強度に関しては、終局破壊に至る過程がき裂間の相互干渉を含む極めて複雑な過程であることを考えると、単一スリットないしインクルージョン・モデルから推定することは意味がないので、以下では少なくとも数個以上のスリットないしインクルージョンを含むモデルを対象に議論を進めることにする。

実験的に求められた一軸破壊強度とスリットあるいはインクルージョン傾角との関係を総括して Fig. 2.3.3 に示す。スリット・モデルでは、スリット傾角が大きくなると一般に破壊強度が低下するのに反して、インクルージョン・モデルでは、傾角が約  $45^\circ$  で最小破壊強度となり、ほぼこの角度を対称軸として傾角が増減すれば強度は増加する。また、インクルージョン・モデルでは、傾角が  $0^\circ$  の場合と  $90^\circ$  の場合との強度差はほとんどなくなっている。

Fig. 2-3-4 には、モルタルを用いた供試体の終局破壊強度特性を示した。スリット数が多くなると、並列型、千鳥型いずれの場合にも、試験結果はスリット傾角が  $45^\circ \sim 50^\circ$  を境として、両側で異なる破壊曲線に従うことを示している。このことは、供試体の破壊機構がこの角度を境として、両側で異なっていることを示唆している。事実、終局破壊は、スリット傾角が小さい範囲 ( $0 \leq \theta \leq 45^\circ$ ) では、スリット先端から発生したき裂が隣接スリットと連結し、ほぼこのスリット面に沿ってすべりに近い破壊が生じるのに対し、傾角が大きい範囲 ( $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ) では、スリット先端からスリットとほぼ直角方向に発生したき裂が成長し連結して仮想の弱面を形成し、ほぼこれに沿って、しかし複雑な破壊が生じることが観察される。この結果は、傾角が大きい範囲では、並行型スリットの場合と千鳥型スリットの場合では若干異なるようであるが、終局破壊に及ぼす影響には大差がないであろう。いずれにしても多数スリット供試体の破壊はスリットの傾角によって異なる2つの破壊機構に支配されることはほぼ確実であ

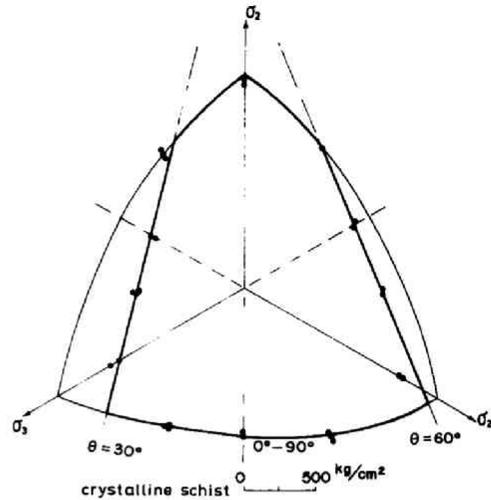
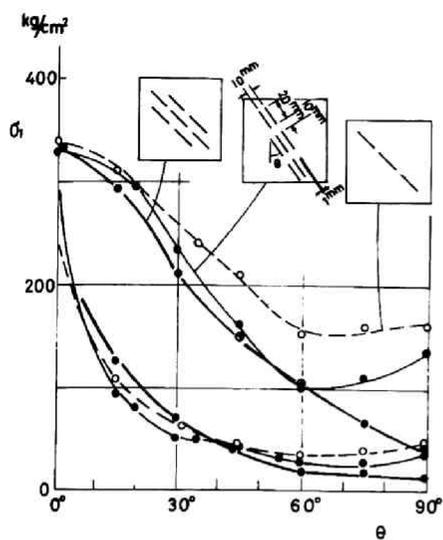
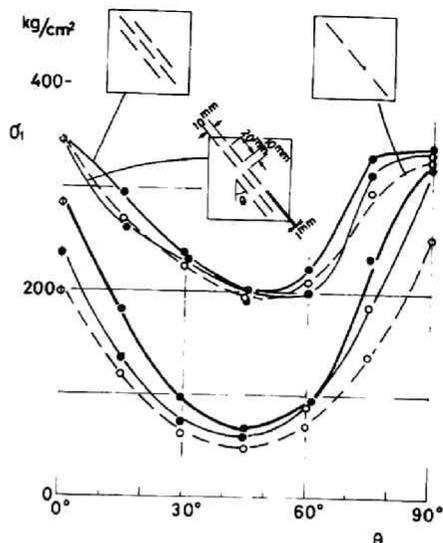


Fig. 2.3.2 Test results of crystalline schist plotted on an equi-pressure plane (Akai, Yamamoto and Arioka<sup>6)</sup>).

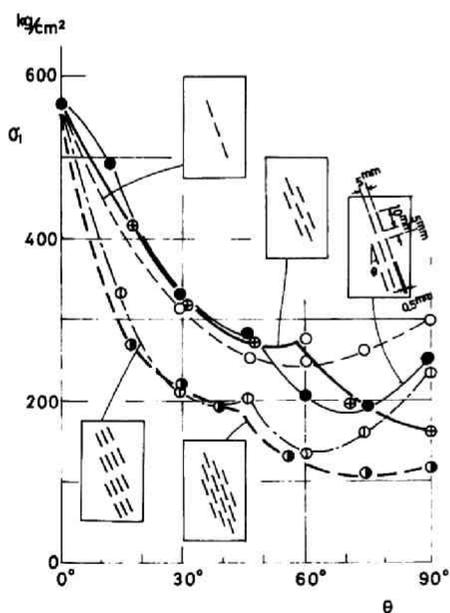


(a)

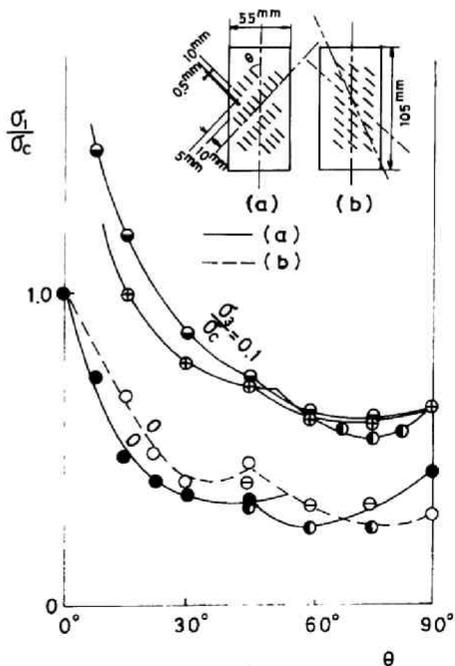


(b)

Fig. 2.3.3 Collected results of tests on flyash cement paste models containing systems of slits (a) and inclusions (b).



(a)



(b)

Fig. 2.3.4 Collected results of tests on mortar models containing systems of slits.

る。因みに、破壊面が荷重方向から成す角度 $\beta$ とスリット傾角 $\theta$ との関係を求めてみると Fig.2.3.5 のようになる。この図を見ると、傾角  $45^\circ$  を境として、破壊面の方向がはっきりと区別されていることが分る。

### 3.4.3 単一不連続面を含むモデル供試体の試験結果<sup>9)</sup>とその考察

単一不連続面の挙動は、その面の見かけの摩擦係数に支配されることが予想される。試験に先立って種々の組み合わせ応力状態に対する摩擦係数を求めてみると、広範な応力状態に対してほぼ一定値  $0.86$  を取ることが分った。

二軸圧縮試験の結果を Fig. 2.3.6 に示す。ここに  $\theta$  は、 $\sigma_1$  方向から計った不連続面の傾きである。このモデルの破壊強度は、不連続面が存在しない場合の破壊曲線と、 $\theta = 30^\circ$  あるいは  $45^\circ$  の場合のすべり破壊を表わす直線、すなわち、 $\sigma_1 = a\sigma_2$  ( $\sigma_1 > \sigma_2$ ,  $a = \text{const.} > 0$ ) から合成されたものとなっていることが分る。

三軸圧縮試験結果を Fig. 2.3.7 に示す。ここでは、 $\sigma_{oct} - \tau_{oct}$  の関係で表示した。細線は不連続面を含まない供試体の二軸および三軸圧縮試験を示しており、不連続面を含む供試体の強度は、この曲線と不連続面の特性を表わす直線とから合成して得られる太線で示したものとなる。なお、この直線は、拘束圧があまり大きくない範囲では、不連続面の摩擦係数を用いて容易に表わすことができる。

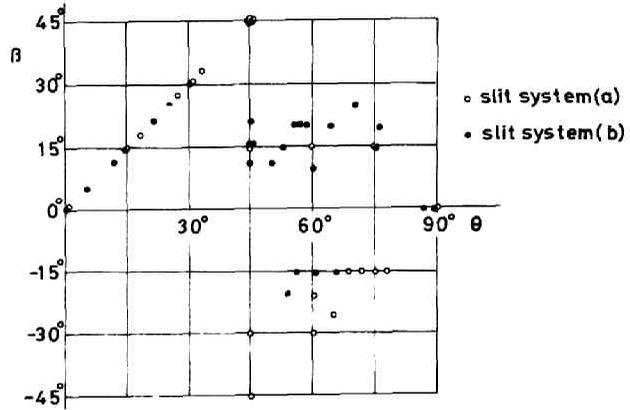


Fig. 2.3.5 Direction of primary fracture in the model containing slit systems.

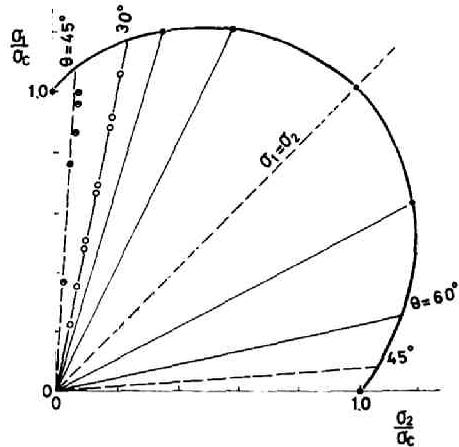


Fig. 2.3.6 Results of biaxial compression tests on a model containing a single plane of discontinuity.

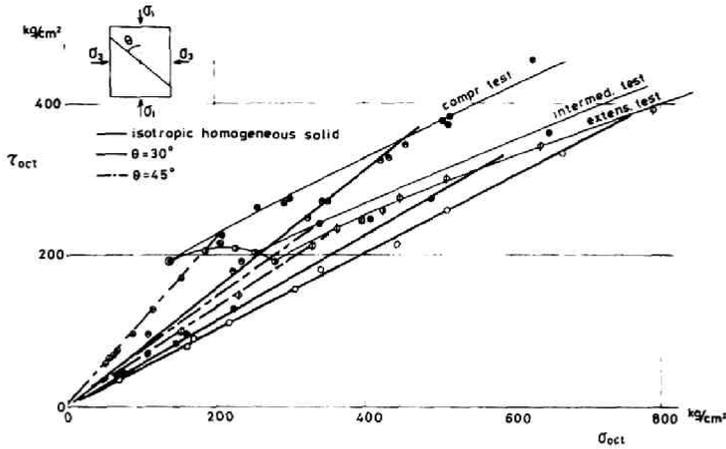


Fig. 2.3.7 Results of biaxial and triaxial test on a model containing a single plane of discontinuity.

$\sigma_{oct} - \tau_{oct}$  の関係で表わした規準は、第1部2.5で議論したところにより、容易に Rendulic の応力曲線とか直載曲線に変換して表わすこともできる。直載曲線の例を Fig. 2.3.8 に示す。この図と Fig. 2.3.2 を比較せよ。この概形は、第1部3.3で与えたものと一致している。

#### 3.4.4 層状体モデル供試体の試験結果<sup>10)</sup>とその考察

試験結果を Fig. 2.3.9 に示す。また、Fig. 2.3.10 には弱層としてAおよびBを用いた場合の結果を比較して示す。これらの図から明らかなように、層状体の終局破壊強度は弱層の傾きが大きく支配され、また、側方からの拘束圧増加に伴って増加することが分る。この層状体の最小強度は、層の傾角が $30^\circ \sim 40^\circ$ で生じ、その値は傾角 $0^\circ$ の場合に比して著しく弱くなる。側方拘束がない場合には、最小強度は傾角 $0^\circ$ の場合の強度の $1/10$ 程度にまで減少する。傾角が $0^\circ$ の場合の強度と $90^\circ$ の場合の強度とを比較すると、拘束圧の小さい間は前者の方が一般に大きい

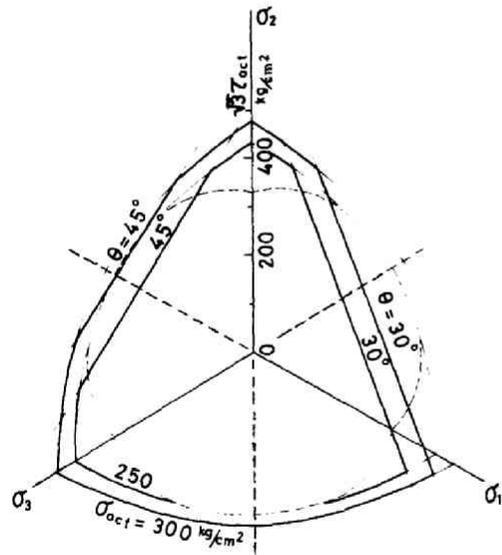


Fig. 2.3.8 Results of triaxial test on a model containing a single plane of discontinuity.

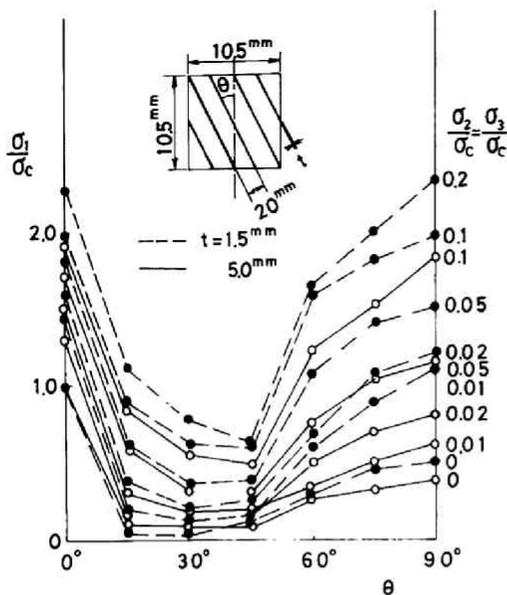


Fig. 2.3.9 Results of tests on models containing a system of parallel weak layers ; effects of the thickness of the weak layer.

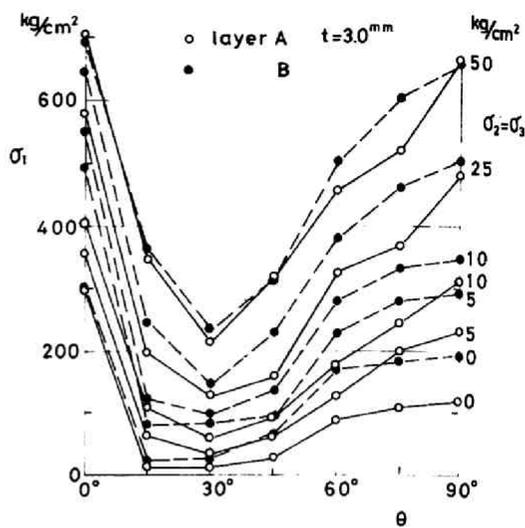


Fig. 2.3.10 Results of tests on models containing a system of parallel weak layer ; effects of the strength of the layer.

が、拘束圧が増加するにつれて両者はほぼ同程度にまでなる。この傾向は、弱層の厚さが薄いもの程顕著に現われる。

さらに、これらの図より弱層の厚さが薄いものほど破壊強度は大きく、弱層の強度の高いモデル程破壊強度は大きいことが分る。以上のことから、層状体の破壊は、弱層の傾きはもちろん、その強さおよび厚さにも影響されることが分る。

実際の破壊は、破壊過程の観察により、大きく分けて次の3つの異なった機構に支配されているようである。傾角が、 $15^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$ の範囲では弱層の破壊が打継ぎ面で先行し、これに起因する滑り破壊機構が卓越し、 $0^\circ \leq \theta \leq 15^\circ$ では弱層はあまり破壊されず強層が平行な柱状体として作用し、この柱状体の破壊によって系全体の終局破壊に至るようであり、また、 $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲では弱層は完全に破壊されて無数のき裂を生じ、これに誘発されて強層内に最大荷重方向にほぼ平行な多数のき裂が発生し、このき裂網と弱層との相互作用によって終局破壊に至るようである。また、特に傾角が $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ の範囲では、拘束圧が高くなるにつれて弱層の破壊は著しくなり、強層の間にパッキングされた状態あるいは場合によっては弱層が押し出されるような状態が生じ、このために強層内にき裂が発生する時期が遅れ、返って系全体の強度は高くなるようである。弱層の厚さが厚い程、このパッキング効果は弱くなり、弱層は緩く締った状態で破壊されるので、厚い弱層を含む層状体ほど強度は弱く、拘束圧増加に伴う強度増加

も少ないことになる。拘束圧が高くなるほど、強層内にき裂が発生する時期が遅れる理由は、強層および弱層材料に及ぼす拘束圧の影響、すなわち強い材料ほど拘束圧に伴う強度増加が著しいことから明らかであろう。これは、また強い弱層を含む層状体ほど強度が高く、かつ拘束圧が高くなるにつれて層の強度自体の影響は小さくなる (Fig. 2.3.10 参照) ことを見事に説明しているようである。

さて、層状体の破壊は少なくとも上述の3つの異なった破壊機構を含んでおり、これに呼応した3つの破壊規準が存在する筈である。したがって、第1部3.2で推論したように、層状体全体としての破壊は、これら3つの異なった破壊規準を合成した規準として求められることになる。多数スリット・モデルの場合ほど顕著ではないが、この傾向は伺えるようである。

次に、すべり破壊が生じる範囲について検討してみよう。そのためには先ず、破壊時の弱層の見かけのせん断抵抗と直応力との関係を求めておく必要がある。弱層としてA材料を用いて行なった二面せん断試験結果を Fig. 2.3.11 に示す。  $t=0$  (弱層の厚さが零) は、強層の材料を単に重ねて試験した場合を意味している。なお、図示の結果は、 $W$  と  $P$  の値を種々に変化させて求めた結果であり、履歴の影響が考えられるが、実際に検証してみたところその影響はほとんど見られなかった (Fig. 2.3.12 参照)。したがって、近似的には、見かけの摩擦係数、すなわちせん断応力と直応力との比は、履歴によらず一定と考え

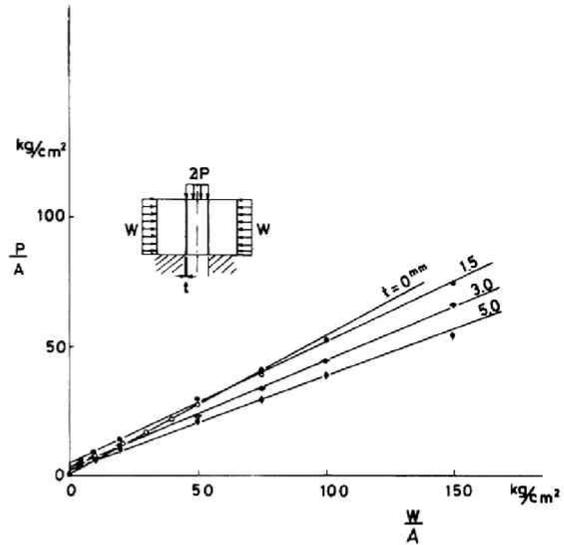


Fig. 2.3.11 Apparent frictional characteristics of the layer material ; effects of the thickness of the layer.

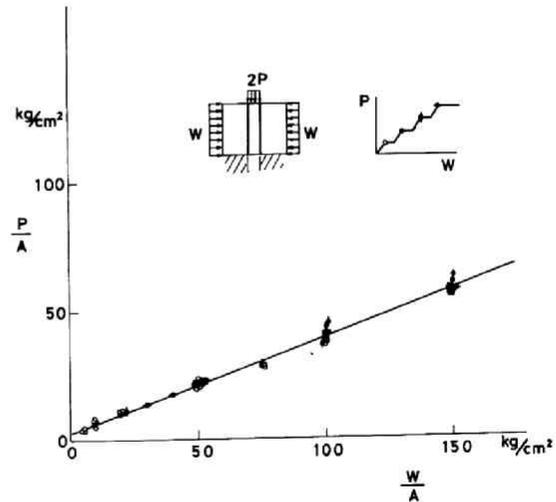


Fig. 2.3.12 Apparent frictional characteristics of the layer material ; effects of stress level.

て差しつかえない。

さて、次にこの図から得られる直線と、弱層を含む層状体の試験結果を比較してみよう。Fig. 2.3.13にこれを示す。これより弱層の傾角が  $15^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$  の範囲では、すべりに必要とするせん断応力以上のせん断応力が作用していることが分る。すなわち、この傾角の範囲ではすべりによる破壊が生じると考えられる。この推論は、既に述べた観察結果と一致している。

次に、二軸圧縮試験結果を Fig. 2.3.14 に示す。応力レベルを高くすると、自由面に平行な多数の薄片状に破壊するが、これはここでは対象とせず、層状体の特性を捉える意味で低荷重レベルの破壊のみを考えた。 $\sigma_1 > \sigma_2$  の場合には傾角が  $30^\circ$ 、 $45^\circ$ 、 $15^\circ$  および  $60^\circ$  の順序で次第にすべり破壊を起しにくくなっていることが分る。傾角が更に大きいか、あるいは小さければ、弱層の影響は現われない。 $\sigma_2 > \sigma_1$  の場合には、傾角が丁度  $90^\circ - \theta$  としたものが、 $\sigma_1 > \sigma_2$  の傾角  $\theta$  の場合に相当する。これは、傾角を  $\sigma_1$  方向から計っていることによるためである。この結果と単一不連続面を含むモデルの試験結果とを比較されたい。両者共ほぼ同じ傾向を示していることが分る。

Fig. 2.3.15は、三軸圧縮試験の結果を  $\sigma_{oc1} - \tau_{oc1}$  座標に図示したものである。細線は弱層を含まない供試体の試験結果であり、太線は弱層

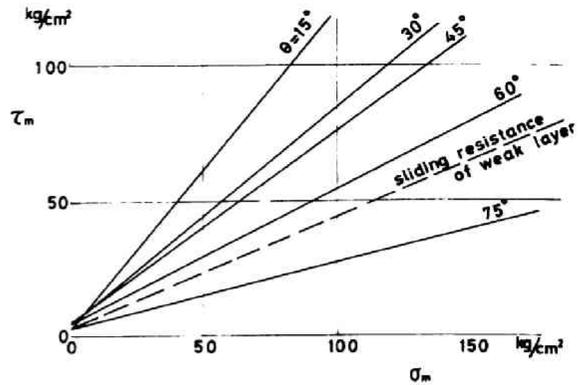


Fig. 2.3.13 Results of tests on models containing a system of parallel weak layers plotted on the mean stress-maximum shear stress plane.

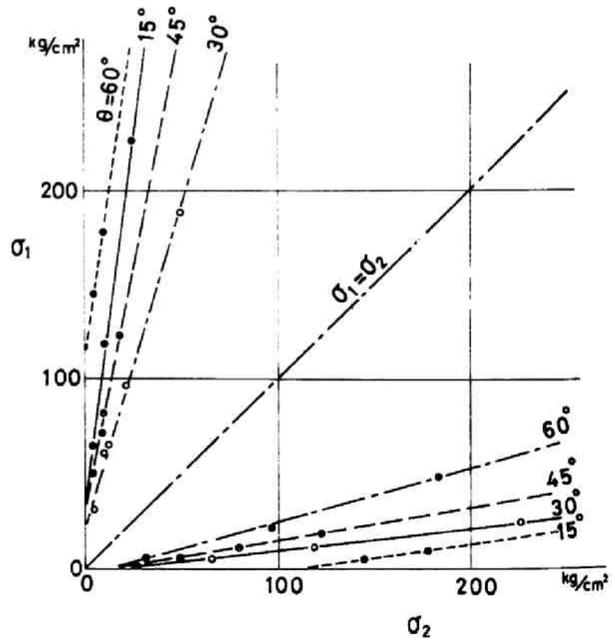


Fig. 2.3.14 Results of tests on models containing a system of parallel weak layers under biaxial compression.

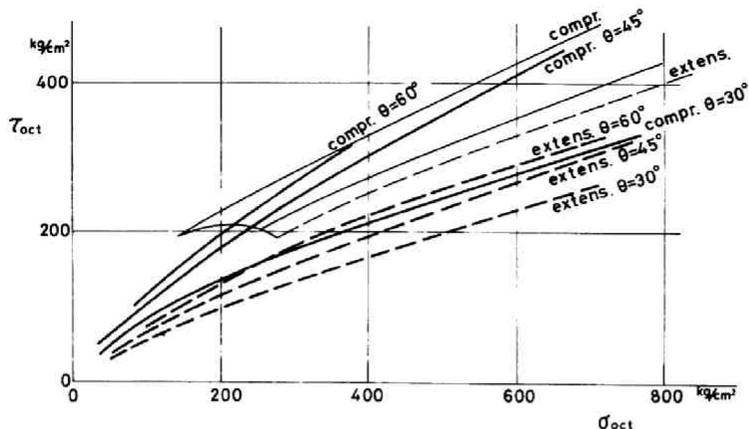


Fig. 2.3.15 Results of biaxial and triaxial tests on models containing a system of parallel weak layers expressed in the octahedral stress plane.

を含むモデル供試体の試験結果である。この図より弱層の影響は極めて顕著であることが分る。試験結果を Rendulic 応力面上に表わせば Fig. 2.3.16 を得る。また、直截曲線は、Fig. 2.3.17 のようになる。細線はいずれの場合にも弱層を含まない供試体の試験結果を表わす。

これらより、静水圧が小さい間は、層の傾角如何に拘らず層に起因する破壊が容易に生じるが、静水圧が増加するにつれて、弱層の影響が次第に弱くなり、特に圧縮試験では著しく、例えば、 $\sigma_{oct} \geq 400 \text{ kg/cm}^2$ 、傾角が  $60^\circ$  の供試体では弱層の効果は全くなくなることが分る。しかし、また、層の傾角が  $15^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$  の範囲では、静水圧が増加しても滑りによる破壊しか生じないことも明らかに読み取れる。これらは全て既に述べた観察結果とも一致していることを付言しておく。

以上実験的に求めた破壊条件は、第 I 部第 3 章で推定した破壊規準と極めてよい一致を示すことが分る。

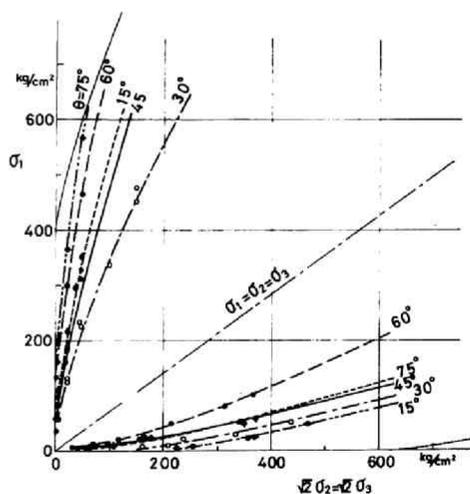


Fig. 2.3.16 Results of triaxial test on models containing a system of parallel weak layers expressed in the Rendulic stress plane.

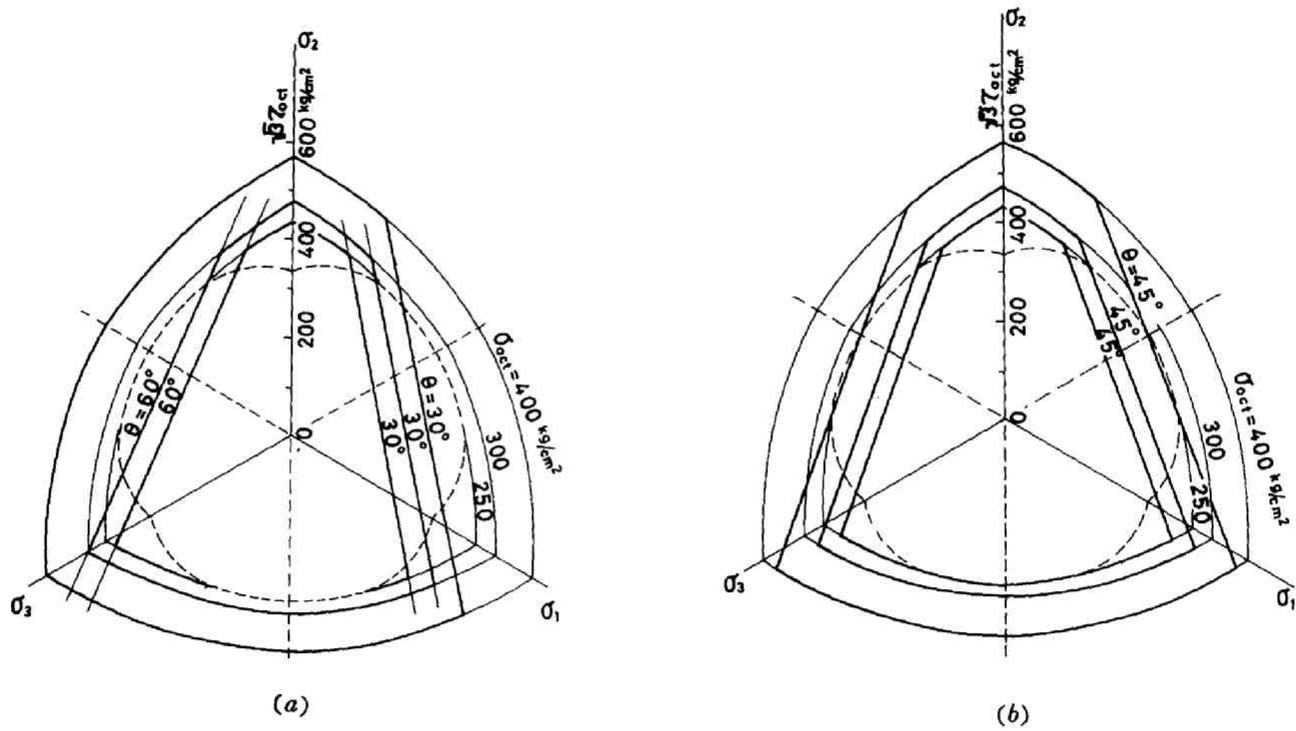


Fig. 2.3.17 Results of triaxial test on models containing a system of parallel weak layers expressed in equipressure planes.

### 3.5 おわりに

本章では、異方性岩質材料ならびにそれより成る系の破壊規準を岩石ならびに異方性モデル供試体を用いて実験的に求め、第Ⅰ部第3章で推定したものと比較、検討した。実験的に試みたものは全て圧縮域のものであるが、試験結果は、第Ⅰ部第3章で推定した異方性破壊規準と全般的によく一致することが分った。

一般に異方性破壊強度は、層理面ないし弱面の傾角が最大圧縮力方向から  $30^{\circ} \sim 40^{\circ}$  のときに最小となり、傾角がこれより大きく、あるいは小さくなるにつれて次第に増加する。岩石では、傾角が  $0^{\circ}$  および  $90^{\circ}$  の場合の破壊強度はほぼ同じとなり、また、拘束圧が増加しても破壊強度曲線の形状は殆んど変わらず、ただほぼ一様な強度が付加される結果となる。これに対して、岩盤系モデルでは、モデルの特性により、破壊強度曲線の形状も複雑な合成曲線となるのが普通であり、また拘束圧の効果もモデルによりまた弱面の傾角によって異なってくるが、一般に言って、拘束圧が高くなればなる程破壊強度に及ぼす弱面の影響は弱まってくるようである。弱面の傾角が  $15^{\circ} \sim 45^{\circ}$  の岩盤系モデルではすべりに起因する破壊が生じることに注意しなければならない。

以上、第Ⅱ部では、実験的に求めた結果を第Ⅰ部で推論した破壊規準と比較しながら検討して来た。この結果、第Ⅰ部で推論した破壊規準は実在の岩質材料ならびに岩盤系の破壊強度を適確に表わし、かつ十分一般的であることが明らかとなった。また、ここで実験的に求めた破壊規準は、一般の岩質材料の破壊強度特性を推定するのにも十分有効であろう。特に、個々の材料の破壊規準が必要となる際には、第Ⅰ部で推定した一般的な破壊規準(曲面)の形状と、第Ⅱ部で述べた破壊規準(曲面)の例は極めて有用であろう。



### 第Ⅲ部 岩質材料の代表的な試験法における 供試体内の応力分布の検討



## 第 1 章 供試体内の応力分布の必要性

材料の特性を調べる目的で行なう試験法においては、目的とする特性のみを選び出すことができ、かつできるだけ簡単な方法が望ましい。材料の力学的な特性を調べるためには、従って、できるだけ簡単な応力分布となり、かつ変形ないしひずみの計測も容易であることが望まれる。このような点から、一様応力状態 (homogeneous state of stress) での試験が最も理想的であろう。しかしながら、現実の試験法においては、力のみを加える試験、例えば油、空気などを用いる方法では、一般的な三主応力の大きさの異なる一様応力状態を生ぜしめることは容易ではなく、また、大容量のものを製作することも困難である。一般の岩質材料は、結晶とか異質物質が結合ないし混合して出来ているのが普通であり、従って、これらの局所的な影響を排除する意味でも、かなり大きい供試体が要求される。従って、このような加圧方法は岩質材料の試験では必ずしも十分ではない。このような理由から、殆どどの試験機は加圧盤による変形 (固体) 負荷の形態を取っている (いわゆる三軸試験機においても一軸は少なくとも変形負荷である)。

一般に圧縮変形負荷の場合には、供試体と端面内の摩擦が存在するので、供試体内の応力状態は端部と中央部、また境界部とでは異なっている (後述) ので一様応力状態とは言えない。また、引張試験の場合には加圧盤に供試体を接着するので応力分布は一様状態ではなくなる。あるいは、また特に岩質材料試験としてよく用いられる割裂試験あるいはインデンテーション試験の供試体内の応力分布は、もちろん一様応力状態にはない。しかしながら、我々は、これらの試験法より材料特性を求めなければならないから、できるだけ一様応力状態に近づける試験を行なうよう改良すると共に、これらの試験による供試体内の応力分布をも正確に求めておくことが必要である。

実際の材料試験においては、供試体の応力分布は、負荷方法に伴う拘束の他に材料特性、すなわち、弾性係数、Poisson比ならびに材料の構造特性そのものの影響も受ける。ここでは、圧縮試験、割裂試験ならびにインデンテーション試験により生じる供試体内の応力分布を、材料の構造特性ならびに加圧盤の端面拘束の影響を中心にして議論してみよう。材料の構造特性を示すモデルとしては、以下に述べるカップル・ストレス・モデル (couple-stress model) を用いることにする。

まず、第2章では、線形カップル・ストレス弾性理論ならびに線形マイクロポラー弾性理論の概要を述べ、第3章では、一軸圧縮による直方体供試体内の応力分布を、Fourier級数展開法ならびに有限要素法によって求め、加圧盤による供試体端面拘束の影響、カップル・ストレスの影響ならびにPoisson比の影響について議論した。第4章では、割裂試験ならびにリング試験の際に生じる供試体内の応力分布を、第一種の境界値問題と近似して、Fourier-Bessel展開により求め、カップル・ストレス、載荷幅ならびにPoisson比の影響について検討し、第5章では、インデンテーション試験により生じる直方体供試体内の応力分布をFourier級数展開法によって求め、カップル・ストレス、載荷幅ならびにPoisson比の影響を議論した。

第6章では、異方性線形カップル・ストレス弾性理論を誘導し、これを用いて一軸圧縮ならびにインデンテーションを受ける供試体の応力分布を差分法により求め、異方性の影響ならびに異方性カップル・ストレスの影響について検討した。

## 第 2 章 カップル・ストレス理論の概要

### 2.1 はじめに

従来の連続体力学（古典連続体力学）は、その対象とする材料（物質）内の全ての部分に対して、(i)密度の一様連続性、および(ii)運動法則ならびに構成方程式の同一性という基本仮説の上に構成されている。従って、この連続体力学の数学モデルでは、材料の幾何学的特性を表わすものは、材料（物質）粒子の位置だけである。しかしながら、実際の材料は、種々の形状特性、例えば、粒状ないし結晶の形状、それらの規則的ないし不規則的な配列、分布を示す複雑な結合ないし混合状態が見られるのが普通である。従来の連続体力学では、これらの諸点は全て無視されており、材料の力学挙動を正確に説明することができない場合もある。従って、材料の構成要素の形状特性までも考慮した力学が必要となって来る。

構成要素の幾何学的形状および局所変形までも平均的にではあるが考慮した連続体力学は、総称して一般連続体力学 (mechanics of generalized continua) と呼ばれている<sup>1)</sup>。この範疇に含まれるものは極めて多岐にわたり、局所変形と幾何学的形状の数学モデルの差により、種々のアプローチが試みられ、種々の理論が導かれている。代表的なものとしては、マルチ・ポラー (multipolar) 理論 (Green & Rivlin<sup>2)</sup>)、カップル・ストレス (Couple-stress) 理論 (Toupin<sup>3)</sup>, Mindlin & Tiersten<sup>4)</sup>, Aero & Kuvshinskii<sup>5)</sup>), マイクロポラー (micropolar) 理論 (Kuvshinskii & Aero<sup>6)</sup>, Eringen & Suhubi<sup>7)</sup>, Eringen<sup>8)</sup>, Palmov<sup>9)</sup>, Neuber<sup>10)</sup>) などがあげられる。

これらの理論は、材料の微視的影響を反映する反面、その適用範囲は材料組織に応じた極めて限定されたものとなる。また、数学的取り扱いも古典連続体力学に比べて相当複雑となる。これらの理論は、全体的な挙動を対象とするような場合には、二次的効果しか示さないかも知れないけれども、応力集中とか破壊などに関連した局所的な挙動を対象とする場合には、重要な意味をもってくる。

本章では、これらの理論のうち、最も簡単な線形弾性論、すなわち、カップル・ストレス弾性理論およびマイクロポラー弾性理論について略述する。なお、式の煩雑さを避けるために、一般的な式ではテンサーを用いることにする。

### 2.2 線形カップル・ストレス弾性理論

一般理論は文献 (5, 6, 11) にゆずり、以下では、平面ひずみ状態にある等方中央対称弾性体 (centrosymmetric elastic body) についてのみ記述する。基礎方程式は次のように与えられる。

#### i) ひずみ、回転、曲率と変位との関係

座標系を  $x^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) とし、変位、ひずみ、回転および曲率をそれぞれ  $u_\alpha$ ,  $d_{\alpha\beta}$ ,  $\omega^3$ ,  $\kappa_\alpha^5$  と記すと、これらの間には次の関係が成立する。

$$d_{\alpha\beta} = u_{(\alpha|\beta)} = \frac{1}{2} (u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (2.2.1)$$

$$\omega^3 = u_{[\beta|\alpha]} = \frac{1}{2} (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) \quad (2.2.2)$$

$$\kappa_a^3 = \omega^3|_{\alpha} \quad (2.2.3)$$

ここに  $u_{\alpha|\beta}$  は  $u_{\alpha}$  の  $x^{\beta}$  座標による共変微分を表わすものとし、( ) および [ ] はそれぞれ、対称および逆対称部分を意味するものとする。

## ii) 構成式

構成式は、4階の材料定数テンソール  $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$  および  $M^{\alpha\beta\gamma\delta}$  を用いて

$$\tau^{(\alpha\beta)} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} d_{\gamma\delta} \quad (2.2.4)$$

$$m^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta\gamma\delta} \kappa_{\gamma\delta} \quad (2.2.5)$$

と表わせる。添字に関しては総和規約を適用する。以下も同様である。ここに  $\tau^{\alpha\beta}$  および  $m^{\alpha\beta}$  は、それぞれ Cauchy 応力およびカップル ストレスを表わす。等方中央対称物体の場合には、 $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$  および  $M^{\alpha\beta\gamma\delta}$  はそれぞれ次のようになる。

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} = G \left[ g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \right] \quad (2.2.6)$$

$$M^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4 G \ell^2 g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} \quad (2.2.7)$$

ここに、 $G, \nu, \ell$  はそれぞれせん断弾性係数、Poisson比および材料定数(カップルに關係する定数)である。また  $g_{\alpha\beta}$  は基本計量テンソールであり、 $g^{\alpha\beta}$  は  $g_{\alpha\beta}$  の共役である。

平面ひずみ状態では、簡単になって、

$$d_{\alpha\beta} = \frac{1}{2G} \left[ \tau_{(\alpha\beta)} - \nu g_{\alpha\beta} \tau^{\gamma}_{\gamma} \right] \quad (2.2.8)$$

$$\kappa_{3a} = \frac{1}{4G\ell^2} m_{a3} \quad (2.2.9)$$

これらの式は、変位  $u_{\alpha}$  を用いて書き改めると、次のようにも表わせる。

$$\tau^{(\alpha\beta)} = G \left[ (u^{\alpha|\beta} + u^{\beta|\alpha}) + \frac{2\nu}{1-2\nu} g^{\alpha\beta} u^{\gamma}|_{\gamma} \right] \quad (2.2.10)$$

$$m^{\alpha 3} = 4 G \ell^2 \kappa^{3\alpha} = 4 G \ell^2 \omega^{3|\alpha} \quad (2.2.11)$$

或いは  $\tau_{\alpha\beta}$  は次のようにも書ける。

$$\begin{aligned} \tau_{\alpha\beta} = G \left[ u_{\alpha|\beta} + u_{\beta|\alpha} + \frac{2\nu}{1-2\nu} g_{\alpha\beta} u^{\gamma}{}_{|\gamma} - \sqrt{g} \ell^2 (u_{\beta|\alpha} - u_{\alpha|\beta}) \Big|_{\gamma}^{\gamma} \right] \\ - \frac{1}{2} \varepsilon_{3\alpha\beta} c^3 \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

ここに  $g = \det(g_{\alpha\beta})$  とし、 $\varepsilon_{3\alpha\beta}$  は交代テンサー (permutation tensor)、 $c^3$  は物体カップルとする (式 (2.2.14) 参照)。

