

レベルセット法による形状表現を用いた
幾何学的再初期化法に基づく構造最適設計法

山崎慎太郎

レベルセット法による形状表現を用いた幾何学的再初期化法に基づく構造最適設計法

山崎慎太郎

レベルセット法による形状表現を用いた
幾何学的再初期化法に基づく構造最適設計法

2009年1月

山崎慎太郎

父と母へ捧ぐ

目次

第 1 章	序論	1
1.1	はじめに	1
1.2	形状最適化	1
1.3	トポロジ最適化	2
1.4	レベルセット法に基づく構造最適化法	2
1.5	研究の目的と論文の構成	5
	参考文献	6
第 2 章	レベルセット関数の更新方法	13
2.1	はじめに	13
2.2	レベルセット法の考え方	13
2.3	単純化されたレベルセット方程式	15
2.4	構造最適化問題の定式化	15
2.5	有限要素法を用いた更新方法	17
	参考文献	18
第 3 章	再初期化法	21
3.1	はじめに	21
3.2	従来の再初期化法	21
3.3	新しい幾何学的再初期化法	22
3.4	数値例	25
	参考文献	30
第 4 章	最適化アルゴリズム	31
4.1	はじめに	31
4.2	フローチャート	31
4.3	制約条件を満たすためのレベルセット関数修正法	31
4.4	トポロジカルデリバティブに基づく形態変更方法	33
	参考文献	34
第 5 章	平均コンプライアンス最小化問題への適用	35
5.1	はじめに	35
5.2	定式化	35

5.3	数値計算法	37
5.4	数値例	39
	参考文献	51
第 6 章	最低次の固有振動数最大化問題への適用	53
6.1	はじめに	53
6.2	定式化	53
6.3	数値計算法	55
6.4	数値例	56
	参考文献	66
第 7 章	特定の固有振動数を持つ構造を求める問題への適用	67
7.1	はじめに	67
7.2	定式化	68
7.3	数値計算法	69
7.4	数値例	69
	参考文献	89
第 8 章	熱伝導性能最大化問題への適用	91
8.1	はじめに	91
8.2	定式化	91
8.3	数値計算法	93
8.4	数値例	94
	参考文献	99
第 9 章	結論	101
	謝辞	103
	出版	105
	関連論文	105
	関連国際会議発表	105
	関連国内発表	107
	その他の国際会議発表	107

目次

3.1	Points on the shape boundary in an element.	23
3.2	Element coordinates: (a) original coordinate; and (b) parametric coordinate.	23
3.3	Intersection points on the shape boundary in an element.	24
3.4	A set of points P	25
3.5	Distributions of $\phi(\mathbf{x})$ for Case 1, 2, 3 and 4: (a) Case 1; (b) Case 2; (c) Case 3; and (d) Case 4.	26
3.6	Shape boundaries before and after re-initialization for Case 1: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.	27
3.7	Shape boundaries before and after re-initialization for Case 2: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.	27
3.8	Shape boundaries before and after re-initialization for Case 3: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.	28
3.9	Shape boundaries before and after re-initialization for Case 4: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.	28
4.1	A flowchart of the optimization process.	32
5.1	Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	39
5.2	Boundary conditions for the two-dimensional minimum compliance problem.	39

5.3	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the reference domain is discretized using a structural mesh.	41
5.4	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the reference domain is discretized using a non-structural mesh.	42
5.5	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has no hole.	43
5.6	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has a hole.	44
5.7	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has four holes.	45
5.8	Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has a large number of holes.	46
5.9	Optimal configurations for the two-dimensional minimum compliance problem: (a) obtained using the proposed re-initialization scheme; (b) enlarged view of (a); (c) obtained using the Fast Marching Method-based re-initialization scheme; and (d) enlarged view of (c).	47
5.10	Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	48
5.11	Boundary conditions for the three-dimensional minimum compliance problem.	48
5.12	Optimization procedure for the three-dimensional minimum compliance problem.	50
6.1	Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	56
6.2	Boundary conditions for the two-dimensional eigen-frequency optimization problems.	57
6.3	Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where the reference domain is discretized using a structural mesh.	59
6.4	Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where the reference domain is discretized using a non-structural mesh.	60
6.5	Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where a hole introducing method based on the topological derivative is not used.	61
6.6	Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where only the lowest eigen-frequency is maximized.	62
6.7	Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	63
6.8	Boundary conditions for the three-dimensional eigen-frequency optimization problem.	63
6.9	Optimization procedure for the three-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem.	65
7.1	Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	70

7.2	Boundary conditions for the two-dimensional eigen-frequency optimization problems. . .	70
7.3	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 300Hz.	73
7.4	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 600Hz.	74
7.5	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 900Hz.	75
7.6	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,500Hz.	76
7.7	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,800Hz.	77
7.8	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose 2nd eigen-frequency target value = 3,400Hz.	78
7.9	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose 3rd eigen-frequency target value = 7,000Hz.	79
7.10	Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,800Hz (2nd eigen-frequency is not matched).	80
7.11	Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	81
7.12	Boundary conditions for the three-dimensional eigen-frequency optimization problem. . .	81
7.13	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 15,000Hz (iso-parametric view).	83
7.14	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 15,000Hz (top view).	84
7.15	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 25,000Hz (iso-parametric view).	85
7.16	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 25,000Hz (top view).	86
7.17	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 35,000Hz (iso-parametric view).	87
7.18	Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 35,000Hz (top view).	88
8.1	Reference domain and initial configuration: (a) reference domain; and (b) initial configuration.	94
8.2	Boundary conditions.	94
8.3	Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 0$	96
8.4	Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 100$	97

8.5	Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 500$	98
-----	--	----

第 1 章

序論

1.1 はじめに

本研究では、レベルセット法 [1] に基づく新しい構造最適化法を構築した。構造最適化法は、物理学および数学的根拠に基づき構造物の最適な形態と形状を求める方法であり、機械、自動車、航空機、土木など種々の産業において広く利用されている。現在までに提案されている構造最適化法は、寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化に大別することができる。形状最適化とトポロジー最適化では、多くの設計変数を用いて高い自由度で構造物の形態と形状を表現でき、構造物の形態と形状を表現する自由度が高いという利点を生かし高性能な構造物が創出される可能性があるため、様々な構造最適化法が提案されている。

1.2 形状最適化

形状最適化は、構造物の形状を最適化の対象とする構造最適化である。1973 年、Zienkiewicz と Campbell [2] は最初の形状最適化法を提案した。その基本的な考え方は、まず最初に初期形状を与え有限要素を用いて構造物を表現し、構造物の表面に位置する節点 (以下、境界節点と呼ぶ) の座標を形状感度に基づいて更新するという処理を繰り返し、最終的に最適形状を得るというものである。後に Imam [3] は、このような境界節点座標を設計変数にとる方法には、最適化の過程で構造物の形状が波打ってくる、波打ち現象が発生するという問題点が存在することを指摘し、その解決策として、三つの方法を提案した。すなわち、境界節点を何点か選び、その座標を設計変数とし、その他の境界節点の座標を補間により決定する方法 (Design Element Technique)、構造物の形状を多項式で表現し、その係数を設計変数とする方法 (Super Curve Technique)、基本変形モードの線形和で構造物の形状を表現し、線形和の係数を設計変数とする方法 (Shape Superposition Technique) である。

波打ち現象の発生を回避するために、さらに幾つかの方法が提案された。Braibant と Fleury [4][5] は、構造物の形状をベジエ曲線や B-スプライン曲線等のスプライン曲線を用いて表現し、スプライン曲線のコントロールポイントを設計変数とする形状最適化法を提案した。Bennett と Botkin [6][7] は、自動メッシュ生成機能を用いた形状最適化法を開発した。Kikuchi ら [8] は、アダプティブ有限要素法を用いて滑らかな最適形状を得ることに成功した。Belegundu と Rajan [9] は、構造物の表面に作用する仮想的な荷重を設計変数とする、Natural Design Variable Method と呼ばれる形状最適化法を提案した。Azegami ら [10][11] は、形状感度に基づいて得られる仮想的な表面力を作用させた時の変位場を、構造物の形状が変動する速度の場とみなして形状を更新する、方法と呼ばれる形状最適化法を提案した。文献 [12][13] は、形状最適化に関する研究を包

括的に紹介している。

1.3 トポロジー最適化

構造物の形状のみを最適化の対象とする形状最適化に対し、構造物の形態をも最適化の対象とする構造最適化を実現するために、トポロジー最適化が提案されている。Bendsøe と Kikuchi [14] が 1988 年に均質化設計法を提案して以来、トポロジー最適化法は剛性最大化問題 [14][15] や固有振動数問題 [16][17] 等、多くの構造最適化問題に適用されている。これらの方法の基本的な考え方は、拡張された固定設計領域と、固定設計領域における材料分布を表現する特性関数 [18][19][20] を導入し、構造最適化問題を固定設計領域における材料分布問題に置き換えるというものである。固定設計領域において特性関数はいたるところで不連続となるため、この問題を解決し、大域な観点で連続な材料分布を得るために、均質化設計法では均質化法を利用する。他方、均質化設計法とは異なるトポロジー最適化法として、密度法 [21][22][23] が提案されている。密度法では、連続な材料分布を得るために、正規化された体積密度に応じて代表物理テンソルにペナルティが課せられる仮想的な等方性材料を用いる。密度法に基づくトポロジー最適化は定式化と実装が容易であるため、様々な構造最適化問題に適用されている。

トポロジー最適化法を用いて構造最適化問題を解くことにより、最適構造の形態と形状がわかるが、構造最適化問題の問題設定によっては、有限要素メッシュに依存した最適構造が得られたり、チェッカーボードパターンやグレースケールを持つ最適構造が得られるという問題点が存在する [24][25]。これらの問題点を解決するために、高次要素を用いる方法 [24] や Filtering Scheme [25]、Perimeter Control Method [26] 等が提案されている。Filtering Scheme や Perimeter Control Method はよく用いられる方法であるが、これらの方法では、人工的なパラメータを適切に設定する必要があり、なおかつ、試行錯誤によらず適切なパラメータを決定するための合理的な指針も存在しない。

Xie と Steven [27] は、上述のトポロジー最適化法とは異なる、Evolutionary Structural Optimization Method と呼ばれるトポロジー最適化法を提案した。この方法では、設計領域は固定された有限要素メッシュで表現され、構造物の形態と形状は有限要素の部分集合で表現される。構造物を構成する各有限要素について、目的関数への影響が調べられ、目的関数への影響が比較的小さい要素は、構造物を表現する有限要素の部分集合から順次取り除かれていき、最終的に最適構造が得られる。Evolutionary Structural Optimization Method は剛性問題 [27] や固有振動数問題 [28]、熱伝導問題 [29] 等に適用されている。

1.4 レベルセット法に基づく構造最適化法

1.4.1 レベルセット法

上述のトポロジー最適化法とは異なる考え方で構造物の形態と形状を表現する方法の一つにレベルセット法がある。レベルセット法は、一次元高位のレベルセット関数を用いてオイラー座標系における二相の形態と形状、および、時間の経過に伴いそれらが変化する様子を表現する方法であり、1988 年に Osher と Sethian により提案された [1]。レベルセット関数を用いることにより、複雑な形態と形状を表現することが可能であり、さらに、レベルセット関数を更新することにより、形状変化のみならず、形態変化も自然に表現できるため、レベルセット法は、流体力学 [30][31][32] や相変態を伴う現象 [33]、画像処理 [34][35][36] や CAD [37] など、様々な分野に適用されている。レベルセット関数を更新する方法は幾つか提案されており、レベルセット関数

の定義から導出される, レベルセット方程式と呼ばれる Hamilton-Jacobi 方程式を解く方法がしばしば用いられる.