### iii) 釣り合い方程式

釣り合い方程式は、

$$\tau^{\beta\alpha}{}_{|\beta} + f^{\alpha} = 0 \quad (2.2.13)$$

$$m^{\alpha 3}{}_{|\alpha} + \varepsilon^{3\alpha\beta} \tau_{\alpha\beta} + c^3 = 0 \quad (2.2.14)$$

と表わせる。ここに、 $f^{\alpha}$  は物体力を表わすものとする。

式 (2.2.13)、(2.2.14)、(2.2.10) および (2.2.11) を用いると、変位で表わした釣り合い式が次のように求められる。

$$\nabla^2 u^{\alpha} + \frac{1}{1-2\nu} u^{\beta}{}_{|\beta}{}^{\alpha} + \ell^2 \varepsilon^{3\alpha\beta} \varepsilon_{3\gamma\delta} \nabla^2 u^{\delta}{}_{|\beta}{}^{\gamma} + f^{\alpha} + \frac{1+\nu}{E} \varepsilon^{\alpha\beta 3} c_3{}_{|\beta} = 0 \quad (2.2.15)$$

ここに  $\nabla^2 \phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{g} g^{k\ell} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\ell}} \right)$  である。この式は、Navier の方程式を一般化したものである。

### iv) 適合条件式

適合条件式は、

$$\varepsilon^{3\alpha\beta} \varepsilon^{3\delta\gamma} d_{\beta\gamma}{}_{|\alpha\delta} = 0 \quad (2.2.16)$$

$$\varepsilon^{3\alpha\beta} \kappa_{3\alpha}{}_{|\beta} = 0 \quad (2.2.17)$$

と書ける。応力で表わせば、これらは次のようになる。

$$\varepsilon^{3\alpha\tau} \varepsilon^{3\beta\delta} \tau_{(\alpha\beta)}|_{\tau\delta} - \nu \nabla^2 \tau_{\tau}^{\tau} = 0 \quad (2.2.18)$$

$$\varepsilon^{3\alpha\beta} m_{3\alpha}|_{\beta} = 0 \quad (2.2.19)$$

$$m_{\alpha 3} = \varepsilon^{3\beta\tau} \tau_{(\alpha\tau)}|_{\beta} + \nu \varepsilon_{3\alpha\beta} \tau_{\tau}^{\tau}|^{\beta} \quad (2.2.20)$$

このうち、2つが独立である。

#### V) 応力関数

応力が次のような2つのポテンシャル関数  $\phi$  および  $\psi$  で表わされたとする。

$$\tau^{\alpha\beta} = \varepsilon^{3\alpha\tau} \varepsilon^{3\beta\delta} \phi|_{\tau\delta} + \varepsilon^{3\tau\alpha} \psi|_{\tau}^{\beta} \quad (2.2.21)$$

$$m_{\alpha 3} = \psi|_{\alpha} \quad (2.2.22)$$

この関数が、釣り合い方程式 (2.2.13) および (2.2.14) (但し簡単のために  $f^{\alpha} = 0, c^3 = 0$  とする) および適合条件式 (2.2.18) ~ (2.2.20) のうちの2つを満足するためには、 $\phi$  および  $\psi$  は次のような微分方程式を満さなければならないことが分る。

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (2.2.23)$$

$$(\ell^2 \nabla^2 - 1) \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.2.24)$$

$$(\ell^2 \nabla^2 - 1) \psi|_{\alpha} = 2\ell^2 (1-\nu) \varepsilon_{3\alpha\beta} g^{\beta\tau} \nabla^2 \phi|_{\tau} \quad (2.2.25)$$

$\phi$  は古典弾性学において Airy の応力関数として知られているものである。

2次元線形カップル・ストレス弾性問題の解は、式 (2.2.23) ~ (2.2.25) 或いは、式 (2.2.15) を与えられた境界条件の下で解くことに帰される。なお、 $\ell = 0$  とすると、古典弾性学になる。

### 2.3 線形マイクロポーラー弾性理論

マイクロポーラー弾性理論の特徴は、物体の変形には巨視的な変形の他に、更に局所的な回転が存在すると考えている点である。この点は、カップル・ストレス理論が、物体の変形は全て巨視的な変形 (回転をも含めて) で表わされると考えているのと対照的である。

線形マイクロポーラー弾性理論では、従って、ひずみと変位の関係がカップル・ストレス理論とは異なり、構成式も異なって来る。

ひずみ、回転と変位との関係は

$$d_{\alpha\beta} = u_{\beta}|_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha\beta\tau} \phi^{\tau} \quad (2.3.1)$$

$$\tau_{\alpha\beta\gamma} = \varepsilon_{\alpha\beta\delta} \phi^\delta |_\gamma \quad (2.3.2)$$

と表わされる。ここに  $\tau_{\alpha\beta\gamma}$  はマイクロ・ストレイン・テンサー (micro-strain tensor) を,  $\phi^\alpha$  はマイクロ・ローテーション ベクター (micro-rotation vector) を表わす (応力関数と同じ  $\phi$  を用いるが混同することはないであろう)。

構成式は,

$$\tau_{\alpha\beta} = \lambda d_\gamma^\tau g_{\alpha\beta} + (\mu + \kappa) d_{\alpha\beta} + \mu d_{\beta\alpha} \quad (2.3.3)$$

$$m_{\alpha\beta} = \alpha \phi^\gamma |_\tau g_{\alpha\beta} + \beta \phi_\alpha |_\beta + \tau \phi_\beta |_\alpha \quad (2.3.4)$$

と与えられる。ここに,  $\lambda$  および  $\mu$  は Lamé の弾性定数を,  $\kappa$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  および  $\tau$  はマイクロ・ポラー弾性定数を表わす。これらの間には, 内部ひずみエネルギーが非負となる条件から

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq 3\lambda + 2\mu + \kappa, \quad 0 \leq 2\mu + \kappa, \quad 0 \leq \kappa \\ 0 \leq 3\alpha + \beta + \tau, \quad -\tau \leq \beta \leq \tau, \quad 0 \leq \tau \end{aligned} \right\} \quad (2.3.5)$$

という条件がある。

一方, 適合条件式は

$$d_{\alpha\beta} |_\gamma - d_{\tau\beta} |_\alpha + \tau_{\alpha\beta\gamma} - \tau_{\gamma\beta\alpha} = 0 \quad (2.3.6)$$

式 (2.3.1) および (2.3.2) を釣り合い式 (2.2.13) および (2.2.14) に代入すると, 場の方程式は次のようになる。

$$(\lambda + \mu) u^\alpha |_\alpha^\beta + (\mu + \kappa) u^\beta |_\tau^\tau + \kappa \varepsilon^{\beta\alpha\tau} \phi_\tau |_\alpha + f^\beta = 0 \quad (2.3.7)$$

$$(\alpha + \beta) \phi^\alpha |_\alpha^\beta + \tau \phi^\beta |_\tau^\tau + \kappa \varepsilon^{\beta\alpha\tau} u_\tau |_\alpha - 2\kappa \phi^\beta + c^\beta = 0 \quad (2.3.8)$$

2次元問題の場合には, 添字の  $\beta = 3$  とし, 添字の  $\alpha, \tau = 1, 2$  とすればよい。また, 式 (2.3.8) の第1項は零となる。また, 構成式 (2.3.4) の右辺の第1および第2項も零となる。

応力関数として, 式 (2.2.21) および (2.2.22) に定義した  $\phi$  および  $\psi$  を用いると, 釣り合い方程式 (2.2.13) および (2.2.14) は満足される。これを, 適合条件式 (2.3.6) に代入すると, 式 (2.2.23) ~ (2.2.25) に対応する場の方程式として次式を得る。

$$(c^2 \nabla^2 - 1) \psi |_\alpha = 2(1 - \nu) k^2 \varepsilon_{3\alpha\beta} g^{\beta\tau} \nabla^2 \phi |_\tau \quad (2.3.9)$$

この方程式の解は, 次の連立方程式の解と同じである。

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (2.3.10)$$

$$(c^2 \nabla^2 - 1) \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.3.11)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} c^2 &\equiv \frac{\gamma(\mu + \kappa)}{\kappa(2\mu + \kappa)}, & k^2 &\equiv \frac{\gamma}{2(\mu + \kappa)} \\ \nu &\equiv \frac{\lambda}{2\lambda + 2\mu + \kappa} \end{aligned} \right\} \quad (2.3.12)$$

である。

線形マイクロポラー弾性学の解は、与えられた境界条件の下で、式(2.3.7)、(2.3.8)を連立して解くか、或いは、式(2.3.9)~(2.3.11)を解いて求められる。

なお、線形カップル・ストレス理論は、線形マイクロポラー理論に於て、

$$\phi^\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} u_{\gamma|\beta}$$

とすれば誘導される。

古典弾性論ならびにカップル・ストレス理論より得られる結果は、応力分布の両極端を示すことが理論的にも明らかにされている。<sup>12)13)</sup> 例えば、応力集中に関して言えば、古典弾性学より得られるものが最大の応力集中を示し、或る定まった $\ell$ に対してカップル・ストレス理論より得られるものが最小値を示すことになる。線形マイクロポラー理論より得られる結果は、この両者の間の値を取る。この値はもち論式(2.3.12)で与えた定数によって異なってくる。その一方の端は古典弾性論、他端はカップル・ストレス理論より得られた値となる。以下の解析例では、これらのうちの両極端、すなわち、古典弾性論およびカップル・ストレス理論より得られる結果のみを示した。

なお、異方性線形カップル・ストレス理論は、第6章で改めて検討する。

### 第 3 章 一軸圧縮による直方体供試体内の応力分布

#### 3.1 はじめに

圧縮試験は岩質材料試験のうち最も一般的なものであり、供試体内の応力分布を知ることが、得られた結果を解釈し、材料特性を推定する上からも極めて大切である。一般に圧縮試験では、加圧盤と供試体端面間に摩擦が存在し、そのために供試体内の応力分布は一様状態とは成り得ない。応力分布を正確に求めるためには、混合境界値問題、或いは混合-混合境界値問題を解かなければならない。従って、その数学的取り扱いには極めて複雑となる。以下では、これらを Fourier 級数解法ならびに有限要素法により解くことにする。なお、本章の大部分は既に発表済であるので文献<sup>1~3)</sup>をも参照されたい。

#### 3.2 Fourier 級数による解法

##### 3.2.1 問題の設定

Fig. 3.3.1に示すように幅  $2a$ 、高さ  $2b$ 、単位厚さの直方体供試体が平行な加圧盤により圧縮されるものとする。供試体は、線形カップル・ストレス理論に従うものとし、平面ひずみ状態にあるものとする。さらに、問題を単純化して、加圧盤は供試体に比して十分剛であるとし、また加圧盤と供試体端面間には、滑りを生じないように十分摩擦が作用するものと仮定する。従って、供試体の境界条件としては、デカルト座標系(すなわち、 $x = x^1$ 、 $y = x^2$ 、 $z = x^3$ )を用いて表わすと、

$$\left. \begin{aligned} u(x, \pm b) = 0, \quad v(x, \pm b) = \text{const.} \\ \kappa_y(x, \pm b) = 0 \\ \sigma_x(\pm a, y) = 0, \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = 0, \\ m_x(\pm a, y) = 0 \end{aligned} \right\} (3.2.1)$$

或いは、 $\kappa_y(x, \pm b) = 0$  の代わりに  $\omega_z(x, \pm b) = 0$ 、  
或いは  $v(x, \pm b) = \text{const.}$  および  $\kappa_y(x, \pm b) = 0$  の代わりに

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \text{ および } \int_{-a}^a \sigma_y dx = -P, \quad \kappa_y(x, \pm b) = 0 \quad (3.2.2)$$

で与えられる。ここに  $u, v, \kappa_y, \sigma_x, \tau_{xy}, m_x$  はそれぞれ、変位の  $x$  および  $y$  方向成分、曲率の  $y$  方向

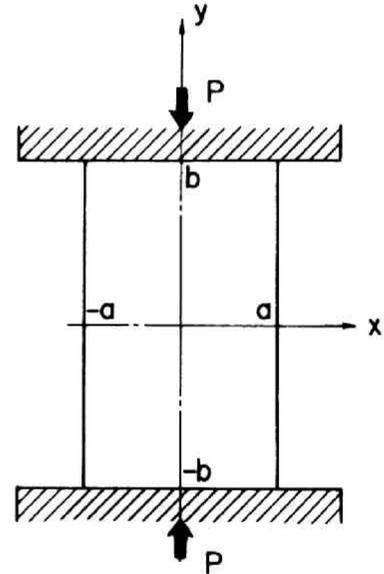


Fig. 3.3.1 Schematic diagram of the compression test and the coordinate system.

成分, 直応力の  $x$  成分,  $x = \text{const.}$  面上に働くせん断応力およびカップル・ストレスを表わす。

### 3.2.2 Fourier 級数による一般解

ここに設定したカップル・ストレス弾性体の問題は, 2.1で述べたように, 与えられた場の方程式 (2.2.23) ~ (2.2.25) を上の境界条件 (3.2.1), (3.2.2) の下に解くことに帰される。場の方程式をデカルト座標を用いて書き改めると, 次のようになる。

$$\nabla^4 \phi = 0 \quad (3.2.3)$$

$$(\ell^2 \nabla^2 - 1) \nabla^2 \psi = 0 \quad (3.2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ell^2 \nabla^2 - 1) \psi = 2(1-\nu) \ell^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \phi \quad (3.2.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\ell^2 \nabla^2 - 1) \psi = -2(1-\nu) \ell^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \phi$$

式 (3.2.3) および (3.2.4) の一般解は, 次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( A_n \frac{\sinh \alpha_n y}{\cosh \alpha_n y} + B_n y \frac{\cosh \alpha_n y}{\sinh \alpha_n y} \right) \frac{\sin \alpha_n x}{\cos \alpha_n x} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \left( A'_m \frac{\sinh \beta_m x}{\cosh \beta_m x} + B'_m x \frac{\cosh \beta_m x}{\sinh \beta_m x} \right) \frac{\sin \beta_m y}{\cos \beta_m y} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi = & \sum_{n=1}^{\infty} \left( C_n \frac{\sinh \alpha_n y}{\cosh \alpha_n y} \right) \frac{\sin \alpha_n x}{\cos \alpha_n x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( C'_m \frac{\sinh \beta_m x}{\cosh \beta_m x} \right) \frac{\sin \beta_m y}{\cos \beta_m y} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left( D_n \frac{\sinh r_n y}{\cosh r_n y} \right) \frac{\sin \alpha_n x}{\cos \alpha_n x} + \sum_{m=1}^{\infty} \left( D'_m \frac{\sinh r_m x}{\cosh r_m x} \right) \frac{\sin \beta_m y}{\cos \beta_m y} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

ここに,

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{b}, \quad r_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{1}{\ell^2}}, \quad r_m = \sqrt{\beta_m^2 + \frac{1}{\ell^2}}$$

である。

ここに解こうとしている問題は,  $x$  軸および  $y$  軸に対して対称であるので, 応力関数は, この点を考慮して,

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_{n=1,3,\dots} (A_n \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x \\ &+ \sum_{m=1,3,\dots} (A'_m \cosh \beta_m x + B'_m \beta_m x \sinh \beta_m x) \cos \beta_m y\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

$$\begin{aligned}\psi &= \sum_{n=1,3,\dots} C_n \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} C'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m y \\ &+ \sum_{n=1,3,\dots} D_n \sinh \tau_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} D'_m \sinh \tau_m x \sin \beta_m y\end{aligned}\quad (3.2.9)$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{2a}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{2b}, \quad \tau_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{1}{\ell^2}}, \quad \tau_m = \sqrt{\beta_m^2 + \frac{1}{\ell^2}}$$

となる。さらに、式(3.2.5)の条件から、係数間には、

$$\left. \begin{aligned}C_n &= -4(1-\nu)\ell^2\alpha_n^2 B_n \\ C'_m &= 4(1-\nu)\ell^2\beta_m^2 B'_m\end{aligned} \right\} \quad (3.2.10)$$

という関係が成立する。

一方、応力は、式(2.2.21)および(2.2.22)で与えられて、デカルト座標系では次のように表わせる。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \phi_{,yy} - \psi_{,xy} \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 \{ (A_n + 2B_n) \cosh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \sinh \alpha_n y \} \cos \alpha_n x \\ &\quad - \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \{ A'_m \cosh \beta_m x + B'_m \beta_m x \sinh \beta_m x \} \cos \beta_m y \\ &\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 C_n \cosh \alpha_n y \cos \alpha_n x - \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 C'_m \cosh \beta_m x \cos \beta_m y \\ &\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n \tau_n D_n \cosh \tau_n y \cos \alpha_n x - \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \tau_m D'_m \cosh \tau_m x \cos \beta_m y\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \phi_{,xx} + \psi_{,xy} \\ &= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 (A_n \cosh \alpha_n y + \alpha_n B_n y \sinh \alpha_n y) \cos \alpha_n x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \{ (A'_m + 2B'_m) \cosh \beta_m x + B'_m \beta_m x \sinh \beta_m x \} \cos \beta_m y \\
& + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 C_n \cosh \alpha_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 C'_m \cosh \beta_m x \cos \beta_m y \\
& + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n \tau_n D_n \cosh \tau_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \tau_m D'_m \cosh \tau_m x \cos \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{xy} &= -\phi_{,xy} - \psi_{,yy} \\
&= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 \{ (A_n + B_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \} \sin \alpha_n x \\
&\quad + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \{ (A'_m + B'_m) \sinh \beta_m x + B'_m \beta_m x \cosh \beta_m x \} \sin \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 C_n \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 C'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \tau_n^2 D_n \sinh \tau_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 D'_m \sinh \tau_m x \sin \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{yx} &= -\phi_{,xy} + \psi_{,xx} \\
&= \sum_{m=1,3,\dots} \alpha_m^2 \{ (A_m + B_m) \sinh \alpha_m y + B_m \alpha_m y \cosh \alpha_m y \} \sin \alpha_m x \\
&\quad + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \{ (A'_m + B'_m) \sinh \beta_m x + B'_m \beta_m x \cosh \beta_m x \} \sin \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 C_n \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 C'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 D_n \sinh \tau_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \tau_m^2 D'_m \sinh \tau_m x \sin \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

$$\begin{aligned}
m_x &= \psi', x \\
&= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n C_n \sinh \alpha_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m C'_m \cosh \beta_m x \sin \beta_m y \\
&\quad + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n D_n \sinh \tau_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \tau_m D'_m \cosh \tau_m x \sin \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

$$\begin{aligned}
m_y &= \psi', y \\
&= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n C_n \cosh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m C'_m \sinh \beta_m x \cos \beta_m y \\
&\quad + \sum_{n=1,3,\dots} \tau_n D_n \cosh \tau_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m D'_m \sinh \tau_m x \cos \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

変位および曲率は、式(3.2.11)~(3.2.16)を式(2.2.8)および(2.2.9)に代入し、さらに式(2.2.1)~(2.2.3)に代入して求められる。座標原点  $x=0$  ,  $y=0$  で  $u=0$  ,  $v=0$  とすると、 $u$  ,  $v$  および  $\varepsilon_y$  はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned}
Eu &= \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n \{ (1+\nu) A_n + 2(1-\nu^2) B_n \} \cosh \alpha_n y \\
&\quad + (1+\nu) \alpha_n B_n y \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \{ -(1+\nu) A'_m + (1-\nu-2\nu^2) \\
&\quad B'_m \} \sinh \beta_m x - (1+\nu) \beta_m B'_m x \cosh \beta_m x \cos \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) \alpha_n C_n \cosh \alpha_n y \sin \alpha_n x \\
&\quad - \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) \beta_m C'_m \sinh \beta_m x \cos \beta_m y \\
&\quad - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) \tau_n D_n \cosh \tau_n y \sin \alpha_n x \\
&\quad - \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) \beta_m D'_m \sinh \tau_m x \cos \beta_m y
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

$$\begin{aligned}
E v = & \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n \{ -(1+\nu) A_n + (1-\nu-2\nu^2) B_n \} \sinh \alpha_n y \\
& - (1+\nu) \alpha_n B_n y \cosh \alpha_n y \} \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \{ (1+\nu) A'_m + 2(1-\nu^2) B'_m \} \cosh \beta_m x \\
& + (1+\nu) \beta_m B'_m x \sinh \beta_m x \} \sin \beta_m y + \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) \alpha_n C_n \sinh \alpha_n y \cos \alpha_n x \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) \beta_m C'_m \cosh \beta_m x \sin \beta_m y + \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) \alpha_n D_n \sinh \tau_n y \cos \alpha_n x \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) \tau_m D'_m \cosh \tau_m x \sin \beta_m y \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2 E \omega_x = & - \sum_{n=1,3,\dots} 4(1-\nu^2) \alpha_n^2 B_n \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n x \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} 4(1-\nu^2) \beta_m^2 B'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m y \\
& - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) (\alpha_n^2 - \tau_n^2) D_n \sinh \tau_n y \sin \alpha_n x \\
& - \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) (\beta_m^2 - \tau_m^2) D'_m \sinh \tau_m x \sin \beta_m y \quad (3.2.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 G \ell^2 \kappa_x = & \sum_{n=1,3,\dots} C_n \alpha_n \sinh \alpha_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} C'_m \beta_m \cosh \beta_m x \sin \beta_m y \\
& + \sum_{n=1,3,\dots} D_n \alpha_n \sinh \tau_n y \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} D'_m \tau_m \cosh \tau_m x \sin \beta_m y \quad (3.2.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4 G \ell^2 \kappa_y = & \sum_{n=1,3,\dots} C_n \alpha_n \cosh \alpha_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} C'_m \beta_m \sinh \beta_m x \cos \beta_m y \\
& + \sum_{n=1,3,\dots} D_n \tau_n \cosh \tau_n y \sin \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} D'_m \beta_m \sinh \tau_m x \cos \beta_m y \quad (3.2.21)
\end{aligned}$$

### 3.2.3 未定係数の決定

応力関数中の未定係数は、境界条件から次のように定められる。境界条件は式(3.2.1)および(3.2.2)の組み合わせが考えられる。

$\sigma_x(\pm a, y) = 0$  から、

$$\begin{aligned} & \beta_m^2 (A'_m \cosh \beta_m a + B'_m \beta_m a \sinh \beta_m a) \\ & + \beta_m^2 C'_m \cosh \beta_m a + \beta_m \tau_m D'_m \cosh \tau_m a = 0 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

$m_x(\pm a, y) = 0$  から、

$$\beta_m C'_m \cosh \beta_m a + \tau_m D'_m \cosh \tau_m a = 0 \quad (3.2.23)$$

$u(x, \pm b) = 0$  から、

$$\begin{aligned} & \alpha_n \left[ \{ (1+\nu) A_n + 2(1-\nu^2) B_n \} \cosh \alpha_n b + (1+\nu) \alpha_n B_n b \sinh \alpha_n b \right] \\ & - (1+\nu) \alpha_n C_n \cosh \alpha_n b - (1+\nu) \tau_n D_n \cosh \tau_n b = 0 \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

$\sigma_y(x, \pm b) = 0$ , すなわち,  $m_y(x, \pm b) = 0$  から、

$$\alpha_n C_n \cosh \alpha_n b + \tau_n D_n \cosh \tau_n b = 0 \quad (3.2.25)$$

$\omega_z(x, \pm b) = 0$  から、

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1,3,\dots} 4(1-\nu^2) \alpha_n^2 B_n \sinh \alpha_n b \sin \alpha_n x + \sum_{n=1,3,\dots} 4(1-\nu^2) \beta_m^2 B'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m b \\ & - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu) (\alpha_n^2 - \tau_n^2) D_n \sinh \tau_n b \sin \alpha_n x - \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu) (\beta_m^2 - \tau_m^2) D'_m \\ & \sinh \tau_m x \sin \beta_m b = 0 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

$\tau_{xy}(\pm a, y) = 0$  から、

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 \{ (A_n + B_n) \sinh \alpha_n y + B_n \alpha_n y \cosh \alpha_n y \} \sin \alpha_n a \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \{ (A'_m + B'_m) \sinh \beta_m a + B'_m \beta_m a \cosh \beta_m a \} \sin \beta_m y \\ & - \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 C_n \sinh \alpha_n y \sin \alpha_n a + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 C'_m \sinh \beta_m a \sin \beta_m y \end{aligned}$$

$$-\sum_{n=1,3,\dots} \tau_n^2 D_n \sinh \tau_n y \sin \alpha_n a + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 D'_m \sinh \tau_m a \sin \beta_m y = 0 \quad (3.2.27)$$

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x, \pm b)} = 0 \quad \text{および} \quad \int_{-a}^a \sigma_y dx = -P \quad \text{からは, それぞれ,}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n^2 \left[ \{ (1+\nu)A_n - (1-\nu-2\nu^2)B_n \} \sinh \alpha_n b + (1+\nu)\alpha_n B_n b \cosh \alpha_n b \right] \sin \alpha_n x \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m^2 \left[ \{ (1+\nu)A'_m + (3+\nu-2\nu^2)B'_m \} \sinh \beta_m x + (1+\nu)\beta_m B'_m x \cosh \beta_m x \right] \\ & \quad \sin \beta_m b - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu)\alpha_n^2 C_n \sinh \alpha_n b \sin \alpha_n x \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu)\beta_m^2 C'_m \sinh \beta_m x \sin \beta_m b - \sum_{n=1,3,\dots} (1+\nu)\alpha_n^2 D_n \sinh \tau_n b \sin \alpha_n x \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} (1+\nu)\tau_m^2 D'_m \sinh \tau_m x \sin \beta_m b = 0 \end{aligned} \quad (3.2.28)$$

および

$$\begin{aligned} & -\sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \alpha_n (A_n \cosh \alpha_n y + \alpha_n B_n y \sinh \alpha_n y) \\ & \quad + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \{ (A'_m + B'_m) \sinh \beta_m a + B'_m \beta_m a \cosh \beta_m a \} \cos \beta_m y \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \alpha_n C_n \cosh \alpha_n y + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m C'_m \sinh \beta_m a \cos \beta_m y \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \tau_n D_n \cosh \tau_n y + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m D'_m \sinh \tau_m a \cos \beta_m y = -\frac{P}{2} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

を得る。

$$v(x, \pm b) = \mp v_0 \quad \text{からは,}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n \left[ \{ -A_n + (1-2\nu)B_n \} \sinh \alpha_n b - B_n \alpha_n b \cosh \alpha_n b \right] \cos \alpha_n x \\ & \quad + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m \left[ \{ A'_m + 2(1-\nu)B'_m \} \cosh \beta_m x + B'_m \beta_m x \sinh \beta_m x \right] \sin \beta_m b \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n C_n \sinh \alpha_n b \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \beta_m C'_m \cosh \beta_m x \sin \beta_m b \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} \alpha_n D_n \sinh \tau_n b \cos \alpha_n x + \sum_{m=1,3,\dots} \tau_m D'_m \cosh \tau_m x \sin \beta_m b = -\frac{E}{1+\nu} v_0 \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

を得る。

式 (3.2.26) ~ (3.2.30) には,  $\sinh \beta_m x$ ,  $\cosh \alpha_n y$ ,  $\cosh \alpha_n x$ ,  $\cosh \beta_m x$  などが含まれているので, このままでは, 取り扱えない。これらを, 周期  $4a$  および  $4b$  の Fourier sine および cosine 級数に展開する。この結果は次のようになる。

$$\sinh \alpha_n y = \frac{2\alpha_n}{b} \cosh \alpha_n b \sum_{m=1,3,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \sin \beta_m y$$

$$\sinh \beta_m x = \frac{2\beta_m}{a} \cosh \beta_m a \sum_{n=1,3,\dots}^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \sin \alpha_n x$$

$$\cosh \alpha_n y = \frac{2}{b} \cosh \alpha_n b \sum_{m=1,3,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cos \beta_m y$$

$$\cosh \beta_m x = \frac{2}{a} \cosh \beta_m a \sum_{n=1,3,\dots}^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cos \alpha_n x$$

$$\sinh \tau_n y = \frac{2\tau_n}{b} \cosh \tau_n b \sum_{m=1,3,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\tau_n^2 + \beta_m^2} \sin \beta_m y$$

$$\cosh \tau_n y = \frac{2}{b} \cosh \tau_n b \sum_{m=1,3,\dots}^{m-1} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\beta_m}{\tau_n^2 + \beta_m^2} \cos \beta_m y$$

$$\sinh \tau_m x = \frac{2\tau_m}{a} \cosh \tau_m a \sum_{n=1,3,\dots}^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{\tau_m^2 + \alpha_n^2} \sin \alpha_n x$$

$$\cosh \tau_m x = \frac{2}{a} \cosh \tau_m a \sum_{n=1,3,\dots}^{n-1} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n}{\tau_m^2 + \alpha_n^2} \cos \alpha_n x$$

$$x \cosh \beta_m x = \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots}^{n-1} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left( \beta_m a \sinh \beta_m a + \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \beta_m a \right) \sin \alpha_n x$$

$$y \cosh \alpha_n y = \frac{2}{b} \sum_{m=1,3,\dots}^{m-1} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left( \alpha_n b \sinh \alpha_n b - \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b \right) \sin \beta_m y$$

$$y \sinh \alpha_n y = \frac{2}{b} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left( \beta_m b \sinh \alpha_n b - \frac{2\alpha_n \beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b \right) \cos \beta_m y$$

$$x \sinh \beta_m x = \frac{2}{a} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left( \alpha_n a \sinh \beta_m a - \frac{2\alpha_n \beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n a \right) \cos \alpha_n x$$

また,

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{m} \cos \beta_m y$$

と展開される。

これらを式 (3.2.27) ~ (3.2.30) に代入して,  $\sin \alpha_n x$ ,  $\cos \beta_m y$  などが各項ごとに満されるように選ぶと, 次のようになる。

$$\begin{aligned} & -4(1-\nu)\alpha_n^2 \sinh \alpha_n b B_n + 4(1-\nu)(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\beta_m}{a} \\ & \cosh \beta_m a B'_m - (\alpha_n^2 - \gamma_n^2) \sinh \gamma_n b D_n \\ & + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{\gamma_m^2 - \beta_m^2}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \frac{2\gamma_m}{a} \cosh \gamma_m a D'_m = 0. \quad (3.2.31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\alpha_n}{b} \left[ \cosh \alpha_n b A_n + (\alpha_n b \sinh \alpha_n b \right. \\ & \left. + \frac{2\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b) B_n \right] + \beta_m^2 \left[ \sinh \beta_m a A'_m + (\sinh \beta_m a \right. \\ & \left. + \beta_m a \cosh \beta_m a) B'_m \right] - \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\alpha_n}{b} \cosh \alpha_n b C_n \\ & \left. + \beta_m^2 \sinh \beta_m a C'_m - \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\gamma_n^2}{\gamma_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\gamma_n}{b} \cosh \gamma_n b D_n \right] \end{aligned}$$

$$+ \beta_m^2 \sinh \tau_m a D'_m = 0 \quad (3.2.32)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_n^2 \left[ \sinh \alpha_n b A_n + \{ -(1-2\nu) \sinh \alpha_n b + \alpha_n b \cosh \alpha_n b \} B_n \right] \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\beta_m}{a} \left[ \cosh \beta_m a A'_m + \{ \beta_m a \sinh \beta_m a \right. \\ & \left. + (3-2\nu + \frac{\alpha_n^2 - \beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2}) \cosh \beta_m a \} B'_m \right] - \alpha_n^2 \sinh \alpha_n b C_n \\ & + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\beta_m}{a} \cosh \beta_m a C'_m \\ & - \alpha_n^2 \sinh \tau_m b D_n + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\tau_m^2}{\tau_m^2 + \alpha_n^2} \frac{2\tau_m}{a} \cosh \tau_m a D'_m = 0 \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\alpha_n}{b} \left[ \beta_m \cosh \alpha_n b A_n \right. \\ & \left. + \alpha_n \{ \beta_m b \sin \alpha_n b - \frac{2\alpha_n \beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b \} B_n \right] \\ & + \beta_m \sinh \beta_m a A'_m + \beta_m (\sinh \beta_m a + \beta_m a \cosh \beta_m a) B'_m \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2\alpha_n}{b} \frac{\beta_m}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b C_n + \beta_m \sinh \beta_m a C'_m \\ & + \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2\tau_n}{b} \frac{\beta_m}{\tau_n^2 + \beta_m^2} \cosh \tau_n b D_n + \beta_m \sinh \tau_m a D'_m \\ & = - \frac{2}{m\pi} (-1)^{\frac{m-1}{2}} P \end{aligned} \quad (3.2.34)$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_n \sinh \alpha_n b A_n + \{ \alpha_n (1-2\nu) \sinh \alpha_n b - \alpha_n b \cosh \alpha_n b \} B_n \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\beta_m}{a} \left\{ \cosh \beta_m a A'_m \right. \\
& \quad \left. + \left\{ 2(1-\nu) \cosh \beta_m a + \beta_m a \sinh \beta_m a - \frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n a \right\} B'_m \right. \\
& + \alpha_n \sinh \alpha_n b C_n + \alpha_n \sinh \tau_n b D_n \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \frac{2\beta_m}{a} \cosh \beta_m a C'_m \\
& + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\alpha_n}{\alpha_n^2 + \tau_m^2} \frac{2\tau_m}{a} \cosh \tau_m a D'_m \\
& = -\frac{4}{n\pi} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{E}{1+\nu} v_0 \tag{3.2.35}
\end{aligned}$$

以上のところを整理すると、応力関数に現われる  $8n$  個の未定係数は、2個の条件式 (3.2.10) および境界条件；(i) 式 (3.2.22) ~ (3.2.25)，(3.2.32) および (3.2.35) あるいは、(ii) 式 (3.2.22) ~ (3.2.24)，(3.2.25) および (3.2.31)，(3.2.32) ~ (3.2.34) とを連立して解いて求められる。

実際の計算においては、 $A_n, A'_m, C_n, C'_m, D_n, D'_m$  は簡単に  $B_n$  および  $B'_m$  で表わすことができるので、これを式 (3.2.31) ~ (3.2.35) に代入して、 $B_n$  および  $B'_m$  に関する無限連立方程式を解くことになる。係数が決定されれば、応力および変位は、式 (3.2.11) ~ (3.2.21) から求められる。

なお、マイクロ・ポーラー弾性体と仮定すれば、場の方程式 (2.2.23) ~ (2.2.25) と (2.3.9) ~ (2.3.11) とを比較すれば分るように、全く一致しているので、この場合の解はカップル・ストレス弾性理論による解を次のように変換すると容易に求められる。

場の方程式 (2.3.10) および (2.3.11) の解は、式 (3.2.8) および (3.2.9) に於て、材料定数  $\ell$  の代りに式 (2.3.12) で与えられる  $c$  を用いて、

$$\tau_n = \sqrt{\alpha_n^2 + \frac{1}{c^2}} \quad , \quad \tau_m = \sqrt{\beta_m^2 + \frac{1}{c^2}} \tag{3.2.36}$$

と置き換えるだけでよく、また、式 (2.3.6) から求められる適合条件式は、式 (3.2.10) に於て、

$\ell$ の代りに式(2.3.12)で与えられる $k$ を用いて,

$$C_n = -4(1-\nu)k^2 \alpha_n^2 B_n, \quad C'_m = 4(1-\nu)k^2 \beta_m^2 B'_m \quad (3.2.37)$$

と表わされることになる。また、応力および変位の境界条件等は、カップル・ストレス理論より得られる諸式に於て、 $T_n, T_m$ を式(3.2.36)で置き換えなければならない。

以下の解析では、2.2の最後の部分で述べた理由によりカップル・ストレス理論によるもののみを示す。

### 3.3 応力分布に及ぼすカップル・ストレスならびに Poisson 比の影響

以下の数値計算では、境界条件(3.2.1)のみを適用して、 $B_n$ および $B'_m$ に関する無限連立方程式を解くことにする。実際の数値計算では計算機の容量の関係から、有限個しか採用することはできないので、以下の結果は $n=m=81$ 以上の項は省略して求めたものである。この計算に於ても、前節で与えた方程式のままでは計算が出来ない(overflowするため)ので、 $B_n$ および $B'_m$ の係数は大体1.0に近くなるように各項を適当な定数で除して後計算を遂行した。

計算では、材料定数として、 $\ell/a=0$ (古典弾性学)、0.1、0.2および0.4、Poisson比 $\nu=0.1$ 、0.2、0.3および0.4を取り、また $b/a=1.0$ 、2.0とした。

得られた応力分布をFig. 3.3.2~3.3.6に示す。応力は、軸方向平均応力 $\sigma_y$ で除した、いわゆる正規化した応力として表示した。応力分布に及ぼすカップル・ストレスの影響に関しては次のような結論が得られる。

- (i) 理論的にも予測されるように、材料定数 $\ell$ が零となれば古典弾性学より得られるものとなり、 $\ell$ が大きくなるにつれてカップル・ストレスの影響が大きくなる。
  - (ii) 材料定数 $\ell$ が大きくなればなる程、供試体内の応力分布は一様に近づく。
  - (iii) カップル・ストレスの影響は供試体の境界周辺近くで卓越し、境界から遠ざかるにつれて急激に減少する。
  - (iv) 供試体隅角部における応力の特異性は、古典弾性学とカップル・ストレス理論では異なっているようである。
  - (v) 供試体軸に垂直な面上に働く、せん断応力の大きさは一般に供試体軸に平行な面に働くせん断応力の大きさよりも大きい。古典弾性学におけるせん断応力は大体両者の間にある。
- 応力分布に及ぼすPoisson比の影響としては、次のようなことが結論されよう。
- (i) Poisson比が大きい程、応力の大きさは大きくなる。
  - (ii) Poisson比が小さい程、応力分布は一様に近づく。
  - (iii) 応力の大きさは、Poisson比のみならず、材料定数 $\ell$ にも左右される。同じ大きさの $\ell$ に対しては、Poisson比が大となる程応力の大きさは大となる。
  - (iv) カップル・ストレスの影響と異なって、Poisson比の影響は供試体全体に及ぶ。

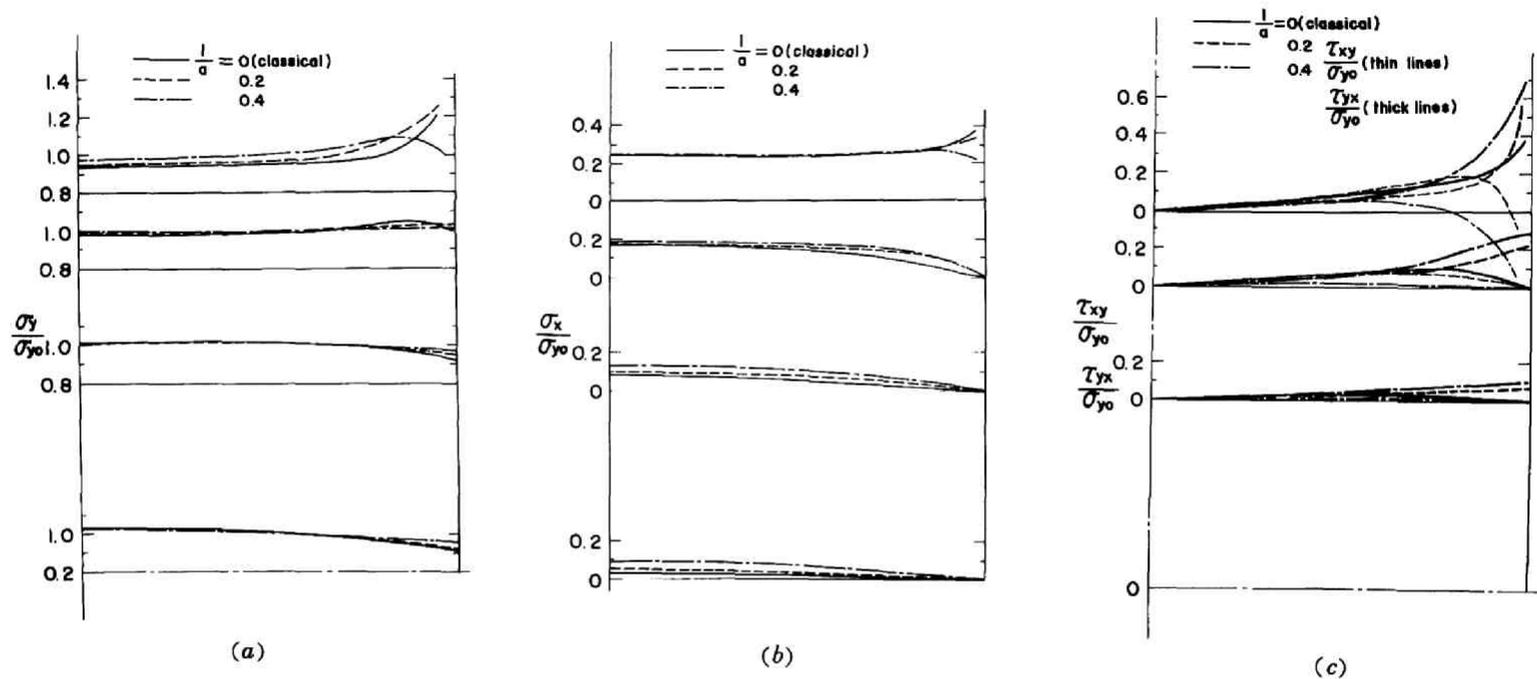


Fig. 3.3.2 Influence of couple-stresses on normalized stresses.  
 Poisson's ratio  $\nu=0.2$  and height-to-width ratio  $b/a=1.0$ .