1.4.2 構造最適化法への応用

2000 年, Sethian と Wiegmann [38] は, レベルセット法に基づく構造最適化法を最初に提案した. 彼らが提案した構造最適化法では, 構造物の形態と形状はレベルセット関数を用いて表現され, レベルセット関数は Von Mises 応力に基づいて更新される. しかしながら, この更新方法により最適構造が得られるという数学的根拠はない. Osher と Santosa [39] は, 風上差分法を用いてレベルセット方程式を解き, レベルセット関数を更新する構造最適化法を提案した. レベルセット方程式を解くためには, レベルセット関数の等値面に対する法線方向速度を与える必要があり, この方法では, 形状感度に基づき法線方向速度を決定し, レベルセット方程式を解いている. また, この方法では, 質量密度のみが異なる二種類の材料で構成された膜を対象に, 固有振動数の最適化を目的として二相の形状を最適化しているが, より一般的な構造物を対象とした方法論への展開はなされていない.

Wang ら [40] は線形弾性材料からなる構造物を対象として, レベルセット関数の等値面に対する法線方向速度を形状感度に基づいて与え, レベルセット方程式を風上差分法を用いて解く, レベルセット法に基づく構造最適化法を提案した. この論文では, 平均コンプライアンス最小化問題を対象として, 適切な最適構造が得られることが示されている. Wang と Wang [41] は, m 個のレベルセット関数を用いて 2^m 種類の異なる材料を表現するカラーレベルセットモデルを採用し, 上述の構造最適化法を複数の材料からなる構造物の構造最適化法へ拡張した. 後に Wang と Wang [42] は, オイラー座標系において単純な Ersatz Material Approach [43] よりも正確に変位場を計算できる Superimposed Finite Element Method を用いて変位場を計算する構造最適化法を提案し, 平均コンプライアンス最小化問題について最適構造を得た.

Allaire ら [43] は, Wang ら [40] とは独立に, レベルセット方程式の法線方向速度を形状感度に基づいて与え, 風上差分法を用いてレベルセット方程式を解く構造最適化法を提案し, 平均コンプライアンス最小化問題とコンプライアントメカニズム設計問題に適用した. この論文では, 線形弾性材料からなる構造と非線形超弾性材料からなる構造の構造最適化について議論されている. また, オイラー座標系において構造物の変位場を計算するために, 単純な Ersatz Material Approach が提案されている. Allaire と Jouve [44] は, 上述の構造最適化法を最低次の固有振動数最大化問題と複数の荷重条件が与えられた場合の平均コンプライアンス最小化問題に拡張している.

Haber [45] は, 構造物の形状をレベルセット関数を用いて表現し, 逐次二次計画法を用いてレベルセット関数を更新する構造最適化法を提案し, 固有振動数最小化問題と固有振動数最大化問題に適用した. Wang ら [46] は, 構造物の結合性を維持するために画像処理に基づく方法を用いた, レベルセット法に基づく構造最適化法を提案し, この方法によって, コンプライアントメカニズム設計問題におけるヒンジの出現を回避できることを示した.

1.4.3 トポロジカルデリバティブの導入

上述のレベルセット法に基づく構造最適化法では, 初期構造に基づきレベルセット関数を初期化し, レベルセット関数を何らかの方法を用いて更新していき, 最終的に最適構造を示すレベルセット関数を得る. レベルセット関数を更新する方法は幾つか提案されているが, レベルセット方程式を解く方法がよく用いられる. こ

これらの構造最適化法では、得られる最適構造の初期構造に対する依存性が問題になることがある。Allaire ら [47] が指摘したように、特に二次元問題において、このような依存性が問題となる。この問題を回避するために、Allaire ら [47] は、トポロジカルデリバティブ [48] に基づいて構造物に穴を創出する方法を組み合わせ、レベルセット法に基づく構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題とコンプライアントメカニズム設計問題について最適構造を得ている。この構造最適化法では、レベルセット方程式を解いてレベルセット関数を更新していき、数回レベルセット関数を更新する都度、トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する様、レベルセット関数を操作している。この構造最適化法を用いても、得られる最適構造の初期構造に対する依存性は完全にはなくなる。すなわち、どのような初期構造からでも同じ適切な最適構造が得られるわけではい。しかしながら、この論文の数値例では、形態の異なる様々な初期構造から、本質的に同等の適切な最適構造が得られることが示されている。Zhuang ら [49] は、Allaire ら [47] が提案した構造最適化法を熱伝導問題に適用し、最適構造を得ている。

Burger ら [50] は、レベルセット方程式にトポロジカルデリバティブに関する項を付加した方程式を解いてレベルセット関数を更新する構造最適化法を提案し、最小二乗汎関数の最小化問題に適用した。この研究成果に基づき、He ら [51] は、トポロジカルデリバティブを組み合わせたレベルセット法に基づく構造最適化法を提案し、Photonic Crystal と Acoustic Drum に関する構造最適化問題を解いた。Amstutz と Andr a [52] は形状感度ではなくトポロジカルデリバティブに基づいてレベルセット関数を更新する構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題、コンプライアントメカニズム設計問題、Ceramic Filter の設計に関する複合領域最適化問題に適用した。

1.4.4 その他のアプローチに基づく構造最適化法

Radial Basis Function の重ね合わせでレベルセット関数を表現するという考えに基づいた構造最適化法も幾つか提案されている。Wang と Wang [53] や、Wang ら [54] は Multiquadratic Radial Basis Function の重ね合わせを用いてレベルセット関数を表現する構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題に適用した。そのようにレベルセット関数を表現すると、重ね合わせ係数を最適化することにより最適構造を示すレベルセット関数が得られる。さらに、Wang と Wang [55] や Wang ら [56] は、Inverse Multiquadratic Radial Basis Function の重ね合わせを用いてレベルセット関数を表現する構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題に適用した。Luo ら [57] は、レベルセット関数を表現するために Compact Support Radial Basis Function を採用し、コンプライアントメカニズム設計問題について最適構造を得ている。ここで紹介した Radial Basis Function を用いたレベルセット法に基づく構造最適化法は、レベルセット関数を表現するために人工的なパラメータを必要とし、それらのパラメータは得られる最適構造に大きな影響を与えるという問題点を持つ。

Belytschko ら [19] は、レベルセット関数に似た関数を用いて構造物の形態と形状を表現し、その関数を Heuristic Scheme を用いて更新する、レベルセット法に基づくトポロジー最適化法を提案した。Park ら [58] は、最小二乗有限要素法を用いてレベルセット方程式を解く構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題に適用した。Chen ら [59] は、 R -function を用いて B-スプラインと Parameterized Primitive を結合した、パラメータコントロール可能な構造最適化法を提案し、平均コンプライアンス最小化問題について最適構造を得た。Wei と Wang [60] は、多相を一つのレベルセット関数を用いて表現する Piecewise Constant Level Set Method [61][62] に基づく構造最適化法を提案した。Luo ら [63] は、Semi-implicit Additive Operator Splitting Scheme を用いてレベルセット方程式を解く構造最適化法を提案した。

1.4.5 レベルセット関数の再初期化法

レベルセット法では、二相の形態と形状を表現するために用いられるレベルセット関数は様々な関数の性質を保持することができる。Mulder ら [64] は、レベルセット関数を二相の境界に対する符号付き距離関数として初期化した場合と、Heaviside 関数によく似た不連続関数である “Color” 関数として初期化した場合の計算結果を比較し、レベルセット関数を符号付き距離関数として初期化することにより、より精度の高い計算結果が得られることを示した。Chopp [65] は、レベルセット方程式に基づいてレベルセット関数を更新する過程において、数値誤差を減らすために、レベルセット関数を定期的に二相の境界に対する符号付き距離関数として再初期化するべきだと主張した。Osher と Fedkiw [66] も、レベルセット関数を二相の境界に対する符号付き距離関数とすることにより、より精度の高い計算結果が得られることを指摘した。これらの報告に基づき、数値誤差を減らし計算精度を向上させること目的として、レベルセット関数を二相の境界に対する符号付き距離関数として再初期化する方法がいくつか提案されている。Sussman ら [30] は、再初期化に関する偏微分方程式を解いてレベルセット関数を再初期化する方法を提案した。Sethian [37] は、Fast Marching Method を用いてレベルセット関数を再初期化する方法を提案した。後に、Russo と Smereka [67] は、再初期化に関する偏微分方程式を解く方法 [30] を改良した再初期化法を提案した。Russo と Smereka が改良した再初期化法では、二相の境界近傍におけるレベルセット関数は、近似された符号付き距離関数に基づいて決定される目標値を用いて再初期化され、その他の領域におけるレベルセット関数は、再初期化に関する偏微分方程式を解いて再初期化される。Hartmann ら [68] は、Russo と Smereka が提案した再初期化法をさらに改良し、再初期化に伴う二相の境界の変動を明示的に制約できる再初期化法を提案した。

1.5 研究の目的と論文の構成

レベルセット法に基づく構造最適化に関する研究において、実装が容易で解析領域のメッシュ分割に対する制約が少ないレベルセット関数の更新方法を開発することは、重要な課題の一つである。レベルセット法に基づく構造最適化では、風上差分法や最小二乗有限要素法を用いてレベルセット方程式を解きレベルセット関数を更新する方法が提案されているが、風上差分法を用いた場合、解析領域を構造メッシュで分割する必要がある。最小二乗有限要素法を用いた場合、レベルセット関数の更新に関する実装が複雑になる。本研究ではこの課題を解決するために、陽解法を用いてレベルセット方程式を離散化し、更新前のレベルセット関数が常に、構造物の形態と形状を表現するレベルセット関数の等値面 (以下、形状境界と呼ぶ) に対する符号付き距離関数であることを保証することにより、レベルセット方程式を単純化し、単純化されたレベルセット方程式に基づいてレベルセット関数を更新する構造最適化法を提案する。単純化されたレベルセット方程式は、空間に関する微分の項を含まない方程式であり、有限要素法を用いて離散化される。風上差分法を用いてレベルセット方程式を解く場合、Neumann 境界条件が必要になるのに対し、有限要素法を用いて単純化されたレベルセット方程式を解く場合には、そのような境界条件は必要なく、レベルセット関数の更新に関する実装が単純になる。