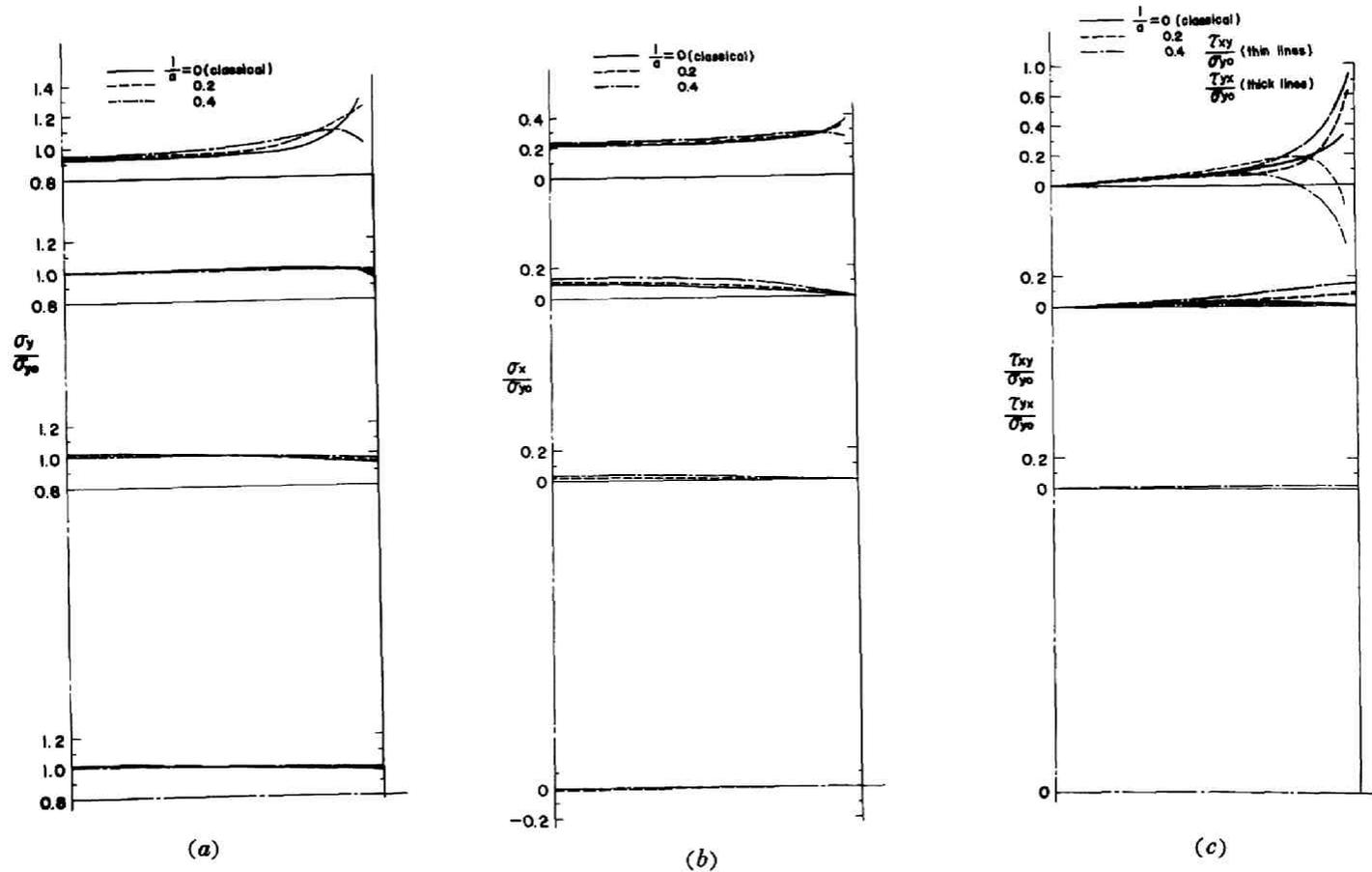


Fig. 3.3.3 Influence of couple-stresses on normalized stresses.  
 Poisson's ratio  $\nu = 0.2$  and height-to-width ratio  $b/a = 2.0$ .

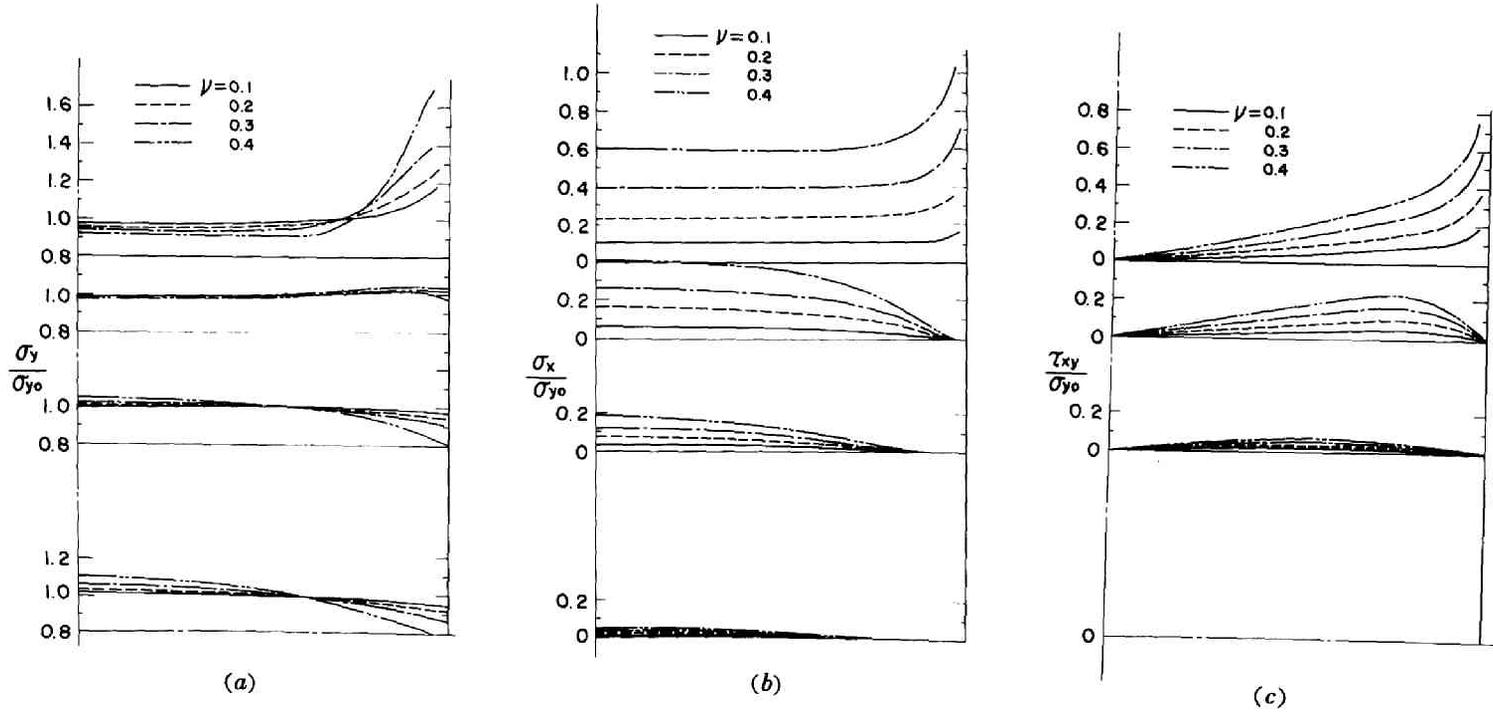


Fig. 3.3.4 Influence of Poisson's ratio on normalized stresses in the classical theory. Height-to-width ratio  $b/a = 1.0$ .

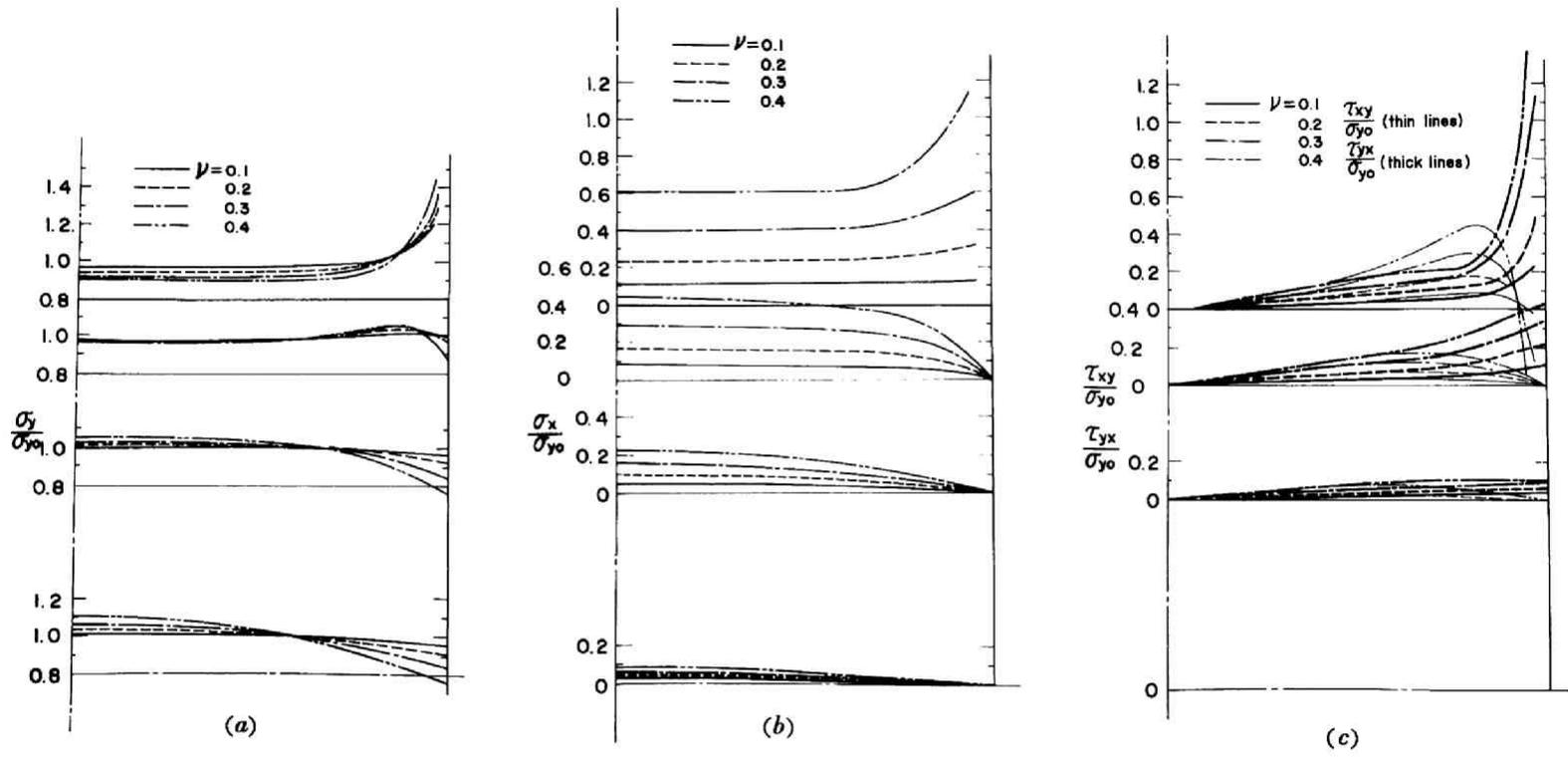


Fig. 3.3.5 Influence of Poisson's ratio on normalized stresses in the couple-stress theory. Height-to-width ratio  $b/a=1.0$  and  $\ell/a=0.2$ .

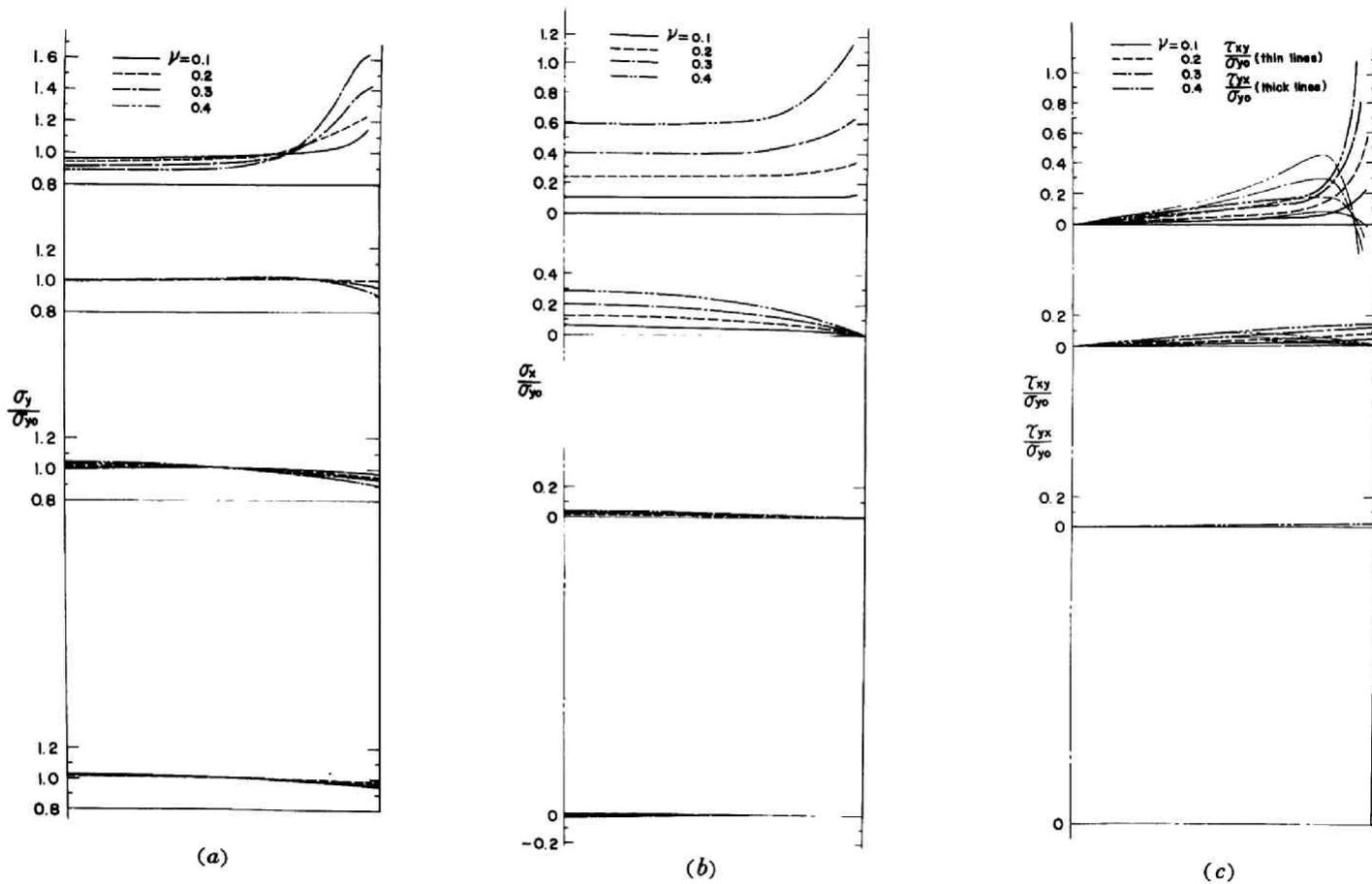


Fig. 3.3.6 Influence of Poisson's ratio on normalized stresses in the couple-stress theory. Height-to-width ratio  $b/a=2.0$  and  $\ell/a=0.2$ .

供試体の高さとの比  $b/a$  が約 2 以上となると、供試体中央部に幅と同程度の高さのほぼ一様な応力場が得られる。この領域は Poisson 比の小さい程、また材料定数  $\ell$  の大きい程、 $b/a$  が小さくても生じ易くなる。なお、供試体中央で  $\sigma_x$  が引張になることは、ぜい性引張破壊という観点からは興味のあることである。

なお、供試体は端面拘束を受けるため、見かけの弾性係数、すなわち加圧盤に加えた外荷重を端面間の変位量を供試体の高さで割ったもの（平均ひずみ）で割ったものは、Poisson 比およびカップル・ストレスの影響を受けることが考えられる。Fig. 3.3.7 は、これらの関係を示したものである。Poisson 比が

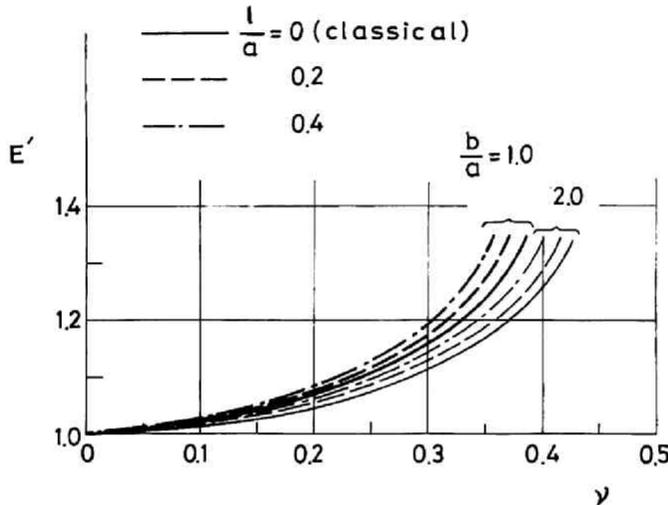


Fig. 3.3.7 Influence of couple-stresses and Poisson's ratio  $\nu$  on the ratio of the apparent Young's modulus to the true one  $E'$ .

大きくなれば見かけの弾性係数は増大し、材料定数  $\ell$  が大きくなれば、更に急激に増大する。高さ幅比  $b/a$  が増加すると、当然予測されるように、見かけの弾性係数に及ぼす Poisson 比ならびにカップル・ストレスの影響は減少する。

### 3.4 応力分布に及ぼす供試体端面拘束および Poisson 比の影響

一般に行なわれている一軸圧縮試験においては、供試体端面と加圧盤との間の摩擦係数は十分大きく、供試体端面は加圧盤に固定されていると見做され、またそのような境界条件の下に解析が行なわれている。この場合には、3.3 の結果からも分るように、応力分布は一様ではなくなっている。このような応力状態を基に破壊機構および破壊条件を推定することも重要であるが、他の方法としてできるだけ簡単な応力状態、例えば一様応力状態を生じるように試験法を改良することもまた重要である。後者のためには通常、加圧盤と供試体端面間に何らかの減摩剤を挿入し、加圧盤拘束を減少させている（第 II 部 2.4.1 を参照せよ）。この減摩剤は、できるだけ薄く、加圧盤の変形負荷条件がそのまま供試体に伝えられることが望まし

い。以下の解析には、この減摩剤の効果を理想化して単に圧盤と供試体端面間の摩擦係数の減少と考えることにする。なお、カップル・ストレスの影響は、3.3の結果から大略推定されるので、以下では古典弾性理論による結果のみを述べることにする。

この場合に、供試体端面と加圧盤との間の摩擦係数は、Amontonの摩擦の法則に従うものとし、また、摩擦係数の値は、応力の大きさによらず一定であるとした。

対象とする問題の境界条件は、次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(\pm a, y) &= 0, & \tau_{xy}(\pm a, y) &= 0 \\ v(x, \pm b) &= \text{const.} \\ |\tau_{xy}(x, \pm b)| &< -\sigma_y(x, \pm b)\mu \text{ のとき } u(x, \pm b) &= 0 \\ |\tau_{xy}(x, \pm b)| &= -\sigma_y(x, \pm b)\mu \end{aligned} \right\} \quad (3.4.1)$$

ここに $\mu$ は摩擦係数とする。

この種の移動混合-混合境界値問題は、解析的に解くことは殆んど不可能であるので、ここでは有限要素法<sup>4)</sup>を適用した。計算順序は、1)まず完全拘束の状態境界上の節点力を求め、2)次に境界条件(3.4.1)<sub>4</sub>、(3.4.1)<sub>5</sub>を満すように拘束を解放するか或いは拘束する。3)2)の条件で再び節点力を求める。4)2),3)を適当な収束が得られるまで繰り返す。実際の計算では、繰り返し回数は1)で40回、3)で各5回、2),3)全体として5×25回である。

数値解析結果の例として、応力分布をFig. 3.3.8および3.3.9に示す。解析方法ならびに結果の詳細は文献<sup>5)</sup>を参照して戴くこととし、主要な結果のみを列記すると次のようである。

- i) 端面の摩擦係数が小さい程、また供試体のポアソン比が小さい程、供試体内の応力分布は一様となる。
- ii) 摩擦係数がある値より小さくなれば、供試体は端面隅角部近くから部分的に滑動し、せん断応力は滑動部分では $|\tau_{xy}| = \mu |\sigma_y|$ となる。そのために、せん断応力の分布は段丘状になる。曲率が大きい部分は、不動部分から滑動部分への遷移を示している。
- iii) 摩擦係数がある値以上であると供試体端面は部分的にも滑動せず、完全に拘束されたのと同じ応力状態となる。供試体隅角部は弾性解析の特異点であり、この点の限界摩擦係数を厳密に求めることは不可能である。しかし、この近傍を除けば殆んど滑動しない摩擦係数が求められる。例えば $b/a = 2.0$ とし、 $\nu = 1/6$ とすると、限界摩擦係数は $\mu = 0.25$ となる。
- iv) 完全拘束の場合には、隅角部主応力方向の供試体軸に対する傾きは、 $b/a = 2.0$ 、 $\nu = 1/6$ で約 $13^\circ$ である。
- v) 一軸試験による見掛けの弾性係数、即ち、単位軸方向平均ひずみを生じるのに必要な荷重は供試体の高さ幅比 $b/a$ 、ポアソン比 $\nu$ 、供試体端面と剛体圧盤との間の摩擦係数 $\mu$ に影響される。例えば、完全拘

東の供試体では、 $b/a=2.0$ 、 $\nu=1/3$  の場合には、 $\mu=0$  (完全単軸) の場合より 3.4% 程大きくなるに過ぎないが、 $b/a=0.5$ 、 $\nu=1/3$  では 16.5%、更に  $\nu=1/6$  でも 3.3% 程度大きな値を示す。

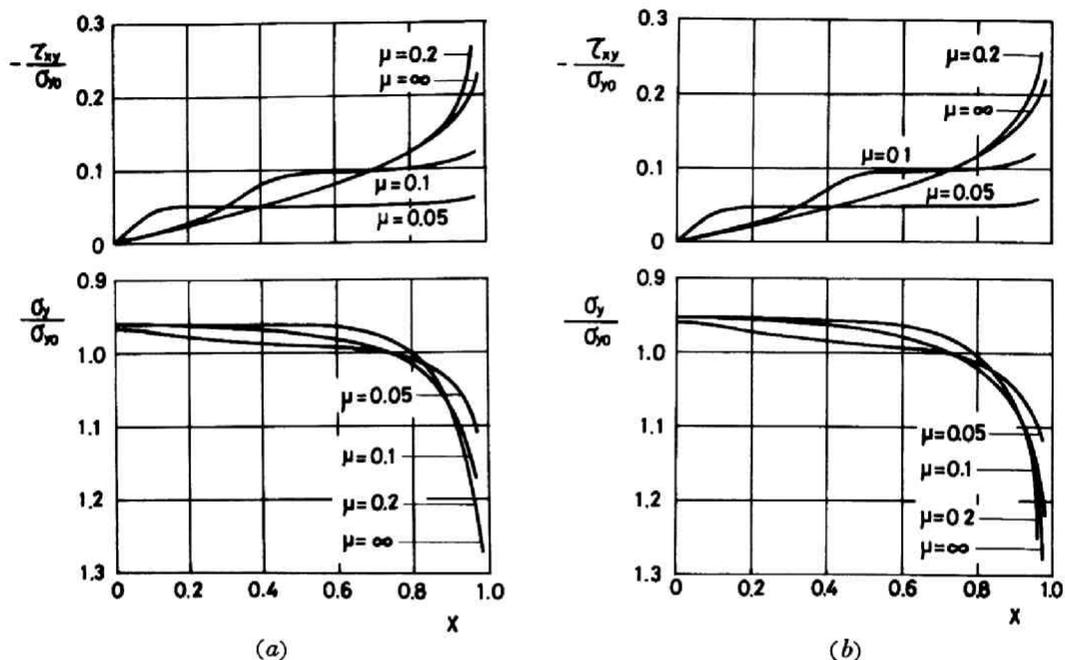


Fig. 3.3.8 Influence of coefficient of end friction on normalized axial and shear stresses at the edge of rectangular specimen (in the state of plane strain). Height-to-width ratio  $b/a=1.0$  and Poisson's ratio  $\nu=1/6$ (a), and  $b/a=2.0$  and  $\nu=1/6$ (b).

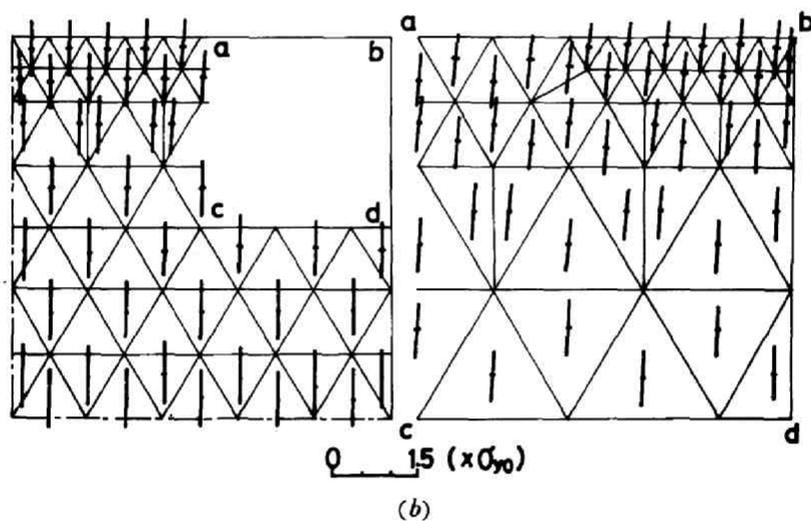
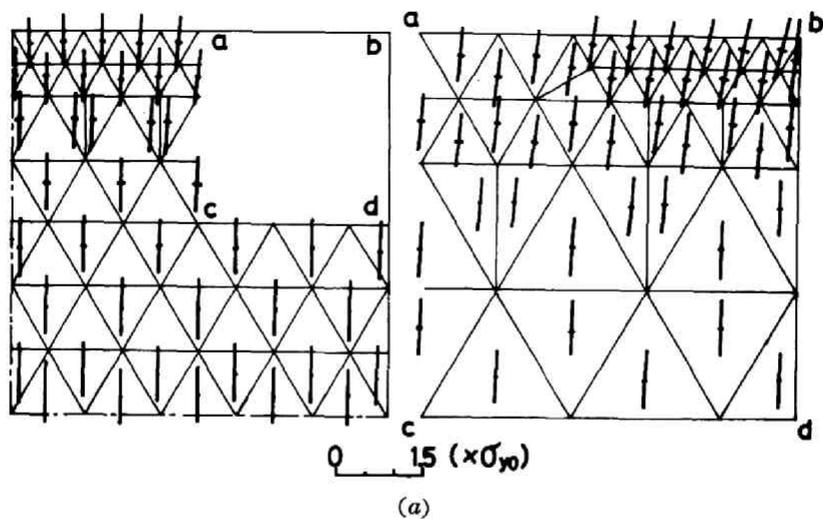


Fig. 3.3.9 Stresses in rectangular specimen (in the state of plane strain). Height-to-width ratio  $b/a=1.0$ , Poisson's ratio  $\nu=1/6$  and coefficient of end friction  $\mu=\infty(a)$  and  $\mu=0.1(b)$ .

## 第 4 章 割裂ならびにリング試験における 供試体内の応力分布

### 4.1 はじめに

割裂試験ならびにリング試験は岩質材料の引張強度を推定する試験として普通に用いられている<sup>1)</sup>。この試験は、Figs. 3.4.1 および 3.4.2 に示すように円柱ないし円筒を、その母線に沿って剛な加圧盤で平行に圧縮するものである。したがって、この供試体の境界条件としては、加圧線上では変位、しかも圧力増加に伴って非線形的に加圧幅が拡大するような移動境界上での変位が与えられ、残りの部分は境界に垂直な応力成分が零という応力境界条件で与えられることになる。この種の問題は解析的に解くことは極めて困難なので、以下では簡単化して、境界条件は全て応力で与えられるものと仮定して解くことにする。

なお、本章の大部分は発表済であるので文献<sup>2,3)</sup>をも参照されたい。

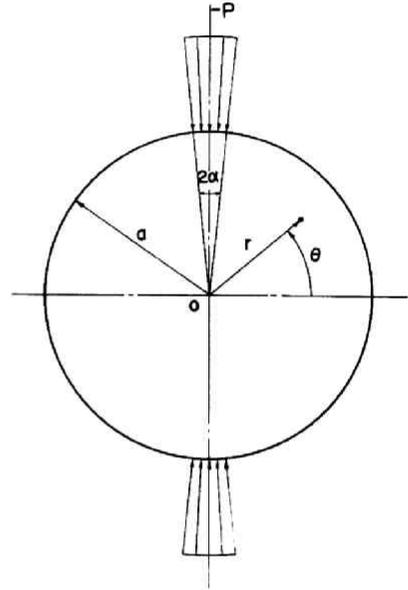


Fig.3.4.1 Schematic diagram of the Brazilian test and the coordinate system.

### 4.2 Fourier-Bessel 展開による解法

#### 4.2.1 問題の設定

Fig. 3.4.2 のようにリングの外側から表面力のみが作用する第一種の境界値問題を考える。材料は線形カップ・ストレス弾性理論に従うものとし、また平面ひずみ状態にあるものと仮定する。

境界条件は、極座標  $(r, \theta)$  表示により次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(a, \theta) &= p(\theta), \quad \tau_{r\theta}(a, \theta) = 0, \quad m_r(a, \theta) = 0 \\ \sigma_r(b, \theta) &= 0, \quad \tau_{r\theta}(b, \theta) = 0, \quad m_r(b, \theta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1)$$

ここに  $\sigma_r, \tau_{r\theta}, m_r$  は、それぞれ  $r = \text{const.}$  面上に作用する直応力、せん断応力ならびにカップル・ストレスを表わすものとする。

今、 $p(\theta)$  として

$$p(\theta) = \begin{cases} p, & \frac{\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \frac{3\pi}{2} - \alpha \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2} + \alpha \\ 0, & \text{残りの部分} \end{cases}$$

とすると、これは  $\theta$  に関して対称なので cosine 級数に展開されて、

$$\left. \begin{aligned} p(\theta) &= \frac{1}{2} f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \cos n\theta \\ f_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p \cos n\theta d\theta \end{aligned} \right\} (4.2.2)$$

で与えられる。

$p(\theta) = p = \text{const.}$  の場合には、式 (4.2.2) は簡単になって、

$$p(\theta) = \frac{2p\alpha}{\pi} + \sum_{n=2,4,\dots} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{4p}{\pi n} \sin n\alpha \cos n\theta \quad (4.2.3)$$

となる。

#### 4.2.2 Fourier-Bessel 展開による一般解

カップル・ストレス理論の場合の方程式 (2.2.2.3)

および (2.2.2.4) の極座標による一般解は、応力ならびに変位の一価性を考慮すると次のように与えられる。

$$\begin{aligned} \phi &= A_0 \ell_n r + B_0 r^2 + C_0 \theta \\ &+ (A_1 r^3 + B_1 r^{-1} + C_1 r \theta + D_1 r \ell_n r) \sin \theta \\ &+ (A'_1 r^3 + B'_1 r^{-1} + C'_1 r \theta + D'_1 r \ell_n r) \cos \theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (A_n r^{n+2} + B_n r^n + C_n r^{-n+2} + D_n r^{-n}) \sin n\theta \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty} (A'_n r^{n+2} + B'_n r^n + C'_n r^{-n+2} + D'_n r^{-n}) \cos n\theta \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

$$\begin{aligned} \psi &= a_0 \ell_n r + c_0 \theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n r^n + b'_n r^{-n}) \cos n\theta \\ &+ d_0 I_0\left(\frac{r}{\ell}\right) + e_0 K_0\left(\frac{r}{\ell}\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ d_n I_n\left(\frac{r}{\ell}\right) + e_n K_n\left(\frac{r}{\ell}\right) \right\} \sin n\theta \end{aligned}$$

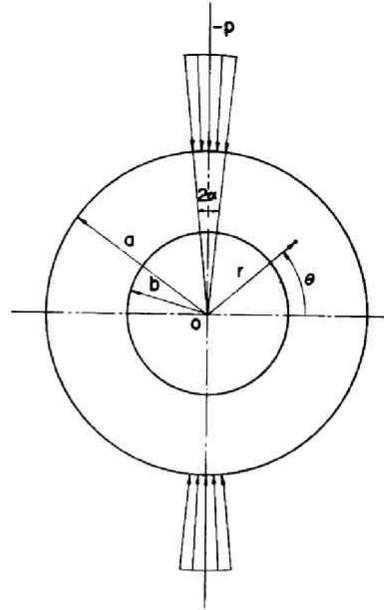


Fig.3.4.2 Schematic diagram of the ring test and the coordinate system.

$$+ \sum_{n=1} \left\{ d'_n I_n \left( \frac{r}{\ell} \right) + e'_n K_n \left( \frac{r}{\ell} \right) \right\} \cos n\theta \quad (4.2.5)$$

ここに  $I_n, K_n$  は第一種および第二種の  $n$  次の変形ベッセル関数である。今、ここで取り扱うような軸対称の問題では、応力関数は更に簡単になって次のように表わされる。

$$\phi = A_0 \ell_n r + B_0 r^2 + \sum_{n=2,4,\dots} (A_n r^{n+2} + B_n r^{-n} + C_n r^{-n+2} + D_n r^{-n}) \cos n\theta \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \psi &= a_0 \ell_n r + \sum_{n=2,4,\dots} (a_n r^n + b_n r^{-n}) \sin n\theta \\ &+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ d_n I_n \left( \frac{r}{\ell} \right) + e_n K_n \left( \frac{r}{\ell} \right) \right\} \sin n\theta \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

一方、適合条件式(2.2.25)は極座標では

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} (1 - \ell^2 r^2) \psi &= -2(1 - \nu) \ell^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} r^2 \phi \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \ell^2 r^2) \psi &= 2(1 - \nu) \ell^2 \frac{\partial}{\partial r} r^2 \phi \end{aligned} \right\} \quad (4.2.8)$$

と表わされる。この式に式(4.2.6)および(4.2.7)を代入して整理すると、

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= 0, & a_n &= 8(1 - \nu)(n+1) \ell^2 A_n \\ & & b_n &= 8(1 - \nu)(n-1) \ell^2 C_n \end{aligned} \right\} \quad (4.2.9)$$

を得る。

また、応力成分は、式(2.2.21)および(2.2.22)から求められて、次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r &= r^{-1} \phi_{,r} + r^{-2} \phi_{,\theta\theta} - r^{-1} \psi_{,n\theta} + r^{-2} \psi_{,\theta} \\ &= r^{-2} A_0 + 2B_0 \\ &+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ (-n+2)(n+1) r^n A_n - n(n-1) r^{n-2} B_n \right. \\ &\quad \left. - (n+2)(n-1) r^{-n} C_n - n(n+1) r^{-n-2} D_n \right\} \cos n\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ -n(n-1)r^{n-2}a_n + n(n+1)r^{-n-2}b_n \right\} \cos n\theta \\
& + \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(r^{-2}I_n - r^{-1}I'_n)d_n + n(r^{-2}K_n - r^{-1}K'_n)e_n \right\} \cos n\theta \quad (4.2.10)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= \phi_{,rr} + r^{-1}\psi_{,r\theta} - r^{-2}\psi_{,\theta} \\
&= -r^{-2}A_0 + 2B_0 \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ (n+2)(n+1)r^n A_n + n(n-1)r^{n-2}B_n \right. \\
&\quad \left. + (n-2)(n-1)r^{-n}C_n + n(n+1)r^{-n-2}D_n \right\} \cos n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(n-1)r^{n-2}a_n - n(n+1)r^{-n-2}b_n \right\} \cos n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(-r^{-2}I_n + r^{-1}I'_n)d_n + n(-r^{-2}K_n + r^{-1}K'_n)e_n \right\} \cos n\theta \quad (4.2.11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= -r^{-1}\phi_{,r\theta} + r^{-2}\phi_{,\theta} - r^{-1}\psi_{,r} - r^{-2}\psi_{,\theta\theta} \\
&= -r^{-2}a_0 \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(n+1)r^n A_n + n(n-1)r^{n-2}B_n \right. \\
&\quad \left. - n(n-1)r^{-n}C_n - n(n+1)r^{-n-2}D_n \right\} \sin n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(n-1)r^{n-2}a_n + n(n+1)r^{-n-2}b_n \right\} \sin n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ (n^2 r^{-2}I_n - r^{-1}I'_n)d_n + (n^2 r^{-2}K_n - r^{-1}K'_n)e_n \right\} \sin n\theta \quad (4.2.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{\theta r} &= -r^{-1}\phi_{,r\theta} + r^{-2}\phi_{,\theta} + \psi_{,rr} \\
&= -r^{-2}a_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(n+1)r^n A_n + n(n-1)r^{n-2} B_n \right. \\
& \quad \left. - n(n-1)r^{-n} C_n - n(n+1)r^{-n-2} D_n \right\} \sin n\theta \\
& + \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ n(n-1)r^{n-2} a_n + n(n+1)r^{-n-2} b_n \right\} \sin n\theta \\
& + \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ d_n I_n'' + e_n K_n'' \right\} \sin n\theta \tag{4.2.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_r &= \psi_{,r} \\
&= r^{-1} a_0 \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ nr^{n-1} a_n - nr^{-n+1} b_n \right\} \sin n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} \left\{ d_n I_n' + e_n K_n' \right\} \sin n\theta \tag{4.2.14}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_\theta &= r^{-1} \psi_{,\theta} \\
&= \sum_{n=2,4,\dots} n \left\{ r^{n-1} a_n + r^{-n-1} b_n \right\} \cos n\theta \\
&+ \sum_{n=2,4,\dots} nr^{-1} \left\{ d_n I_n + e_n K_n \right\} \cos n\theta \tag{4.2.15}
\end{aligned}$$

ここに  $I_n', K_n'$  などは  $r/\rho$  に関する偏導関数を表わすものとする。

式(4.2.10)~(4.2.15)を境界条件(4.2.1)に代入すると、未定係数  $8n+3$  個に対して、次のような  $8n+3$  個の方程式を得る。すなわち、 $r=a$  上の条件から、

$$b^{-2} A_0 + 2B_0 = \frac{1}{2} f_0 \tag{4.2.16}$$

$$a_0 = 0 \tag{4.2.17}$$

$$\begin{aligned}
& (-n+2)(n+1)a^n A_n - n(n-1)a^{n-2} B_n - (n+2)(n-1)a^{-n} C_n - n(n+1)a^{-n-2} D_n \\
& - n(n-1)a^{n-2} a_n + n(n+1)a^{-n-2} b_n
\end{aligned}$$

$$+ n( a^{-2} I_n - a^{-1} I'_n ) d_n + n( a^{-2} K_n a^{-1} K'_n ) e_n = f_n \quad ( 4.2.18 )$$

$$\begin{aligned} & n( n+1 ) a^n A_n + n( n-1 ) a^{n-2} B_n - n( n-1 ) a^{-n} C_n - n( n+1 ) a^{-n-2} D_n \\ & + n( n-1 ) a^{n-2} a_n + n( n+1 ) a^{-n-2} b_n \\ & + ( n^2 a^{-2} I_n - a^{-1} I'_n ) d_n + ( n^2 a^{-2} K_n - a^{-1} K'_n ) e_n = 0 \end{aligned} \quad ( 4.2.19 )$$

$$n a^{n-1} a_n - n a^{-n-1} b_n + I'_n d_n + K'_n e_n = 0 \quad ( 4.2.20 )$$

$r = b$  上の条件から,

$$b^{-2} A_0 + 2B_0 = 0 \quad ( 4.2.21 )$$

$$\begin{aligned} & ( -n+2 ) ( n+1 ) b^n A_n - n( n-1 ) b^{n-2} B_n - ( n+2 ) ( n-1 ) b^{-n-1} C_n - n( n+1 ) b^{-n-2} D_n \\ & - n( n-1 ) b^{n-2} a_n + n( n+1 ) b^{-n-2} b_n \\ & + n( b^{-2} I_n - b^{-1} I'_n ) d_n + n( b^{-2} K_n - b^{-1} K'_n ) e_n = 0 \end{aligned} \quad ( 4.2.22 )$$

$$\begin{aligned} & n( n+1 ) b^n A_n + n( n-1 ) b^{n-2} B_n - n( n-1 ) b^{-n} C_n - n( n+1 ) b^{-n-2} D_n \\ & + n( n-1 ) b^{n-2} a_n + n( n+1 ) b^{-n-2} b_n \\ & + ( n^2 b^{-2} I_n - b^{-1} I'_n ) d_n + ( n^2 b^{-2} K_n - b^{-1} K'_n ) e_n = 0 \end{aligned} \quad ( 4.2.23 )$$

$$n b^{n-1} a_n - n b^{-n-1} b_n + I'_n d_n + K'_n e_n = 0 \quad ( 4.2.24 )$$

および式 ( 4.2.9 ) の 2 個, 計  $8n + 3$  個の式を得る。

特に, 割裂試験の場合には, 円柱供試体を用いるので,  $b \rightarrow 0$  とした場合に,  $r = 0$  で応力が有限であるためには, 上式に於て

$$A_0 = C_n = D_n = 0, \quad b_n = e_n = 0 \quad ( 4.2.25 )$$

でなければならない。従って、応力関数に現われる未定係数は  $4n+2$  となる。これに対する条件式は、式 (4.2.18) ~ (4.2.20) および式 (4.2.9) の第1式の計  $4n$  個、および式 (4.2.16) および (4.2.17) の2個を得る。この  $4n+2$  個から、全ての係数  $a_0, B_0, A_n, B_n, C_n$  および  $d_n$  が決定されることになる。

なお、マイクロポラー弾性体の場合の諸式は、既に3.2.3の最後の部分で述べたように、上に述べた諸式を式 (3.2.26) および式 (2.3.12) で与えられる  $k$  を用いて

$$\begin{aligned} a_n &= 8(1-\nu)(n+1)k^2 A_n \\ b_n &= 8(1-\nu)(n-1)k^2 C_n \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

と変換することにより、容易に求められることになる。以下の解析では、カップル・ストレス理論によるもののみを示す。

#### 4.3 割裂供試体内の応力分布に及ぼすカップル・ストレス、Poisson比および载荷幅の影響

数値計算では容量の関係から  $n=50$  までを取って計算した。変形ベッセル関数の計算には、高次のものまで十分な精度で求めるために、まず50, 51次の値をMillerの方法で計算し、これより低次の値は漸化式を用いて順次計算した。変形ベッセル関数の値は、次数が増加すると急激に減少するけれども、省略することはできない場合が多い。未定係数の決定には、連立方程式の係数のオーダーがほぼ同じになるように修正した。特に、変形ベッセル関数を含む係数は余り小さいので、適当な値、例えば  $I_n(a/\ell)$ 、で割ってオーダーがほぼ同じとなるようにした。

荷重を含む断面およびこれに垂直で中心を通る平面上の応力の分布を Fig. 3.4.3 に示す。カップル・ストレスの影響は極めて顕著であることが分る。 $\ell/a$  が極めて小さければ、応力分布は古典弾性学より求められるものに近い。すなわち、荷重を含む断面上で、中央大部分の  $\sigma_\theta$  は一定値  $-P/\pi a$  ( $P=2a\alpha p$ ) を取り、また  $\sigma_r$  は中央で  $3P/\pi a$  であり境界に近づくにつれて、次第に増加する。 $\ell/a$  が増大するにつれて、応力の絶対値は減少し、 $\sigma_\theta$  が引張から圧縮に移り変わる点は中央に近づき、また  $\sigma_\theta$  は荷重境界で引張となる。例えば、 $\ell/a=0.2$  のとき、 $\sigma_\theta$  および  $\sigma_r$  は古典弾性等より求めた値のそれぞれの0.5および0.8倍程度となる。荷重方向と垂直な断面上の応力は  $\ell/a$  が増大するにつれて更に一様化される。

载荷幅の応力分布に及ぼす影響は Figs. 3.4.4 および 3.4.5 に示す。この影響は負荷された境界付近に限られる。载荷幅が増加すると、 $\sigma_\theta$  の零点が中央に近づき、また圧縮応力は一様化される。载荷幅の影響は、カップル・ストレスが大きいくらい小さくなる。古典弾性学より求めた応力分布は、Poisson比には無関係であるけれども、カップル・ストレス理論ではPoisson比の影響も見逃せない。Poissonの応力分布に及ぼす影響を Figs. 3.4.6 および 3.4.7 に示す。Poisson比が大きくなる程、 $\sigma_r$  および  $\sigma_\theta$  の絶対値

は一般に大きくなる。しかしながら、Poisson比の影響はそれ程顕著ではない。

$l/a$  と中央の  $\sigma_\theta$  および  $\sigma_r$  との関係を Fig. 3.4.8 に示す。

$l/a$  が増大すると、 $\sigma_r$  および  $\sigma_\theta$  の絶対値は減少することがよく分る。

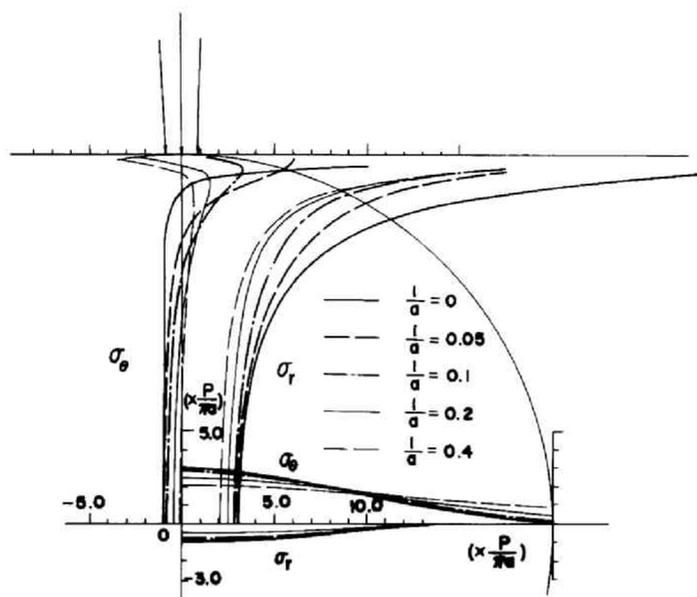


Fig.3.4.3 Influence of couple-stresses on circumferential and radial stresses on the diametral planes in the loading direction and its perpendicular.