本研究で提案する構造最適化法では、レベルセット関数を更新する都度、レベルセット関数を再初期化することにより、更新前のレベルセット関数が常に構造物の形状境界に対する符号付き距離関数であることを保証する。このため、再初期化の精度は得られる最適構造に大きな影響を与えるが、従来よりよく用いられている再初期化法 [30][37] を用いると、レベルセット関数の分布によっては大きな数値誤差が生じることが分かっ

た。そこで、本研究では、有限要素法の形状関数を用いた補間に基づき形状境界上の点集合を求め、その点集合までの距離に基づき再初期化後のレベルセット関数値を決定する、新しい幾何学的再初期化法を開発する。この幾何学的再初期化法は、符号付き距離関数の定義に基づき厳密にレベルセット関数を再初期化するため、再初期化に伴う数値誤差を非常に小さくすることが可能である。

レベルセット関数を更新する都度、レベルセット関数を再初期化すると、特に二次元問題では、構造物に穴が創出されるという形態の変化は起こらず、得られる最適構造の初期構造に対する依存性が問題となる。この問題を回避するため、本研究で提案する構造最適化法では、Allaireら [47] と同様に、トポロジカルデリバティブに基づき構造物に穴を創出する方法を用いる。

本研究では、新しく提案する構造最適化法を、平均コンプライアンス最小化問題、最低次の固有振動数最大化問題、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題、熱伝導性能最大化問題に適用し、二次元および三次元の数値例を用いて、その有用性を確認する。なお、これら四つの構造最適化問題においては、有限要素法を用いて状態変数を計算する。

本研究は八章で構成され、次章以降の構成は以下の通りである。

第2章レベルセット関数の更新方法では、本研究で提案するレベルセット関数の更新方法について説明する。

第3章再初期化法では、レベルセット関数を形状境界に対する符号付き距離関数とするための再初期化法について説明する。

第4章最適化アルゴリズムでは、本研究で提案する構造最適化法のアルゴリズムについて説明する。

第5章平均コンプライアンス最小化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、平均コンプライアンス最小化問題へ適用し、幾つかの数値例を用いて、妥当な最適構造が得られることを示す。

第6章最低次の固有振動数最大化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、最低次の固有振動数最大化問題へ適用し、幾つかの数値例を用いて、妥当な最適構造が得られることを示す。

第7章特定の固有振動数を持つ構造を求める問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題へ適用し、幾つかの数値例を用いて、妥当な最適構造が得られることを示す。

第8章熱伝導性能最大化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、構造物の熱伝導性能を最大化する問題へ適用し、幾つかの数値例を用いて、妥当な最適構造が得られることを示す。

第9章結論では、本研究により得られた成果についてまとめる。

参考文献

- [1] Osher S. and Sethian J. A. Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 78, pp. 12–49, 1988.
- [2] Zienkiewicz O. C. and Campbell J. S. Shape optimization and sequential linear programming. In Gallagher R. H. and Zienkiewicz O. C. eds., *Optimum Structural Design*, pp. 109–126, London, 1973. John Wiley & Sons.
- [3] Imam M. H. Three-dimensional shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 18, pp. 661–673, 1982.
- [4] Braibant V. and Fleury C. Shape optimal design using b-splines. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 44, pp. 247–267, 1984.

- [5] Braibant V. and Fleury C. An approximation concepts approach to shape optimal design. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 53, pp. 119–148, 1985.
- [6] Bennett J. A. and Botkin M. E. Shape optimization of two-dimensional structures with geometric problem description and adaptive mesh refinement. In *24th Structures, Structural Dynamics and Material Conference*, Nevada, 1983. AIAA/ASME/ASCE/AHS.
- [7] Bennett J. A. and Botkin M. E. Structural shape optimization with geometric problem description and adaptive mesh refinement. *AIAA Journal*, Vol. 23, pp. 458–464, 1985.
- [8] Kikuchi N., Chung K. Y., Torigaki T., and Taylor J. E. Adaptive finite element methods for shape optimization of linearly elastic structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 67–89, 1986.
- [9] Belegundu A. D. and Rajan S. D. A shape optimization approach based on natural design variables and shape functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 66, pp. 87–106, 1988.
- [10] Azegami H., Shimoda M., Katamine E., and Wu C. Z. A domain optimization technique for elliptic boundary value problems. In Hernandez S., El-Sayed M., and Brebbia C. A. eds., *Computer Aided Optimization Design of Structures IV, Structural Optimization*, pp. 51–58, Southampton, 1995. Computational Mechanics Publications.
- [11] Inzarulfaisham A. R. and Azegami H. Solution to boundary shape optimization problem of linear elastic continua with prescribed natural vibration mode shapes. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 27, pp. 210–217, 2004. DOI: 10.1007/s00158-003-0372-x.
- [12] Haftka R. T. and Grandhi R. V. Structural shape optimization: A survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 57, pp. 91–106, 1986.
- [13] Saitou K., Izui K., Nishiwaki S., and Papalambros P. A survey of structural optimization in mechanical product development. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*, Vol. 5, pp. 214–226, 2005. DOI: 10.1115/1.2013290.
- [14] Bendsøe M. P. and Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [15] Suzuki K. and Kikuchi N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 291–318, 1991.
- [16] Diaz A. R. and Kikuchi N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1487–1502, 1992.
- [17] Ma Z. D., Kikuchi N., and Cheng H. C. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, pp. 259–280, 1995.
- [18] Murat F. and Tartar L. Optimality conditions and homogenization. In Mario A., Modica L., and Spagnolo S. eds., *Nonlinear Variational Problems*, pp. 1–8, Boston, 1985. Pitman Publishing Program.
- [19] Belytschko T., Xiao S. P., and Parimi C. Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 57, pp. 1177–1196,

2003. DOI: 10.1002/nme.824.
- [20] Norato J., Haber R., and Tortorelli D. A geometry projection method for shape optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 60, pp. 2289–2312, 2004. DOI: 10.1002/nme.1044.
 - [21] Bendsøe M. P. Optimal shape design as a material distribution problem. *Structural Optimization*, Vol. 1, pp. 193–202, 1989.
 - [22] Yang R. J. and Chung C. H. Optimal topology design using linear programming. *Computers and Structures*, Vol. 53, pp. 265–275, 1994.
 - [23] Bendsøe M. P. and Sigmund O. *Topology Optimization Theory, Methods and Applications*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2003.
 - [24] Diaz A. R. and Sigmund O. Checkerboard patterns in layout optimization. *Structural Optimization*, Vol. 10, pp. 40–45, 1995.
 - [25] Sigmund O. and Petersson J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. *Structural Optimization*, Vol. 16, pp. 68–75, 1998.
 - [26] Haber R. B., Jog C. S., and Bendsøe M. P. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on parameter. *Structural Optimization*, Vol. 11, pp. 1–12, 1996.
 - [27] Xie Y. M. and Steven G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, Vol. 49, pp. 885–896, 1993.
 - [28] Yang X. Y., Xie Y. M., Steven G. P., and Querin O. M. Topology optimization for frequencies using an evolutionary method. *Journal of Structural Engineering*, Vol. 125, pp. 1432–1438, 1999.
 - [29] Li Q., Steven G. P., Querin O. M., and Xie Y. M. Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3361–3371, 1999.
 - [30] Sussman M., Smereka P., and Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 146–159, 1994.
 - [31] Chang Y. C., Hou T. Y., Merriman B., and Osher S. A level set formulation of eulerian interface capturing methods for incompressible fluid flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 124, pp. 449–464, 1996.
 - [32] Sussman M. and Puckett E. G. A coupled level set and volume-of-fluid method for computing 3d and axisymmetric incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, Vol. 162, pp. 301–337, 2000.
 - [33] Son G. and Dhir V. K. Numerical simulation of film boiling near critical pressures with a level set method. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 120, pp. 183–192, 1998.
 - [34] Ye J. C., Bresler Y., and Moulin P. A self-referencing level-set method for image reconstruction from sparse fourier samples. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 50, pp. 253–270, 2002.
 - [35] Tsai R. and Osher S. Level set methods and their applications in image science. *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 1, pp. 623–656, 2003.
 - [36] van den Doel K. and Ascher U. M. On level set regularization for highly ill-posed distributed parameter estimation problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, pp. 707–723, 2006.

DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.022.

- [37] Sethian J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1999.
- [38] Sethian J. A. and Wiegmann A. Structural boundary design via level-set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, pp. 489–528, 2000.
- [39] Osher S. and Santosa F. Level-set methods for optimization problems involving geometry and constraints: Frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, Vol. 171, pp. 272–288, 2001.
- [40] Wang M. Y., Wang X., and Guo D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 227–246, 2003.
- [41] Wang M. Y. and Wang X. M. “Color” level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 469–496, 2004. DOI: 10.1016/j.cma.2003.10.008.
- [42] Wang S. Y. and Wang M. Y. A moving superimposed finite element method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, pp. 1892–1922, 2006. DOI: 10.1002/nme.1527.
- [43] Allaire G., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [44] Allaire G. and Jouve F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 3269–3290, 2005. DOI: 10.1016/j.cma.2004.12.018.
- [45] Haber E. A multilevel, level-set method for optimizing eigenvalues in shape design problems. *Journal of Computational Physics*, Vol. 198, pp. 518–534, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2004.01.031.
- [46] Wang S. Y., Lim K. M., Khoo B. C., and Wang M. Y. A geometric deformation constrained level set method for structural shape and topology optimization. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 18, pp. 155–181, 2007.
- [47] Allaire G., Gournay F., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, Vol. 34, pp. 59–80, 2005.
- [48] Sokolowski J. and Zochowski A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, pp. 1251–1272, 1999.
- [49] Zhuang C. G., Xiong Z. H., and Ding H. A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1074–1084, 2007. DOI: 10.1016/j.cma.2006.08.005.
- [50] Burger M., Hackl B., and Ring W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 344–362, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.033.
- [51] He L., Kao C. Y., and Osher S. Incorporating topological derivatives into shape derivatives based level set methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 225, pp. 891–909, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.01.003.
- [52] Amstutz S. and André H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method.