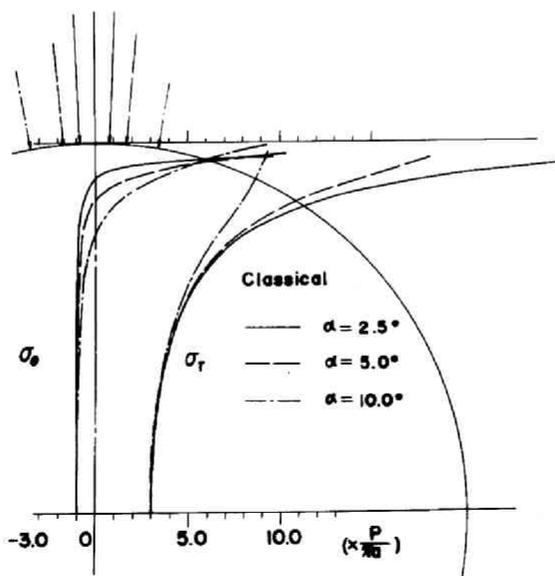


Fig.3.4.4 Influence of loading width on circumferential and radial stresses in the loading direction (the classical theory).

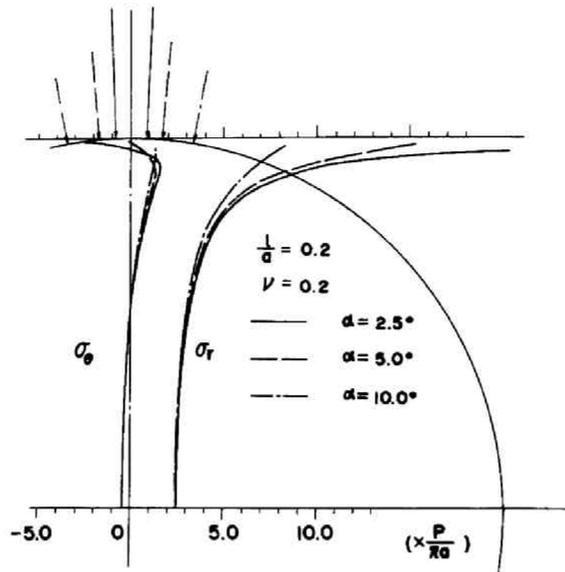


Fig.3.4.5 Influence of loading width on circumferential and radial stresses on the diametral plane in the loading direction (the couple-stress theory,  $l/a = 0.2$  and Poisson's ratio  $\nu = 0.2$ ).

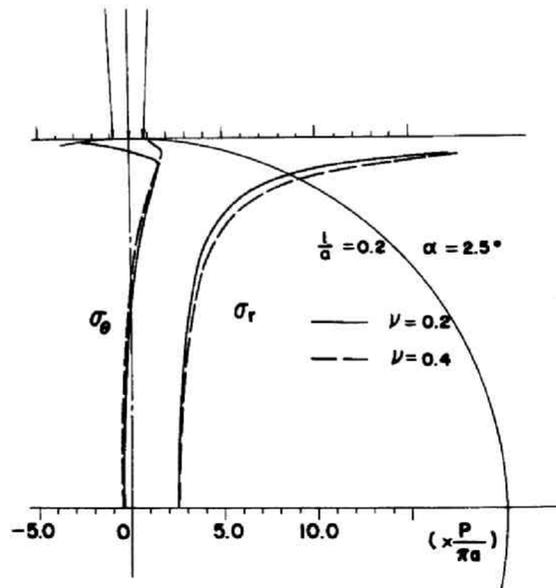


Fig.3.4.6 Influence of Poisson's ratio on circumferential and radial stresses on the diametral plane in the loading direction (the couple-stress theory,  $l/a = 0.2$  and  $\alpha = 2.5^\circ$ ).

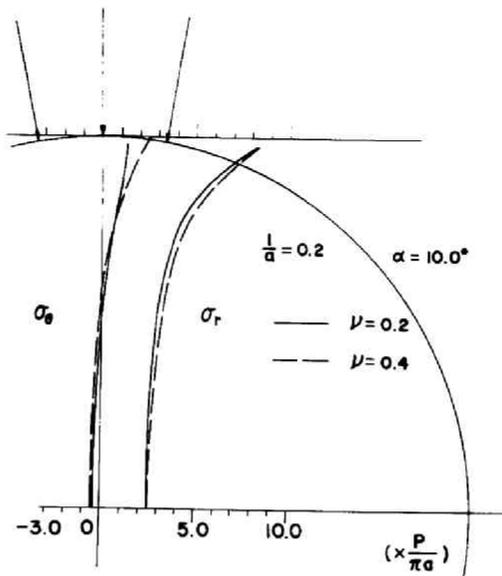


Fig.3.4.7 Influence of Poisson's ratio on circumferential and radial stresses on the diametral plane in the loading direction (the couple-stress theory,  $\ell/a = 0.2$  and  $\alpha = 10.0^\circ$ ).

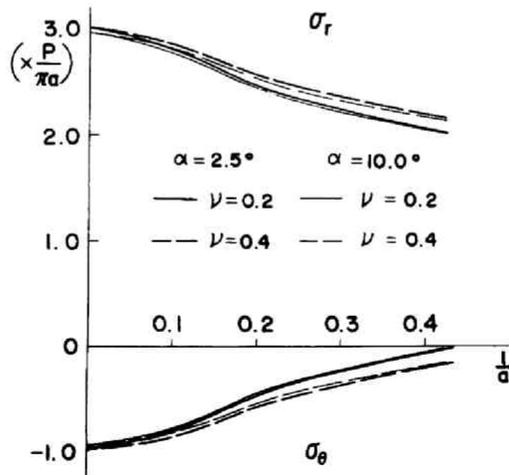


Fig.3.4.8 Variations of circumferential and radial stresses at the center with the ratio  $\ell/a$ .

#### 4.4 リング試験供試体内の応力分布に及ぼすカップル・ストレスおよび Poisson比の影響

数値計算に際しては、割裂試験の場合と同様な手法を用いた。リング内外径の比  $b/a \geq 0.5$  の場合には  $n=50$  までを、 $b/a=0.3$  の場合には  $n=30$  までを取って数値解を求めた。

代表的な応力分布を一括して、Fig. 3.4.9 に示す。この結果は、荷重が  $2\alpha a$  ( $\alpha=2.5^\circ$ ) の円弧に沿って一様に分布 (荷重強度  $p$ ) している場合のものである。載荷幅の異なる場合の影響は、割裂試験の場合から推定できるので、ここでは改めて取り上げなかった。また、図の表示は、古典弾性学より得られる割裂試験供試体中心の引張応力  $P/\pi a$  ( $P=2\alpha a p$ ) を用いて無次元化した。これらの図から、カップル・ストレスすなわち  $\ell$  の影響は極めて著しいことが分る。 $\ell$  が増加すれば、応力の大きさは急激に減少して次第に一様化される。また、リングの内外径の比  $b/a$  が大きくなるにつれて、応力分布は曲り梁より求められるものに次第に近づき、逆に、この比が減少すると、供試体内の応力分布は、リング内側境界付近を除けば、割裂試験より得られるものに近づくことが分る。

リングの荷重方向の対称面上の内側境界上での応力を、内外径の比の関数として図示すると、Fig. 3.4.10 を得る。 $\ell$  が増大すれば、応力集中は急激に減少することが明瞭である。しかしながら、内径がどれ程小さくなくても、境界上の応力は割裂試験の応力にはならない。 $\ell$  が増大するにつれて、前者は後者に近づく。しかしながら、極限状態、すなわち  $b/a \rightarrow 0$  はカップル・ストレス理論では無意味となることに注意されたい。なぜならば、 $\ell$  は内径より小さいが、少なくとも同じオーダーでなければ、材料の内部構造のために乱されて、本当の応力集中は生じないからである。

応力分布に及ぼす Poisson比の例を Fig. 3.4.11 に示す。Poisson比が減少すれば、応力分布はより一様となる。しかしながら、その影響は、 $\ell$  に較べて二次的なものである。

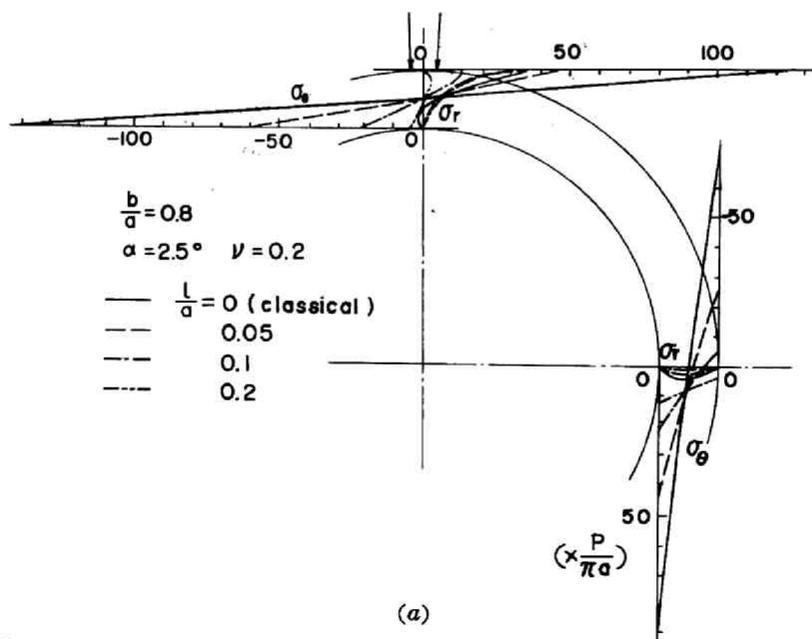


Fig.3.4.9 Influence of couple-stresses on stress distributions. Poisson's ratio  $\nu=0.2$  and the ratio  $b/a=0.8$  (a), 0.5 (b) and 0.3 (c).

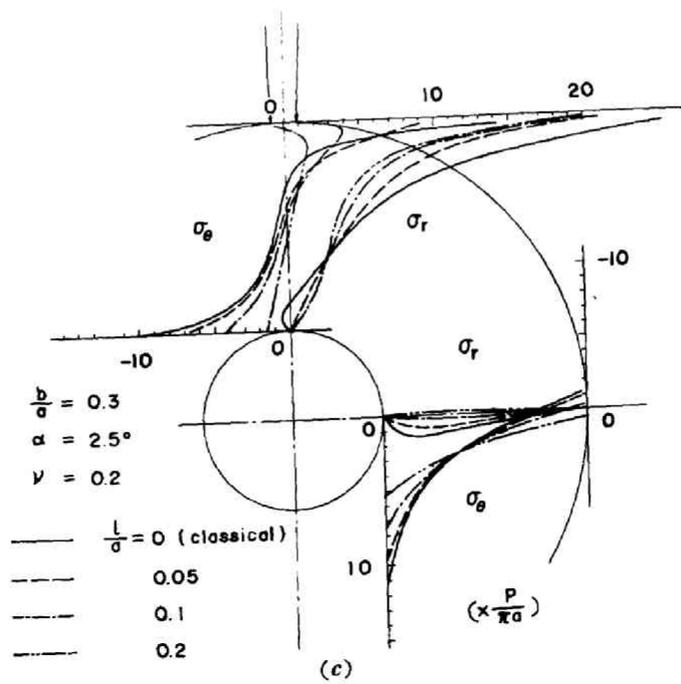
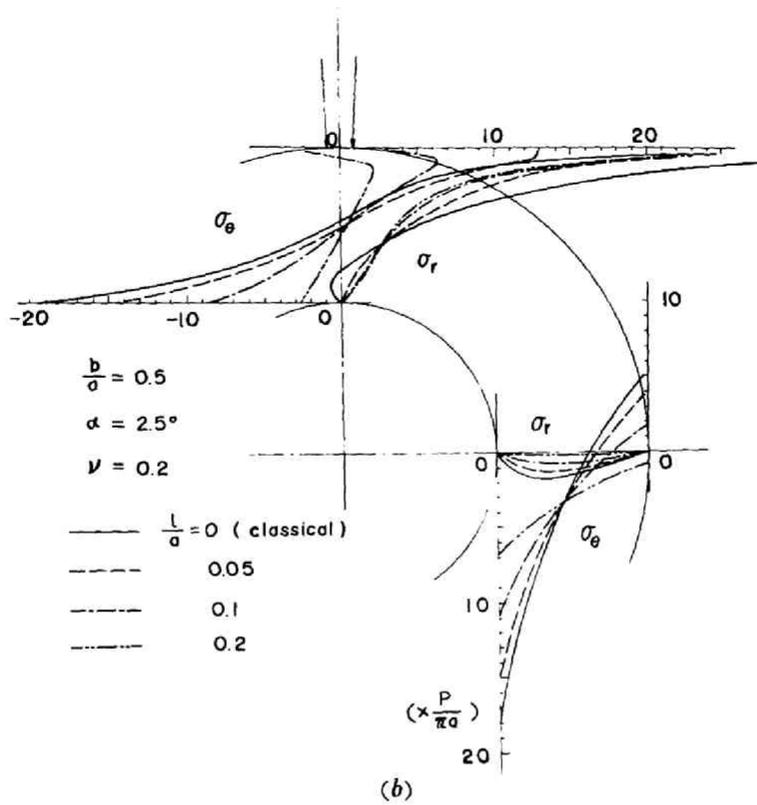


Fig.3.4.9 (continued).

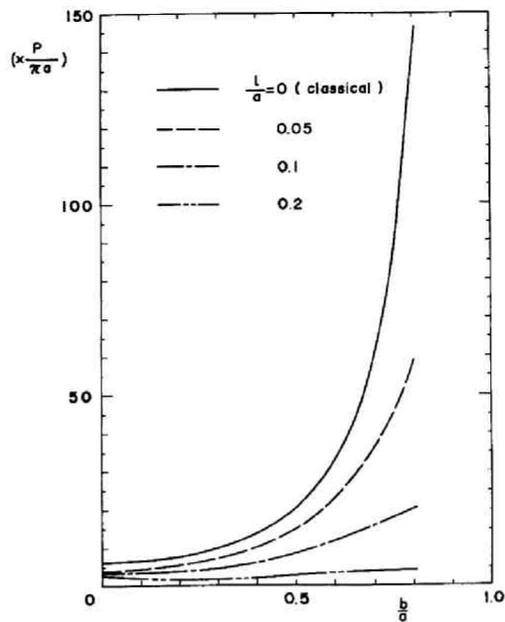


Fig.3.4.10 Variations of stresses at the inner edge on the diametral section in the loading direction with the ratio  $b/a$ .

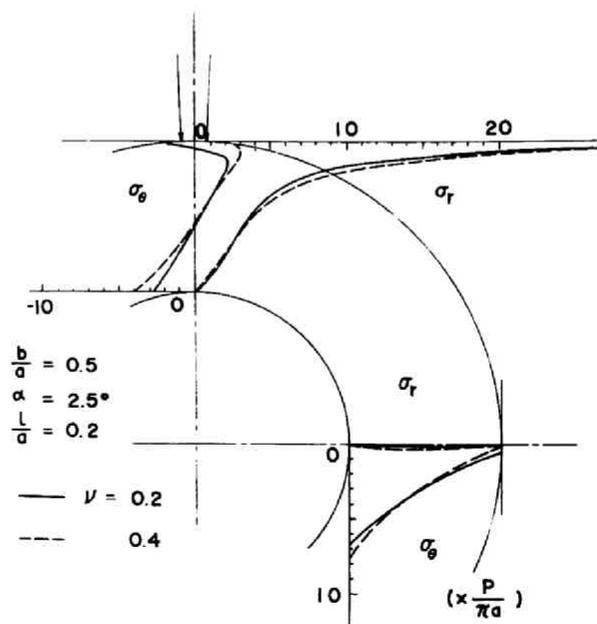


Fig.3.4.11 Influence of Poisson's ratio on stress distributions.

## 第 5 章 インデンテーション試験供試体内の応力分布

### 5.1 はじめに

インデンテーション試験，すなわち立方ないし直方体供試体の対向面の中央部を幅の狭い剛体を介して加圧する試験法は，割裂試験と極めて類似した方法であり，岩質材料の引張強度を推定する際にしばしば用いられているものである。<sup>1)</sup> 実際の試験条件は，加圧部分は変位で，残りの部分は全て応力で与えられることになる。この種の混合-混合境界値問題は解析的に取り扱うことが極めて困難である。ここでは問題を簡単化して応力負荷の条件の下に Fourier 級数解を求めることにする。なお，本章の内容の大部分は発表済であるので文献<sup>2)</sup>をも参照されたい。

### 5.2 Fourier 級数による解

#### 5.2.1 問題の設定

Fig. 3.5.1 に示すように直方体の対向両側面中央に幅  $2c$  にわたり分布荷重  $p(x)$  が作用するものとし，残りの部分は応力自由境界とする。対象とする材料は線形カップル・ストレス弾性理論に伴うものとし，また平面ひずみ状態にあるものとする。この場合の境界条件はデカルト座標を用いて，次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x(\pm a, y) &= 0, \quad \tau_{xy}(\pm a, y) = 0, \quad m_x(\pm a, y) = 0 \\ \sigma_y(x, \pm b) &= \begin{cases} \mp p(x), & |x| \leq c \\ 0, & \text{残りの部分} \end{cases} \quad \int_{-c}^c p(x) dx = P \\ \tau_{yx}(x, \pm b) &= 0, \quad m_y(x, \pm b) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1)$$

荷重  $p(x)$  が  $y$  軸に関して対称であるとする，周期  $4a$  の cosine 級数に展開されて次のようになる。

$$p(x) = \sum_{n=1,3,\dots} a_n \cos \alpha_n x$$

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{a}, \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^c p(x) \cos \alpha_n x dx$$

特に， $p(x) = p = \text{const.}$  の場合には，簡単になって，

$$p = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{2p}{a\alpha_n} \sin \alpha_n c \cos \alpha_n x, \quad a_n = \frac{2p}{a\alpha_n} \sin \alpha_n c \quad (5.2.2)$$

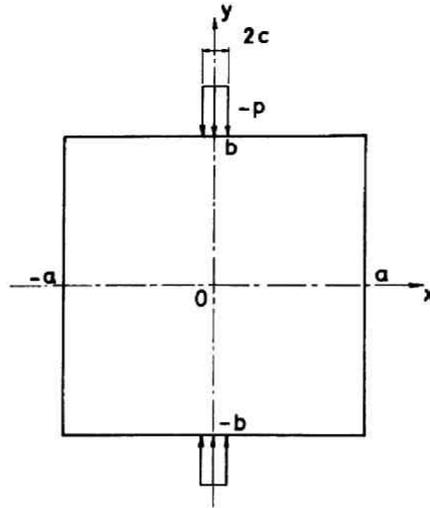


Fig.3.5.1 Schematic diagram of the indentation test and the coordinate system.

### 5.2.2 Fourier 級数による解

場の方程式、応力関数、応力成分、変位成分は、3.1.2 で与えられたものと全く同じであるのでここには再録しない。境界条件 (5.2.1)<sub>1</sub>, (5.2.1)<sub>3</sub>, (5.2.1)<sub>4</sub> および (5.2.1)<sub>6</sub>, および適合条件式を用いると、応力関数 (3.2.8), (3.2.9) に含まれる未定係数  $A_n, B_n, \dots, C_n, D_n, \dots$  間の関係は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 A_n &= -\frac{a_n}{\alpha_n^2 \cosh \alpha_n b} - \alpha_n b \tanh \alpha_n b \cdot B_n \\
 A'_m &= -\beta_m a \tanh \beta_m a \cdot B'_m \\
 C_n &= -4(1-\nu) d_n^2 \ell^2 B_n \\
 C'_m &= 4(1-\nu) \beta_m^2 \ell^2 B'_m \\
 D_n &= 4(1-\nu) \ell^2 \frac{d_n^3 \cosh \alpha_n b}{\tau_n \cosh \tau_n b} \cdot B_n \\
 D'_m &= -4(1-\nu) \ell^2 \frac{\beta_m^3 \cosh \beta_m a}{\tau_m \cosh \tau_m a} \cdot B'_m
 \end{aligned} \right\} \quad (5.2.3)$$

残り2個の式は、境界条件(5.2.1)<sub>2</sub> および(5.2.1)<sub>5</sub> より3.1.3で述べた方法により与えられる。

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{b} \frac{\alpha_n^3}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left[ \cosh \alpha_n b A_n \right. \\
 & \quad \left. + \left\{ \alpha_n b \sinh \alpha_n b + \frac{2\beta_m^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b \right\} B_n \right] \\
 & + \beta_m^2 \sinh \beta_m a A'_m + \beta_m^2 (\sinh \beta_m a + \beta_m a \cosh \beta_m a) B'_m \\
 & - \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{b} \frac{\alpha_n^3}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \alpha_n b C_n + \beta_m^2 \sinh \beta_m a C'_m \\
 & - \sum_{n=1,3,\dots} (-1)^{\frac{n-1}{2}} (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{2}{b} \frac{\gamma_n^3}{\gamma_n^2 + \beta_m^2} \cosh \gamma_n b D_n + \beta_m^2 \sinh \gamma_m a D'_m = 0 \\
 & \alpha_n^2 \sinh \alpha_n b A_n + \alpha_n^2 (\sinh \alpha_n b + \alpha_n b \cosh \alpha_n b) B_n \\
 & + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{b} \frac{\beta_m^3}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \left[ \cosh \beta_m a A'_m \right. \\
 & \quad \left. + \left\{ \beta_m a \sinh \beta_m a + \frac{2\alpha_n^2}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \beta_m a \right\} B'_m \right] \\
 & - \alpha_n^2 \sinh \alpha_n b C_n + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{a} \frac{\beta_m^3}{\alpha_n^2 + \beta_m^2} \cosh \beta_m a C'_m \\
 & - \alpha_n^2 \sinh \gamma_n b D_n + \sum_{m=1,3,\dots} (-1)^{\frac{m-1}{2}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{2}{a} \frac{\gamma_m^3}{\alpha_n^2 + \gamma_m^2} \cosh \gamma_m a D'_m = 0
 \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

未定係数は8n個、これに対して条件式は(5.2.3)の6n個、(5.2.4)の2n個、合計8n個となり、これらを連立して解いて未定係数が求められる。応力関数は式(3.2.8)、(3.2.9)で与えられ、また応力は、式(3.2.11)~(3.2.16)で、変位、回転は式(3.2.17)~(3.2.19)で与えられる。

なお、材料をマイクロ・ポラー弾性体と仮定すれば、3.2.3の最後に述べたように、式(3.2.36)、(3.2.37)を用いて、上述の応力関数、応力および変位、ならびに境界条件等は全て修正されなければならない。以下では、2.2の最後に述べた理由により、カップル・ストレス理論による結果のみを示す。

### 5.3 応力分布に及ぼすカップル・ストレス Poisson比ならびに载荷幅の影響

数値計算にあたっては、第3章の場合と同様に  $n = m = 79$  まで採用し、同様な手法を適用した。材料定数としては、 $\ell/a = 0$  (古典弾性学)、0.1、0.2 および 0.4、Poisson比  $\nu = 0.1$ 、0.2 および 0.3 と

し、また  $c/a = 1/20, 1/10$  および  $1/5$  とした。

以下では、応力は全て  $P/\pi a$  ( $P = 2cp$ ) で割って無次元化して示した。

荷重幅を一定とした場合 ( $c/a = 1/20$ ) について、応力分布に及ぼすカップル・ストレスの影響を Fig. 3.5.2 に示す。 $\ell$  の影響は、割裂試験の場合と同様に極めて顕著である。応力分布は、割裂試験の場合と殆んど同じである。 $\ell = 0$  の場合には、応力分布は古典弾性学より得られるものに一致する。すなわち、荷重方向の供試体称軸上の  $\sigma_x$  は、中心で  $-P/\pi a$ 、中心から約  $0.8a$  まで、ほぼ一定値  $-P/\pi a$  を保持し、それより外側では境界に近づくにつれて圧縮応力になり、急激に増大する。また、 $\sigma_y$  は中心で  $3P/\pi a$  となり、中心から約  $0.5a$  までは徐々に約  $4P/\pi a$  まで拡大し、以後は負荷境界に近づくにつれて急激に増大して、遂には境界上で与えられた表面力  $p$  と一致する。

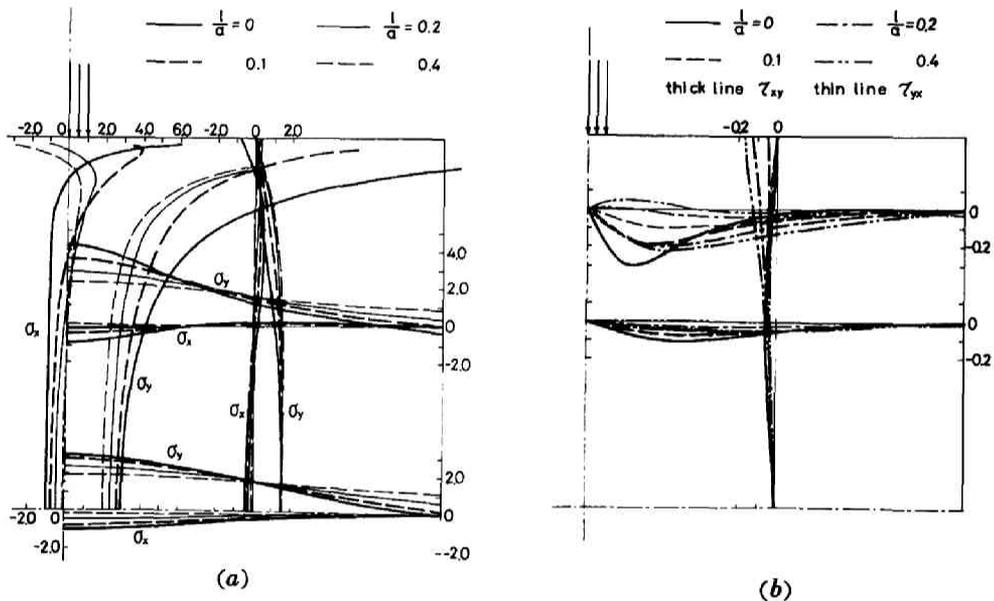


Fig.3.5.2 Infence of couple-stresses on stress distributions. Poisson's ratio  $\nu = 0.2$ .

$\ell/a$  が大きくなる程、応力の大きさは一般に減少する。特に、荷重方向の供試体対称軸上（想定破断面上）の  $\sigma_x$  の減少は著しく、同時に引張応力域も急激に減少する。例えば、 $\ell/a = 0.2$  の場合には、中心では、 $\sigma_x = 0.468P/\pi a$  となり、また、引張応力域は中央から約  $0.6$  までの範囲となる。 $\sigma_y$  に関しては、 $\sigma_x$  程顕著ではないけれども、全体的に減少して、より一定値に近づく。従って、一定圧縮応力域が増大する。例えば、 $\ell/a = 0.2$  の場合には、中心で  $\sigma_y = 2.329P/\pi a$  となり、中心より約  $0.7a$  までわずかしか増加しない。せん断応力も全般的には  $\ell/a$  が増加する程、一様化される。しかしながら、境界に平行な面に働くせん断応力は、境界近くで逆に増大する。

載荷幅を変化させた場合に生ずる応力分布を一括して Fig. 3.5.3 に示す。カップル・ストレスの影響は、Fig. 3.5.2 から推定されるので、この図では古典弾性学による結果のみを示した。境界近くを除けば、載荷幅を変化させても応力分布はあまり変化しない。ただ、載荷幅を増大すれば、応力分布は若干一様化され、また荷重方向の対称軸上での  $\sigma_x$  が零となる点が若干供試体中央に向けて移動し、引張応力域が若干減少する。

応力分布に及ぼす Poisson 比の影響を Fig. 3.5.4 に示す。ここでは、 $l/a = 0.2$  の場合についてのみ比較した。Poisson 比が小さくなると、応力の大きさは若干減少する。しかし、その影響は小さい。

供試体中心での引張応力  $\sigma_x$  および圧縮応力  $\sigma_y$  と  $l/a$  との関係を Fig. 3.5.5 に示す。 $l/a$  が増大するにつれて、応力の大きさは減少する。特に、引張応力の大きさは著しく減少する。この応力と  $l/a$  との関係は、載荷幅の影響をほとんど受けないことが分る。

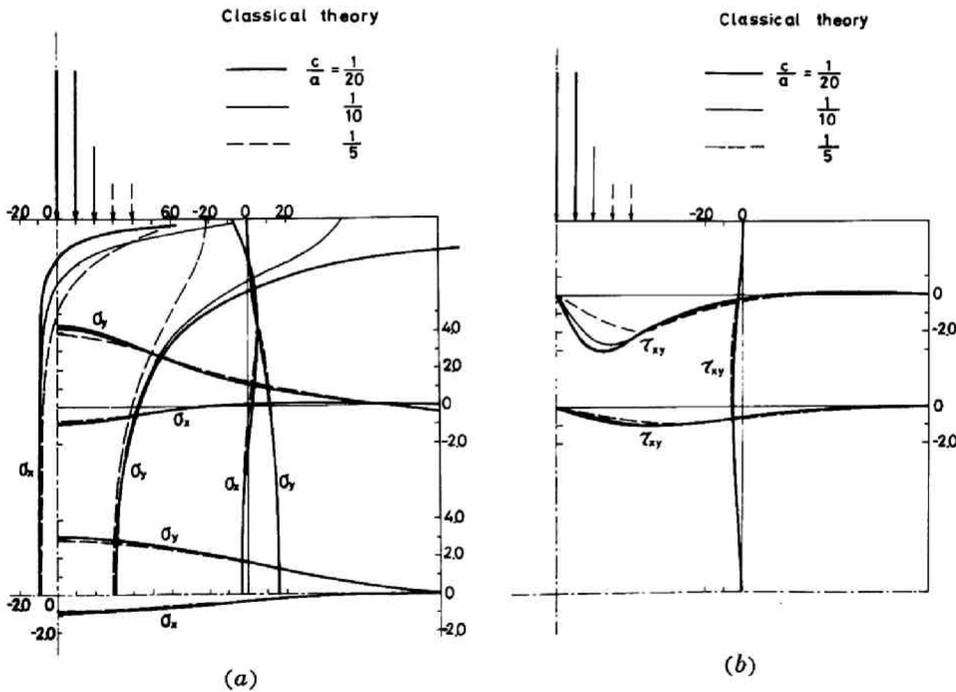


Fig. 3.5.3 Influence of loading width on stress distributions. Poisson's ratio  $\nu = 0.2$ .

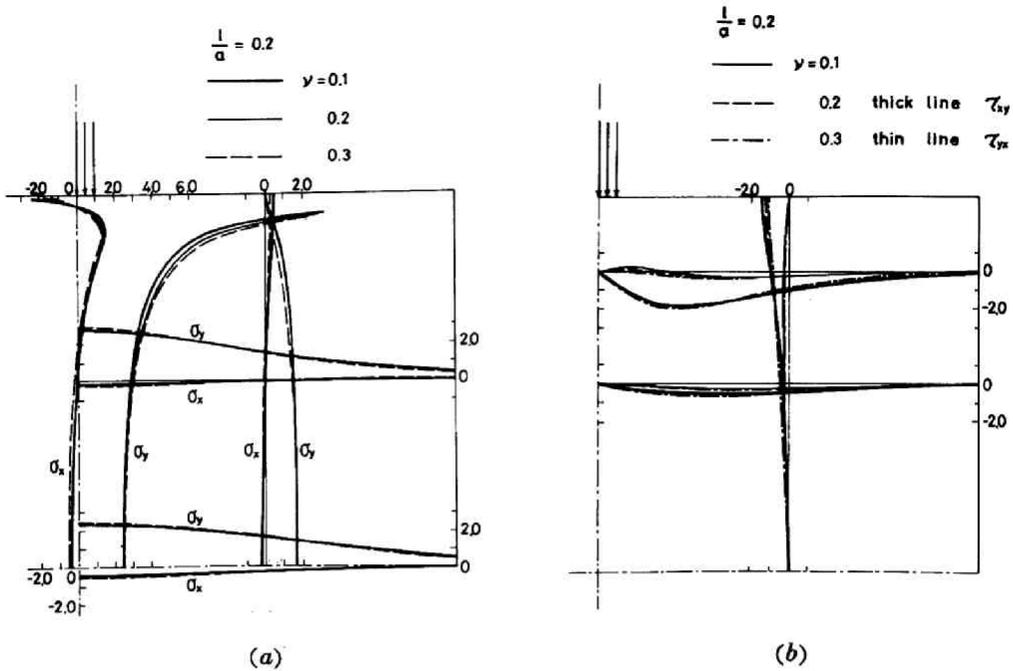


Fig.3.5.4 Influence of Poisson's ratio on stress distributions (the couple-stress theory,  $l/a = 0.2$ ).

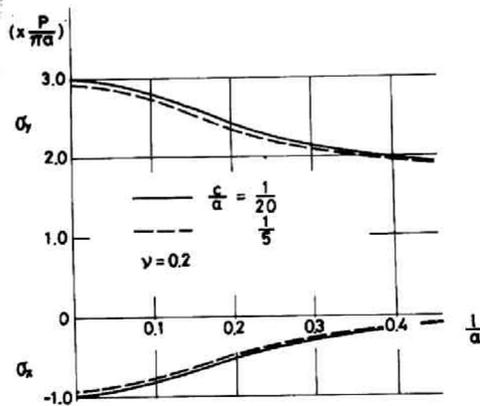


Fig.3.5.5 Variations of stresses at the center of the specimen with the ratio  $l/a$ .

## 第 6 章 異方性供試体内の応力分布

### 6.1 はじめに

今までの理論ならびに解析は、等方な中央対称 (centrosymmetric) 弾性体に関するものであった。しかしながら、実在の材料では、この仮定が適切でない場合も多いと考えられる。以下では、今までの理論を更に一般化して、異方性線形カップル・ストレス弾性理論を誘導し、2, 3の具体的な供試体内の応力分布の問題に適用してみる。異方性は平面的(rectilinear)であると仮定する。従って、以下では、デカルト座標のみを基準座標として用いることにする。なお、曲線異方性の場合にも容易に拡張できるが、ここでは省略する。

### 6.2 異方性線形カップル・ストレス弾性理論の概要

異方性の特質は、構成式にある。従って 2.1 で述べた等方中央対称弾性体の基礎方程式は、構成方程式を除き、そのまま異方性線形カップル・ストレス弾性理論の基礎式として採用することができる。すなわち、変位とひずみ、回転および曲率との幾何学的な関係は、式(2.2.1)～(2.2.3)で表わされ、釣り合い式は式(2.2.13)および(2.2.14)で表わされる。また、適合条件式は、式(2.2.16)および(2.2.17)で表わされることになる。

構成式は、一般的な形では、次のように表わされる。<sup>1)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \tau^{(\alpha\beta)} &= E_{r\delta}^{\alpha\beta} d^{\tau\delta} + K_{r\delta}^{\alpha\beta} \kappa^{\tau\delta} \\ m^{\alpha\beta} &= M_{r\delta}^{\alpha\beta} \kappa^{\tau\delta} + T_{r\delta}^{\alpha\beta} d^{\tau\delta} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1)$$

ここに  $E_{r\delta}^{\alpha\beta}$ ,  $M_{r\delta}^{\alpha\beta}$ , などは材料定数である。 応力とカップル・ストレスとの相互作用はないと

仮定すると、 $K_{r\delta}^{\alpha\beta} = T_{r\delta}^{\alpha\beta} = 0$  となる。以下ではこの場合のみを取り扱う。この仮定により次のような対称性が成立する。

$$\left. \begin{aligned} E_{r\delta}^{\alpha\beta} &= E_{r\delta}^{\beta\alpha} = E_{\delta r}^{\alpha\beta} = E_{\delta r}^{\beta\alpha} = E_{\alpha\beta}^{\tau\delta} \\ M_{r\delta}^{\alpha\beta} &= M_{r\delta}^{\beta\alpha} = M_{\delta r}^{\alpha\beta} = M_{\delta r}^{\beta\alpha} = M_{\alpha\beta}^{\tau\delta} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.2)$$

最後の式は、直交直線座標系に対してのみ(共変および反変テンソアの差がないので)成立する式である。

また、構成式は、変形係数  $D_{r\delta}^{\alpha\beta}$  および  $N_{r\delta}^{\alpha\beta}$  を用いて、次のようにも表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} d^{\alpha\beta} &= D_{r\delta}^{\alpha\beta} \tau^{(r\delta)} \\ m^{\alpha\beta} &= N_{r\delta}^{\alpha\beta} k^{r\delta} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3)$$

変形係数の間にも、次のような対称関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} D_{r\delta}^{\alpha\beta} &= D_{r\delta}^{\beta\alpha} = D_{\delta r}^{\alpha\beta} = D_{\delta r}^{\beta\alpha} = D_{\alpha\beta}^{r\delta} \\ N_{r\delta}^{\alpha\beta} &= N_{r\delta}^{\beta\alpha} = N_{\delta r}^{\alpha\beta} = N_{\delta r}^{\beta\alpha} = N_{\alpha\beta}^{r\delta} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4)$$

ここに示した剛性係数ならびに変形係数は、4階のテンサーであるので、対称性を考慮しても、最も一般的な場合の独立な係数の数は、 $E_{r\delta}^{\alpha\beta}$ ,  $M_{r\delta}^{\alpha\beta}$ ,  $(D_{r\delta}^{\alpha\beta}, N_{r\delta}^{\alpha\beta})$  それぞれ21個、計42個となる。実際の材料では、対称面が考えられることが多いので、この数は更に減少する。特に実際問題として最も重要である直交異方性の場合には、独立な係数の数は、それぞれ9個、計18個となる。等方中央対称の場合には、それぞれ2個、計4個の独立な係数で表わされることになる。剛性係数  $E_{r\delta}^{\alpha\beta}$  および変形係数  $D_{r\delta}^{\alpha\beta}$  の詳細に関しては、例えば Love,<sup>2)</sup> あるいは Lekhnitskii<sup>3)</sup> を参照されたい。曲げ剛性係数  $M_{r\delta}^{\alpha\beta}$  および曲げ変形係数  $N_{r\delta}^{\alpha\beta}$  についても、同様な関係が成立する。

今、材料は直交異方性、すなわち、直交した3つの対称面を有すると仮定しよう。この場合には、この対称面に垂直な座標軸 ( $x = x^1, y = x^2, z = x^3$ ) を選ぶと、独立な係数は、 $E_{11}^{11}, E_{22}^{11}, E_{22}^{22}, E_{33}^{11}, E_{33}^{22}, E_{33}^{33}, E_{23}^{23}, E_{13}^{13}, E_{12}^{12}$  などとなる。

さらに、ここで問題にしている平面ひずみ状態では、独立な係数は、 $E_{11}^{11}, E_{22}^{11}, E_{22}^{22}, E_{12}^{12}; M_{23}^{23}, M_{13}^{13}$ , あるいは、 $F_{11}^{11}, F_{22}^{11}, F_{22}^{22}, F_{12}^{12}; N_{23}^{23}, N_{13}^{13}$  のみとなる。ここに  $F_{r\delta}^{\alpha\beta}$  は  $D_{r\delta}^{\alpha\beta}$  を用いて次のように与えられるものである。

$$F_{r\delta}^{\alpha\beta} = D_{r\delta}^{\alpha\beta} - \frac{D_{33}^{\alpha\beta} D_{r\delta}^{33}}{D_{33}^{33}} \quad (6.2.5)$$

従って、異方性の構成式は次のように表わされることになる。

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{(12)} \\ m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{11}^{11} & E_{22}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ E_{22}^{11} & E_{22}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_{12}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{pmatrix} \quad (6.2.6)$$

或いは

$$\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{12} \\ \kappa_{13} \\ \kappa_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11}^{11} & F_{11}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ F_{22}^{11} & F_{22}^{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{12}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{13}^{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \tau_{22} \\ \tau_{(12)} \\ m_{13} \\ m_{23} \end{pmatrix} \quad (6.2.7)$$

これらの係数の間には、

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} E_{11}^{11} & E_{11}^{22} & 0 \\ E_{22}^{11} & E_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{12}^{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{11}^{11} & F_{11}^{22} & 0 \\ F_{22}^{11} & F_{22}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{12}^{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{13}^{13} & 0 \\ 0 & M_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{13}^{13} & 0 \\ 0 & N_{23}^{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6.2.8)$$

という関係が成立する。

さて、次に一般的な平面ひずみの問題として、座標軸が  $z = x^3$  軸のまわりに、Fig. 3.6.1 のように  $\theta$  だけ反時計方向に回転した場合を考えてみよう。この場合には、弾性主軸と座標軸は一致しないから、式(6.2.6)および(6.2.7)は、次のように変換される。

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{22} \\ \bar{\tau}_{(12)} \\ \bar{m}_{13} \\ \bar{m}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{E}_{11}^{11} & \bar{E}_{11}^{22} & \bar{E}_{11}^{12} & 0 & 0 \\ \bar{E}_{22}^{11} & \bar{E}_{22}^{22} & \bar{E}_{22}^{12} & 0 & 0 \\ \bar{E}_{12}^{11} & \bar{E}_{12}^{22} & \bar{E}_{12}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{13}^{13} & \bar{M}_{13}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{M}_{23}^{13} & \bar{M}_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_{11} \\ \bar{d}_{22} \\ \bar{d}_{12} \\ \bar{\kappa}_{13} \\ \bar{\kappa}_{23} \end{pmatrix} \quad (6.2.9)$$

或いは,

$$\begin{pmatrix} \bar{d}_{11} \\ \bar{d}_{22} \\ \bar{d}_{12} \\ \bar{\kappa}_{13} \\ \bar{\kappa}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{11}^{11} & \bar{F}_{11}^{22} & \bar{F}_{11}^{12} & 0 & 0 \\ \bar{F}_{22}^{11} & \bar{F}_{22}^{22} & \bar{F}_{22}^{12} & 0 & 0 \\ \bar{F}_{12}^{11} & \bar{F}_{12}^{22} & \bar{F}_{12}^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{13}^{13} & \bar{N}_{13}^{23} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{N}_{23}^{13} & \bar{N}_{23}^{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\tau}_{11} \\ \bar{\tau}_{22} \\ \bar{\tau}_{(12)} \\ \bar{m}_{13} \\ \bar{m}_{23} \end{pmatrix} \quad (6.2.10)$$

ここにバー(-)をつけたのは、新しい座標系 ( $\bar{x} = \bar{x}^1, \bar{y} = \bar{x}^2$ ) に関する諸量を表わすという意味である。

新しい座標系に対する剛性係数ならびに変形係数は、4階のテンソルであるので、次の変換則に従って求められる。

$$\bar{E}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = E_{kl}^{ij} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^\delta} \quad (6.2.11)$$

$\bar{M}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \bar{F}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}, \bar{N}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$  に関しても同様な関係が成立する。

座標変換式は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}^1 &= x^1 \cos\theta + x^2 \sin\theta \\ \bar{x}^2 &= -x^1 \sin\theta + x^2 \cos\theta \\ \bar{x}^3 &= x^3 \\ x^1 &= \bar{x}^1 \cos\theta - \bar{x}^2 \sin\theta \\ x^2 &= \bar{x}^1 \sin\theta + \bar{x}^2 \cos\theta \\ x^3 &= \bar{x}^3 \end{aligned} \right\} (6.2.12)$$

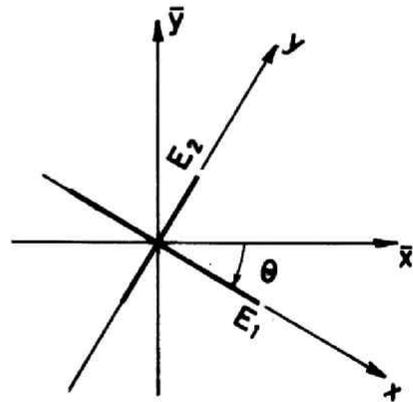


Fig. 3.6.1 Coordinate system and the Young's moduli of orthotropic elastic body.