- Journal of Computational Physics*, Vol. 216, pp. 573–588, 2006. DOI: 10.1016/j.jcp.2005.12.015.
- [53] Wang S. Y. and Wang M. Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, pp. 2060–2090, 2006. DOI: 10.1002/nme.1536.
- [54] Wang S. Y., Lim K. M., Khoo B. C., and Wang M. Y. An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, Vol. 221, pp. 395–421, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.06.029.
- [55] Wang S. Y. and Wang M. Y. Structural shape and topology optimization using an implicit free boundary parametrization method. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 13, pp. 119–147, 2006.
- [56] Wang S. Y., Lim K. M., Khoo B. C., and Wang M. Y. An unconditionally time-stable level set method and its application to shape and topology optimization. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol. 21, pp. 1–40, 2007.
- [57] Luo Z., Tong L., Wang M. Y., and Wang S. Y. Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 680–705, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.08.011.
- [58] Park K. S., Park S. H., and Youn S. K. Level set based topology optimization using hole creation map. In *The Fourth China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, pp. 125–130, Kunming, 2006.
- [59] Chen J., Shapiro V., Suresh K., and Tsukanov I. Shape optimization with topological changes and parametric control. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 71, pp. 313–346, 2007. DOI: 10.1002/nme.1943.
- [60] Wei P. and Wang M. Y. A piecewise constant level set method for structural shape and topology optimization. In *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, No. A0091, pp. 1659–1668, Seoul, 2007. ISSMO.
- [61] Li H. W. and Tai X. C. Piecewise constant level set method for multiphase motion. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, Vol. 4, pp. 291–305, 2007.
- [62] Tai X. C. and Christiansen O. Image segmentation using some piecewise constant level set methods with mbo type of projection. *International Journal of Computer Vision*, Vol. 73, pp. 61–76, 2007. DOI: 10.1007/s11263-006-9140-x.
- [63] Luo J., Luo Z., Chen L., Tong L., and Wang M. Y. A semi-implicit level set method for structural shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 5561–5581, 2008. DOI: 10.1016/j.jcp.2008.02.003.
- [64] Mulder W., Osher S., and Sethian J. A. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 100, pp. 209–228, 1992.
- [65] Chopp D. L. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 106, pp. 77–91, 1993.
- [66] Osher S. and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2002.
- [67] Russo G. and Smereka P. A remark on computing distance functions. *Journal of Computational*

Physics, Vol. 163, pp. 51–67, 2000. DOI: 10.1006/jcph.2000.6553.

- [68] Hartmann D., Meinke M., and Schröder W. Differential equation based constrained reinitialization for level set methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 227, pp. 6821–6845, 2008. DOI: 10.1016/j.jcp.2008.03.040.

第 2 章

レベルセット関数の更新方法

2.1 はじめに

本章では、本研究で提案するレベルセット関数の更新方法について説明する。まず、レベルセット法の考え方について説明する。次に単純化されたレベルセット方程式を導出し、単純化されたレベルセット方程式を用いて構造最適化問題を定式化する。最後に、有限要素法を用いて単純化されたレベルセット方程式を離散化し、レベルセット関数を更新する方法について説明する。

2.2 レベルセット法の考え方

最初に、Osher と Sethian [1] によって提案されたレベルセット法を用いて、構造物の形態と形状を表現する方法について説明する。レベルセット法は、二つの相で構成される閉じた参照領域 D において、それぞれの相の形態と形状を表現する方法である。本研究では、単一の材料で構成される構造物を対象として構造最適化法を構築するため、一方の相は物体を表現し、もう一方の相は空洞を表現するものとする。すなわち、参照領域 D は、構造最適化の対象となる物体領域 Ω と、空洞が存在する空洞領域 $D \setminus \Omega$ からなる。レベルセット法では、物体領域と空洞領域の境界、つまり、構造物の形状境界 $\partial\Omega$ を表現するために、次式に示すレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ が導入される。

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &> 0 && \text{for } \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(\mathbf{x}) &= 0 && \text{for } \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \cap D \\ \phi(\mathbf{x}) &< 0 && \text{for } \forall \mathbf{x} \in D \setminus \Omega\end{aligned}\tag{2.1}$$

ここで、 \mathbf{x} は参照領域 D 内の座標である。上記のレベルセット関数を用いることにより、参照領域 D における任意の物体領域 Ω の形態と形状を間接的に表現することができる。

次に、参照領域 D 内において、物体領域 Ω の形態と形状が変化していく様子が、レベルセット関数を用いてどのように表現されるのかを説明する。今、仮想的な時間 t を導入し、レベルセット関数を t の関数とする。すなわち、時間 t が経過するに従い、レベルセット関数は更新され、形状境界 $\partial\Omega$ が進展するものとする。レベルセット関数の定義より、時刻 t においてレベルセット関数値が φ となる点からなる等値面 $S(\varphi, t)$ は次式のように記述できる。

$$S(\varphi, t) = \{\mathbf{x}(t) | \phi(\mathbf{x}(t), t) = \varphi\}\tag{2.2}$$

ここで、 φ は任意の値であり、 $\mathbf{x}(t)$ は等値面上の点である。上記の方程式を時間 t で微分することにより、以

下に示す Hamilton-Jacobi 方程式が導出される.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \phi(\mathbf{x}, t) \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0 \quad (2.3)$$

$S(\varphi, t)$ で表現される等値面が法線方向に進展する速度を $V_N(\mathbf{x}, t)$ とすると, $V_N(\mathbf{x}, t)$ は次式で与えられる.

$$V_N(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x}, t)}{|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)|} \quad (2.4)$$

ここで, $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ は進展する等値面の速度ベクトルであり, 次式で定義される.

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (2.5)$$

式 (2.4) を式 (2.3) に代入すると, 以下に示すレベルセット方程式が得られる.

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + V_N(\mathbf{x}, t) |\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| = 0 \quad (2.6)$$

このレベルセット方程式を解くことにより, 形状境界 $\partial\Omega$ が時間とともに進展する様子が分かる.

レベルセット法に基づく構造最適化法では, 目的汎関数が単調減少するような適切な法線方向速度 $V_N(\mathbf{x}, t)$ を与えてレベルセット方程式を解くことにより, 最終的に KKT 条件を満たす最適解を得る. Wang ら [2] と Allaire と Jouve [3] は, 有限差分法に基づいて双曲型の偏微分方程式を解くための数値計算法である, 風上差分法を用いてレベルセット方程式を解いた. 他方, Sethian [4] は Petrov-Galerkin 法を用いて, Park ら [5] は最小二乗有限要素法を用いて, それぞれレベルセット方程式を解いた.

レベルセット関数は, 様々な関数の性質を保持することができるが, Mulder ら [6], Chopp [7], Osher と Fedkiw [8] の研究より, レベルセット関数を形状境界 $\partial\Omega$ に対する符号付き距離関数とすることによって, より精度の高い計算結果が得られることが示された. レベルセット関数が形状境界 $\partial\Omega$ に対する符号付き距離関数となる場合, レベルセット関数は以下のように定義される.

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} d(\mathbf{x}, \partial\Omega) & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega \\ -d(\mathbf{x}, \partial\Omega) & \text{if } \mathbf{x} \notin \Omega \end{cases} \quad (2.7)$$

ここで, $d(\mathbf{x}, \partial\Omega)$ は, 二点 \mathbf{x} , \mathbf{y} の距離を示す関数 $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ を用いて, 以下のように定義される.

$$d(\mathbf{x}, \partial\Omega) = \inf_{\mathbf{y} \in \partial\Omega} d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

このとき, レベルセット関数に関する以下の関係式が成り立つ.

$$|\nabla \phi(\mathbf{x})| = 1 \quad (2.9)$$

数値誤差を減らし計算精度を向上させること目的として, レベルセット関数を形状境界 $\partial\Omega$ に対する符号付き距離関数として再初期化する方法が幾つか提案されており, Fast Marching Method を用いる方法 [4] と, 再初期化に関する偏微分方程式を解く方法 [9] が, しばしば利用されている. 現在までに提案されている多くのレベルセット法に基づく構造最適化法 [2][10][11] では, 最適化過程において数回レベルセット関数を更新する毎に一回, レベルセット関数を符号付き距離関数として再初期化している. このため, $|\nabla \phi(\mathbf{x})| = 1$ で表現される符号付き距離関数の関係式は常に満たされてはいないので, レベルセット関数は式 (2.6) に基づいて更新される.

2.3 単純化されたレベルセット方程式

式 (2.6) に示すレベルセット方程式を陽解法を用いて離散化すると、以下の式が得られる。

$$\frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} + V_N(\mathbf{x}, t)|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)| = 0 \quad (2.10)$$

ここで、 Δt は時間増分である。上式の弱形式は以下のように導出することができる。

$$\int_D \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \psi d\Omega + \int_D V_N(\mathbf{x}, t)|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)|\psi d\Omega = 0 \quad \text{for } \forall \psi \in \Psi \quad (2.11)$$

ここで、 Ψ はとりうるレベルセット関数で構成される空間である。さらに、更新前のレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ が、常に $|\nabla\phi(\mathbf{x}, t)| = 1$ を満たしていれば、上式は以下のように単純化される。

$$\int_D \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \psi d\Omega + \int_D V_N(\mathbf{x}, t)\psi d\Omega = 0 \quad \text{for } \forall \psi \in \Psi \quad (2.12)$$

上式に示す単純化されたレベルセット方程式は空間に関する微分の項を含まないため、有限要素法を用いて離散化できる。すなわち、単純化されたレベルセット方程式に基づいてレベルセット関数を更新する場合、式 (2.6) に基づいてレベルセット関数を更新する場合と異なり、風上差分法や Petrov-Galerkin 法、最小二乗有限要素法などの方法を必要としない。

本研究では、有限要素法を用いて式 (2.12) を解くことによりレベルセット関数を更新し、更新する都度レベルセット関数を再初期化する構造最適化法を提案する。この構造最適化法では、再初期化の精度が極めて重要となるため、 $|\nabla\phi(\mathbf{x})| = 1$ で表現される符号付き距離関数の関係式を十分な精度で満たすことができる新しい再初期化法もあわせて開発した。新しい再初期化法については、第 3 章において詳細に議論する。

式 (2.6) に基づいてレベルセット関数を更新する場合、適切な境界条件が必要となることがある。Wang ら [2] と Allaire と Jouve [3] は、風上差分法を用いてレベルセット方程式を解くにあたり、参照領域 D の境界 ∂D において、以下に示す Neumann 境界条件を与えた。

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } \partial D \quad (2.13)$$

ここで、 n は ∂D の法線である。上式に示す境界条件を与えることにより、形状境界 $\partial\Omega$ の風上側が常に参照領域 D 内に存在することが保証される。さらに、Allaire と Jouve [3] が議論したように、参照領域 D の境界 ∂D においてレベルセット関数が不正な値をとることを回避でき、結果として ∂D において不適切な形態変化が起きることを防いでいる。他方、式 (2.12) は空間に関する微分の項を含まないため、本研究で提案する新しい構造最適化法は、式 (2.13) に示す境界条件も、その他の境界条件も必要としない。すなわち、レベルセット関数は式 (2.12) のみに基づいて更新される。

2.4 構造最適化問題の定式化

ここで、単純化されたレベルセット方程式を用いて、構造最適化問題を定式化する。レベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ によって表現される構造物について、最小化したい評価項目を目的汎関数 $F(\phi)$ 、制約条件に関する評価項目

を制約汎関数 $G(\phi)$ とし、以下に示す構造最適化問題を考える。

$$\text{Minimize } F(\phi) \quad (2.14)$$

$$\text{Subject to } G(\phi) \leq G_{max} \quad (2.15)$$

$$\text{for } \phi \in \Psi$$

ここで、 G_{max} は $G(\phi)$ の上限値である。このとき、 $F(\phi)$ と $G(\phi)$ の変分は ϕ に関する Fréchet 微分として定義される。本研究では、 $F(\phi)$ の変分を表す Fréchet 微分が以下のように記述できる構造最適化問題について議論する。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \int_D f(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \quad (2.16)$$

ここで、 ψ は $\psi \in \Psi$ となる試行関数であり、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ は ψ と共に $F(\phi)$ の形状感度の被積分関数を表現するのに用いられる。また、本研究で議論する構造最適化問題では、 $G(\phi)$ の変分は以下のように記述できるものとする。

$$\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \int_D g(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \quad (2.17)$$

ここで、 $g(\phi(\mathbf{x}))$ は ψ と共に $G(\phi)$ の変分の被積分関数を表現するのに用いられる。

次に、最適構造が満たさなければならぬ KKT 条件について考える。まず、ラグランジュ乗数 λ を用いてラグランジェアン $\bar{F}(\phi)$ を以下のように定義する。

$$\bar{F}(\phi) = F(\phi) + \lambda(G(\phi) - G_{max}) \quad (2.18)$$

ラグランジェアンの変分は次式で与えられる。

$$\left\langle \frac{d\bar{F}(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle + \lambda \left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle \quad (2.19)$$

式 (2.16) と式 (2.17) を上式に代入すると次式が得られる。

$$\left\langle \frac{d\bar{F}(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \int_D \{f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}))\} \psi d\Omega \quad (2.20)$$

このとき、KKT 条件は次式で与えられる。

$$\left\langle \frac{d\bar{F}(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \int_D \{f(\phi(\mathbf{x})) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}))\} \psi d\Omega = 0 \quad (2.21)$$

$$\lambda(G(\phi) - G_{max}) = 0, \quad \lambda \geq 0, \quad G(\phi) - G_{max} \leq 0 \quad (2.22)$$

最適構造を表現するレベルセット関数は上記の KKT 条件を満たさなければならない。言い換えると、式 (2.21) と式 (2.22) を満たすレベルセット関数は最適解の候補であるが、このレベルセット関数を直接求めるのは難しい。式 (2.21) を満たすレベルセット関数を求めるために、次式に示す仮想的な時間 t に関する方程式を弱形式で導入する。

$$\int_D \frac{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)}{\Delta t} \psi d\Omega + \int_D \{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}, t))\} \psi d\Omega = 0 \quad \text{for } \forall \psi \in \Psi \quad (2.23)$$

式 (2.21) と式 (2.23) の比較より、 $V_N(\mathbf{x}, t)$ は次式となる。

$$V_N(\mathbf{x}, t) = f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}, t)) \quad (2.24)$$

式 (2.20) と式 (2.23) より、時間増分 Δt に関するラグランジェアンの変動は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\bar{F}(\phi)}{d\phi}, \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle &= \int_D \{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}, t))\} \{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)\} d\Omega \\ &= -\Delta t \int_D \{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}, t))\}^2 d\Omega \end{aligned} \quad (2.25)$$

上式は、式 (2.12) と式 (2.24) に基づいてレベルセット関数を更新した場合、ラグランジェアン $\bar{F}(\phi)$ は単調減少することを意味している。さらに、時間 t に関するレベルセット関数の変動が収束すれば、ラグランジェアン $\bar{F}(\phi)$ の変動も収束し、結果として式 (2.21) が満たされる。

KKT 条件より、式 (2.15) に示す不等式がアクティブ、つまり $G(\phi) = G_{max}$ ならば、 $G(\phi)$ は時間変化に対して一定でなければならないので、 λ は $\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle = 0$ を満足するように決定される。

式 (2.17) と式 (2.23) より、 $\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle$ は以下のように記述される。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle &= \int_D g(\phi(\mathbf{x}, t)) \{\phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t)\} d\Omega \\ &= -\Delta t \int_D g(\phi(\mathbf{x}, t)) \{f(\phi(\mathbf{x}, t)) + \lambda g(\phi(\mathbf{x}, t))\} d\Omega \end{aligned} \quad (2.26)$$

ゆえに、 $\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \phi(\mathbf{x}, t + \Delta t) - \phi(\mathbf{x}, t) \right\rangle = 0$ を満たす λ は以下のようになる。

$$\lambda = -\frac{\int_D f(\phi(\mathbf{x}, t))g(\phi(\mathbf{x}, t))d\Omega}{\int_D g(\phi(\mathbf{x}, t))^2d\Omega} \quad (2.27)$$

式 (2.15) に示す不等式がアクティブでない場合、KKT 条件より $\lambda = 0$ となる。

構造最適化の過程においては、上述のように λ を計算した後で、式 (2.12) に基づいてレベルセット関数を更新する。目的汎関数が収束したときのレベルセット関数が、最終的に得られる最適解となる。

2.5 有限要素法を用いた更新方法

2.3 節で述べたように、本研究で提案する構造最適化法では、式 (2.12) に示す単純化されたレベルセット方程式を有限要素法を用いて離散化して、レベルセット関数を更新する。式 (2.12) を有限要素法を用いて空間に関して離散化すると以下の式が得られる。

$$\frac{\mathbf{E}\{\boldsymbol{\Phi}^{t+\Delta t} - \boldsymbol{\Phi}^t\}}{\Delta t} + \mathbf{V}_N^t = 0 \quad (2.28)$$

ここで、 $\boldsymbol{\Phi}^t$ は時刻 t における各節点のレベルセット関数値からなるベクトルである。 \mathbf{E} と \mathbf{V}_N^t は以下の式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \bigcup_{j=1}^{n_e} \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \\ \mathbf{V}_N^t &= \bigcup_{j=1}^{n_e} \int_{V^e} V_N(\mathbf{x}, t) \mathbf{N} d\Omega \end{aligned} \quad (2.29)$$

ここで、 n_e は要素数であり、 $\bigcup_{j=1}^{n_e}$ は要素の重ね合わせを意味している。式 (2.28) より、レベルセット関数の更新に関する以下の式が導出される。

$$\Phi^{t+\Delta t} = \Phi^t - \Delta t \mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N^t \quad (2.30)$$

次に、 Δt の値を適切に決定する方法について説明する。節点ベクトル $\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N^t$ の i 番目の節点における値を $\{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N^t\}_i$ とする。式 (2.30) より、時間 Δt 後の i 番目の節点におけるレベルセット関数値は $-\Delta t \{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N^t\}_i$ だけ変化する。ここで、時間 Δt 後の参照領域全域におけるレベルセット関数値の最大変化量を表すパラメータ $d\phi_{lim}$ を導入すると、 Δt に関する以下の関係が得られる。

$$\Delta t = \frac{d\phi_{lim}}{\max_i |-\{\mathbf{E}^{-1} \mathbf{V}_N^t\}_i|} \quad (2.31)$$

なお、 $d\phi_{lim}$ は以下に示す CFL 条件を満たすように与える必要がある。

$$\frac{d\phi_{lim}}{\Delta x} \leq 1 \quad (2.32)$$

ここで、 Δx は隣り合う節点間の距離である。 Δt は式 (2.31) より計算でき、各節点のレベルセット関数値は式 (2.30) を用いて更新される。

参考文献

- [1] Osher S. and Sethian J. A. Front propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 78, pp. 12–49, 1988.
- [2] Wang M. Y., Wang X., and Guo D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 227–246, 2003.
- [3] Allaire G. and Jouve F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 3269–3290, 2005. DOI: 10.1016/j.cma.2004.12.018.
- [4] Sethian J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1999.
- [5] Park K. S., Park S. H., and Youn S. K. Level set based topology optimization using hole creation map. In *The Fourth China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, pp. 125–130, Kunming, 2006.
- [6] Mulder W., Osher S., and Sethian J. A. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, Vol. 100, pp. 209–228, 1992.
- [7] Chopp D. L. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 106, pp. 77–91, 1993.
- [8] Osher S. and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2002.
- [9] Sussman M., Smereka P., and Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 146–159, 1994.

- [10] Allaire G., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [11] Allaire G., Gournay F., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, Vol. 34, pp. 59–80, 2005.

第 3 章

再初期化法

3.1 はじめに

第 2 章で説明したように、本研究で提案する構造最適化法では、単純化されたレベルセット方程式に基づいてレベルセット関数を更新する都度、レベルセット関数を形状境界に対する符号付き距離関数に再初期化するため、再初期化の精度は得られる最適構造に大きな影響を与える。しかしながら、従来よりよく用いられている再初期化法を用いると、レベルセット関数の分布によっては大きな数値誤差が生じることがわかった。このため、本研究では、従来の再初期化法よりも高い精度でレベルセット関数を再初期化可能な、新しい幾何学的再初期化法を開発した。本章では、まず最初に、従来の再初期化法について説明し、次に、新しい幾何学的再初期化法について説明する。最後に、幾つかの数値例を用いて、従来の再初期化法と新しい幾何学的再初期化法の再初期化精度を比較する。

3.2 従来の再初期化法

Chopp [1] は、形状境界となるレベルセット関数の等値面を離散化し、離散化された等値面からの符号付き距離を計算してレベルセット関数を再初期化する方法を提案した。等値面を精度よく離散化できれば、この方法を用いてレベルセット関数を精度よく再初期化できるが、Chopp は等値面を離散化する詳細な方法について言及していない。

Sussman ら [2] は、形状境界からの距離を明示的に計算する代わりに、以下に示す偏微分方程式を解いてレベルセット関数を再初期化する方法を提案した。

$$\frac{\partial \phi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{sgn}(\phi_0(\mathbf{x}))(|\nabla \phi(\mathbf{x}, t)| - 1) = 0 \quad (3.1)$$

ここで、 $\phi_0(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, 0)$ であり、 $\text{sgn}(\phi_0)$ は以下に定義される符号関数である。

$$\text{sgn}(\phi_0) = \begin{cases} -1 & (\phi_0 < 0) \\ 0 & (\phi_0 = 0) \\ 1 & (\phi_0 > 0) \end{cases} \quad (3.2)$$

Sussman らは、数値計算の都合上、符号関数 $\text{sgn}(\phi_0)$ を以下のように近似した。

$$\text{s\~{g}n}(\phi_0) = \frac{\phi_0}{\sqrt{\phi_0^2 + \Delta^2}} \quad (3.3)$$