で与えられているので、式(6.2.11)に現われる

$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1}, \dots$ 等は

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^1} = \cos\theta = \ell_1^1, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^1} = -\sin\theta = \ell_1^2$$

$$\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^2} = \sin\theta = \ell_2^1, \quad \frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^2} = \cos\theta = \ell_2^2$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} = \cos\theta = \ell_1^1, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} = \sin\theta = \ell_2^1$$

$$\frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} = -\sin\theta = \ell_1^2, \quad \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} = \cos\theta = \ell_2^2$$

と表わされ、これを用いると、式(6.2.11)は、

$$\bar{E}_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = E_{kl}^{ij} \ell_i^\alpha \ell_j^\beta \ell_\gamma^k \ell_\delta^l \quad (6.2.13)$$

とも書き表わせる。

これを用いて、具体的な変換式を示せば、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^{11} &= \{ E_{11}^{11} (\ell_1^1)^2 + 2E_{22}^{11} (\ell_2^1)^2 + 2E_{12}^{12} (\ell_2^1)^2 \} (\ell_1^1)^2 + E_{22}^{22} (\ell_2^1)^4 \\ \bar{E}_{11}^{22} &= \{ E_{11}^{11} (\ell_1^2)^2 + E_{22}^{11} (\ell_2^2)^2 \} (\ell_1^1)^2 + \{ E_{22}^{11} (\ell_1^2)^2 + E_{22}^{22} (\ell_2^2)^2 \} (\ell_2^1)^2 \\ &\quad + 2E_{12}^{12} \ell_1^1 \ell_2^1 \ell_1^2 \ell_2^2 \\ \bar{E}_{22}^{22} &= \{ E_{11}^{11} (\ell_1^2)^2 + 2E_{22}^{11} (\ell_2^2)^2 + 2E_{12}^{12} (\ell_2^2)^2 \} (\ell_1^2)^2 + E_{22}^{22} (\ell_2^2)^4 \\ \bar{E}_{12}^{11} &= \{ E_{11}^{11} \ell_1^1 \ell_1^2 + E_{22}^{11} \ell_2^1 \ell_2^2 + E_{12}^{12} \ell_2^1 \ell_2^2 \} (\ell_1^1)^2 \\ &\quad + \{ E_{22}^{11} \ell_1^1 \ell_1^2 + E_{22}^{22} \ell_2^1 \ell_2^2 + E_{21}^{21} \ell_1^1 \ell_1^2 \} (\ell_2^1)^2 \\ \bar{E}_{12}^{22} &= \{ E_{11}^{11} \ell_1^2 \ell_1^1 + E_{22}^{11} \ell_2^1 \ell_2^2 + E_{21}^{21} \ell_2^1 \ell_2^2 \} (\ell_1^2)^2 \\ &\quad + \{ E_{22}^{11} \ell_1^1 \ell_1^2 + E_{22}^{22} \ell_2^1 \ell_2^2 + E_{12}^{12} \ell_1^1 \ell_1^2 \} (\ell_2^2)^2 \\ \bar{E}_{12}^{12} &= \{ E_{11}^{11} (\ell_1^1)^2 + E_{12}^{12} (\ell_2^1)^2 \} (\ell_1^2)^2 + 2E_{22}^{11} \ell_1^1 \ell_2^1 \ell_1^2 \ell_2^2 \\ &\quad + E_{22}^{22} (\ell_2^1)^2 (\ell_2^2)^2 + E_{21}^{21} (\ell_2^1)^2 (\ell_1^2)^2 \\ \bar{E}_{11}^{22} &= \bar{E}_{22}^{11}, \quad \bar{E}_{11}^{12} = \bar{E}_{12}^{11}, \quad \bar{E}_{12}^{12} = \bar{E}_{12}^{22} \end{aligned}$$

$$\bar{M}_{13}^{13} = M_{13}^{13} (\ell_1^1)^2 + M_{23}^{23} (\ell_2^1)^2$$

$$\bar{M}_{23}^{23} = M_{13}^{13} (\ell_1^2)^2 + M_{23}^{23} (\ell_2^2)^2$$

$$\bar{M}_{13}^{23} = M_{13}^{13} \ell_1^1 \ell_1^2 + M_{23}^{23} \ell_2^1 \ell_2^2$$

$$\bar{M}_{23}^{13} = \bar{M}_{13}^{23}$$

( 6. 2. 14 )

$\bar{F}_{r\delta}^{\alpha\beta}$ ,  $\bar{N}_{r\delta}^{\alpha\beta}$  についても全く同様な変換式が成立する。

なお、変形係数  $D_{r\delta}^{\alpha\beta}$ , 曲げ剛性係数  $M_{r\delta}^{\alpha\beta}$  を、いわゆる工学的な材料定数、すなわち弾性係数  $E$ , Poisson 比  $\nu$ , せん断弾性係数  $G$  を用いて表わすと次のようになる。

$$D_{11}^{11} = \frac{1}{E_1}, \quad D_{22}^{11} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \quad D_{11}^{22} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = D_{22}^{11}$$

$$D_{22}^{22} = \frac{1}{E_2}, \quad D_{12}^{12} = \frac{1}{2G_{12}}, \quad D_{33}^{11} = -\frac{\nu_{31}}{E_3},$$

$$D_{11}^{33} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = D_{33}^{11}, \quad D_{33}^{22} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \quad D_{22}^{33} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = D_{33}^{22}$$

$$D_{33}^{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$M_{13}^{13} = 4G_{12}(\ell_1)^2, \quad M_{23}^{23} = 4G_{12}(\ell_2)^2$$

( 6. 2. 15 )

ここに  $\ell_1, \ell_2$  は曲げ剛性を表わす材料定数である。

構成式 ( 6. 2. 9 ), ( 6. 2. 10 ) は、式 ( 6. 2. 15 ), ( 6. 2. 5 ), ( 6. 2. 8 ) および ( 6. 2. 14 ) を用いると、工学的な材料定数で表わすことができる。

さて、次に後の数値計算に便利のように 2, 3 の基本式を誘導しておこう。全て新しい座標系 ( $\bar{x} = \bar{x}^1, \bar{y} = \bar{x}^2, \bar{z} = \bar{x}^3$ ) に関するものであるが、混乱はないと思われるので、バー ( - ) は簡単のために省略した。

釣り合い式は、2. 1 の式 ( 2. 2. 13 ) および ( 2. 2. 14 ) で表わされる。すなわち、

$$\tau_{11,1} + \tau_{21,2} + f_1 = 0, \quad \tau_{12,1} + \tau_{22,2} + f_2 = 0$$

$$m_{13,1} + m_{23,2} + \tau_{12} - \tau_{21} + c_3 = 0$$

( 6. 2. 16 )

第3式と  $\tau_{(12)} = \frac{1}{2}(\tau_{12} + \tau_{21})$  という関係から

$$\left. \begin{aligned} \tau_{12} &= \tau_{(12)} - \frac{1}{2}(m_{13,1} + m_{23,2}) - \frac{1}{2}c_3 \\ \tau_{21} &= \tau_{(12)} + \frac{1}{2}(m_{13,1} + m_{23,2}) + \frac{1}{2}c_3 \end{aligned} \right\} \quad (6.2.17)$$

を得る。

さて、構成式ならびに式(6.2.17)に、式(2.2.1)～(2.2.3)で与えられる幾何学的な関係式を用いると、応力成分は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{11} &= E_{11}^{11} u_{1,1} + E_{11}^{22} u_{2,2} + \frac{1}{2} E_{11}^{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \tau_{22} &= E_{22}^{11} u_{1,1} + E_{22}^{22} u_{2,2} + \frac{1}{2} E_{22}^{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ \tau_{12} &= E_{12}^{11} u_{1,1} + E_{12}^{22} u_{2,2} + \frac{1}{2} E_{12}^{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[ M_{13}^{13} (u_{2,111} - u_{1,112}) + 2M_{23}^{13} (u_{2,112} - u_{1,122}) \right. \\ &\quad \left. + M_{23}^{23} (u_{2,122} - u_{1,222}) \right] - \frac{1}{2} c_3 \\ \tau_{21} &= E_{12}^{11} u_{1,1} + E_{12}^{22} u_{2,2} + \frac{1}{2} E_{12}^{12} (u_{1,2} + u_{2,1}) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[ M_{13}^{13} (u_{2,111} - u_{1,112}) + 2M_{23}^{13} (u_{2,112} - u_{1,122}) \right. \\ &\quad \left. + M_{23}^{23} (u_{2,122} - u_{1,222}) \right] + \frac{1}{2} c_3 \\ m_{13} &= \frac{1}{2} M_{13}^{13} (u_{2,11} - u_{1,12}) + \frac{1}{2} M_{13}^{23} (u_{2,12} - u_{1,22}) \\ m_{23} &= \frac{1}{2} M_{23}^{23} (u_{2,12} - u_{1,22}) + \frac{1}{2} M_{23}^{13} (u_{2,11} - u_{1,12}) \end{aligned} \right\} \quad (6.2.18)$$

式(6.2.18)を式(6.2.16)の第1および第2式に代入すると、変位で表わした釣り合い式を得る。

$$\begin{aligned}
& E_{11}^{11} u_{1,11} + E_{11}^{22} u_{2,12} + \frac{1}{2} E_{11}^{12} (3u_{1,12} + u_{2,11}) + E_{12}^{22} u_{2,22} + \frac{1}{2} E_{12}^{12} (u_{1,22} + u_{2,12}) \\
& + \frac{1}{4} \left[ M_{13}^{13} (u_{2,1112} - u_{1,1122}) + 2M_{23}^{13} (u_{2,1122} - u_{1,1222}) + M_{23}^{23} (u_{2,1222} - u_{1,2222}) \right] \\
& + \frac{1}{2} c_{3,1} + f_1 = 0 \\
& E_{12}^{11} u_{1,11} + E_{11}^{22} u_{1,12} + \frac{1}{2} E_{12}^{22} (u_{1,22} + 3u_{2,12}) + E_{22}^{22} u_{2,22} + \frac{1}{2} E_{12}^{12} (u_{1,12} + u_{2,11}) \\
& - \frac{1}{4} \left[ M_{13}^{13} (u_{2,1111} - u_{1,1112}) + 2M_{23}^{13} (u_{2,1112} - u_{1,1122}) + M_{23}^{23} (u_{2,1122} - u_{1,1222}) \right] \\
& - \frac{1}{2} c_{3,2} - f_2 = 0 \tag{6.2.19}
\end{aligned}$$

式(6.2.19)は、Navierの式を直交異方性カップル・ストレス理論にまで拡張したものである。直交異方性カップル・ストレス問題の解は、式(6.2.19)を与えられた境界条件の下で解くことにより求められる。

なお、直交異方性以外の場合、例えば斜交異方性の場合には、構成式が若干異なって来るだけである。すなわち、式(6.2.6)或いは(6.2.7)に於て、剛性係数あるいは変形係数として更に $E_{12}^{11}$ 、 $E_{12}^{22}$ 、 $M_{23}^{13}$ 、或るいは $F_{12}^{11}$ 、 $F_{12}^{22}$ 、 $N_{23}^{13}$ 等が追加されることになり、従って、式(6.2.9)或るいは式(6.2.10)の諸係数の値が異なって来るだけで、応力式(2.2.18)ならびに釣り合い式(6.2.19)はそのまま成立することになる。従って、式(6.2.18)および(6.2.19)は平面ひずみ状態における平面異方性カップル・ストレス弾性理論の基礎方程式と考えることができる。

### 6.3 一軸圧縮を受ける直交異方性直方供試体内の応力分布

#### 6.3.1 問題の設定

Fig. 3.6.2のように平行な加圧盤を介して圧縮される幅 $2a$ 、高さ $2b$ 、単位厚さの直方供試体を考える。異方性の弾性主軸は、座標軸より時計回りに $\theta$ だけ傾いたものとする。なお、供試体は線形直交異方性カップル・ストレス理論で表わされるものとし、平面ひずみ状態にあるものとする。更に、簡単のために加圧盤は供試体に比して十分剛であるとし、また、供試体端面と加圧盤間には滑りは生じないものと仮定しよう。この問題の境界条件は、3.2で与えられたものと同一となる。以下の計算では、境界条件(3.2.1)を用いることにする。

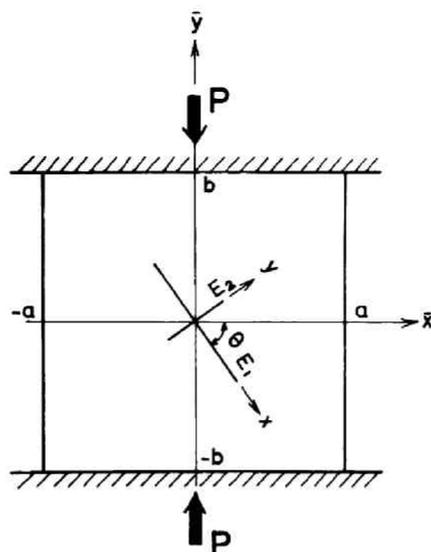


Fig. 3.6.2 Schematic diagram of the compression test and coordinate system.

### 6.3.2 差分法による解析

異方性カップル・ストレス問題の解析は、与えられた場の方程式 (6.2.19) を境界条件 (3.2.1) の下で解くことに帰される。しかしながら、この方程式を解析的に解くことは容易ではない。従って、以下では差分法により数値解を求めることにする。

差分式は、stencilで表わすと便利であり、正方形メッシュを用いると偏微分-差分変換式はオーダー2の近似で次のように表わされる。

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2h} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

高次の偏微分は、この stencil 演算を用いることにより容易に求められる。例えば、

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$= \frac{1}{h^4} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

方程式 ( 6.2.18 ), ( 6.2.19 ) ならびに境界条件 ( 3.2.1 ) は, 容易に差分式に変換されるのでここには改めて記さない。

実際の数値計算に於ては, 差分式に変換された場の方程式を直接連立して解く方法は, 未知数の量と方程式を作る労力の点から必ずしも有利な方法ではない。ここでは, 基本の差分方程式の未知変数  $u, v$  を各格点で順次一対にして解く, いわゆる dual relaxation 法<sup>4)</sup>を用い, 解の収束を促進するために SOR 法<sup>5)</sup> (successive over relaxation method) をも同時に組み合わせた。なお, メッシュ間隔は  $0.1a$  と取った。従って, 未知数の総数は 1250 となり, 上記の方法以外で解くことは容易ではない。なお, 計算には 1回 relaxation が完了する毎に relaxation を行なって行く方向を変更して, 収斂性を一様化した。計算には京都大学大型計算機 FACOM 230-60 を用い, 繰り返し数は計 400 回として, 各ケース約 4 分かかった。

### 6.3.3 応力分布に及ぼす異方性ならびにカップル・ストレスの影響

異方性立方供試体内の応力分布の例を Figs. 3.6.3 および 3.6.4 に示す。応力の表示には, 軸方向平均応力  $\sigma_y$  を基準として正規化して示した。数値計算例としては,  $E_2/E_1 = E_3/E_1 = 1/2$  および  $1/5$  とし, せん断弾性係数  $G_{12}$  に関する仮定として

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{2\nu_{21}}{E_2}$$

を用いた<sup>6)</sup>。また, Poisson 比に関しては,  $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{32} = 0.1$  および  $0.2$  と選んで計算した。したがって, 他方向の Poisson 比は式 ( 6.2.15 ) の関係から, 最大の場合には  $\nu_{12} = \nu_{13} = \nu_{23} = 1.0$  となるが, 異方性材料に関してはこの程度の Poisson 比はそれ程稀なことではないことを附言しておく<sup>7)</sup>。なお, 図示の計算例では, 材料定数  $l_x$  および  $l_y$  を小さく  $l_x/a = l_y/a = 0.01$  と取っておいた。したがって, カップ・ストレスの影響は無視されると考えてよいであろう。以下では, この解を古典弾性学による解と見做すことにする。ただし, 既に 3.3 で述べたように供試体隅角部の特異点近傍の挙動は, 古典弾性学とカップル・ストレス理論とは異なってくるので, 図示の分布はこの特異点近傍では古典弾性学による解と若干異なる挙動を示すことに注意されたい。

これらの図を一べつすると, 異方性の影響は極めて大きいことが分る。異方性の主軸が供試体主軸から傾いておれば, 応力分布は供試体軸に対して対称とならず, 弾性定数の大きい方向により多くの力が負担されるようになる。この傾向は  $\sigma_y$  および  $\sigma_x$  分布では歴然としている。異方性主軸の方向によって若干の差が見られるが,  $\sigma_y$  の分布は供試体端面から遠ざかるに従って一様化し,  $\sigma_x$  の分布もまた急激に減少してしまう。しかしながら, せん断応力の分布は極めて特異な挙動を示す。弾性主軸が供試体軸と一致

しない場合には、供試体中央部でもせん断応力の大きさはあまり減少せず、供試体  $1/2$  高さの断面上でも大きなせん断応力が生じている。この結果は、等方性の場合の結果 (Fig. 3.3.2 参照) と良い対照を見せている。なお、異方性主軸が供試体主軸と一致する場合のせん断応力の分布は、等方供試体の場合の結果と大差がないことに注意されたい。

異方性特性の他に、Poisson比も応力分布に重要な影響を及ぼすと考えられる。これらを総括して把握する目的で、代表的な場合について、異方性および Poisson比の影響を一括して Fig. 3.6.5 に示した。異方性に関する影響については、上述のことが明瞭に伺える。異方性が著しいほど影響は大きく、応力分布は等方性の場合に比してよりわい曲されることも分る。Poisson比の影響に関しては、ここに示した例からも、3.3で得た結論が異方性供試体の場合にも充分当てはまると考えられる。主な点を再録すれば、Poisson比が大きいか小さいほど応力の大きさは大きく、小さいほど応力分布は一様に近づく。また、Poisson比の影響は、供試体全体に及ぶことも見逃せないということである。

Fig. 3.6.6 には、カップ・ストレスの影響の1例を示した。カップ・ストレスに関する材料定数、特に異方性のものに関しては、どの程度のものかは全く推測し難い。この材料定数は、弾性定数とは独立な定数であるが、異方性材料の特性を考えてみると微小要素の異方性曲げ剛性比は弾性定数の比にほぼ等しいかあるいは比例すると考えてもよさそうである。したがって、この計算例では、前者は後者に等しいと仮定した。なお、カップ・ストレスの影響に関しては、既に3.3で検討したことが、異方性の場合にも当てはまると考えられるので他の場合に関する計算例は省略した。Fig. 3.6.3 と Fig. 3.6.6 を比較し、3.3で得た結論から推して、材料定数  $\ell_x$  および  $\ell_y$  が大きくなる程カップ・ストレスの影響は大きくなり、また供試体内の応力分布はより一様化されることが分る。また、カップ・ストレスの影響は、Poisson比の影響に比して2次的であり、供試体境界周辺でのみ卓越し、境界から遠ざかるにつれて急激に薄れて行くことも分るであろう。

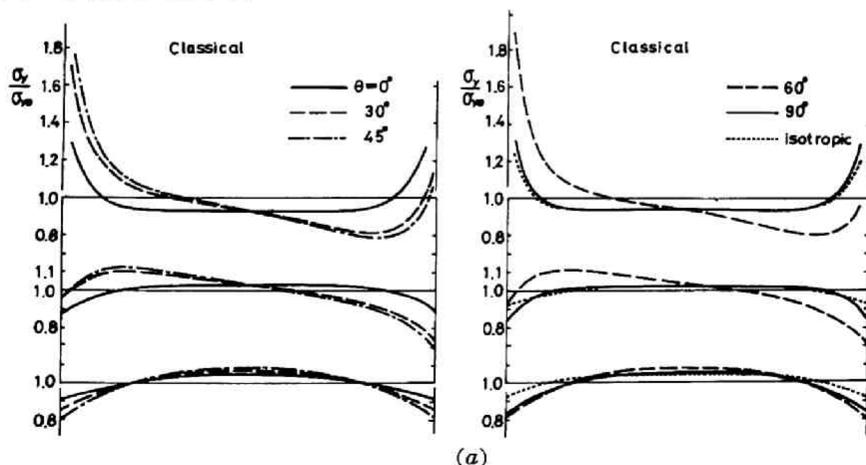


Fig. 3.6.3 Influence of orthotropy on stress distributions.  
Young's moduli  $E_2 = E_3 = 0.5 E_1$  and Poisson's ratios  
 $\nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{31} = 0.2$ .

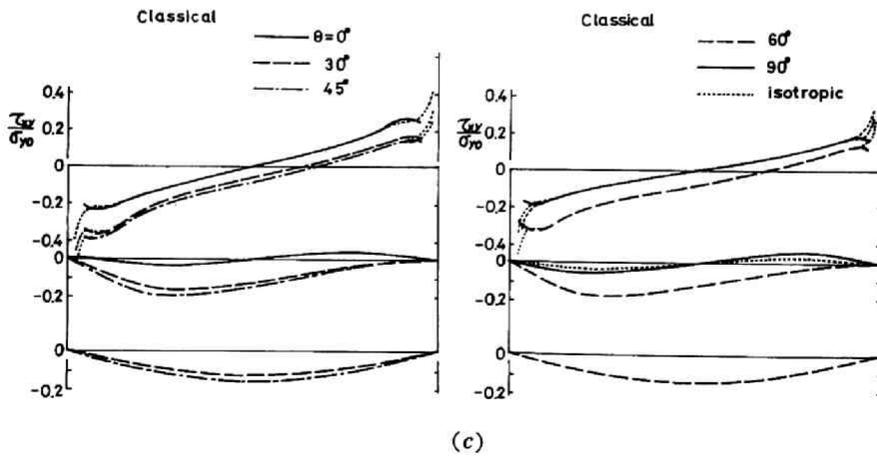
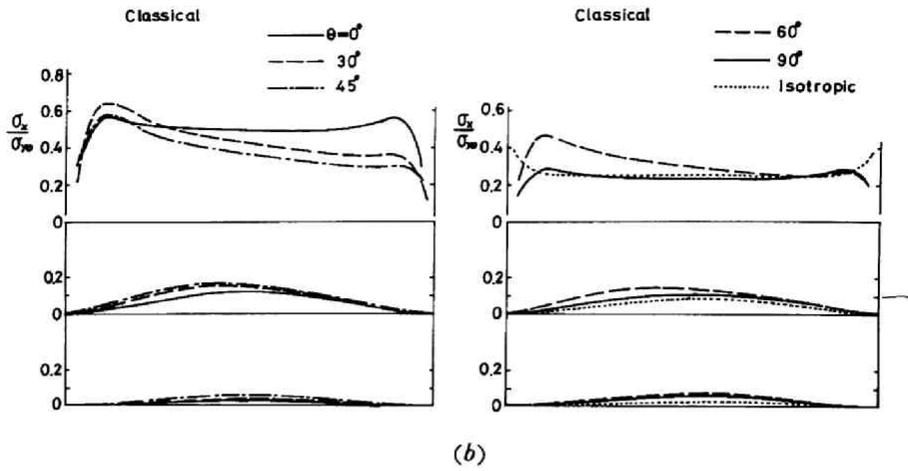


Fig. 3.6.3 (continued).

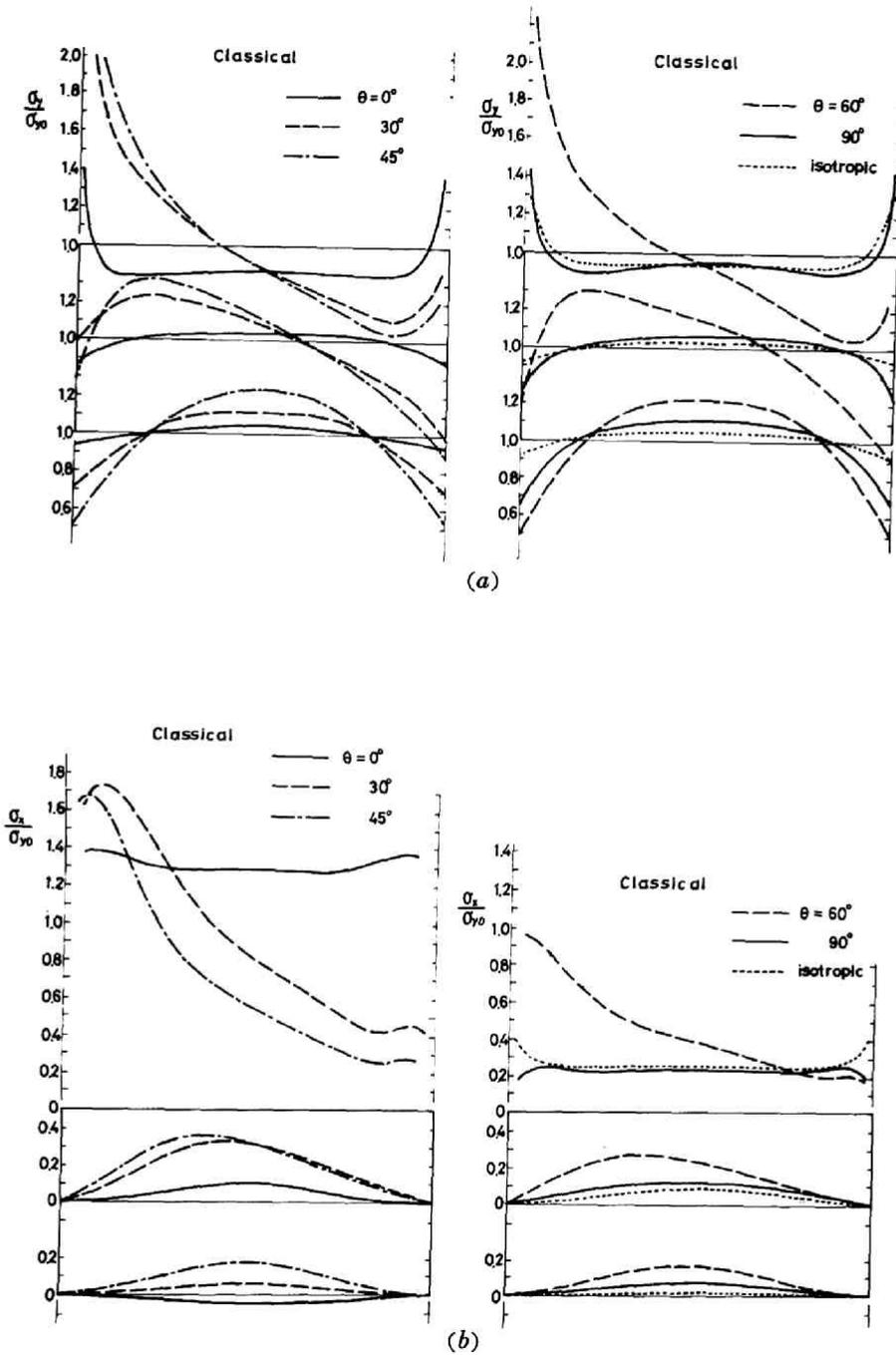


Fig. 3.6.4 Influence of orthotropy on stress distributions.  
 Young's moduli  $E_2 = E_3 = 0.5 E_1$  and Poisson's ratios  
 $\nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{31} = 0.2$ .

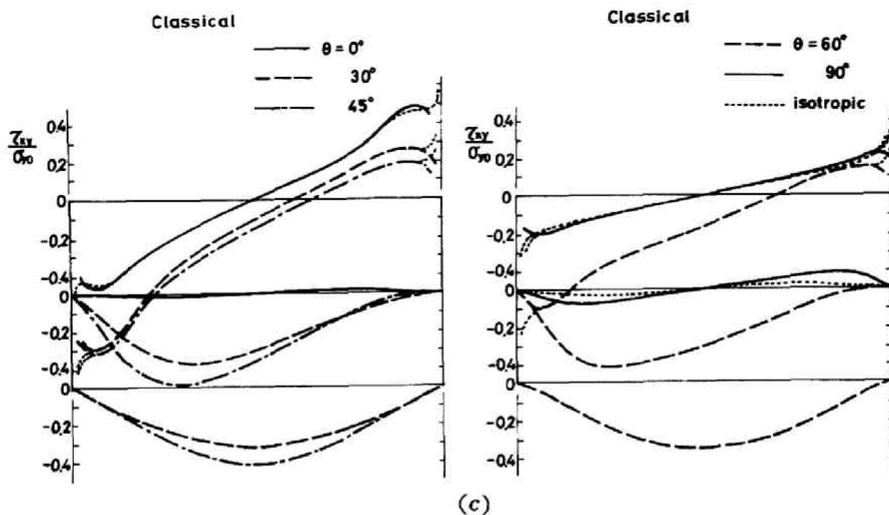


Fig. 3.6.4 (continued).

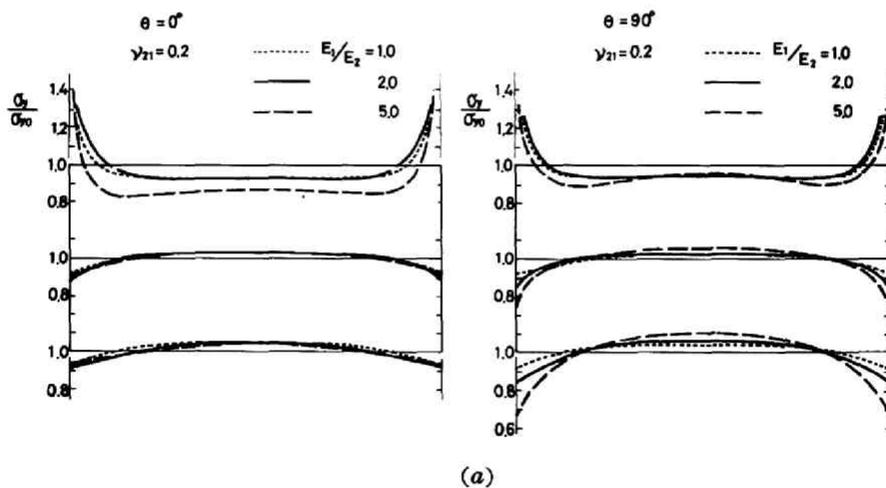


Fig. 3.6.5 Influence of orthotropy (a) ~ (c) and orthotropy and Poisson's ratio (d) ~ (f) on stress distributions.

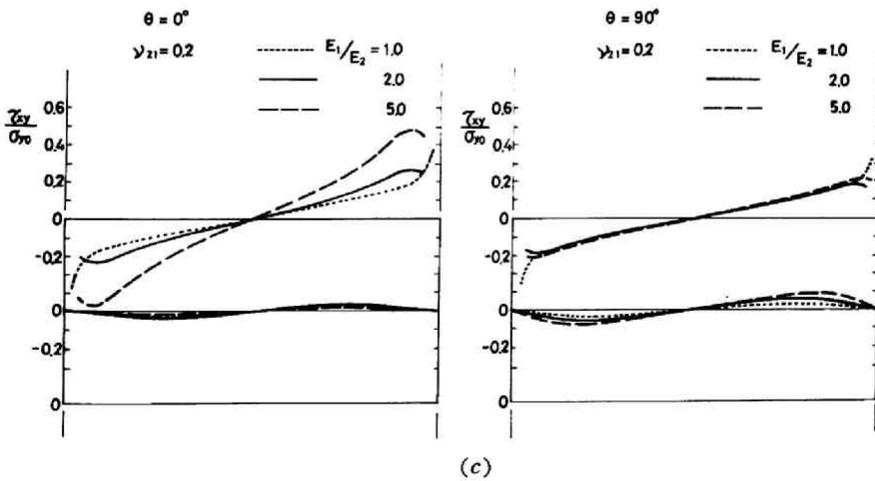
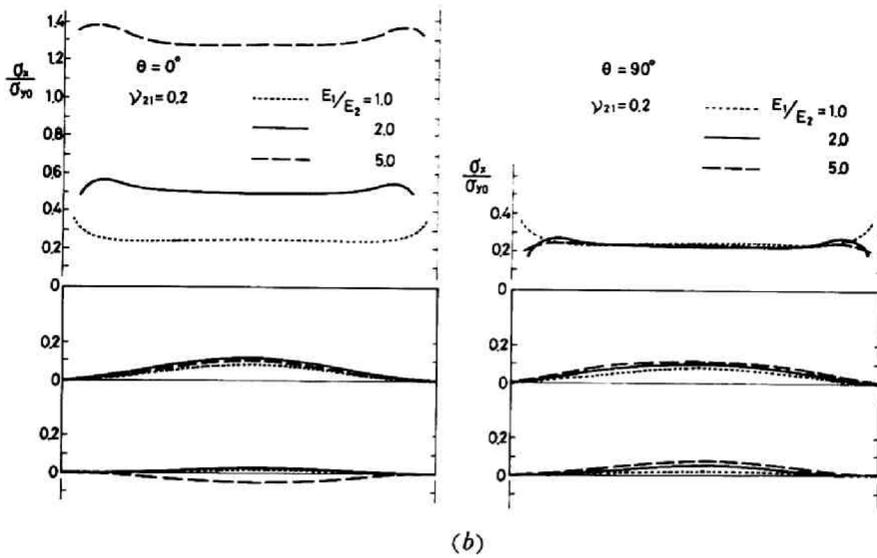
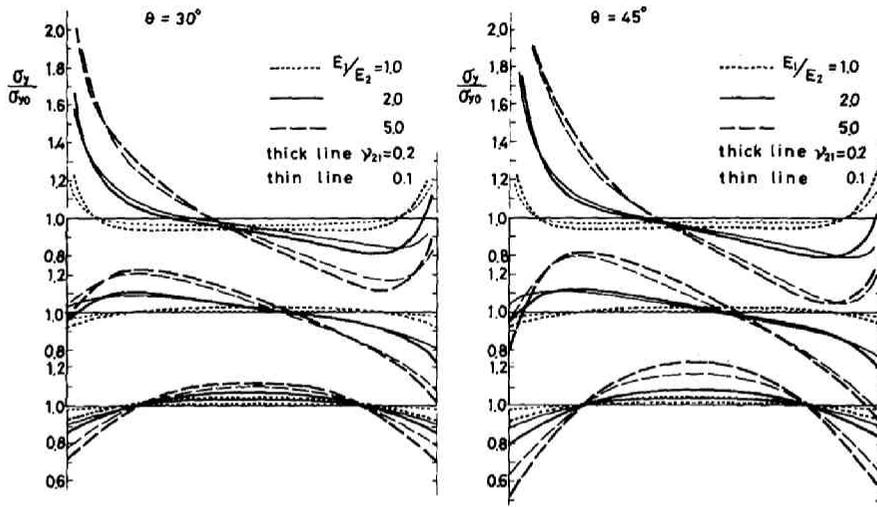
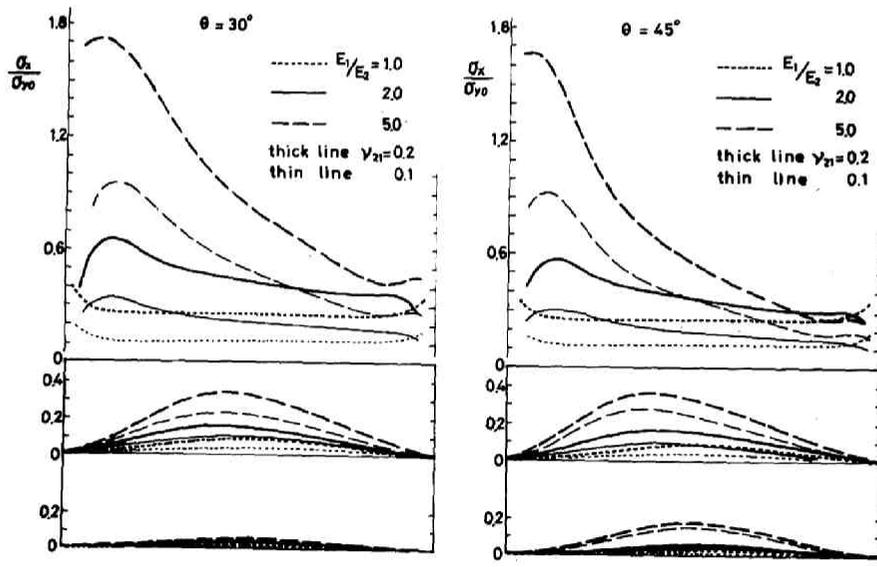


Fig. 3.65 (continued).