ここで、 Δ は近似のためのパラメータである。式 (3.1) を解いてレベルセット関数の変動が収束すれば、参照領域のほぼ全域において、 $|\nabla\phi(\mathbf{x})| = 1$ となり、結果的にレベルセット関数は再初期化される。しかしながら、この方法では、 Δ や時間増分などのパラメータを、適切に設定する必要がある。さらに、これらのパラメータは、単純により大きな値、あるいはより小さな値に設定すれば再初期化の精度が上昇するという訳ではないので、適切なパラメータを設定するのが難しい。

他方、Sethian [3] は、以下に示す Eikonal 方程式を解くための方法である、Fast Marching Method を用いて再初期化を行うことを提案した。

$$|\nabla T_{eik}(\mathbf{x})| F_{eik} = 1 \quad (3.4)$$

ここで、 F_{eik} は境界が進展する速度であり、 $T_{eik}(\mathbf{x})$ は \mathbf{x} に境界が到達する時刻である。上記の Eikonal 方程式に $F_{eik} = 1$ を代入し、Fast Marching Method を用いてこの方程式を解くことにより、レベルセット関数は再初期化される。この再初期化法では、構造メッシュを用いて離散化された各点のレベルセット関数値を、まず形状境界近傍の点において計算する。その計算結果を基に、隣接する点におけるレベルセット関数値を計算するという手続きを繰り返し、最終的に全ての点において再初期化されたレベルセット関数値を得る。Sussman ら [2] が提案した偏微分方程式に基づく再初期化法と比較して、この再初期化法には、式 (3.3) における Δ のような人工的なパラメータは存在しないという長所がある。しかしながら、この再初期化法では、形状境界近傍におけるレベルセット関数値を Fast Marching Method とは別の方法を用いて決定する必要があるという問題がある。

3.4 節の数値例に示すように、偏微分方程式に基づく再初期化法や Fast Marching Method に基づく再初期化法について、よく用いられる実装法を用いてプログラムを実装し、幾つかのレベルセット関数を再初期化したところ、レベルセット関数の分布によっては、大きな数値誤差が生じたため、本研究では、次節で説明する新しい幾何学的再初期化法を開発した。

3.3 新しい幾何学的再初期化法

新しい幾何学的再初期化法の基本的な考え方は、Chopp [1] が提案した方法に似ており、形状境界上の点集合を求め、その点集合までの距離に基づき再初期化後のレベルセット関数値を決定するというものである。2.5 節で説明したように、本研究で提案する構造最適化法では、有限要素法を用いてレベルセット関数を更新するため、有限要素によって分割された参照領域 D において、レベルセット関数は再初期化される。新しい幾何学的再初期化法における再初期化の手続きについて、以下に詳細に説明する。

最初に、形状境界 $\partial\Omega$ と交差する全ての有限要素について、図 3.1 に示すように、有限要素法の形状関数を用いた補間に基づき形状境界 $\partial\Omega$ 上の点を何点か選び出す。このとき、二次元問題では、ある一個の要素におけるレベルセット関数 $\phi(x, y)$ は、図 3.2 に示すパラメトリック座標系 (ξ, η) に写像され、形状関数 \mathbf{N} と各節点におけるレベルセット関数値ベクトル Φ_e を用いて以下のように補間される。

$$\phi(\xi, \eta) = \mathbf{N}^T \Phi_e \quad (3.5)$$

三次元問題では、ある一個の要素におけるレベルセット関数 $\phi(x, y, z)$ は、パラメトリック座標系 (ξ, η, ζ) に写像される。例えば、参照領域 D が四節点四角形要素により離散化される場合、一個の要素におけるレベル

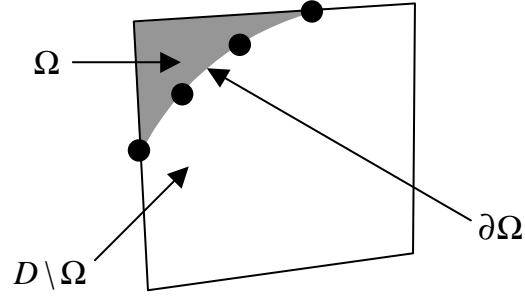


図 3.1 Points on the shape boundary in an element.

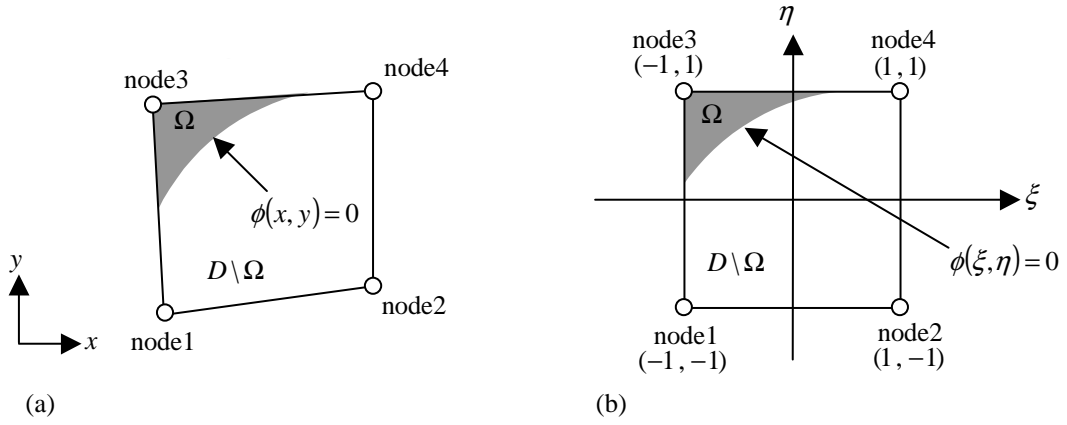


図 3.2 Element coordinates: (a) original coordinate; and (b) parametric coordinate.

セット関数は以下のように補間される.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta) = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\Phi_e(-1, -1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\Phi_e(1, -1) \\ & + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\Phi_e(-1, 1) + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Phi_e(1, 1) \end{aligned} \quad (3.6)$$

参照領域 D が八節点六角形要素により離散化される場合、一個の要素におけるレベルセット関数は以下のように補間される.

$$\begin{aligned} \phi(\xi, \eta, \zeta) = & \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\Phi_e(-1, -1, -1) + \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)\Phi_e(1, -1, -1) \\ & + \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\Phi_e(-1, 1, -1) + \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)\Phi_e(1, 1, -1) \\ & + \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\Phi_e(-1, -1, 1) + \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)\Phi_e(1, -1, 1) \\ & + \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\Phi_e(-1, 1, 1) + \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)\Phi_e(1, 1, 1) \end{aligned} \quad (3.7)$$

形状境界においては $\phi = 0$ であるため、図 3.3 に示すように、二次元問題では、形状境界上の点は $\phi(\xi, \eta) = 0$

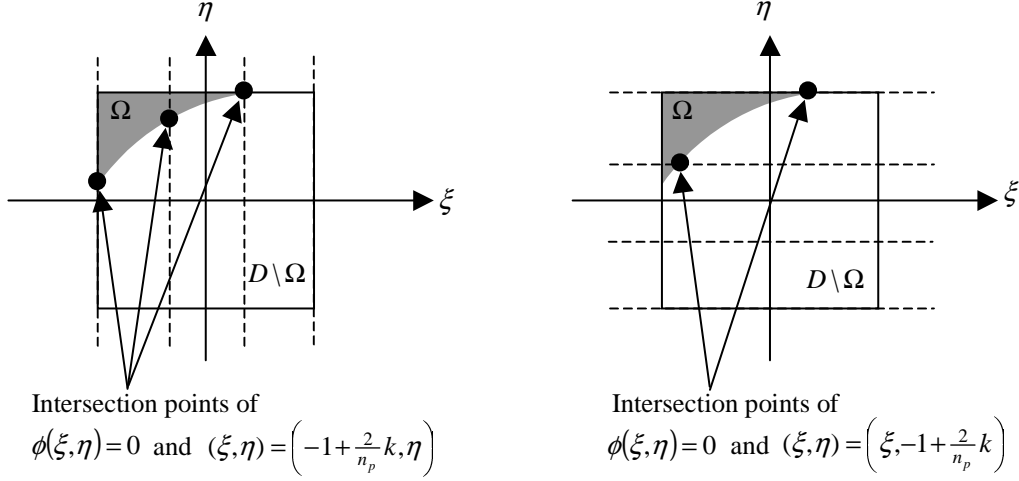


図 3.3 Intersection points on the shape boundary in an element.

と以下の方程式の交点として得られる.

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta) &= \left(-1 + \frac{2}{n_p} k, \eta\right) \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n_p \\
 (\xi, \eta) &= \left(\xi, -1 + \frac{2}{n_p} k\right) \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n_p
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

三次元問題では, 形状境界上の点は $\phi(\xi, \eta, \zeta) = 0$ と以下の方程式の交点として得られる.

$$\begin{aligned}
 (\xi, \eta, \zeta) &= \left(-1 + \frac{2}{n_p} k, -1 + \frac{2}{n_p} l, \zeta\right) \quad \text{for } k, l = 0, 1, \dots, n_p \\
 (\xi, \eta, \zeta) &= \left(-1 + \frac{2}{n_p} k, \eta, -1 + \frac{2}{n_p} l\right) \quad \text{for } k, l = 0, 1, \dots, n_p \\
 (\xi, \eta, \zeta) &= \left(\xi, -1 + \frac{2}{n_p} k, -1 + \frac{2}{n_p} l\right) \quad \text{for } k, l = 0, 1, \dots, n_p
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

ここで, n_p は交点の数を決定するためのパラメータである. なお, n_p の設定により, 再初期化の精度を調節することができる. すなわち, この値を大きくすれば再初期化の精度を向上できるが, 再初期化に要する時間は増大する. 逆に, 値を小さくすれば, 再初期化の精度が低下するが, 再初期化に要する時間を減少させることができる. 形状境界と交差する全ての有限要素に対して, 上記の操作が行われ, 最終的に, 図 3.4 に示すように, 参照領域 D において形状境界 $\partial\Omega$ を表現する点集合が得られる. ここでは, この点集合を P と呼ぶことにする.