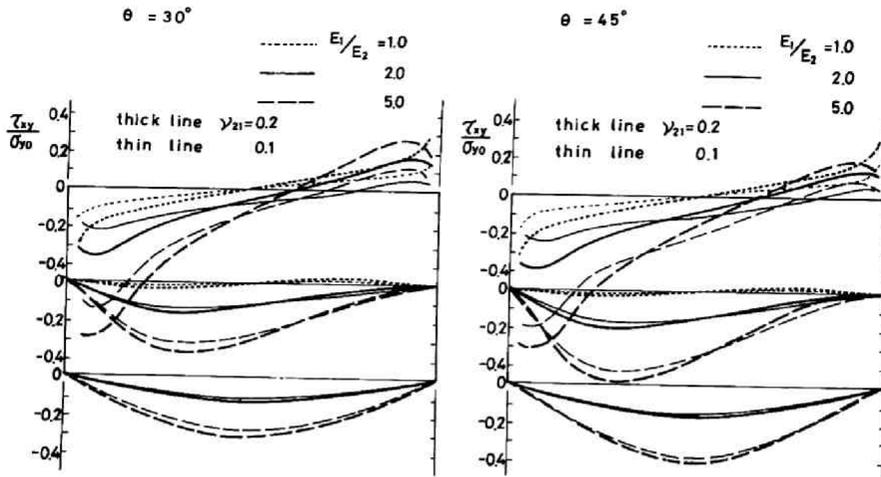


(d)



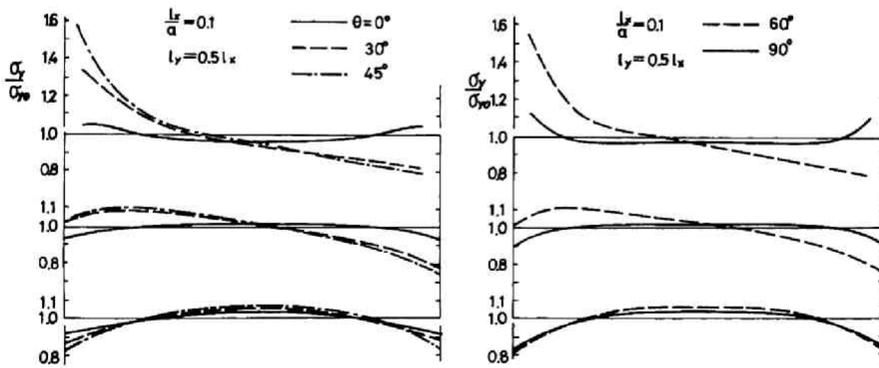
(e)

Fig. 3.6.5 (continued).



(f)

Fig. 3.65 (continued).



(a)

Fig. 3.66 Influence of couple-stresses on stress distributions.  
 Young's moduli  $E_2 = E_3 = 0.5 E_1$  and Poisson's ratios  
 $\nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{31} = 0.2$ .

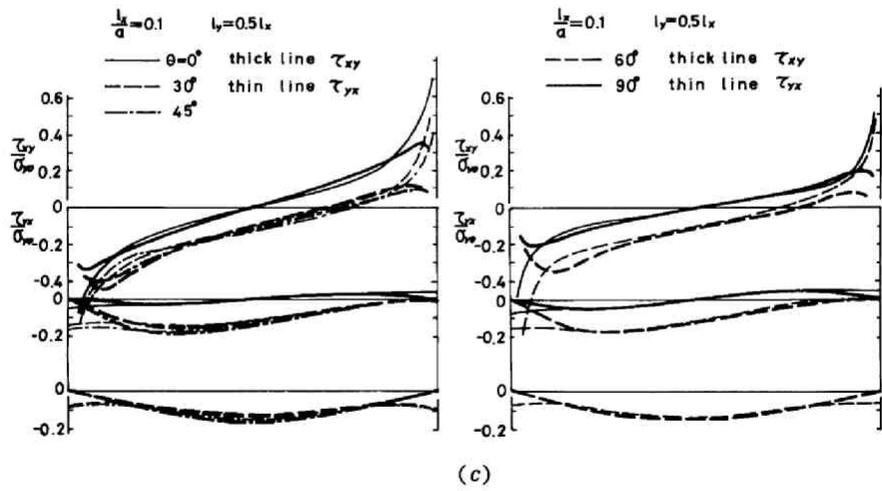
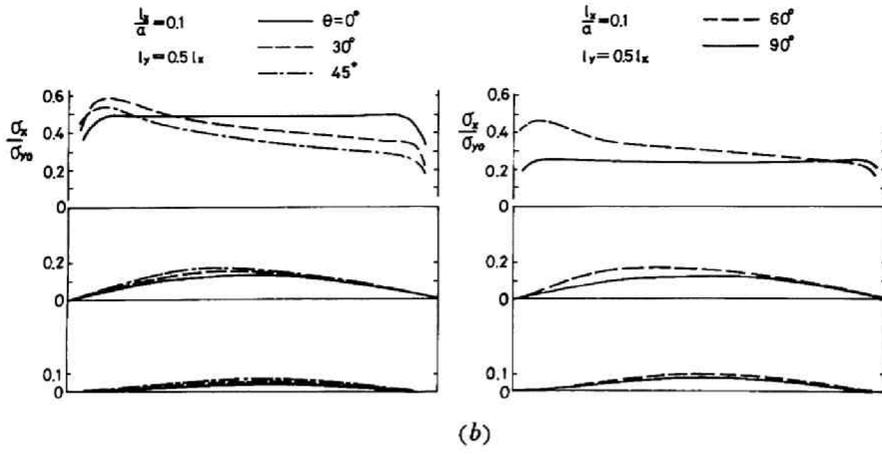


Fig. 3.6.6 (continued).

## 6.4 インデーション試験における直交異方性供試体内の応力分布

### 6.4.1 問題の設定

前節で見たように一般に異方性の影響は極めて卓越しているので、もう一つの代表的な試験法である割裂試験あるいはインデーション試験の場合についても異方性の影響を検討しておくことが必要と思われる。既に第4章および第6章で検討したことから分るように、割裂試験とインデーション試験は極めて類似した試験法であり、応力分布もほぼ一致するので、ここでは差分法を用いて数値計算的に取り扱い易い後者のみを対象とする。

Fig. 3.6.7 に示すように対向辺中央部幅  $2c$  にわたって対称に剛体盤を介して加圧される幅  $2a$ 、高さ  $2b$ 、単位厚さの平板を考えよう。異方性の弾性主軸は、座標軸より時計回りに  $\theta$  だけ傾いているものとする。また、供試体は直交異方性線形カップル・ストレス理論に従うものとし、かつ平面ひずみ状態にあるものとする。加圧盤は、十分剛であり、また加圧部分では供試体は完全に加圧盤に固定されているものとする。したがって、境界条件としては、式(5.2.1)に於て、 $y = \pm b$  の条件を次のように変更しなければならない。

$$\begin{aligned}
 u(x, \pm b) &= 0, & |x| &\leq c \\
 v(x, \pm b) &= \mp v_0 (= \text{const.}), & |x| &\leq c, & \int_{-a}^a \sigma_y dx = P \\
 \sigma_y(x, \pm b) &= \tau_{yx}(x, \pm b) = m_y(x, \pm b) = 0, & c &\leq |x| \leq a
 \end{aligned}$$

要は、これらの境界条件の下に基本方程式(6.2.19)を解けばよいことになる。

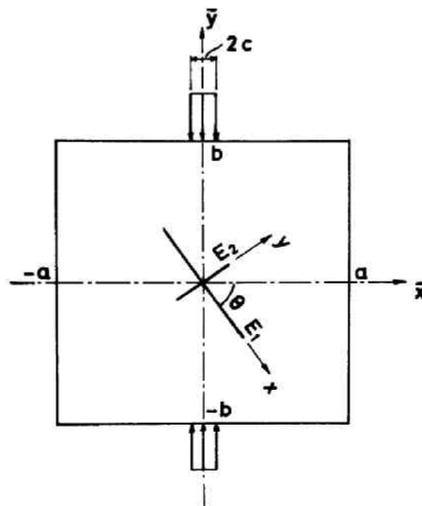


Fig. 3.6.7 Schematic diagram of the indentation test of the orthotropic specimen and the coordinate system.

#### 6.4.2 解析方法

数値解析は差分法によった。メッシュ間隔は  $0.1a$  とした。この場合でも未知数の総数は 1250 であり、連立方程式より解法を適用することは困難である。ここでは、前述のように dual relaxation 法を採用し、SOR 法を組み合わせる基礎方程式を解いた。計算には破断想定面から左右に交互に relaxation を進行させて、250回の繰り返しを行なった。所要時間は FACOM 230-60 で約4分であった。

#### 6.4.3 応力分布に及ぼす異方性の影響

応力分布に影響を及ぼす因子は異方性の他に Poisson 比ならびに載荷幅が考えられる。これらは互に関連し合っているが、後二者に関しては、既に第5章で等方性供試体の場合に検討したことが、この異方性の供試体の場合にもほとんどそのままではまると考えられる(6.3.3をも参照せよ)。従って、以下では、異方性の影響のみについて検討する。なお、数値計算に際しては、 $G$ として、6.3.3に述べた仮定を用いた。

応力分布の例を Figs. 3.6.8 および 3.6.9 に示す。表示には、加圧盤に作用する全荷重  $P$  を  $\pi a$  で割った  $P/\pi a$  を基準として採用した。 $\theta = 0^\circ$  の場合、すなわち、弾性係数の大きい主軸方向と  $x$  軸方向が一致する場合には、 $\theta = 90^\circ$  の場合に比して、直応力  $\sigma_x$  は大きく、逆に  $\sigma_y$  は小さくなっている。また、せん断応力は前者の方がより滑らかに分布している。このことは、弾性定数の大きい方向により大きな力が伝達されることを意味している。この傾向は異方性が著しい程卓越して来る。

さらに、等方性の場合と比較してみると、 $\theta = 0^\circ$  の場合の応力  $\sigma_x$  の大きさは、等方性の場合より大きく、 $\sigma_y$  の大きさは小さくなっている。 $\theta = 90^\circ$  の場合の応力に関しては逆のことが言える。

特に、インデンテーション試験として注目する破断想定面上の応力分布について比較してみると、次のようなことが明らかになる。 $\theta = 0^\circ$  の場合には、等方性の場合に比して  $E_2/E_1 = 1/2$  および  $1/5$  に対応して供試体中央の  $\sigma_x$  の大きさはそれぞれ約 15% および 20% 大きく、また  $\sigma_y$  はそれぞれ約 10% および約 20% 程小さくなっている。これに反して  $\theta = 90^\circ$  の場合には、等方性に比して、 $E_2/E_1 = 1/2$  および  $1/5$  に対して、供試体中央の  $\sigma_x$  の大きさはそれぞれ約 20% および約 60% も小さくなり、逆に  $\sigma_y$  はそれぞれ約 20% および 60% も大きくなっている。いずれの場合にも、供試体中央部のかなり広い範囲にわたって応力値はほぼ一定である。なお、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$  の場合の計算結果は省略した。

ここに示した例は異方性の影響を示す意味で極めて高い異方性を示す場合の例であるが、実在の材料では主弾性係数の比がせいぜい 2 程度のものであると考えられるので、応力分布は上の例よりかなり等方性の場合に近くなるであろう。しかしながら、異方性の応力分布は異方性の材料定数に左右されるので、インデンテーション試験法は実用試験法としては必ずしも適した方法とは言い難い。

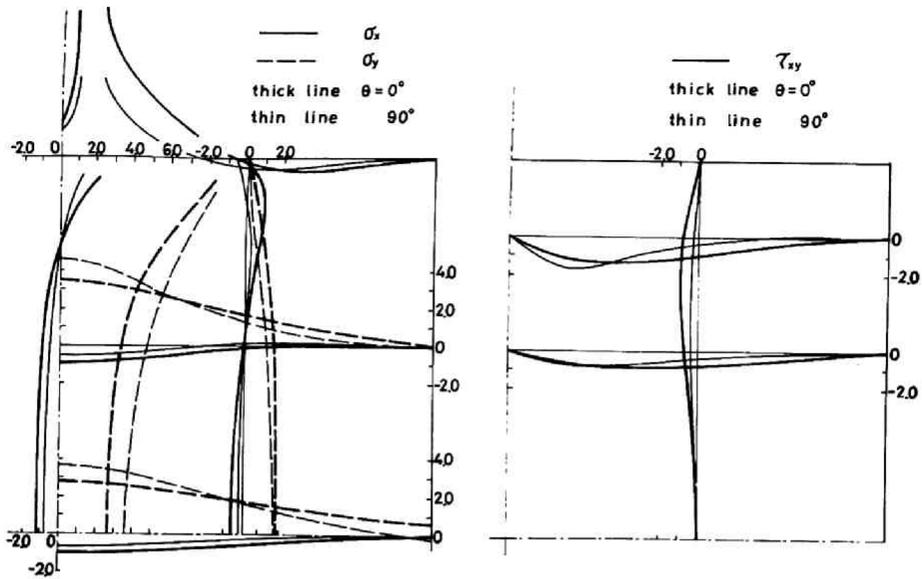


Fig. 3.6.8 Influence of orthotropy on stress distributions.  
 Young's moduli  $E_2 = E_3 = 0.5E_1$  and Poisson's ratios  
 $\nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{31} = 0.2$ .

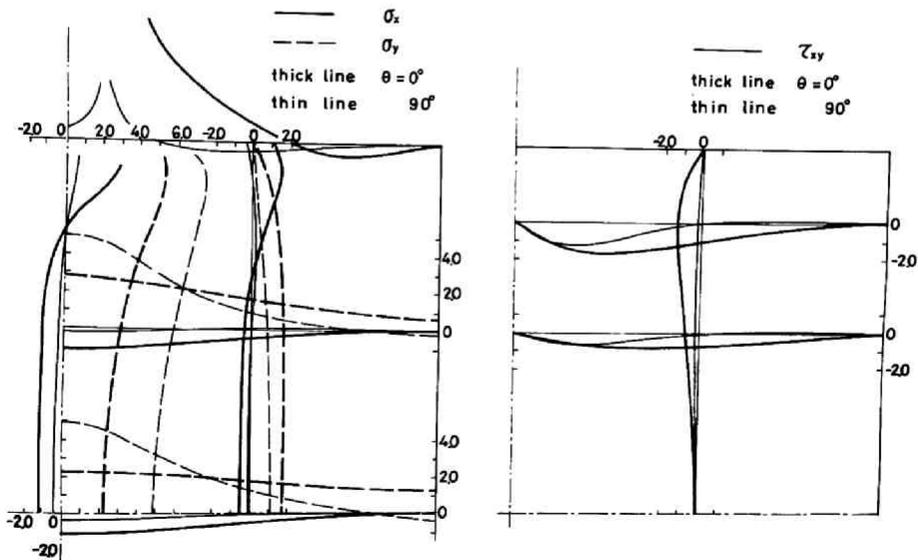


Fig. 3.6.9 Influence of orthotropy on stress distributions.  
 Young's moduli  $E_2 = E_3 = 0.5E_1$  and Poisson's ratios  
 $\nu_{21} = \nu_{32} = \nu_{31} = 0.2$ .

## あ と が き

材料試験の目的は対象とする材料の物理特性をできるだけ正確にかつ容易に取り出すことにある。岩質材料に対して行なわれている試験法は、一軸圧縮、引張試験を中心とした比較的一様に近い応力状態を生じる直接強度試験と割裂、インデンテーション試験を中心とした組み合わせ応力を考慮して強度を推定する間接的な強度試験法に大別できる。いずれの場合にも、供試体内の応力分布は試験結果を解釈するための最も基本となるものであり、できるだけ正確な知識が要求されるのは当然である。

応力分布は試験法および試験条件のみならず、材料特性、すなわち、弾性係数、Poisson比ならびに材料の構造特性にも支配される。ここでは、これらの点に特に留意して、カップル・ストレス理論を用いて、材料特性をも含めて代表的な試験法、試験条件の下での供試体内応力分布を求めてきた。その結果、いわゆる直接試験法では材料の内部構造の影響はそれ程顕著ではないけれども、間接的な試験法では供試体内の応力分布は内部構造に著しく影響されることが分った。

厳密な意味で、内部構造特性を表わす定数を如何に取るかということは最も大きな問題であるが、これに関する資料はなく、ただ等球集合体に近い連続体の場合には、 $\ell \cong \frac{3a}{4}$  ( $a$ : 球の直径)といわれている程度である。 $\ell$ が大きいということは材料の構成粒子が大であることを意味しているので、 $\ell/a$ が大きい程、すなわち供試体寸法に比して構成粒子の大きい供試体ほど、古典弾性学より求められる応力分布とは異なったものとなり、従って、場合によっては材料の強度を古典弾性学より推定することに疑問があることを示している。しかしながら、ここに示したカップル・ストレス弾性論の解は、平均的に材料特性を導入した解であり、従って実際の材料では結晶粒界には更に大きな応力が生じていることも十分考えられる。これらをどのような形で解析結果から解釈するかは極めて大きな問題であるが、連続体力学に基礎を置く限り適当な解釈は見当ないようである。

要するに材料の内部構造までを考えると、特に間接試験法での供試体内応力分布は、内部構造特性に支配されて相当異なってくるので、古弾性学によるような一律な解釈が下し得なくなる。逆に言えば、材料試験においては、古典弾性学による解に近い応力分布が得られる程度に供試体を大きく取るべきであるということにもなる。

異方性供試体内の応力分布は、異方性特性に完全に依存し、弾性主軸と供試体軸とが一致しない場合には、直接試験においても応力分布は等方性の場合のものから相当おい曲されるので、試験結果を解釈する上で特に注意しなければならない。また、間接試験においても応力の大きさは異方性特性に支配されるので、等方性の場合のような一律な解釈は下し得なくなる。

以上要するに、材料試験においては、供試体内の応力分布は、対象とした材料の諸特性によっても左右されることに注意し、試験結果の解釈に際しても十分この点に配慮することが必要であろう。

## 結 言

本論文は、岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊の機構ならびに破壊規準について基礎的な研究を試みたものである。破壊過程、特に混合、多相材料の破壊過程に関しては未だ不明確な部分も残されてはいるが、所期の目的は一応達成されたと考えられる。以下に本研究で得られた主な成果を簡単に総括する。

第1部では、岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊の機構ならびに破壊規準を理論的な面から考察した。第1章では、まず、破壊の定義を明確にし、さらに混合、多相材料ないしそれより成る系の破壊に関する基本概念を述べ、破壊を取り扱う基本的立場を明らかにした。次いで、一般的な破壊開始条件を準微視的、微小マクロ的な立場から考察し、材料固有の応力ならびにひずみ強度を用いて表わすことを提案した。そのうちの特殊な例として、線形破壊力学より得られている基本破壊モードに対する固有応力強度を用いて破壊開始条件を表わした。さらに、ぜい性破壊の一般的な破壊規準について、巨視的な立場から検討を加え、破壊曲面の概念を導入して、一般的な破壊規準を一般化した応力およびひずみ空間内の曲面として表示することを提案した。最後に於て、この曲面の一般的な特性をDruckerの物質の安定性の解釈に基づいて検討し、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊曲面は、一般には凸であることを示した。

第2章では、等方・均質岩質材料ならびにそれより成る等方・均質系の破壊規準を検討した。まず、今までに提案された主な破壊仮説ならびに規準について、その物理的意味を考察し、問題点を検討した。また、主応力表示と平均直応力-最大剪断応力表示との関連等についても考察した。ついで、Griffithの概念に立脚した微小マクロ的モデルを基に、準微視的な破壊規準を検討し、Griffith理論を一般化した。同時に修正Griffith理論ならびに2,3の変形した理論についても言及し、一般Griffith理論をも含めて、破壊規準の物理的意味を考察した。ついで、準微視的な破壊規準と巨視的な破壊規準との対応について考察し、巨視的な破壊規準に現われる材料定数に新しい物理的意味、すなわち破壊過程刻々の状態に対応して変化する状態パラメーターと解釈することにより、両破壊規準の等価性に新しい解釈を加えた。さらに、二変数表示による破壊規準を一般的な三主応力表示、すなわち主応力空間内の曲面として表示することを試み、その方法ならびに3次元に拡張するための基本概念を示した。3次元物体内の最も危険なクラックは、中間主応力を含む面内に潜在する2次元クラックであり、その応力集中度は中間主応力の影響を殆んど受けないことが明らかにされた(附録参照)ので、破壊開始規準は最大-最小主応力のみの関数となることが明らかとなった。また、発生したき裂は、一般に中間主応力を含む面内に伝播することを考えると、破壊開始から終局破壊に至るまで、破壊規準は全て最大および最小主応力の関数と考えることができることも明らかとなった。これによって、従来から提案されている巨視的な破壊規準ならびに準微視的な一般Griffith理論は容易に3次元主応力空間内の曲面に拡張することができる。最後に、破壊曲面の具体的な形状ならびに表示法について詳細な検討を加えた後、等方・均質な岩質材料ならびにそれより成る系の一般的な破壊規準として次のような破壊曲面を提案した。

破壊曲面は、静水圧線を3重対称軸とするような凸曲面で表わされ、その曲面は滑らかに接続した次の2種類の面から成っている。その一つは、3組の平面から成り、等圧面による直断面の切り口の形状は正三角形形状である。他の一つは、静水圧の増加に伴って、ほぼ等方的に膨脹するような3組の曲面から成り、等圧面による直断面の形状は正三角形よりやや膨らんだものとなる。逐次破壊および終局破壊曲面は、一般には破壊開始曲面からほぼ等方的に膨脹した曲面となる。なお、三軸圧縮ならびに伸張試験は、一般三軸圧縮試験として考え得る応力状態の両極端を示しているので、破壊曲面の凸性を考慮して、両者から破壊曲面の概形を推定することも可能であることを示した。

第3章では、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊機構ならびに破壊規準について検討した。まず、簡単な2次元力学モデル、すなわち等方・均質マトリックス内に弱面群、クラック群ないしスリット群を含む力学モデルに、引張応力ならびにせん断応力による破壊仮説ならびに巨視的な破壊規準を適用して、異方性材料ならびに系全体としての破壊特性を検討した。ついで、異方性マトリックス内に主弾性軸方向に潜在クラックを含むモデルに基づいて破壊規準を考察した。これらのモデルに基づく2次元破壊規準は、主応力方向から定まった方向角を有する弱面、クラックないしスリット群のみが存在するような仮想のモデルに対して独立に求められた強度のうち、最も弱いものに支配されることになる。従って、モデル全体としての強度は必ずしも最も弱い特性を有する弱面、クラックないしスリットによって支配されるとは限らないことも明らかである。実際の材料の破壊曲線は、弱面、クラックないしスリット群の相互干渉により、更に強度は低下すると考えられるが、全体の傾向としては、力学モデルより推定した破壊曲面となると考えられる。これらのモデルより求められた2次元破壊規準は第2章の場合と全く同様な考え方ならびに手法により、容易に3次元主応力空間に拡張することができる。異方性岩質材料ならびに異方性岩系の一般的な破壊規準を要約すれば次のようである。

一般的な破壊規準は、3次元主応力空間内の凸曲面として表わされ、対象とする岩質材料ないし系が有する最大強度に対応した仮想の等方・均質材料ないし等方・均質系の破壊曲面から、弱面ないし弱層の特性を表わす曲面により切り取られた残りの曲面と、後者との合成曲面で表わされる。換言すれば、この曲面は、等方・均質材料ないし等方・均質系の破壊曲面と弱面ないし弱層の特性を示す破壊曲面との合成曲面のうち、共通領域を含む、すなわち八面体せん断応力  $\tau_{oct}$  が最小となるような曲面で表わされることになる。

第Ⅱ部に於ては、岩質材料ならびにそれより成る系のぜい性破壊の機構ならびに破壊規準を実験的に究明した。第1章では、簡単なモデルに基づいて、破壊開始ならびに破壊伝播に関する基礎的な実験を試みた。すなわち、単一スリットを含むPMMA板、フライアッシュ・セメント・ペーストならびにセメント・ペーストより成るモデル、あるいはマトリックスと同程度あるいはそれより硬軟のインクルージョンを含むモデルを作製し、スリットあるいはインクルージョン周辺からのき裂の発生ならびに伝播、成長過程について基礎的な実験を行ない、その特性を明らかにすると共に、第Ⅰ部で議論した一般 Griffith 理論、修正 Griffith 理論等の適用性も検討した。さらに、多数のスリットおよびインクルージョンを規則的に、あるいは不規則的に含む岩質材料モデルを作製し、き裂の発生、成長の過程等を含めて破壊機構を実験的

に検討した。最後に、実験結果を、第1部で述べた破壊開始から終局破壊に至る一連の破壊過程と対応させて考察し、岩質材料ならびにそれより成る系の破壊過程の特性について検討した。その結果は以下のよ  
うに要約される。

岩質材料には結晶粒界とかインクルージョン境界とかに沿って分布した潜在欠陥が存在し、ある載荷径  
路に沿って荷重を加えると、これらの欠陥のうちのあるものの周辺の応力ないしひずみが材料固有の強度  
に達してき裂が発生する。このき裂の発生条件は、近似的には一般 Griffith あるいは修正 Griffith 理  
論、Mohr ないし Coulomb 規準で与えられると考えてよい。さらに荷重が増加すると、いったん発生した  
き裂は成長し、その間にあるいはき裂の成長が止ってから、次に危険な欠陥周辺からき裂が発生する。次  
第に荷重が増加すると、それにつれて同様な過程により、次第に多数のき裂が発生し、成長して、これら  
が相互干渉を起して、局所的な破壊域が形成される。この局所的な破壊域は次第に発達して、あるいは他  
の隣接破壊域を併合して、系全体としての破壊、すなわち終局破壊に至る。破壊伝播は、供試体中の欠陥  
分布だけでなく、いったん発生したき裂の成長と分布、同時に局所的な安定性に支配される。特に、終局  
破壊近くでは、供試体中には全域にわたって局所的な不安定域が多数生じており、供試体全体としての安  
定性もよくないので、終局破壊の条件には、試験機をも含めて、試験機-供試体系として全体的な特性を  
考慮することが必要である。

第2章では、巨規的な立場に立って、組み合わせ応力の下での等方・均質材料の破壊規準について実験を  
行ない、その特性を検討した。すなわち、第1部で推定した破壊曲線ならびに曲面を想起しつつ、セメン  
ト・ペースト、モルタル、コンクリート、軽量コンクリートおよび2,3の岩石について、二軸圧縮域およ  
び三軸圧縮域での破壊曲線ならびに曲面を決定した。モルタルに関しては、圧縮-引張域での破壊曲線  
をも求めた。さらに、集取し得た内外の諸データも総括して、破壊曲面の推定を試みた。その結果、特  
に圧縮域での破壊曲面(曲線)に関して明らかになった諸点を記すと次のようである。

第1部で推定した破壊曲面(曲線)は、一般的に実験結果とよく合致する。一般的な傾向としては、ぜい  
性度の高い材料ほど静水圧増加に伴う破壊曲面の開きが大きく、また構造組織の複雑かつ粒子結合の緩い  
程、曲面の開きは小さくなるようである。等圧面による破壊曲面の切り口曲線は、正三角形よりやや膨  
らんだものとなる。この形状は、個々の材料によって若干異なってくる。破壊曲面は静水圧増加につれて、  
ほぼ等方的に膨脹する。破壊開始曲面は終局破壊曲面内に完全に含まれる。破壊開始から終局破壊に至る  
過程は材料によって異なってくる。なお、引張応力域を含む組み合わせ応力状態の下での実験に関しては  
資料もなく、この領域での破壊曲面の直接的な検証は行ない得なかったが、圧縮-引張試験結果から推し  
て、この領域での破壊曲面も第1部で推定した破壊曲面と同様な形状となることが期待される。

第3章では、異方性岩質材料ならびに異方性岩系の破壊機構ならびに破壊規準を実験的に検討した。岩  
石としては、結晶片岩について、さらに内外の異方性岩石に関する資料を集取して破壊規準の特性を考察  
し、また、異方性岩系としては、多数の規則的なスリットないしインクルージョンを含む岩盤系モデルを  
用いて、破壊機構および破壊規準の特性を明らかにした。結果を要約する。

一般に異方性破壊強度は、層理面の傾角が最大圧縮力方向から  $30^{\circ} \sim 40^{\circ}$  のとき最小となり、傾角が

これより大きく、あるいは小さくなるにつれて次第に増大する。岩石では、傾角が $0^\circ$ および $90^\circ$ の場合の圧縮強度は同程度となり、また、拘束圧が増加しても破壊強度曲線（規準）の形状は殆んど変化せず、ただ、ほぼ一様な強度が付加される結果となる。これに対して、岩盤系モデルでは、モデルの特性によって、破壊強度曲線（規準）の形状も複雑な合成曲線となるのが普通である。また、拘束圧の効果も、モデルにより、また、弱面の傾角によって異なってくる。一般的に言って、拘束圧が高くなればなる程、破壊強度に及ぼす弱面の影響は薄らいでくるようである。岩盤系モデルでは、弱面の傾角が $15^\circ \sim 45^\circ$ で、迂りに起因する破壊が生じるのが普通である。全般的に見て、第Ⅰ部で推論した破壊規準は、実在の異方性岩質材料ならびに岩盤系の破壊規準を十分表わし得ると結論できる。

第Ⅱ部は、岩質材料の代表的な試験法における供試体内の応力分布を検討したものである。岩質材料に対して通常行なわれている試験法は、一軸圧縮、引張試験を中心とした直接試験法と、割裂、インデンテーション試験を中心とした間接的な試験法とに大別される。いずれの場合にも、供試体内の応力分布は試験結果を解釈する上で最も重要であり、従ってできるだけ正確な知識が要求される。供試体内の応力分布は、試験法および試験条件のみならず、供試体自体の材料特性、すなわち、弾性係数、Poisson比ならびに材料の構造特性にも支配される。従って、特にこれらの点に留意して応力分布を求めておく必要がある。本論文では、構造特性を導入した材料のモデルとして線型カップル・ストレス理論に従うものを想定し、カップル・ストレス理論を適用して応力分布の解析を試みた。古典弾性理論と線型カップル・ストレス理論は、実在の材料に関するモデル化の両極端に位置するものであり、両者による解析を試みることにより実在の材料より成る供試体内のより正確な応力分布が推定されることになる。

第Ⅰ章では、応力分布を求めることの必要性ならびに解析の際の基本的な考え方について述べた。第Ⅱ章では、中央対称線形カップル・ストレス理論の概要を述べ、古典弾性学および線形マイクロ・ポララー理論との関連にも言及した。

第Ⅲ章では、一軸圧縮試験による直方供試体内の応力分布をFourier級数展開法ならびに有限要素法により求め、応力分布に及ぼす加圧盤からの端面拘束、Poisson比ならびにカップル・ストレスの影響について検討した。得られた主な結果は次のようである。

供試体内の応力分布は端面の拘束が小さい程、また、Poisson比が小さい程一様化される。端面の摩擦係数が或る値、約0.25、以上になると供試体端面は滑動せず、完全に拘束された場合の応力分布と同じになる。端面摩擦がこの一定値より小さければ、供試体端面は隅角部から部分的に滑動し、従って応力分布も変化する。カップル・ストレスは、材料の構成粒子が大きくなる程、応力分布を一様化させる作用し、また、その影響は供試体境界周辺のみで卓越する。なお、見掛けの弾性係数は、供試体の高さに対する幅の比が大きい程、Poisson比が大きい程、また端面摩擦の大きい程、さらに構成粒子が大きい程、大きくなる。

第Ⅳ章では、割裂試験ならびにリング試験供試体内の応力分布をFourier-Bessel級数展開法によって求め、載荷幅、Poisson比ならびにカップル・ストレスの影響について検討した。割裂試験では、載荷幅の影響は載荷境界附近に限られる。カップル・ストレス理論による場合にはPoisson比が大きくなる程、

応力は大きくなるが、その影響は小さい。これに反して、カップル・ストレスの影響は顕著である。 $\ell/a \doteq 0.2$  ( $\ell$ は構成粒子に関係した材料定数、 $a$ は供試体の半径)とすると、供試体中心部の引張応力および圧縮応力は、古典弾性学より求められたもののそれぞれ 0.5 および 0.8 倍程度となる。 $\ell/a$ が増大すると、さらに減少して応力分布は一様化される。リング試験に於ては、載荷幅の影響は割裂試験の場合と同様である。リングの内外径の比が大きくなると、応力分布は曲り梁より求められるものに近づく。逆に、この比が減少すると、リング内側境界付近を除けば、応力分布は割裂試験の結果に近づく。Poisson 比に関しては、割裂試験の場合とほぼ同様なことが言える。カップル・ストレスの影響に関しては、 $\ell$ が増大すれば、応力集中は急激に減少することが分る。

第5章では、インデンテーション試験供試体内の応力分布をFourier級数展開法により解析した。この試験は、割裂試験と類似しており、割裂試験供試体の場合とほぼ同様な結論が得られる。

第6章では、異方性線形カップル・ストレス理論を誘導し、これを用いて一軸圧縮試験およびインデンテーション試験による直交異方性供試体内の応力分布を求め、異方性、Poisson比ならびにカップル・ストレスの影響を検討した。解析手法としては、差分法を用いた dual relaxation 法によった。解析結果から、異方性の影響は極めて大きいことが明らかとなった。異方性の主軸が供試体の対称軸から傾いていれば、応力分布は供試体の対称軸に対して対称とはならず、弾性定数の大きい方向により多くの力が負担され、また異方性の著しい程その影響は大きく、応力分布は等方性の場合からよりわい曲されることになる。Poisson比ならびにカップル・ストレスの影響に関しては、第3章および第5章で得たものとほぼ同様な結果が得られた。

第Ⅲ部の成果を総括してみると、いわゆる直接試験法では、応力分布に及ぼす材料の内部構造の影響はそれ程顕著ではないが、間接的な試験法ではその影響は著しいことが分る。従って、試験結果を古典弾性学によって一律的に解釈することはできないであろう。また、異方性供試体の場合には、応力分布は等方性の場合からわい曲し、対称性を失っているので、試験結果を等方供試体の場合のように解釈することはできないであろう。要するに、試験結果を解釈する際には、供試体内の応力分布にも十分留意し、材料に応じた適確な解釈が必要である。

以上、本研究で得た主な成果の概要を述べて来たが、著者の力量不足により未だ取り扱い得なかった重要問題も多い。それらを列挙して今後の指針としたい。

第Ⅰ部に関連しては、線形破壊力学がどの程度まで適用可能であり、かつ有効であるか、初期応力ないしひずみを破壊規準にどのように取り入れるか、一般固体力学に基づく破壊規準をどのようにして確立するか、統計固体力学の考え方をどのように取り入れるか、局所不安定域とその伝播過程をどのように表現するか、また、載荷径路の依存性をどのように導入するかなどが主な課題であろう。

第Ⅱ部に関連しては、混合、多相材料の破壊発生、伝播、終局破壊の機構ならびにその特性、さらに、破壊過程における構造組織変化をどのように取り扱い、どのようにして全体的な挙動に対応させるかが大きな課題であろう。

第Ⅲ部に関連しては、混合・多相材料の材料定数をどのようにして定めるか、混合、多相材料をどのよう

にモデル化して取り扱うかが最も大きな課題となろう。

なお、本研究では除外した動的挙動ならびに疲労破壊の機構の解明とその破壊規準の確立は極めて重要であり、今後の研究を期待したい。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたって終始御指導、御鞭撻を賜わった京都大学工学部丹羽義次教授、ならびに研究遂行中随所に於て御討議戴いた京都大学工学部小柳治助教授に深く感謝の意を表したい。

本研究の遂行にあたっては、第Ⅱ部第1章の実験の一部は、野田敏夫技官に、第2章の実験の一部は、小柳治助教授、平嶋健一講師ならびに宮地明彦氏（現在日本国土開発 K. K. 勤務）に、また、第3章の実験の一部は石田省三氏（現在運輸省勤務）ならびに中西輝雄氏（現在奈良県庁勤務）に援助して頂いた。さらに、第Ⅲ部、第3章および第5章の数値計算は森竹淳氏（現在日本国有鉄道勤務）に、第3章第4節の有限要素法による解析計算は京都大学工学部中川浩二助手に、また第4章の数値計算は福井卓雄氏（京都大学大学院学生）に援助して頂いた。以上の諸氏に対して深く感謝したい。

また、供試体の養生には京都大学土木工学教室土木材料科学講座所属の恒温、恒温室を使用させて戴いた。この使用を快諾された岡田清教授に感謝したい。

最後に、数値計算の大部分は京都大学大型計算機 F A C O M 2 3 0 - 6 0 によったことを付記して謝としたい。

## 参考文献

### 序言の参考文献

- 1) Griggs, D. and J. Handin (Ed.); '*Rock Deformation*', *Memo.* 79, Geol. Soc. Amer. (1960)  
Clark, S. P. Jr.; '*Handbook of Physical Constants*', Geol. Soc. Amer. *Memo.* 97 (1966)
- 2) Richart, F. E., A. Brandtzaeg and R. L. Brown; A study of failure of concrete under combined stresses, *Univ. of Ill. Eng. Expt. Stat., Bull.* No. 185, 1 - 102 (1928)  
Wästlund, G.; Nya rön angående betongens grundläggande Hallfasthetsegenskaper, *Betong*, 189-205 (1937)
- 3) Griffith, A. A.; The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A221, 163-198 (1921)  
Griffith, A. A.; Theory of Rupture, '*Proc. 1st Intern. Congr. Appl. Mech.*', Delft, 55-63 (1924)
- 4) Coulomb, C. A.; Memoires des mathematique et de physique, *Acad. Roy. Sci. Savants étrangers*, vol. 7, 343, 382 (1776) (Timoshenko, S.; '*History of Strength of Materials*', McGraw-Hill (1953) より )
- 5) Paul, B.; Macroscopic Criteria for Flow and Fracture, p.447, in '*Fracture II*', H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)
- 6) 同上 5), p.448
- 7) Hodgkinson, E.; '*Experimental Researches on the Strength and Other Properties of Cast Iron*', London (1846) (Timoshenko, S.; '*History of Strength of Materials*', McGraw-Hill (1953) より )
- 8) St. Venant, B., De.; '*Leçons de mécanique appliquée*', 1837 à 1830, (Todhunter, I, and K. Pearson, '*A History of the Theory of Elasticity and the Strength of Materials*', vol. 1, p.831, Cambridge (1886) より )
- 9) Tresca, H.; *Mémoires su l'écoulement des Corps Solides, Mém. présentés par divers savants*, vol. 20, 1869 (Timoshenko, S.; '*History of Strength of Materials*', McGraw-Hill (1953) より )
- 10) St. Venant, B. De; *Courpt. Rend.* 70, 473-480 (Prager, W. and Hodge, P. Jr.; '*Theory of Perfectly Plastic Solids*', Wiley (1951) より )

- 11) Beltrami, E.; *Rendiconti*, p.704 (1885), 及び *Math. Ann.*, p.94 (1903)  
(Timoshenko, S.; 'History of Strength of Materials', McGraw-Hill (1953)より)
- 12) Guest, J. J.; On the strength of ductile materials under combined stress,  
*Phil. Mag.* 50, 69–132 (1900) (Paul, B.; Macroscopic Criteria for Flow and  
Fracture, in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)より)
- 13) Mohr, O.; Welche Umstände bedingen die Elastizitätsgrenze und den Bruch eines  
Materials?, *Z. Ver. dt. Ing.*, 44, 1524–30; 1572–79 (1900). Mohr, O.; 'Abhandlungen  
aus dem Gebiete der technischen Mechanik' 2nd. ed., W. Ernst u. Sohn (1914)
- 14) Kármán, Th. V.; Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck, *Z. Ver. dt.  
Ing.*, 55, 1749–57 (1911)
- 15) Böker, R.; Die Mechanik der bleibenden Formänderung in Kristallinisch  
aufgebauten Körpern, *Ver. dt. Ing. Mitt. Forsch.*, 175, 1–51 (1915)
- 16) 例えば, 1)
- 17) Mises, R. von; Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen  
Zustand, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse*,  
582–92 (1913)
- 18) Haigh, B. P.; *Engineering*, 109, 158–160 (1900) (Paul, B.; Macroscopic  
Criteria for Flow and Fracture, in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.),  
Academic (1968)より)
- 19) Westergaard, H. M.; *J. Franklin Inst.*, 627-640 (1920), (Nadai, A.  
'Theory of Flow and Fracture of Solids', McGraw-Hill (1950)より)
- 20) 前出 3)
- 21) Orowan, E.; Fracture and strength of Solids, in 'Reports on Progress in  
*Physics*', 12, 185-222 (1949)  
Orowan, E.; Classical and Dislocation Theories of Brittle Fracture, in  
'Fracture', R. L. Averbach (Ed.), 147–160, Wiley (1959)
- 22) Irwin, G. R.; Fracture, in 'Handbuch der Physik', Vol. 6, 551–590,  
Springer (1958)  
Irwin, G. R.; Fracture Mechanics, in 'Structural Mechanics', J. N. Goodier  
and N. J. Hoff (Ed.), 557–594, Pergamon (1960)
- 23) Nadai, A.; *J. Appl. Mech.*, 1, 111–129 (1933) (Paul, B., Macroscopic  
Criteria for Flow and Fracture, in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.),  
Academic (1968)より)

- Nadai, A.; *Theory of Flow and Fracture of Solids*, 及び vol. 2, McGraw-Hill (1950) 及び (1963)
- 24) Weibull, W.; A Statistical Theory of the Strength of Materials, *Ing. Akad. Handl.*, No. 51 (1939)  
 Weibull, W.; The Phenomenon of Rupture in Solids, *Ing. Akad. Handl.*, No. 153 (1939)  
 Weibull, W.; A Survey of Statistical Effects in the Field of Material Failure, *Appl. Mech. Rev.*, 5, 449-51 (1952)
- 25) Novozhilov, V. V.; On the Physical Sense of the Stress Invariants used in the Theory of Plasticity, *PMM*, 16, 617-619 (1952)
- 26) Fisher, J. C. and J. H. Hollomon; *AIMME., Tech. Publ. No. 2218; Metals Technology*, 14 (1947) (横堀武夫 "材料強度学" 技報堂(昭. 37)より)
- 27) McClintock, F. A. and J. B. Walsh; Friction on Griffith Cracks under Pressure, *Proc. 4th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1015-1021 (1962)
- 28) Brace, W. F.; An Extension of Griffith Theory of Fracture to Rocks, *J. Geophys. Res.*, 65, 3477-3480 (1960)
- 29) Murrell, S. A. F.; A Criterion for Brittle Fracture of Rocks and Concrete under Triaxial Stress and the Effect of Pore Pressure on the Criterion, *Proc. 5th Rock Mech. Symp.*, Univ. of Minn, in *'Rock Mechanics'*, C. Fairhurst (Ed.), 563-577, Pergamon (1963)
- 30) Paul, B.; Macroscopic Criteria for Flow and Fracture, in *'Fracture II'*, H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)
- 31) Freudenthal, A. M.; Statistical Approach to Brittle Fracture, in *'Fracture II'*, H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)
- 32) Newman, K. and J. B. Newman; Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete, in *'Structure, Solid Mechanics and Engineering'*, Te'Eni (Ed.), Wiley (1971)

## 第 I 部

### 一般参考文献

- Nadai, A.; *'Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 1'*, 2nd Ed., McGraw-Hill (1950)
- Nadai, A.; *'Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 2'*, McGraw-Hill (1963)
- Jaeger, J. C.; *'Elasticity, Fracture and Flow'*, 2nd Ed., Methuen (1962)
- Jaeger, J. C. and N. G. W. Cook; *'Fundamentals of Rock Mechanics'*, Methuen (1969)
- Fairhurst, C. (Ed.); *'Failure and Breakage of Rock'*, Proc. 8th Symp. on Rock Mech., Univ. of Minn. (1966)
- Liebowitz, H. (Ed.); *'Fracture, Vol. I, Vol II'*, Academic (1968)  
*Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications*, STP 381, ASTM, Philadelphia (1964)
- Stagg, K. G. and O. C. Zienkiewicz (Ed.); *'Rock Mechanics in Engineering Practice'*, Wiley (1968)

### 第 1 章の参考文献

- 1) Bieniawski, Z. T.; Mechanism of Brittle Fracture of Rock, *Int. J. Rock Mech. Min. Sci.* 4, 395-406 (1967)
- 2) Barenblatt, G. I.; On Some General Concepts of the Mathematical Theory of Brittle Fracture, *PMM (Transl.)* 28, 778-792 (1964)  
小林昭一; 岩石の変形・破壊特性, 第3回岩の力学国内シンポジウム, 112-105 (1970).  
Kobayashi, S.; Fracture Criteria for Rock-like Materials, *'Int. Conf. Mech. Behav. Mater.'*, Kyoto, 1971, (in press)
- 3) Griffith, A. A.; The phenomena of rupture and flow of solids, *Phil. Trans. Roy. Soc., A221*, 163-198 (1921)  
Griffith, A. A.; The theory of rupture, *'Proc. 1st. Intern. Congr. Appl. Mech.'*, Delft, 55-63 (1924)  
Sih, G. C. and H. Liebowitz; On the Griffith Energy Criterion for Brittle Fracture, *Intern. J. Solids & Structures*, 3, 1-22 (1967)  
Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in

- 'Fracture II'*, H. Liebowitz (Ed.), 67-190, Academic (1968)
- 4) Sack, R. A.; Extension of Griffith's Theory of Rupture to Three Dimensions, *Proc. Phys. Soc., London*, **58**, 729-736 (1946)
- Kassir, M. K. and G. C. Sih; Griffith's Theory of Brittle Fracture in Three Dimensions, *Intern. J. Engng Sci.*, **5**, 899-918 (1967)
- Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in *'Fracture II'*, H. Liebowitz (Ed.), 67-190, Academic (1968)
- Kassir, M. K. and G. C. Sih; Three-Dimensional Stress Distribution Around on Elliptical Crack Under Arbitrary Loadings, *J. Appl. Mech.*, **33**, 601-611 (1966)
- 5) Irwin, G. R.; Analysis of Stresses and Strains near the End of a Crack Travelling a Plate, *J. Appl. Mech.*, **24**, 361-364 (1957)
- Irwin, G. R.; Fracture Mechanics, in *'Structural Mechanics'*, J. N. Goodier and N. J. Hoff (Ed.), 557-591, Pergamon (1960)
- Irwin, G. R.; Fracture, in *'Handbuch der Physik, VI'*, 551-590, Springer (1958)
- 6) Irwin, G. R. and J. A. Kies; Fracturing and Fracture Dynamics, *Weld. J. (Res. Suppl.)*, 95-s-100-s (1952)
- Irwin, G. R. and J. A. Kies; A Critical Energy Rate Analysis of Fracture Strength, *Weld. J. (Res. Suppl.)*, 193-s-198-s (1954)
- Paris, P. C. and Sih, G. C.; Stress Analysis of Cracks, in *'Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications'*, STP 381, 30-83, ASTM, Philadelphia (1964)
- 7) 例えば, *'Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications'*, STP 381, ASTM, Philadelphia (1964)
- 8) 例えば, 前出 7) (金属材料に関して)
- Welch, G. B. and B. Haisman; The application of fracture mechanics to concrete and the measurement of fracture toughness, *Matériaux et Construction*, **2**, 171-177 (1969)
- 9) Drucker, D. C.; A more fundamental approach to stress-strain relations, *'Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.'*, 487-491 (1951)
- Drucker, D. C.; Plasticity in *'Structural Mechanics'*, J. N. Goodier and N. J. Hoff (Ed.), 407-455, Pergamon (1960)

- Drucker, D. C.; On the postulate of stability of material in the mechanics of continua, *Jl. de Mécanique*, 3, 235–249 (1964)
- 10) Palmer, A. C., Maier and D. C. Drucker; Convexity of Yield Surfaces and Normality Relations for Unstable Materials on Structural Elements, *J. Appl. Mech.*, 34, 464–470 (1967)
- Maier, G. and D. C. Drucker; Elastic-Plastic Continua Containing Unstable Elements Obeying Normality and Convexity Relations, *Schweiz. Bauzeit.*, 84, 447–450 (1966)
- 11) 前出 10) Palmer, A. C., G. M. Maier and D. C. Drucker

## 第2章の参考文献

- 1) ~ 6) Nadai, A.; *Theory of Flow and Fracture of Solids, Vol. 1*, 2nd. Ed. McGraw-Hill (1950)
- Jaeger, J. C.; *Elasticity, Fracture and Flow*, 2nd. Ed., Methuen (1962)
- Paul, B.; Macroscopic Criteria for Plastic Flow and Brittle Fracture, in *'Fracture II'*, H. Liebowitz (Ed.), 313–496, Academic (1968)
- Handin, J.; On the Coulomb-Mohr Failure Criterion, *J. Geophys. Res.*, 74, 5343–5348 (1969)
- Jaeger, J. C. and N. G. W. Cook; *Fundamentals of Rock Mechanics*, Methuen (1969)
- 7) Griffith, A. A.; The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A221, 163–198 (1921)
- 8) Orowan, E.; Fracture and strength of solids, *Repts on Progress in physics*, 12, 185–232 (1949)
- 9) Inglis, C. E.; Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners, *Trans. Inst. Naval Archit., London*, 55, 219–241 (1913)
- 10) 前出7)および Griffith, A. A.; Theory of rupture, *Proc. Ist. Intern. Congr. Appl. Mech.*, Delft, 55–63 (1924)
- 11) Babel, H. W. and G. Sines; A Biaxial Fracture Criterion for Porous Brittle Materials, *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 90, 285–291 (1968)
- Kobayashi, S.; Fracture Criteria for Rock-like Materials, *'Int. Conf. Mech. Behav. Mater'*, Kyoto, 1971 (in press)
- 12) 前出10)の後者

- 13) Irwin, G. R.; Fracture Mechanics, in '*Structural Mechanics*', J. N. Goodier and N. J. Hoff (Ed.), 557–591, Pergamon (1960)  
Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in '*Fracture II*', H. Liebowitz (Ed.), 67–190, Academic (1968)
- 14) McClintock, F. A. and J. B. Walsh; Friction on Griffith cracks under pressure, '*Proc. 3th U.S. Nat. Congr. Appl. Mech.*', 1015–1021 (1962)
- 15) Mossakovskii, V. I. and M. T. Rybka; An attempt to construct a theory of fracture for brittle materials based on Griffith criterion, *PMM (Transl.)*, **29**, 326–332 (1965)  
Cherepanov, G. P.; Propagation of Cracks in Compressed Bodies, *PMM (Transl.)*, **30**, 96–109 (1966)  
Keer, L. M.; A note on shear and combined loading for a Penny-shaped crack, *J. Mech. Phys. Solids*, **14**, 1–6 (1966)
- 16) 前出 15)
- 17) Brace, W. F.; An extension of Griffith theory of fracture to rocks, *J. Geophys. Res.*, **65**, 3477–3480 (1960)
- 18) Murrell, S. A. F.; The strength of coal under triaxial compression, in '*Mechanical Properties of Non-metallic Brittle Materials*', W. H. Walton (Ed.), 123–153, Butterworths (1958)
- 19) 例えば, Sack, R. A.; Extension of Griffith's Theory of Rupture to Three Dimensions, *Proc. Phys. Soc., London*, **58**, 729–736 (1946)  
Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in '*Fracture II*', H. Liebowitz (Ed.), 67–190, Academic (1968)
- 20) 丹羽義次, 小林昭一; ぜい性材料の破壊条件に関する考察, *材料*, **16**, 1–7 (昭. 42)  
Niwa, Y. and S. Kobayashi; Failure Criterion of Cement Mortar Under Triaxial Compression, *Memo. of Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **29**, 1–15 (1967)  
Paul, B.; A Three-Dimensional Stress Fracture Criterion Based on Microscopic Flaws, *6th Annual Meet., Soc. Eng. Sci.* (Preprint), Princeton Univ. (1968)
- 21) ~ 24) 前出 20) の丹羽義次, 小林昭一及び Niwa Y. and S. Kobayashi
- 25) Paul, B. and M. Gangal; Initial and Subsequent Fracture Curves for Biaxial Compression of Brittle Materials, *Proc. 8th Symp. on Rock Mech., C.* Fairhurst (Ed.), 113–141, Am. Inst. Min. Metal. Petral. Eng. Inc. (1967)

### 第3章の参考文献

- 1) Jaeger, J. C.; The Frictional Properties of Joints in Rock, *Geof. pura e Appl. - Milano*, **43**, 148-158 (1959).
- 2) Hoek, E.; Fracture of Anisotropic Rock, *J. South Afr. Inst. Min. Metal.*, **1**, 501-518 (1964)
- 3) Walsh, J. B. and W. F. Brace; A Fracture Criterion for Brittle Anisotropic Rock, *J. Geophys. Res.*, **69**, 3449-3456 (1964)
- 4) ~ 6) Kobayashi, S.; Fracture Criteria for Anisotropic Rocks, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **32**, 307-333 (1970)
- 7) Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.), 67-190, Academic (1968)
- 8) Paris, P. C. and G. C. Sih; Stress Analysis of Cracks, in 'Symposium on Fracture Toughness Testing and Its Applications', STP 381, 30-83, ASTM, Philadelphia (1964)
- 9) 前出 4) ~ 6)

## 第 II 部

### 第 1 章の参考文献

- 1) Brace, W. F and E. G. Bombolakis; A Note on Brittle Crack Growth in Compression, *J. Geophys. Res.*, 68, 3709-13 (1963)
- 2) Hoek, E. and Z. T. Bieniawski; Brittle Fracture Propagation in Rock under Compression, *Int. J. Fracture Mech.*, 1, 137-55 (1965)
- 3) Hsu, T. T. C., F. O. Slate, G. M. Struman and G. Winter; Microcracking of Plain Concrete and Shape of the Stress-Strain Curve, *J. ACI*, 60, 209-224 (1963)
- 4) Hansen, T. C.; Cracking and Fracture of Concrete and Cement Paste, in 'Causes, Mechanism, and Control of Cracking in Concrete, ACI SP-20, Am. Concrete Inst. Detroit, Mich., 1968
- 5) 丹羽義次, 小林昭一, 小柳洽, 中川浩二; モルタル内の初期欠陥からのひびわれの発生および発達, セメント技術年報 XXI, 229-234 (昭.42)
- 6) 加藤清志; プレーン・コンクリートのひびわれ発生機構について, コンクリート・ジャーナル, 6, 11-17 (昭.43)  
" : プレーン・コンクリート中のマイクロクラックと物性, 土木学会論文報告集, 188号, 61-72 (昭.46)
- 7) Paul, B. and Gangal, M.; Initial and Subsequent Fracture Curves for Biaxial Compression of Brittle Materials, *Proc. 8th Symp. on Rock Mech.*, Univ. of Minnesota, 1966, in 'Failure and Breakage of Rock', C. Fairhurst (Ed.), 113-141 (1967)  
Paul, B.; Macroscopic Criteria for Flow and Failure, in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)
- 8) 小林昭一; 圧縮によるぜい性き裂の発生と伝ば, 材料, 20, 164-173 (昭.46)
- 9) 前出 2)
- 10) Freudenthal, A. M.; Statistical Approach to Brittle Fracture in 'Fracture II', H. H. Liebowitz (Ed.), Academic (1968)
- 11) 前出 2)
- 12) 前出 2)
- 13) 前出 2)
- 14) 土木学会編, '岩盤力学', p.477 (昭.41)

Koiter, W. T.; An infinite row of collinear cracks in an infinite elastic sheet, *Ing. - Arch.*, 28, 168-172 (1959)

## 第2章の参考文献

- 1) Niwa, Y. and S. Kobayashi; Failure Criterion of Cement Mortar Under Triaxial Compression, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 29, 1-15 (1967)
- 2) 丹羽義次, 小林昭一, 平島健一; 三軸圧縮応力状態におけるモルタルの破壊条件. 材料. 16, 108-114 (昭.42)
- 3) 丹羽義次, 小柳洽, 小林昭一, 平島健一; モルタルの破壊曲面について, セメント技術年報 XX, 221-225 (昭.42)
- 4) Niwa, Y., S. Kobayashi and W. Koyanagi; Failure Criterion of Lightweight Aggregate Concrete Subjected to Triaxial Compression, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 29, 119-131 (1967)
- 5) 丹羽義次, 小柳洽, 小林昭一; 人工軽量コンクリートの三軸圧縮破壊条件, 土木学会論文集, 143号, 28-35 (昭.42)
- 6) 小林昭一, 小柳洽; コンクリートの圧縮域における破壊条件, 材料, 16, 897-902 (昭.42)
- 7) 小柳洽, 小林昭一, 井上義之, 山本和夫; モルタルの引張り強度を求める種々の試験法, セメント技術年報 XXI, 217-221 (昭.43)
- 8) 丹羽義次, 小林昭一, 小柳洽, 平島健一; 引張り-圧縮を受けるモルタルの破壊条件, セメント技術年報 XXI, 225-228 (昭.43)
- 9) 丹羽義次, 小林昭一, 宮地明彦; モルタルの三軸圧縮状態における破壊条件に関する2, 3の考察, セメント技術年報 XXIII (昭.45)
- 10) Kobayashi, S.; Fracture Criteria for Anisotropic Rocks, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 32, 307-333 (1970)
- 11) Newman, K. and L. Lachance.; The testing of brittle materials under uniform uniaxial compressive stress, *Proc. ASTM*, 1044-1067 (1965)
- 12) 前出 1) ~ 6), 9)
- 13) 前出 1) ~ 6), 9)
- 14) Wästlund, G., Nya rön Argående Betonges Grundläggande Halfasthetsegenskaper, *Betong* (Stockholm), 3, 189-205 (1937)
- 15) Weigler, H. and G. Becker; Experiments on the fracture and deformational behaviour of concrete under biaxial loading, *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, 157, Berlin (1963)

- 16) Vile, G. W. D.; Strength of Concrete under Short-Time Static Biaxial Stress, Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, 'The Structure of Concrete' A. E. Brooks & K. Newman (Ed.), Cement and Concrete Association, London, 275-288 (1968)
- 17) Берг, О. И Н. В. смирнов ; О прочности при двухосном сжатии, бетон и железобетон 11, 37-39 (1965)
- 18) Sundara Raja Iyengar, K. T., Chandrashekhara, K. and Krishnaswamy, K. T., Strength of Concrete under Biaxial Compression, *J. ACI*, 62, 239-249 (1965)
- 19) 前出 1) 及び 2)
- 20) 前出 4) 及び 5)
- 21) 前出 6)
- 22) Schröder, S. u. H. Opitz; Festigkeit und Verformungseigenschaften des Betons bei zweiachsiger Druckbeanspruchung, *Bauplanung-Bautechnik*, 22, 190-194 (1968)
- 23) Kupfer, H., H. K. Hilsdorf and H. Rusch; Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses, *J. ACI*, 656-666 (1968)
- 24) Mills, L. L. and R. M. Zimmerman; Compressive Strength of Plain Concrete Under Multiaxial Loading Conditions, *J. ACI*, 802-807 (1970)
- 25) 前出 17)
- 26) 前出 1) ~ 6), 9)
- 27) 前出 9),あるいは, 小林昭一; 岩石の変形・破壊特性, 第3回岩の力学国内シンポジウム, 105-112 (1970)
- 28) McCreath, D. R., J. B. Newman and K. Newman; The influence of aggregate particles on the local strain distribution and fracture mechanism of cement paste during drying shrinkage and loading to failure, *Materials and Structures, RILEM*, 2, 73-84 (1969)
- 29) 前出 24)
- 30) 例えば, Murrell, S. A. F.; A criterion for brittle fracture of rocks and concrete under triaxial stress and the effect of pore pressure on the criterion, *Proc. 5th Rock Mech. Symp.*, Univ. of Minnesota, in 'Rock Mechanics', C. Fairhurst (Ed.), Pergamon, 563-577 (1963)
- 31) 前出 28)
- 32) 前出 24)

- 33) McHenry, D. and J. Karni; Strength of concrete under combined tensile and compressive stress, *Proc. ACI*, 54, 829–839 (1958)
- 34) Bresler, B. and K. S. Pister; Strength of concrete under combined stresses, *Proc. ACI*, 55, 321–345 (1958)
- 35) Sundara Raja Iyengar, K. T., K. Chandrashekhara and K. T. Krishnaswamy; On the determination of true tensile strength of concrete, *RILEM No. 21*, 39–45 (1963)
- 36) Krishnaswamy, K. T.; Strength of concrete under combined tensile-compressive stresses, *Materials and Constructions, RILEM*, 2, 187–194 (1969)
- 37) Rosenthal, I. and J. Glücklich; Strength of Plain Concrete Under Biaxial Stress,” *J. ACI*, 903–914 (1970)
- 38) 前出 23)
- 39) 前出 7), 8)
- 40) 前出 8)
- 41) 前出 34)
- 42) 前出 36)
- 43) 前出 35)
- 44) 前出 37)
- 45) Hatano, T., S. Seki and N. Nishizawa; Strength of concrete under combined tensile and compressive stress and its application to design of dam concrete, ‘8th Int. Congr. Large Dams’, 3, Q. 30, 95–126, Edinburgh, Great Britain (1964)
- 46) 前出 33)
- 47) 前出 23)
- 48) Smith, G. M; Failure of Concrete Under Combined Tensile and Compressive Stresses , *J. ACI., Proc.* 50, 137–140 (1953)
- 49) 前出 36)
- 50) 前出 23)
- 51) 前出 45)
- 52) Newman, K. and J. B. Newman; Failure Theories and Design Criteria for Plain Concrete, in ‘*Structure, Solid Mechanics and Engineering*’, Te’Eni (Ed.) Wiley, (1970)
- 53) 岡田清, 小柳洽 ; コンクリートの破壊条件と破壊過程, 材料, 20, 2–12 (昭. 46)
- 54) 赤井浩一, 森寛昭 ; 組み合わせ圧縮応力下における和泉砂岩の破壊機構に関する研究, 土木学会論文集, 147 号, 11–24 (昭. 42)

- 55) Mogi, K.; Effect of the Intermediate Principal Stress on Rock Failures, *J. Geophys. Res.*, 72, 5117-5131 (1967)
- 56) 茂木清夫； 岩石破壊における組合せ応力の影響, 材料, 17, 882-887 (昭.43)
- 57) 前出 54)
- 58) Jaeger, J. C.; Rock Failure under the Confined Brazilian Test, *J. Geophys. Res.* 71, 2651-2659 (1966)
- 59) Kármán, Th. von; Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck, *Z. Ver. dt Ing.*, 55, 1749-1757 (1911)
- 60) Böker, R.; Die Mechanik der bleibenden Formänderung in Kristallinisch aufgebauten Körpern, *Ver. dt. Ing. Mitt. Forsch.*, 175, 1-51 (1915)
- 61) Murrell, S. A. F.; The Effect of Triaxial Stress Systems on the Strength of Rocks at Atmospheric Temperature, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 10, 231-281 (1965)
- 62) Hardin, J., H. C. Heard and J. N. Magourik; Effects of the Intermediate Principal Stress on the Failure of Limestone, Dolomite, and Glass at Different Temperatures and Strain Rates, *J. Geophys. Res.*, 72, 611-640 (1967)
- 63) Hoek, E. and Z. T. Bieniawski; Brittle Fracture Propagation in Rock Under Compression, *Int. J. Fract. Mech.*, 1, 137-155 (1965)
- 64) 前出 54) ~ 62)
- 65) 前出 63)
- 66) Hardin, J; Strength and Ductility, Sect. 11 in 'Handbook of Physical Constants', S. P. Clark (Ed.), *Geol. Soc. Am. Memo.* 97 (1966)
- 67) Fairhurst, C. (Ed.); Proc. 8th Symp. on Rock Mech., Univ. of Minnesota, 1966, 'Failure and Breakage of Rocks', AIMM, (1967)
- 68) Ely, R. E.; Strength of Graphite Tube Specimens under Combined Stresses; *J. Am. Ceramic Soc.*, 48, 505-508 (1965)
- 69) Ely, R. E.; Strength of Magnesium Silicate and Graphite Under Biaxial Stresses, *Ceramic Bulletin*, 47, 489-492 (1968)
- 70) Babel, H. W. and G. Sines; A Biaxial Fracture Criterion for Porous Brittle Materials, *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 90, 285-291 (1968)
- 71) Cornet, I. and R. A. Grassi; A Study of Theories of Fracture Under Combined Stresses, *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 83, 39-44 (1961)

### 第3章の参考文献

- 1) Kobayashi, S.; Fracture Criteria for Anisotropic Rocks, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **32**, 307–333 (1970)
- 2) Donath, F. A.; Strength Variation and Deformational Behavior in Anisotropic Rock, in 'State of Stress in the Earth's Crust', W. R. Judd (Ed.), Elsevier (1964)  
Donath, F. A.; Experimental study of shear failure in anisotropic rocks, *Bull. Geol. Soc. Am.*, **72**, 985–990 (1961)
- 3) Hoek, E.; Fracture of anisotropic rock, *J. S. Afr. Inst. Min. Metall.*, **64**, 501–518 (1964)
- 4) McLamore, R. and K. E. Gray; The Mechanical Behavior of Anisotropic Sedimentary Rocks, *J. Eng. for Industry, Trans. ASME*, **89**, 62–76 (1967)
- 5) Chenervert, M. E. and C. Gatlin; Mechanical Anisotropies of Laminated Sedimentary Rocks, *Soc. Petrol. Eng. J.*, 67–77 (1965)
- 6) 赤井浩一, 山本和夫, 有岡正樹: 結晶片岩の構造異方性に関する実験的研究: 土木学会論文報告集, 第170号, 23–36 (昭.44)
- 7) Jaeger, J. C.; Fracture of Rocks, in 'Fracture', C. J. Osborn (Ed.), Univ. of Melbourne, 268–283 (1965)
- 8) 前出 6)
- 9) 石田省三: "不連続性岩盤模型の破壊条件に関する基礎的研究", 京都大学工学部修士論文 (昭.43)
- 10) 前出 9)

### 第 III 部

#### 第 2 章の参考文献

- 1) Kröner, E. (Ed.); IUTAM Symp. 'Mechanics of Generalized Continua', Springer (1968)
- 2) Green, A. E., P. M. Naghdi and R. S. Rivlin; Directors and Multipolar Displacements in Continuum Mechanics, *Int. J. Eng. Sci.* 2, 611–620 (1964)  
Green, A. E.; Micro-Materials and Multipolar Continuum Mechanics, *Int. J. Eng. Sci.* 3, 533–537 (1965)
- 3) Toupin, R. A.; Elastic Materials with Couple-Stresses, *Archiv. Rat. Mech. Anal.*, 11, 385–414 (1962)
- 4) Mindlin, R. D. and H. F. Tiersten; Effects of Couple-Stresses in Linear Elasticity, *Archiv. Rat. Mech. Anal.*, 4, 415–448 (1962)
- 5) Aero, E. L. and E. V. Kuvshinskii; Fundamental equations of the theory of elastic media with rotationally interacting particles, *Soviet Physics-Solid State*, 2, 1272–1281 (1961)
- 6) Kuvshinskii, R. V. and E. L. Aero; Continuum theory of Asymmetric Elasticity, *Soviet Physics-Solid State*, 5, 1892–1897 (1964)
- 7) Eringen, A. C. and E. S. Suhubi; Nonlinear Theory of Simple Micro-Elastic Solids, *Int. J. Eng. Sci.*, 2, 189–203 (1964)
- 8) Eringen, A. C.; Theory of Micropolar Elasticity, Chapt. 7 in 'Fracture II', H. Liebowitz (Ed.), 621–729, Academic (1968)
- 9) Pal'mov, V. A.; Fundamental Equations of the Theory of Asymmetric Elasticity, *PMM*, 28, 496–505 (1964) (Eng. transl.)
- 10) Neuber, H.; On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat continua, 'Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech.', München, 1964, H. Görtler (Ed.) 153–158 (1964)
- 11) Mindlin, R. D.; Influence of couple-stresses on stress concentrations, *Exp. Mech.*, 1–7 (1963)
- 12) 前出 8)
- 13) Cowin, S. C.; An Incorrect Inequality in Micropolar Elasticity Theory, *ZAMP*, 494–497 (1970)

### 第3章の参考文献

- 1) Niwa, Y., S. Kobayashi and S. Moritake; Influence of Couple Stresses on Stress Distributions in Rectangular Specimen Compressed Between Rough Platens, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **33**, 35–50 (1971)
- 2) Niwa, Y., S. Kobayashi and K. Nakagawa; The Influence of End Frictions on Stresses in Compressed Specimens, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **31**, 1–10 (1969)
- 3) 丹羽義次, 小林昭一, 中川浩二; 圧縮供試体内の応力分布に及ぼす端面摩擦およびポアソン比の影響, *材料*, **19**, 63–69 (昭・45)
- 4) Zienkiewicz, O. C.; *The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics*, McGraw-Hill (1967)
- 5) 前出 2) 及び 3)

### 第4章の参考文献

- 1) Jaeger, J. C. and N. G. W. Cook; *Fundamentals of Rock Mechanics*, 160–164, Methuen (1969)
- 2) Niwa, Y., S. Kobayashi and T. Fukui; Effects of Couple Stresses on Stress Distributions in a Disc Specimen Subjected to Diametral Compression, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **33**, 118–127 (1971)
- 3) Kobayashi, S. and T. Fukui; Effects of Couple Stresses on Stress Distributions in a Ring Test Specimen, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, **33**, (1971)

### 第5章の参考文献

- 1) Jaeger, J. C. and N. G. W. Cook; *Fundamentals of Rock Mechanics*, 160–164, Methuen (1969)
- 2) 小林昭一, 森竹淳; インデンテーション試験供試体内の応力分布に及ぼすカップル・ストレスおよび載荷幅の影響, *材料* **20**, 1126–1131 (昭・46)

### 第6章の参考文献

- 1) Neuber, H.; On the general solution of linear elastic problems in isotropic and anisotropic cosserat continua, *Proc. 11th Int. Congr. Appl. Mech.*, München, 1964, H. Görtler (Ed.), 153–158 (1964)

- 2) Love, A. E. H.; '*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*',  
4th Ed., Dover (1944)
- 3) Lekhnitskii S. G.; '*Theory of Elasticity of An Anisotropic Elastic Body*',  
trans. by P. Peru, Holden-Day (1963)  
Lekhnitskii S. G.; '*Anisotropic Plates*', trans. by S. W. Tsai and T. Cheron,  
Gordon and Breach (1968)
- 4) Southwell, R. V.; '*Relaxation Methods in Theoretical Physics, Vol II*',  
chapt. IX, p.312-338, Oxford Univ. (1956)
- 5) 例えば, 山内二郎, 森口繁一, 一松信 ; "電子計算機のための数値計算法" 培風館 (昭. 42)  
Smith, G. D.; '*Numerical Solution of Partial Differential Equations*',  
Oxford Univ. (1965)
- 6) 前出 3)
- 7) 例えば, Masure, P.; Comportement mécanique des roches a anisotropie  
planaire discontinue, '*Proc. 2nd Int. Congr. Rock Mech.*', Beograd, 1970



# 附 録



## A. 1. 破壊に関するエネルギー規準

### A. 1.1 エネルギー規準の基本的な考え方

今、Fig. A.1.1 のように、任意形状のクラックを含む線形弾性物体に、表面力  $T_i$  が作用している系を考える。

釣り合い状態 I にある系のひずみエネルギーは、

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_s T_i u_i ds \quad (\text{A1.1.1})$$

で与えられる。ここに  $u_i$  は  $T_i$  の作用点の  $T_i$  方向の変位とし、また添字に関しては、総和規約を適用するものとする。

この表面力  $T_i$  の下で、状態 I から、クラックが拡大するように  $G_1$  および  $G_2$  の部分を取り去った一つの釣り合い系を考えると、そのときの系のひずみエネルギーは

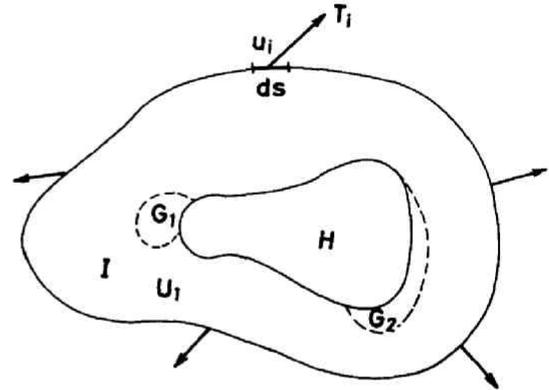
$$U_2 = \frac{1}{2} \int_s T_i v_i ds \quad (\text{A1.1.2})$$

で与えられる。ここに  $v_i$  は  $T_i$  が作用している点の  $T_i$  方向の変位である。

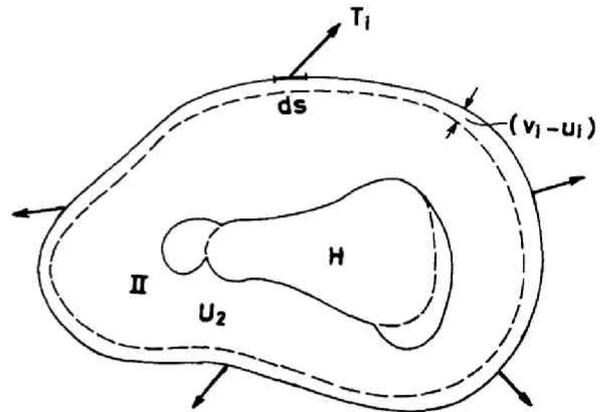
従って、 $T_i$  の下で、状態 I から II に移行させると、両者のひずみエネルギーの差は、次のように与えられる。

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{2} \int_s T_i (u_i - v_i) ds \quad (\text{A1.1.3})$$

今、状態 I から、 $H$ 、 $G_1$  および  $G_2$  部分だけを取り除いた領域を  $D_e$  とし、 $D_e$  内のひずみエネルギーを  $U_{1e}$  とする。さて、この状態から状態 II に移行させるためには、状態 I の  $G_1$  および  $G_2$  の境界に作用している力を解放しなければならない。この力を解放する、すなわち逆向きに同じ大きさの力を  $G_1$  および  $G_2$  の境界に作用させることによって生じる仕事を



(a)



(b)

Fig. A.1.1 Schematic view of a body containing a crack subjected to system of load. Initial state (a) and state of crack developed (b).

$W_1$  とすると、エネルギー保存則から、

$$W_1 + (U_2 - U_1) = (U_1 - U_{1e}) \quad (\text{A1.1.4})$$

となる。 $U_1 - U_{1e}$  は、状態 I の  $G_1$  および  $G_2$  内のひずみエネルギーであり、これを  $U_{1G}$  と書くと、

$$W_1 = - (U_2 - U_1) + U_{1G} \quad (\text{A1.1.5})$$

となる。 $W_1$  は負でなければならないので、 $U_2 - U_1 > U_{1G}$  一方、 $U_{1G}$  は必ず正であるから  $U_2 - U_1$  は正となる。すなわち、状態 II のひずみエネルギーは、状態 I のものより大きい。

$G_1$  および  $G_2$  がクラックの成長を表わすとすると、その体積は零であるから、 $U_{1G} = 0$  となる。従って、式 (A1.1.5) は、

$$W_1 = - (U_2 - U_1) \quad (\text{A1.1.6})$$

となる。すなわち、クラックが成長する場合には、 $U_2 - U_1$  のエネルギーが生じることになる。

Griffith は、このエネルギーが全てクラックの成長に伴う表面エネルギーとしてたくわえられると考えた。<sup>1)</sup> 今、表面エネルギーを  $T$  と書くと、クラックが丁度成長する極限状態では、

$$\delta (T - W_1) = 0 \quad (\text{A1.1.7})$$

が成立することになる。

長軸  $2a$  の偏平楕円クラックが存在するために生じているエネルギー差、過剰ひずみエネルギーは次のように与えられる。<sup>2)</sup>

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} (1 - \nu^2) && (\text{平面ひずみ}) \\ &= \frac{\pi a^2 \sigma^2}{E} && (\text{平面応力}) \end{aligned} \quad (\text{A1.1.8})$$

ここに  $\sigma$  は一様引張応力とする。

今、クラックが  $da$  だけ成長したとすると、エネルギー増分  $dW_1$  は

$$\begin{aligned} dW_1 &= \frac{2\pi a \sigma^2}{E} (1 - \nu^2) da && (\text{平面ひずみ}) \\ &= \frac{2\pi a \sigma^2}{E} da && (\text{平面応力}) \end{aligned} \quad (\text{A1.1.9})$$

で与えられる。一方、表面エネルギー密度を  $\gamma$  とすると、表面エネルギーの増分は

$$dT = 4\gamma da \quad (\text{A1.1.10})$$

で与えられる。式 (A1.1.9), (A1.1.10) を式 (A1.1.7) に代入すると, クラックを成長させるに要する極限応力  $\sigma$  として,

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{2 E \tau}{\pi (1 - \nu^2) a}} && \text{(平面ひずみ)} \\ &= \sqrt{\frac{2 E \tau}{\pi a}} && \text{(平面応力)}\end{aligned}\tag{A1.1.11}$$

が求められる。これが Griffith が導いた結果である。<sup>3)</sup>

このようなエネルギー規準は, 上に見たように  $W_1$  および  $T$  によって表わされることになる。材料性質が分っておれば, この  $W_1$  および  $T$  はクラックの形状の関数として与えられることになる。以下・Sih & Liebowitzによる  $W_1$  および  $T$  の算定方法<sup>4)</sup>について述べる。

## A.1.2 欠陥の存在による過剰ひずみエネルギー $W_1$

### A1.2.1 面外せん断による $W_1$

面外せん断の場合にはデカルト座標軸  $x y z$  に沿う変位ベクトル成分は, 次のように与えられる。

$$u_x = u_y = 0, \quad u_z = u_z(z, y)\tag{A1.2.1}$$

応力テンサーの成分は, 従って,

$$\sigma_z = \sigma_y = \sigma_x = \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \tau_{yz} = \mu \frac{\partial u_z}{\partial y}\tag{A1.2.2}$$

で与えられる。ここに  $\mu$  はせん断弾性係数である。

領域  $D$  に貯えられるひずみエネルギーは

$$W = \frac{1}{2} \iint_D \left( \tau_{xz} \frac{\partial u_z}{\partial x} + \tau_{yz} \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) dx dy\tag{A1.2.3}$$

から求められることになる。Green の定理を用いると, この式 (A1.2.3) は線積分に変換されて,

$$W = \frac{1}{2} \oint_C (\tau_{xz} dy - \tau_{yz} dz) u_z ds\tag{A1.2.4}$$

となる。ここに式 (A1.2.3) から (A1.2.4) の変換の際には釣り合い方程式を用いた。式 (A1.2.4) は, 境界の法線方向と  $z$  軸との成す角を  $\theta$  とすると,

$$\begin{aligned}W &= \frac{1}{2} \oint_C (\tau_{xz} \cos \theta + \tau_{yz} \sin \theta) u_z ds \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \oint_C (\tau_{xz} - i \tau_{yz}) (\cos \theta + i \sin \theta) u_z ds \quad (i^2 = -1)\end{aligned}\tag{A1.2.5}$$

ここに  $Re$  は実部を表わすものとする。

面外せん断の場合には、応力および変位は、1つの複素関数  $\phi(z)$  で表わすことができ、

$$\tau_{xz} - i \tau_{yz} = \mu \phi'(z), \quad u_z = Re[\phi(z)] \quad (A1.2.6)$$

となる。

今、半径  $R$  の円周に沿う線積分を行なうとすると、式 (A1.2.5) よりひずみエネルギーは

$$W = \frac{\mu}{8i} \oint_C [\phi(z) + \overline{\phi(z)}] \left[ \phi'(z) + \frac{R^2}{z^2} \overline{\phi'(z)} \right] dz \quad (A1.2.7)$$

で与えられることになる。 $\phi(z)$  が与えられれば、これより  $W$  が求められる。

Sih & Liebowitz によると、 $\tau_{yz} = \varepsilon s$ 、 $\tau_{yz} = s$  が作用する場合の楕円クラック（長軸  $2a$ 、短軸  $2b$ ）を含む弾性体に貯えられる  $W_1$  は、クラックがある場合のひずみエネルギーからクラックがない場合のひずみエネルギーを差し引いて、次のように与えられる。

$$W_1 = \frac{\pi s^2}{4\mu} \left[ (1 + \varepsilon^2)(a + b)^2 + (1 - \varepsilon^2)(a^2 - b^2) \right] \quad (A1.2.8)$$

#### A1.2.2 二軸引張りおよび面内せん断による $W_1$

2次元物体内に貯えられるひずみエネルギーは、

$$W = \frac{1}{2} \iint_D \left[ \sigma_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \tau_{xy} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] ds \quad (A1.2.9)$$

で与えられる。物体力がない場合には、この式は、Greenの公式を用いて簡単化されて、

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \oint_C \left[ (\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y) \cos \theta + (\tau_{yx} u_x + \sigma_y u_y) \sin \theta \right] ds \\ &= \frac{1}{2} Re \oint_C \left[ (\sigma_x - i \tau_{xy}) \cos \theta + (\sigma_y - i \tau_{xy}) \sin \theta \right] (u_x + i u_y) ds \end{aligned} \quad (A1.2.10)$$

と表わされる。

一方、Muskhelishviliによると、応力、変位は2つの独立な複素関数  $\phi(z)$ 、および  $\psi(z)$  を用いて、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2 \left[ \phi(z) + \overline{\phi'(z)} \right] \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i \tau_{xy} &= 2 \left[ z \phi''(z) + \psi'(z) \right] \\ 2\mu(u_x + i u_y) &= \kappa \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \end{aligned} \right\} \quad (A1.2.11)$$

で表わされる。<sup>5)</sup>ここに、 $\kappa$ は平面ひずみに対しては  $(3 - 4\nu)$ 、平面応力では  $(3 - \nu)/(1 + \nu)$  となる定数である。式 (A1.2.11) を式 (A1.2.10) に代入すると、ひずみエネルギーは、

$$W = \frac{1}{4\mu} \operatorname{Re} \oint_C \left[ \kappa \phi(z) - z \overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)} \right] \times \\ \left\{ \left[ \frac{R^2}{z} \phi''(z) + \psi'(z) \right] - \left( \frac{R}{z} \right)^2 \left[ \phi'(z) + \phi'(z) \right] \right\} i dz \quad (\text{A1.2.12})$$

で与えられることになる。

前述の楕円クラックを含む2次元物体の無限遠から、クラック長軸に垂直に最大主応力  $p$ 、これと直角方向に最小主応力  $\varepsilon p$  が作用している場合の  $W_1$  は、Sih & Liebowitz により

$$W_1 = \frac{\pi p^2}{32\mu} (\kappa + 1) \left[ (1 - \varepsilon)^2 (a+b)^2 + 2(1 - \varepsilon^2)(a^2 - b^2) \right. \\ \left. + (1 + \varepsilon)^2 (a^2 + b^2) \right] \quad (\text{A1.2.13})$$

と与えられている。

また、面内せん断力  $q$  が作用している場合には、

$$W_1 = \frac{\pi q^2}{8\mu} (\kappa + 1) (a+b)^2 \quad (\text{A1.2.14})$$

で与えられる。

### A1.2.3 偏平楕円クラックを含む3次元物体内にたくわえられる $W_1$

今、デカルト座標系  $xyz$  を取り、 $xy$  平面内に楕円クラック（長軸  $2a$ 、短軸  $2b$ ）を含む3次元物体を考える。

このクラックに垂直に作用する応力  $p$  による、 $W_1$  は、Sih & Liebowitz により

$$W_1 = \frac{2\pi(1-\nu)ab^2p^2}{3\mu E(k)} \quad (\text{A1.2.15})$$

で与えられる。ここに  $E(k)$  は、アーギュメントを  $k$  とする第一種の完全楕円積分である。

一方、クラック面に平行に長軸方向に一樣せん断力  $q$  が作用する場合には、

$$W_1 = \frac{2\pi(1-\nu)ab^2k^2q^2}{3\mu \left[ (k^2 - \nu)E(k) + \nu k'^2 K(k) \right]} \quad (\text{A1.2.16})$$

で与えられる。ここに、 $K(k)$  は、 $k$  をアーギュメントとする完全第二種楕円積分であり、 $k'$  はアーギュメントで  $k^2 + k'^2 = 1$  という関係がある。

### A.1.3 表面エネルギー $T$

2次元楕円クラックの表面エネルギー  $T$  は、単位奥行に対して、

$$T = 4 r a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta = 4 r a E(k) \quad (\text{A1.3.1})$$

と与えられる。従って、

$$\frac{\partial T}{\partial a} = \frac{2r}{k^2} [(1+k^2) E(k) - k'^2 K(k)] \quad (\text{A1.3.2})$$

と求められる。

3次元物体内の偏平楕円クラックの表面エネルギー  $T$  は、

$$T = 2\pi a b r \quad (\text{A1.3.3})$$

で与えられる。

#### A.1.4 極限応力

極限応力は、 $T$  および  $W_1$  を式 (A1.1.7) に代入して求められて、それぞれ次のようになる。

(i) 面外せん断の場合 (2次元)

$$\frac{\pi a}{4 \mu r} s_{cr}^2 = \frac{2}{k^2} \left[ \frac{(1+k^2) E(k) - k'^2 K(k)}{(1+\varepsilon^2)(1+k')(2+k') + (1-\varepsilon^2)(1+k^2)} \right] \quad (\text{A1.4.1})$$

(ii) 二軸引張の場合 (2次元)

$$\frac{\pi a (\kappa+1)}{16 \mu r} p_{cr}^2 = \frac{4}{k^2} \left[ \frac{(1+k^2) E(k) - k'^2 K(k)}{(1+\varepsilon)^2(3-k^2) + 2(1-\varepsilon^2)(1+k^2) + (1-\varepsilon^2)(1+k')(2+k')} \right] \quad (\text{A1.4.2})$$