次に, 各節点において, 節点から P に属する点までの距離を, P に属する全ての点について計算し, 最短距離を求める. そして, その節点が物体領域に存在していれば, 得られた最短距離に正の符号を与えたものを, その節点における再初期化後のレベルセット関数値とする. もし逆に, その節点が空洞領域に存在していれば, 得られた最短距離に負の符号を与えたものを, その節点における再初期化後のレベルセット関数値とする. すなわち, i 番目の節点における再初期化後のレベルセット関数値 $\phi_{reinit,i}$ は, 式 (2.7) と式 (2.8) より導出される以下の式を用いて求められる.

$$\phi_{reinit,i} = \text{sgn}(\phi_{pre-reinit,i}) \times \inf_{\mathbf{p} \in P} d(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) \tag{3.10}$$

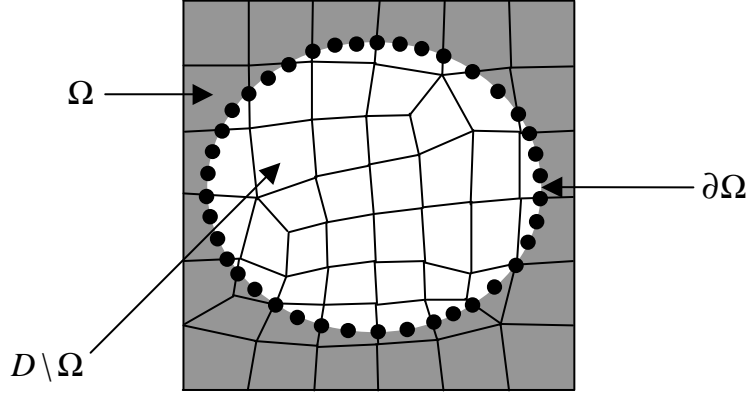


図 3.4 A set of points P .

ここで、 $\phi_{pre-reinit,i}$ は i 番目の節点における再初期化前のレベルセット関数値、 \mathbf{x}_i は i 番目の節点の座標である。

新しい幾何学的再初期化法では、有限要素内部に点を配置し、節点と形状境界の距離を計算するため、節点でのレベルセット関数値のみに基づいて再初期化を行う偏微分方程式に基づく再初期化法 [2] や First Marching Method に基づく再初期化法 [3] に比べて、より正確にレベルセット関数を再初期化できる。3.4 節では、幾つかの数値例を用意し、従来の再初期化法を用いてレベルセット関数を再初期化した場合の計算結果と、新しい幾何学的再初期化法を用いて同じレベルセット関数を再初期化した場合の計算結果を比較し、新しい再初期化法の方がより正確にレベルセット関数を再初期化できることを示す。

さらに、偏微分方程式に基づく再初期化法 [2] や First Marching Method に基づく再初期化法 [3] などの有限差分法に基づく方法を用いる場合、参照領域を構造メッシュで分割する必要があるのに対し、新しい幾何学的再初期化法は有限要素法に基づく方法であるため、参照領域を非構造メッシュで分割しても再初期化を行える。また、新しい幾何学的再初期化法では、上述の四角形四節点要素と八節点六面体要素だけではなく、あらゆる種類の要素を用いることができる。5.4.1 節と 6.4.1 節において、参照領域を構造メッシュで分割しても非構造メッシュで分割しても、新しい再初期化法を用いて、本質的に同一の最適構造が得られることを示す。

3.4 数値例

本節では、四つのレベルセット関数を用意し、新しい幾何学的再初期化法を用いてこれらのレベルセット関数を再初期化した結果と、Fast Marching Method に基づく再初期化法 [3] 及び偏微分方程式に基づく再初期化法 [2] を用いてこれらのレベルセット関数を再初期化した結果を比較する。例 1 では、再初期化前のレベルセット関数 $\phi(x, y)$ を以下のように与える。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 2(-\sqrt{x^2 + y^2} + 1.5) \\ \text{for } \forall(x, y) \in D, \quad D &= \{(x, y) | -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

例 2 では、再初期化前のレベルセット関数 $\phi(x, y)$ を以下のように与える。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= 2 \min\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1.5, -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} + 1.5, \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1.5, -\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 1.5\right) \\ \text{for } \forall(x, y) \in D, \quad D &= \{(x, y) | -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\} \end{aligned} \quad (3.12)$$

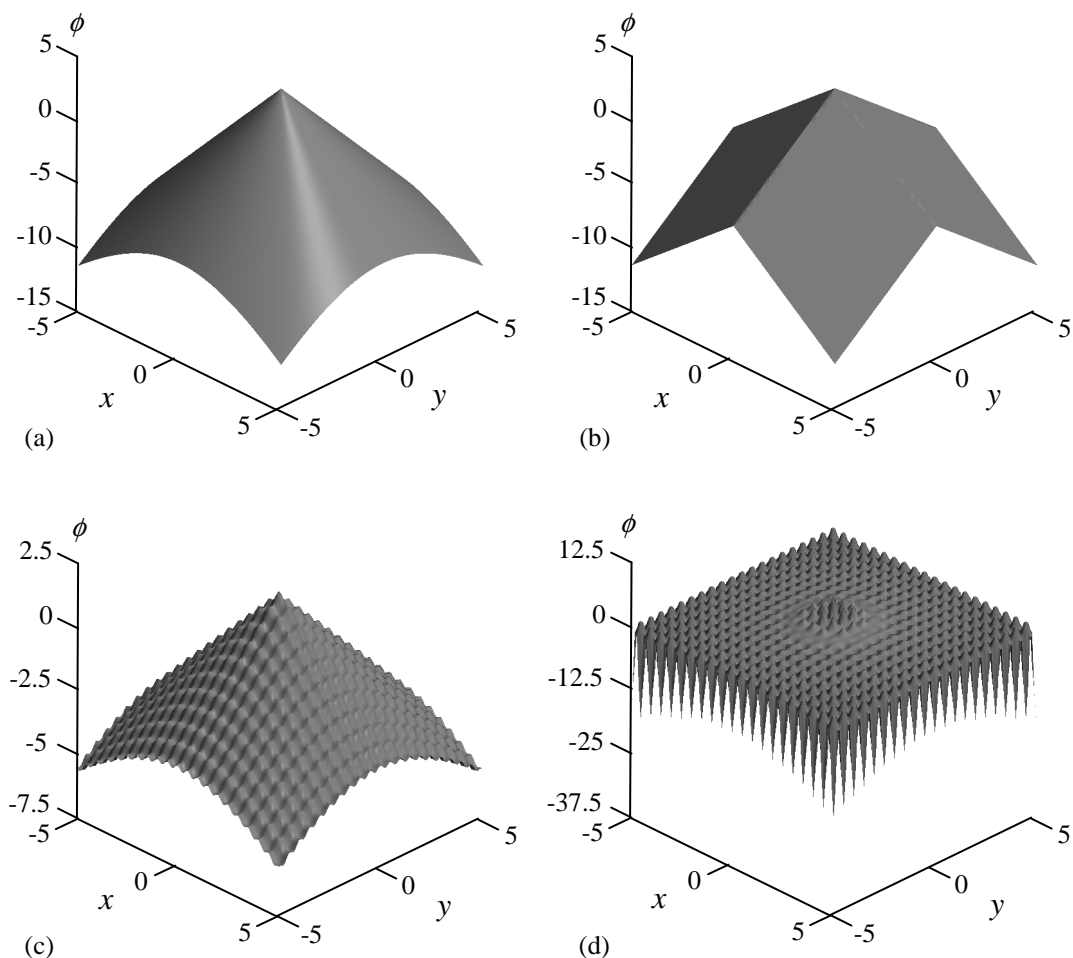


図 3.5 Distributions of $\phi(\mathbf{x})$ for Case 1, 2, 3 and 4: (a) Case 1; (b) Case 2; (c) Case 3; and (d) Case 4.

例 3 では、再初期化前のレベルセット関数 $\phi(x, y)$ を以下のように与える.

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= (-\sqrt{x^2 + y^2} + 1.5) + 0.1 \cos(4\pi x) + 0.1 \cos(4\pi y) \\ \text{for } \forall(x, y) \in D \quad , \quad D &= \{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

例 4 では、再初期化前のレベルセット関数 $\phi(x, y)$ を以下のように与える.

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= (-\sqrt{x^2 + y^2} + 1.5) \{0.9 \cos(4\pi x) + 1\} \{0.9 \cos(4\pi y) + 1\} \\ \text{for } \forall(x, y) \in D \quad , \quad D &= \{(x, y) \mid -5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

なお、参照領域 D は、グリッドサイズ 0.1 の構造メッシュを用いて離散化されている。例 1, 例 2, 例 3, 例 4 における $\phi(\mathbf{x})$ の分布を、図 3.5 に示す。

本数値例で用いた各再初期化法の実装法やパラメータ設定について、以下に述べる。新しい幾何学的再初期化法については、3.3 節で説明したパラメータ n_p を 8 に設定した。Fast Marching Method に基づく再初期化法 [3] については、Osher と Fedkiw [4] が紹介した方法を用いて形状境界近傍のレベルセット関数値を決定した。すなわち、構造メッシュの各点において、座標系の方向毎にレベルセット関数値の符号が変化する場

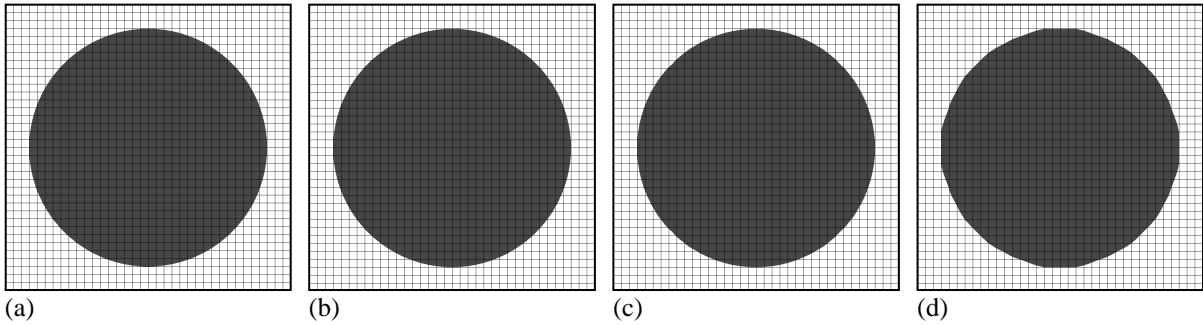


図 3.6 Shape boundaries before and after re-initialization for Case 1: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.

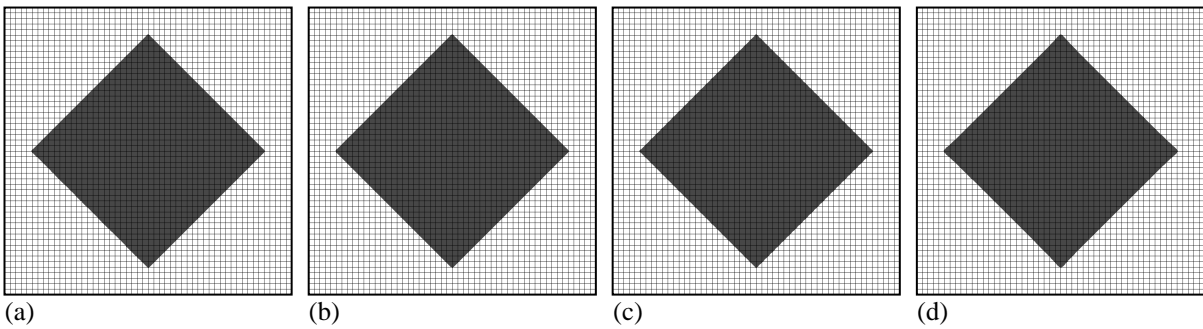


図 3.7 Shape boundaries before and after re-initialization for Case 2: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.