(iii) 純せん断の場合 (2次元)

$$\frac{\pi a (\kappa+1)}{16 \mu r} q_{cr} = \frac{(1+k^2) E(k) - k'^2 K(k)}{k^2 (1+k')(2+k')} \quad (\text{A1.4.3})$$

(iv) 引張の場合 (3次元)

$$\frac{b(1-\nu)}{3 \mu r} p_{cr}^2 = \frac{(1+k'^2) E^2(k)}{2(1+k'^2) E(k) - k'^2 K(k)} \quad (\text{A1.4.4})$$

(v) せん断の場合 (3次元)

$$\frac{b(1-\nu)}{3 \mu r} q_{cr}^2 = \frac{(1+k'^2) [(k^2-\nu) E(k) + \nu k'^2 K(k)]^2}{k^2 \{ (2-k'^2) [(k^2-\nu) E(k) + \nu k'^2 K(k)] + k^2 k'^2 [3E(k) - (1+\nu) K(k)] \}} \quad (\text{A1.4.5})$$

となる。

2次元の線クラック，*i. e.*  $b \rightarrow 0$  の場合には，極限応力は最小となり  $k \rightarrow 1$ ， $k' \rightarrow 0$  となつて，式 (A1.4.1) ~ (A1.4.3) の右辺は全て1となる。従つて，

$$s_{cr} = \sqrt{\frac{4\mu\gamma}{\pi a}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a(1+\nu)}} \quad (\text{A1.4.1})'$$

$$p_{cr} = \sqrt{\frac{16\mu\gamma}{\pi a(\kappa+1)}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a(1-\nu^2)}} \quad (\text{A1.4.2})'$$

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{16\mu\gamma}{\pi a(\kappa+1)}} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi a(1-\nu^2)}} \quad (\text{A1.4.3})'$$

を得る。

一方，3次元クラックに於て， $a = b$ ，すなわち，貨幣状のクラック (penny-shaped crack) の場合には， $K(k) = E(k) = \frac{\pi}{2}$  となつて，

$$p_{cr} = \sqrt{\frac{\pi E\gamma}{2a(1-\nu^2)}} \quad (\text{A1.4.4})'$$

および

$$q_{cr} = \sqrt{\frac{\pi E(2-\nu)\gamma}{4a(1-\nu^2)}} \quad (\text{A1.4.5})'$$

となる。

貨幣状のクラックと2次元クラックの極限応力の比は，式 (A1.4.2)'，(A1.4.4)' ならびに式 (A1.4.3)'，(A1.4.5)' を比較して，1.57 および 1.57 ~ 1.45 と求められる。すなわち，貨幣状クラックの極限応力は，2次元クラックの場合の約1.57 ~ 1.45 倍大きくなる。このことは，換言すれば，貨幣状クラックよりも， $b > a$  となつたクラック。すなわち，2次元クラックに近くなつたクラックの方がより破壊され易くなることを示している。このことから破壊強度の下限は2次元クラックで与えられることが分る。従つて，2次元的な規準は，全ての規準の下限を示すことが予想される。

### A.1.5 直交異方性材料の破壊に関するエネルギー規準

簡単のために，弾性主軸の方向がそれぞれデカルト座標系と一致するよう取り， $x$ 軸上に長さ  $2a$  ( $|x| \leq a$ ) の (mathematical slit) があるとす。また，き裂は元のスリット面内に成長すると仮定する。

スリットが存在するために生じる過剰ひずみエネルギー  $W_1$  は，次のように求められる。

#### A1.5.1 二軸引張応力による $W_1$

スリット間の変位成分  $u_y^+ - u_y^-$  を用いて，

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \sigma_y(x, 0) (u_y^+ - u_y^-) dx = \frac{\pi a^2 p^2}{2} a_{22} \operatorname{Re} \left[ i \left( \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \right) \right] \\
 &= \frac{\pi a^2 p^2}{2} \left( \frac{a_{11} a_{22}}{2} \right)^{1/2} \left[ \left( \frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2 a_{12} + a_{66}}{2 a_{11}} \right]^{1/2} \quad (\text{A1.5.1})
 \end{aligned}$$

で与えられる。ここに、 $s_i$  は特性方程式

$$a_{11} s_i^4 + (2 a_{12} + a_{66}) s_i^2 + a_{22} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A1.5.2})$$

の根であり、また  $a_{ij}$  は、

$$a_{11} = \frac{1}{E_x}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{xy}} \quad (\text{A1.5.3})$$

で与えられる弾性定数である。ここに  $E$ 、 $G$  および  $\nu$  はそれぞれ、弾性係数、せん断弾性係数および Poisson 比である。

#### A1.5.2 面内せん断による $W_1$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \tau_{xy}(x, 0) (u_x^+ - u_x^-) dx = \frac{\pi a^2 q^2}{2} a_{11} \operatorname{Im} [s_1 + s_2] \\
 &= \frac{\pi a^2 q^2}{2} \frac{a_{11}}{\sqrt{2}} \left[ \left( \frac{a_{22}}{a_{11}} \right)^{1/2} + \frac{2 a_{12} + a_{66}}{2 a_{11}} \right]^{1/2} \quad (\text{A1.5.4})
 \end{aligned}$$

#### A1.5.3 面外せん断による $W_1$

$$\begin{aligned}
 W_1 &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a \tau_{yz}(x, 0) (u_z^+ - u_z^-) dx = \frac{\pi a^2 s^2}{2} (c_{44} c_{55} - c_{45}^2)^{-1/2} \\
 &= \frac{\pi a^2 s^2}{2 (c_{44} c_{55} - c_{45}^2)^{1/2}} \quad (\text{A1.5.5})
 \end{aligned}$$

ここに、 $c$  は弾性定数であり、応力  $\tau_{ij}$  とひずみ  $r_{ij}$  との間には

$$\tau_{yz} = c_{44} r_{yz} + c_{45} r_{zx}, \quad \tau_{zx} = c_{45} r_{yz} + c_{55} r_{zx} \quad (\text{A1.5.6})$$

が成立している。ここで問題にしているものは、クラックが弾性主軸面内にあるので、 $c_{45} = 0$  になって、更に簡単になる。

一方、表面エネルギー  $T$  は、

$$T = 2 a \tau \quad (\text{A1.5.7})$$

で与えられる。式 (A1.5.1), (A1.5.4), (A1.5.5) および (A1.5.7) を式 (A1.1.7) に代入すると、極限応力は、次のように求められる。

$$(i) \quad p_{cr} = \left(\frac{2\tau}{\pi a}\right)^{1/2} \left[\frac{a_{11}a_{22}}{2}\right]^{-1/4} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}}\right]^{-1/4} \quad (A1.5.8)$$

$$(ii) \quad q_{cr} = \left(\frac{2\tau}{\pi a}\right)^{1/2} \left(\frac{a_{11}}{2}\right)^{-1/4} \left[\left(\frac{a_{22}}{a_{11}}\right)^{1/2} + \frac{2a_{12} + a_{66}}{2a_{11}}\right]^{-1/4} \quad (A1.5.9)$$

$$(iii) \quad s_{cr} = \left(\frac{2\tau}{\pi a}\right)^{1/2} (c_{44}c_{55})^{1/4} \quad (\because c_{45} = 0) \quad (A1.5.10)$$

以上の式の誘導には、き裂は元のスリット面内に成長すると考えた。従って、これは一般の異方性弾性体には適用できないかも知れないが、直交異方性の場合には近似的には成立すると考えてもよいであろう。

## 2 一軸圧縮による直方体供試体内の応力分布

### — エネルギー法による解析 —

#### 2.1 エネルギー法による解法 — 正規直交多項式の導入

第Ⅲ部では、岩質材料の試験として普通に用いられる供試体内の応力分布を Fourier 級数に展開する方ならびに差分方程式を解く方法によって求めた。これらの方法は、いずれも場の微分方程式を解く方法あり、多元一次連立方程式を解くことに帰され、電子計算機の助けなくしては、解くことはできない。に Fourier 級数は収斂性が極めて悪く、一応満足のいく解を得るためには少なくとも 20 ~ 30 項まで展開を要求されるのが普通である。従って、近似的な解で十分な場合には必ずしも有利な方法ではない。のような場合には、むしろエネルギー法により変分問題として解くことがしばしば試みられる。<sup>1,2)</sup> 変分問題の近似解法としては、Galerkin 法、Ritz 法、Moment 法、Weighted Residual 法など<sup>3)</sup>が普通に用いられているが、表記の問題に対してはこれらの方法を適用することは必ずしも有利ではない。以下では、分問題で与えられる二重積分を、Horvay の導いた正規直交多項式 (self-equilibrating orthonormal dynomials)<sup>4)</sup> を用いて Kantrovich の方法<sup>5)</sup> により一重分で与えられる変分問題として解くことを試みた。本章内容は既に発表済であるので、論文<sup>6)</sup>をも参照されたい。

##### A2.1.1 問題の設定

Fig. A. 2. 1 に示すように、幅 2、高さ  $2h$ 、厚さ  $d$  直方体供試体が、剛体盤によって平行に加圧される。供試体は完全線形弾性体とし、平面応力状態にあるとしよう。剛体盤は十分粗であるとし、供試体は十分拘束されて滑らぬものと仮定する。従って、デカルト座標では、境界条件は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} u(x, \pm h) = 0, \quad v(x, \pm h) = \text{const.}, \\ \sigma_x(\pm 1, y) = 0, \quad \tau_{xy}(\pm 1, y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.1.1})$$

ここに、 $u$  および  $v$  はそれぞれ変位の  $x$  および  $y$  方向成

$\sigma_x$  および  $\tau_{xy}$  は、直応力およびせん断応力の  $x$  方向成分である。

よ、仮想の状態として、Fig. A. 2. 2 (a) のように  $x$  方向変形が完全に拘束されたとすると、 $x$  および  $y$  方向の

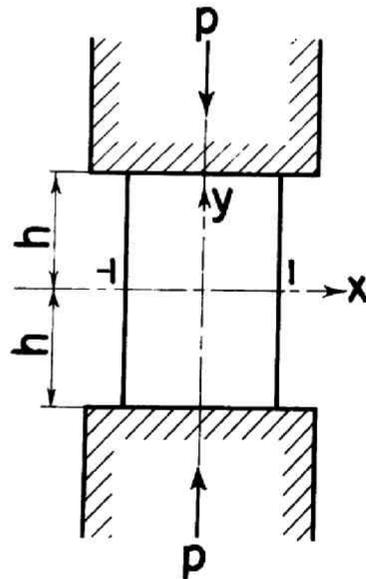


Fig. A.2.1 Schematic view of compression test and the coordinate system.

応力成分はそれぞれ一様となる。実際の状態は、 $x = \pm 1$  で表面力が作用していないから、これを満すように、Fig. A. 2. 2 (b) の応力状態を重ね合わせなければならない。(a) および (b) の状態の応力をそれぞれ、 ${}^{\circ}\sigma_x$ ,  ${}^{\circ}\sigma_y$ ,  ${}^{\circ}\tau_{xy}$  および  ${}^*\sigma_x$ ,  ${}^*\sigma_y$ ,  ${}^*\tau_{xy}$  とすると、実際の状態は、

$$\sigma_x = {}^{\circ}\sigma_x + {}^*\sigma_x, \quad \sigma_y = {}^{\circ}\sigma_y + {}^*\sigma_y, \quad \tau_{xy} = {}^{\circ}\tau_{xy} + {}^*\tau_{xy} \quad (\text{A2.1.2})$$

で与えられる。従って、問題は、 ${}^*\sigma_x$ ,  ${}^*\sigma_y$ ,  ${}^*\tau_{xy}$  を如何にして求めるかということになる。

今、応力関数が、

$$\Phi(x, y) = \phi(x, y) + \sum_n f_n(x) g_n(y), \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (\text{A2.1.3})$$

と表わされるとすると、応力成分は、

$$\left. \begin{aligned} {}^*\sigma_x &= \Phi_{yy} = \phi_{yy} + \sum_n f_n(x) g_n''(y) \\ {}^*\sigma_y &= \Phi_{xx} = \phi_{xx} + \sum_n f_n''(x) g_n(y) \\ {}^*\tau_{xy} &= -\Phi_{xy} = -\phi_{xy} - \sum_n f_n'(x) g_n'(y), \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} (\text{A2.1.4})$$

となる。今、 $\phi$  として、

$$\left. \begin{aligned} \phi_{yy}(\pm 1, y) &= {}^*P_x \\ \phi_{xy}(\pm 1, y) &= 0 \end{aligned} \right\} (\text{A2.1.5})$$

となるように選ぶと、残りの部分は、

$$\left. \begin{aligned} \sum_n f_n(\pm 1) g_n''(y) &= 0 \\ \sum_n f_n'(\pm 1) g_n'(y) &= 0, \quad (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} (\text{A2.1.6})$$

を満さなければならないことになる。式 (A2.1.6) は、 $f(x)$  として、

$$f_n(\pm 1) = f_n'(\pm 1) = 0 \quad (\text{A2.1.7})$$

を満すような関数を用いれば、各項毎に満足される。

このような条件を満す関数は、G. Horvay<sup>7)</sup> によって導かれている。従って、未知関数は、 $g_n(y)$  だけとなる。仮定した応力関数  $\Phi$  は、必ずしも、重調和関数を満さないのので、解は、変分法により全体を平均した形で求めなければならないだろう。

A 2.1.2 変分法の適用

釣り合い状態にある弾性体では補ひずみエネルギーは最小となっている。Fig. A. 2. 2 (b) に示した物体に貯えられる補ひずみエネルギー  $\Omega$  は次のように与えられる。

$$\Omega = \frac{d}{2E} \int_{-h}^h \int_{-1}^{+1} \{ * \sigma_x^2 + * \sigma_y^2 - 2\nu * \sigma_x * \sigma_y + 2(1+\nu) * \tau_{xy}^2 \} dx dy \quad (A2.1.8)$$

ここに  $E$  は弾性係数、 $\nu$  は Poisson 比である。

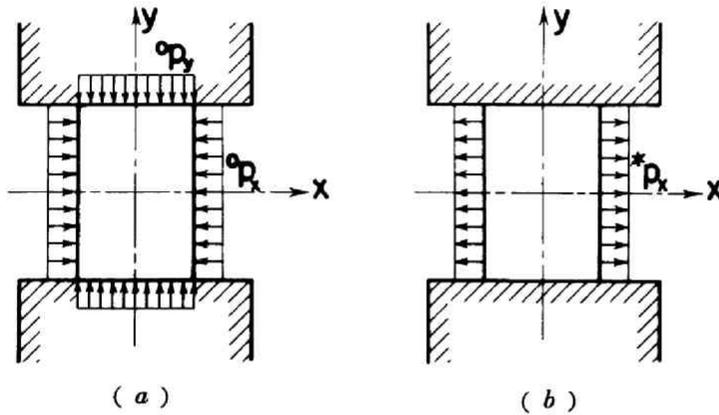


Fig. A.2.2 Imaginary state of loading.

応力関数 (A2.1.3) を式 (A2.1.8) に代入し、その第一変分を取ると

$$\begin{aligned} \frac{E}{d} \delta \Omega &= \int_{-h}^h \int_{-1}^{+1} \nabla^4 \Phi \delta \Phi dx dy + 2(1+\nu) \left[ \int_{-1}^{+1} \Phi_{xy} \delta \Phi \right]_{-h}^h \\ &+ \int_{-h}^h \left[ (\Phi_{xx} - \nu \Phi_{yy}) \delta \Phi_x - (\Phi_{xxx} + (2+\nu) \Phi_{xyy}) \delta \Phi \right]_{-1}^{+1} dy \\ &+ \int_{-1}^{+1} \left[ (\Phi_{yy} - \nu \Phi_{xx}) \delta \Phi_y - (\Phi_{yyy} + (2+\nu) \Phi_{xxy}) \delta \Phi \right]_{-h}^h dx \end{aligned}$$

となる。釣り合い状態では  $\delta \Omega = 0$  とならなければならないから、 $\delta \Phi(\pm 1) = \delta \Phi_x(\pm 1) = 0$  に留意すると、上式は

$$\int_{-h}^{h} \int_{-1}^{+1} \nabla^4 \Phi \delta \Phi dx dy + \int_{-1}^{+1} \left[ (\Phi_{yy} - \nu \Phi_{xx}) \delta \Phi_y - \{ \Phi_{yyy} + (2+\nu) \Phi_{xxy} \} \delta \Phi \right]_{-h}^h dx = 0 \quad (\text{A2.1.9})$$

となる。

式 (A2.1.9) に  $\Phi$  の微分および

$$\delta \Phi = \sum_i f_i(x) \delta g_i(y)$$

$$\delta \Phi_y = \sum_i f_i(x) \delta g_i'(y)$$

を代入し、 $\delta g_i(y)$ 、 $\delta g_i'(y)$  は任意に選べることを考えると、式 (A2.1.9) の第1項からは

$$\int_{-1}^{+1} \left\{ \nabla^4 \phi(x,y) + \sum_n f_n^{(IV)}(x) g_n(y) + 2 \sum_n f_n''(x) g_n''(y) + \sum_n f_n(x) g_n^{(IV)}(y) \right\} \cdot \sum_i f_i(x) dx = 0 \quad (i=2, 3, \dots) \quad (\text{A2.1.10})$$

第2項からは、

$$\int_{-1}^{+1} \left[ \left\{ \phi_{yy}(x,y) + \sum_n f_n(x) g_n''(y) - \nu (\phi_{xx}(x,y) + \sum_n f_n''(x) g_n(y)) \right\} \sum_i f_i(x) \right]_{y=\pm h} dx = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} \left[ \left\{ \phi_{yyy}(x,y) + \sum_n f_n(x) g_n'''(y) + (2+\nu) (\phi_{xxy}(x,y) + \sum_n f_n''(x) g_n''(y)) \right\} \sum_i f_i(x) \right]_{y=\pm h} dx = 0$$

(  $i = 2, 3, \dots$  ) (A2.1.11)

を得る。

$f_n(x)$  は、正規直交多項式であるから、

$$(f_n \cdot f_i) = \delta_{ni} \quad (\text{Kronecker's delta})$$

$$(f_n'' \cdot f_i) = - (f_n' \cdot f_i')$$

$$(f_n^{(IV)} \cdot f_i) = (f_n'' \cdot f_i'')$$

である。ここに  $(f_n^{(p)} \cdot f_i^{(q)}) = \int_{-1}^{+1} f_n^{(p)}(x) \cdot f_i^{(q)}(x) dx$  を意味する。

$f_n(x)$  の導関数は直交しないけれども、 $(f_n' \cdot f_i')$ 、 $(f_n'' \cdot f_i'')$  は  $n \neq i$  の場合には、 $n = i$  の場合に比して十分小さく、無視して差しつかえない。従って

$$(f'_n \cdot f'_i) = (f''_n \cdot f''_i) = 0, \quad n \neq i$$

と仮定する。この仮定と正規直交条件を用いると、式 (A2.1.10) および式 (A2.1.11) は簡単になって、次のようになる。

$$\begin{aligned} g_n^{(IV)}(y) - 2(f'_n \cdot f'_n) g_n''(y) + (f''_n \cdot f''_n) g_n(y) \\ = - \int_{-1}^{+1} \nabla^4 \phi \cdot f_n(x) dx \end{aligned} \quad (\text{A2.1.12})$$

$$g_n''(\pm h) + \nu(f'_n \cdot f'_n) g_n(\pm h) = - \int_{-1}^{+1} \{ \phi_{yy}(x, \pm h) - \nu \phi_{xx}(x, \pm h) \} f_n(x) dx$$

$$\begin{aligned} g_n'''(\pm h) - (2 + \nu)(f'_n \cdot f'_n) g_n'(\pm h) \\ = - \int_{-1}^{+1} \{ \phi_{yyy}(x, \pm h) + (2 + \nu) \phi_{xxy}(x, \pm h) \} f_n(x) dx \\ (n = 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (\text{A2.1.13})$$

従って、 $g_n(y)$  は、式 (A2.1.12) を条件 (A2.1.13) の下で解いて求められることになる。

今、対象としている問題は、 $x$  軸に関して対称であるので、 $g_n(y)$  は次のように表わせる。

$$g_n(y) = A_n \cos \beta_n y \cosh \alpha_n y + \beta_n \sin \beta_n y \sinh \alpha_n y + G_n(y) \quad (\text{A2.1.14})$$

ここに、 $\alpha_n, \beta_n$  は式 (A2.1.12) の特性方程式の根の実および虚部であり、 $G_n(y)$  は式 (A2.1.12) の特解である。

Fig. A. 2.2 の2つの状態から

$$*p_x = - {}^{\circ}p_x = -\nu {}^{\circ}\sigma_y$$

従って、

$$\phi = - \frac{\nu}{2} {}^{\circ}\sigma_y y^2 \quad (\text{A2.1.15})$$

で与えられる。

式 (A2.1.14) および (A2.1.15) を式 (A2.1.13) に代入すると、未知係数  $A_n, B_n$  に関する連立方程式が次のように求められる。

$$\begin{aligned} [(\alpha_n^2 - \beta_n^2) \cos \beta_n h \cosh \alpha_n h - 2 \alpha_n \beta_n \sin \beta_n h \sinh \alpha_n h \\ + \nu(f'_n \cdot f'_n) \cos \beta_n h \cosh \alpha_n h] A_n \\ + [(\alpha_n^2 - \beta_n^2) \sin \beta_n h \sinh \alpha_n h + 2 \alpha_n \beta_n \cos \beta_n h \cosh \alpha_n h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \nu (f_n' \cdot f_n') \sin \beta_n h \sinh \alpha_n h \} B_n \\
= & L_n \\
& [ \beta_n \{ (\beta_n^2 - 3 \alpha_n^2) + (2 + \nu)(f_n' \cdot f_n') \} \sin \beta_n h \cosh \alpha_n h \\
& \quad + \alpha_n \{ (\alpha_n^2 - 3 \beta_n^2) - (2 + \nu)(f_n' \cdot f_n') \} \cos \beta_n h \sinh \alpha_n h ] A_n \\
& + [ \alpha_n \{ (\alpha_n^2 - 3 \beta_n^2) - (2 + \nu)(f_n' \cdot f_n') \} \sin \beta_n h \cosh \alpha_n h \\
& \quad - \beta_n \{ (\beta_n^2 - 3 \alpha_n^2) + (2 + \nu)(f_n' \cdot f_n') \} \cos \beta_n h \sinh \alpha_n h ] B_n \\
= & 0 \\
& \qquad \qquad \qquad (n = 2, 4, 6, 8, \dots) \qquad \qquad \qquad (A2.1.16)
\end{aligned}$$

ここに

$$L = - \int_{-1}^{+1} \phi_{yy}(x, h) f_n(x) dx = \nu \sigma_y \int_{-1}^{+1} f_n(x) dx$$

とする。

### A. 2. 2 供試体内の応力分布

Poisson 比  $\nu = 0.2$  として、式 (A2.1.16) を解いて未知係数  $A_n, B_n$  ( $n = 2, 4, 6, 8$ ) を定めると、Table A. 2. 1 のようになる。この係数を式 (A2.1.14) に代入して  $g_n(y)$  が求められ、従って、応力は式 (A2.1.4) および式 (A2.1.2) から求められることになる。

Table A.2.1 Constants  $A_n$  and  $B_n \times \nu \sigma_y$

$n \backslash h$	0.5	1.0	2.0	4.0	
$A_n$	2	-0.040043	-0.034988	-0.0264068	0.0486009
	4	-0.0218899	-0.0319351	0.0666166	-0.0127616
	6	-0.0310968	-0.0727056	-0.0155421	-0.01741922
	8	-0.0538632	0.091128	0.01317538	-0.0231345
$B_n$	2	0.142912	0.038587	-0.0219598	-0.0453793
	4	0.0220217	-0.0440709	-0.0678766	-0.0130640
	6	0.0416657	-0.0514175	0.0922261	0.01743214
	8	-0.0533730	0.0815156	-0.01324207	0.02658944

直方体供試体内の応力分布については、既に第 III 部で、カップル・ストレスの影響をも含めて検討したので、ここでは詳細には立ち入らない。代表的な場合についてのみ、 $\sigma_y$  を用いて正規化した応力分布を Figs. A.2.3 ~ A.2.6 に示すに止める。

多項式として、本計算では第 4 項までしか採用していないので、応力分布は必ずしもなめらかではない。しかし、概形はこれらの図より十分伺えるであろう。更に項数を多く取れば、応力分布は更に真の値に近づくことが期待される。理論的には、 $\sigma_x(\pm h)$  は、特異点  $(\pm 1, \pm h)$  を除いて一様な大きさである。 $\tau_{xy}$  の分布は、ほぼ三角形となる。特異点  $(\pm 1, \pm h)$  では、 $y = \pm h$  に沿って近づけば無限大に、 $x = \pm 1$  に沿って近づけば零である。供試体の高さが幅の 2 倍以上となると、供試体の中央部に引張領域 ( $\sigma_x$ ) が生じることは注目すべきことである。 $\sigma_y$  の分布は、供試体の加圧端から供試体幅の約  $\frac{1}{2}$  の部分を除けばほぼ一様となる。供試体の高さが幅と同程度あるいはそれより低い場合には、端面拘束の影響は相当大きくなることが分る。特に、これは  $\sigma_x$  および  $\tau_{xy}$  の分布に顕著に現われている。圧縮試験用供試体として、中央部に少なくとも幅と同程度の一様圧縮応力域を生ぜしめるためには、少なくとも供試体の高さは幅の 2 倍以上であることが必要であろう。

ここで求めた結果は、既に第 III 部で述べた Fourier 級数による解の古典弾性学の場合に一致している。

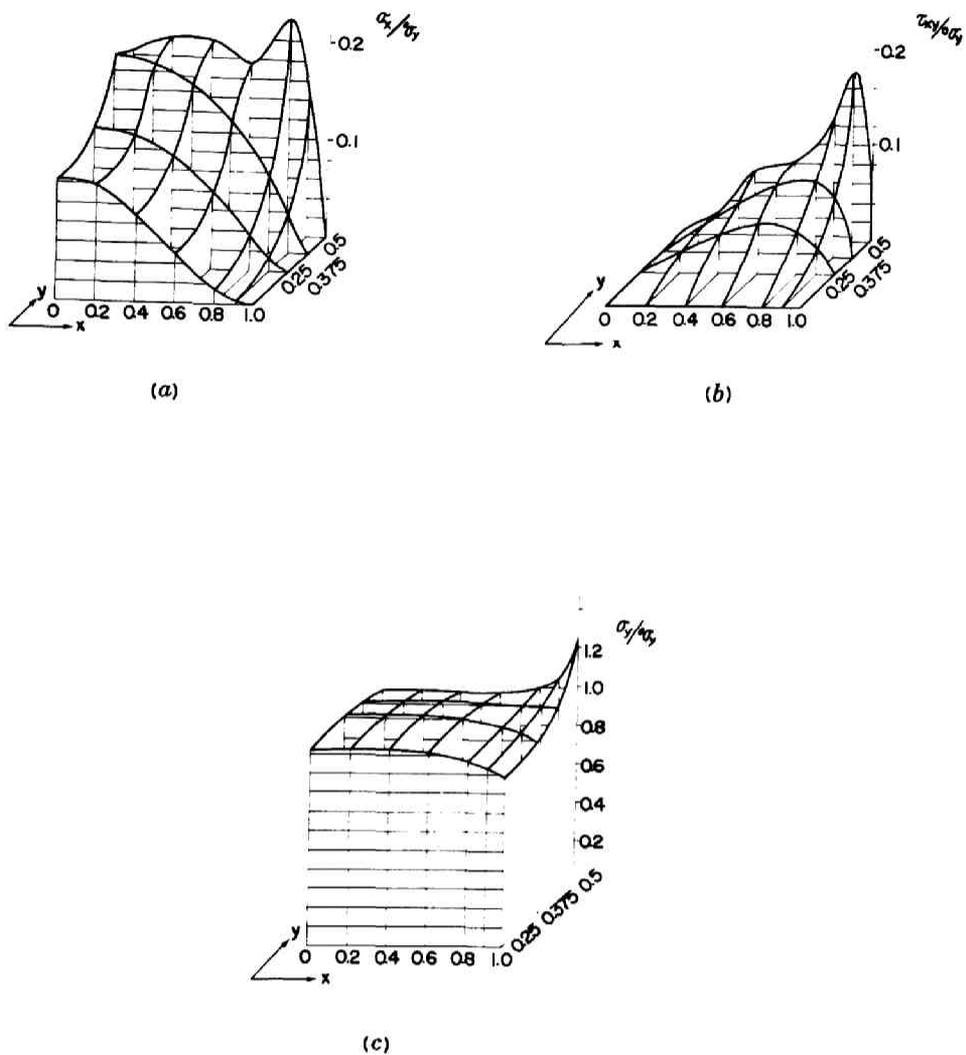


Fig. A.2.3 Stresses in the specimen of height-to-width ratio 0.5

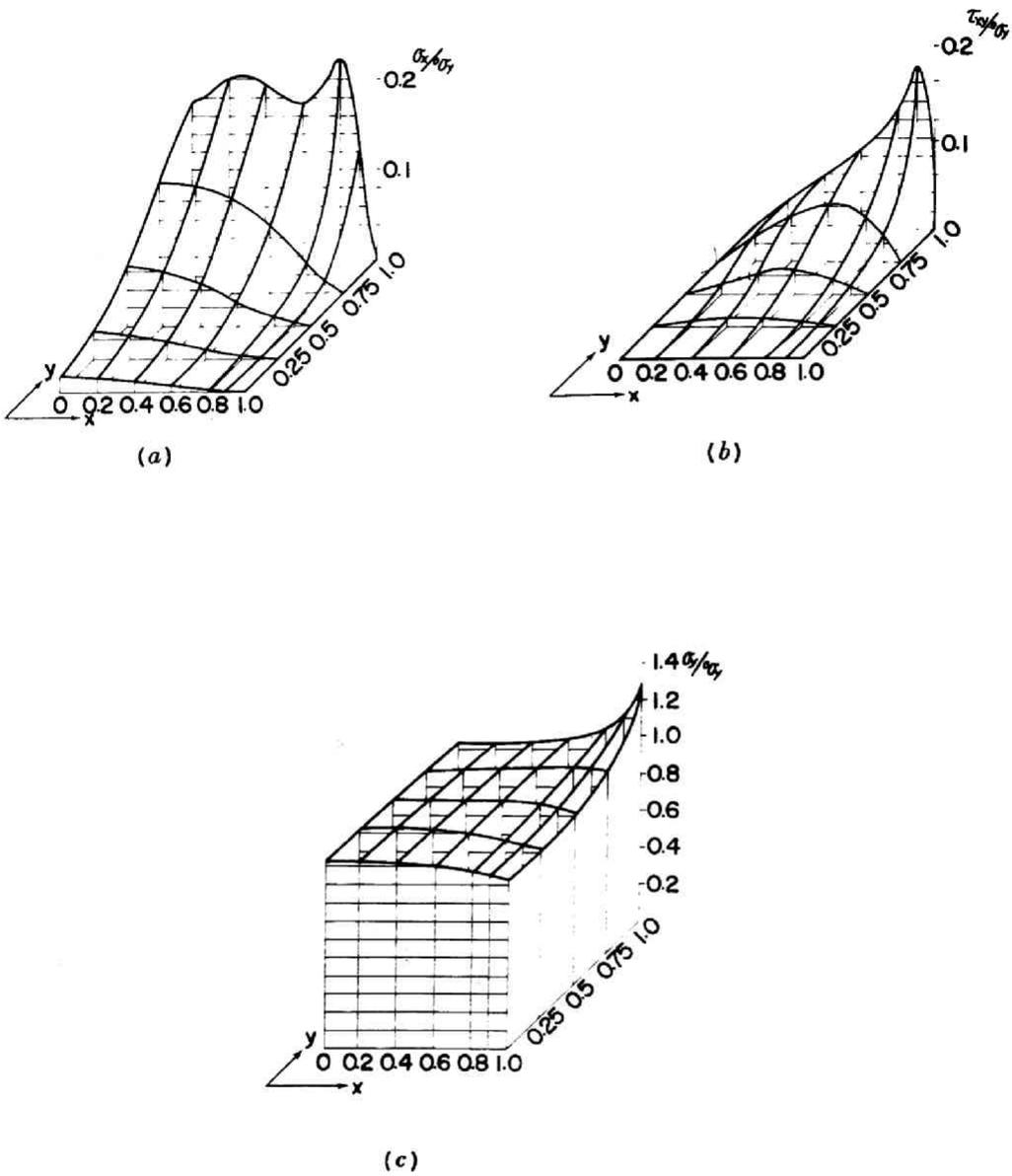


Fig. A.2.4 Stresses in the specimen of height-to-width ratio 1.0

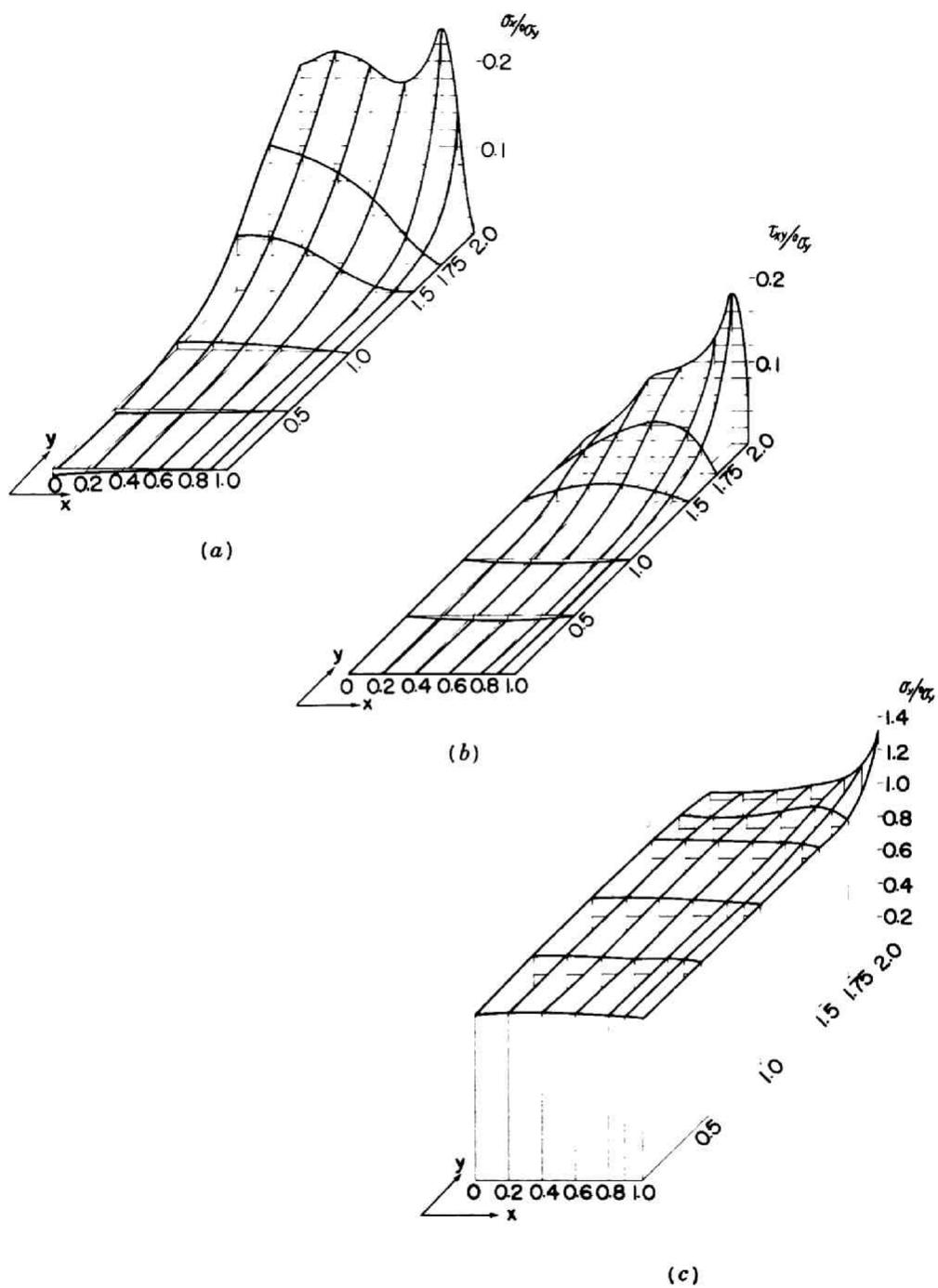


Fig. A.2.5 Stresses in the specimen of height-to-width ratio 2.0

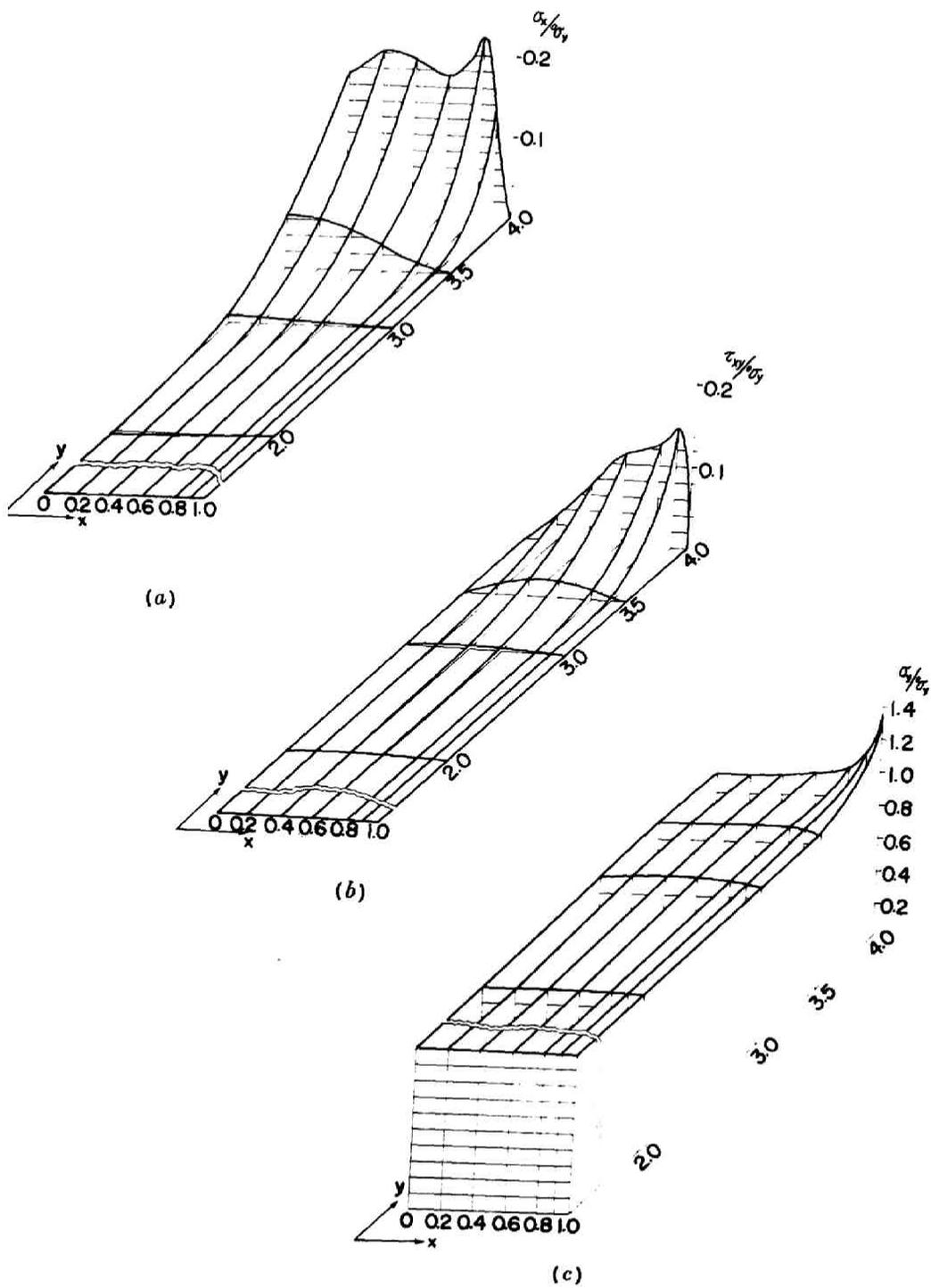


Fig. A.2.6 Stresses in the specimen of height-to-width ratio 4.0

## 附録の参考文献

### A. 1 の参考文献

- 1) Griffith, A. A. ; The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, A 221, 163—198 (1921)
- 2) 前出 1), Seddon, I. N.; 'Fourier Transform', McGraw-Hill (1951)  
Sih, G. C. and H. Liebowitz; Mathematical Theories of Brittle Fracture, in 'Fracture I', H. Liebowitz (Ed.) pp. 67—190, Academic (1968)
- 3) 前出 1)
- 4) Sih, G. C. and H. Liebowitz 前出 2)
- 5) Muskhelishvili, N. I. ; 'Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity', transl. by J. R. M. Radok, Groningen, Noordhoff (1953)

### A. 2 の参考文献

- 1) Timoshenko, S. and J. N. Goodier ; 'Theory of Elasticity', 2nd Ed., Chapt. 6, p. 146, McGraw-Hill (1951)
- 2) Kantorovich, L. V. and V. I. Krylov ; 'Approximate Methods of Higher Analysis', transl. by C. D. Benster, Chapt. IV., Wiley (1964)
- 3) 前出 2) および Finlayson, B. A. and L. E. Scriven; The Method of Weighted Residuals—A Review, *Appl. Mech. Reviews*, 19, 735—748 (1966)
- 4) Horvay, G. ; The End Problem of Rectangular Strips, *J. Appl. Mech., Trans. ASME*, 75, 87—576 (1953)  
Horvay, G. and J. Born ; Table of Self-Equilibrating Functions, *J. Math. and Phys.*, 33, 360—373 (1954)
- 5) 前出 2)
- 6) Niwa, Y. and S. Kobayashi ; Stresses in Rectangular Block Compressed Between Rough Plates, *Memo. Faculty of Eng., Kyoto Univ.*, 28, 244—253 (1966)
- 7) 前出 4)