所を調べ、線形補間を用いて形状境界と交差する位置を計算し、それに基づき形状境界近傍のレベルセット関数値を決定する方法を用いた。偏微分方程式に基づく再初期化法 [2] については、二次のオーダーの ENO スキーム [4] と一次のオーダーの風上差分法を用いて実装し、反復回数, Courant 数, 式 (3.3) に示すパラメータ Δ を, 例 1 と例 2 では 600, 0.01, 0.1 に, 例 3 では 400, 0.01, 0.2 に, 例 4 では 200, 0.01, 0.2 に, 設定した。

最初に, 再初期化後の形状境界について調べる。例 1, 例 2, 例 3, 例 4 について, 再初期化前と再初期化後の形状境界を, それぞれ, 図 3.6, 図 3.7, 図 3.8, 図 3.9 に示す。これらの図に示すように, 全ての例において, 三つの再初期化法のいずれを用いても, 再初期化後も形状境界がほぼ完璧に保たれる。つまり, 再初期化後の形状境界は, 再初期化前の形状境界とほぼ同じである。

次に, レベルセット関数を再初期化した後の, 形状境界近傍における $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ の平均値について調べる。 $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ の平均値が 1 に十分近ければ, 形状境界近傍において, レベルセット関数は形状境界に対する符号付

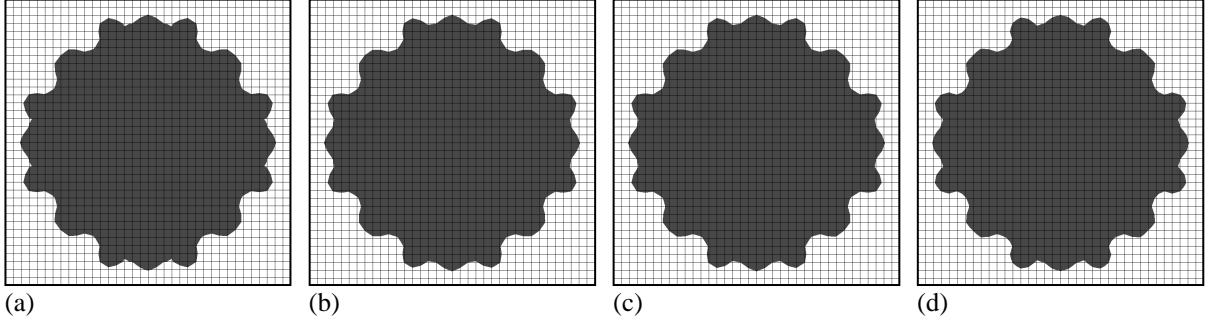


図 3.8 Shape boundaries before and after re-initialization for Case 3: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.

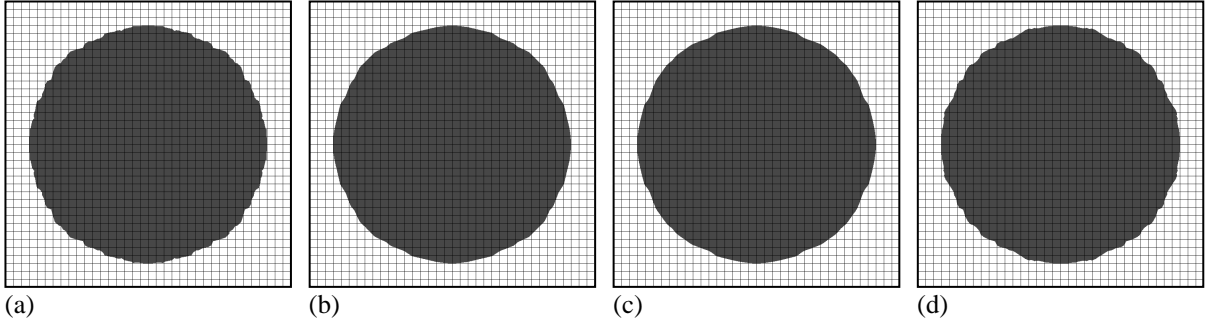


図 3.9 Shape boundaries before and after re-initialization for Case 4: (a) shape boundary before re-initialization; (b) shape boundary after re-initialization using the new geometry-based re-initialization scheme; (c) shape boundary after re-initialization using the Fast Marching Method based re-initialization scheme; and (d) shape boundary after re-initialization using the PDE based re-initialization scheme.

き距離関数であるとみなす。なお、形状境界近傍においてのみ $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ の平均値について調べるのは、本研究で適用する構造最適化問題においては、形状境界近傍でのみ法線方向速度 V_N が非ゼロの値をとるからである。形状境界近傍における $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ の平均値を評価する尺度として、以下で定義される $|\nabla\phi|_{AVG}$ を用いる。

$$|\nabla\phi|_{AVG} = \bigcup_{j_b=1}^{n_b} \frac{\int_{V^e} |\nabla\phi(\mathbf{x})| d\Omega}{\int_{V^e} d\Omega} \quad (3.15)$$

ここで、 n_b は形状境界と交差する要素数であり、 $\bigcup_{j_b=1}^{n_b}$ は、そのような要素の重ね合わせを意味している。表 3.1 に、例 1, 例 2, 例 3, 例 4 における $|\nabla\phi|_{AVG}$ の値を示す。この表に示すように、新しい幾何学的再初期化法を用いた場合、 $|\nabla\phi|_{AVG}$ は最悪でも 1 と 2.6% しか異ならないのに対し、Fast Marching Method に基づく再初期化法を用いた場合、最悪で 21.0%、偏微分方程式に基づく再初期化法を用いた場合、最悪で 15.0% 異なる。偏微分方程式に基づく再初期化法を用いる場合、反復回数や Courant 数、式 (3.3) に示す Δ といっ

表 3.1 $|\nabla\phi|_{AVG}$ in Cases 1, 2, 3 and 4

Level set function	$ \nabla\phi _{AVG}$			
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
Before re-initialization	2.000	2.000	1.828	1.222
After re-initialization using				
the new geometry-based scheme	1.001	1.002	0.9745	0.9754
the Fast Marching Method-based scheme	1.081	1.210	1.085	1.072
the PDE-based scheme	1.001	1.018	1.065	1.150

表 3.2 Computation time in Cases 1, 2, 3 and 4

Number of elements	Computation time (sec)			
	Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
50 × 50	0.037	0.051	0.046	0.038
100 × 100	0.280	0.397	0.368	0.283
200 × 200	2.220	3.076	3.200	2.219
400 × 400	17.41	24.23	25.20	17.48
800 × 800	136.6	192.6	198.2	135.4

たパラメータを適切に決定する必要があるため、本数値例では、各例毎に最適なパラメータを探し出して設定したが、それでも十分な再初期化精度を得ることができなかった。偏微分方程式に基づく再初期化法の実装法やパラメータ設定について、より適した実装や設定値が存在する可能性はあるが、あらゆるレベルセット関数に対して十分な再初期化精度を保証するのは容易ではないと思われる。また、Fast Marching Methodに基づく再初期化法について、形状境界近傍のレベルセット関数値を決定するために、Osher と Fedkiw [4] が紹介した方法を用いたが、この方法は単純な線形補間に基づく方法であるため、特に形状境界が要素を対角に横切る場合には、大きな数値誤差が生じる原因になる。これを回避するために、形状境界近傍のレベルセット関数値を、偏微分方程式に基づく再初期化法を用いて決定する方法もあるが、この方法は上述の問題をもつ。一方、新しい幾何学的再初期化法はパラメータとして n_p のみを持ち、この値をより大きな値に設定すると再初期化の精度はより高くなるので、パラメータ設定に難点はなく、なおかつ様々なレベルセット関数の再初期化に対して十分な精度が得られる。

最後に、新しい幾何学的再初期化法の時間計算量を評価する。時間計算量を評価するために、参照領域 D を、50 × 50 の要素に分割した場合、100 × 100 の要素に分割した場合、200 × 200 の要素に分割した場合、400 × 400 の要素に分割した場合、800 × 800 の要素に分割した場合について、例 1、例 2、例 3、例 4 のレベルセット関数を、幾何学的再初期化法を用いて再初期化した時の計算時間を測った。パラメータ n_p は 8 に設定し、CPU には 3.00GHz Intel Pentium D プロセッサを用い、OS には NetBSD を用いた。表 3.2 に再初期化に要する計算時間を示す。なお、ここに示す計算時間は、それぞれ 10 回計算を行って得た平均値である。表 3.2 より、各例において、要素数が 4 倍になると計算時間は約 8 倍になっており、時間計算量は $O(N^{\frac{3}{2}})$ となるのがわかる。ここで、 N は要素数を示す。二次元問題の場合、形状境界は一次元の線であるのに対し、参照領域は二次元の領域であるため、図 3.4 に示す集合 P に属する点の数は $O(N^{\frac{1}{2}})$ となり、さらに、参照領域全域における節点数は $O(N)$ となる。CPU 時間は、集合 P に属する点の数と、参照領域全域における節点

数の積に比例するため，時間計算量は $O(N^{\frac{3}{2}})$ となる．三次元問題の場合，集合 P に属する点の数は $O(N^{\frac{2}{3}})$ となるため，時間計算量は $O(N^{\frac{5}{3}})$ となる．なお，Fast Marching Method に基づく再初期化法の時間計算量は $O(N \log N)$ [4] なので，形状境界近傍におけるレベルセット関数値を幾何学的再初期化法で決定し，それ以外の点におけるレベルセット関数値を Fast Marching Method を用いて計算すれば，時間計算量を改善できる．ただし，そのような再初期化法は非構造メッシュにおいては利用できない．

以上に述べた結果より，新しい幾何学的再初期化法は，高い計算精度で，レベルセット関数を形状境界に対する符号付き距離関数に再初期化できると考えられる．なお，本節では，形状境界近傍においてのみ $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ の平均値について調べたが，新しい幾何学的再初期化法を用いた場合，各点におけるレベルセット関数値は，形状境界に対する符号付き距離の定義に基づいて計算されるため，特異点を除くほぼ全ての点において， $|\nabla\phi(\mathbf{x})|$ は 1 にほぼ等しくなる．

参考文献

- [1] Chopp D. L. Computing minimal surfaces via level set curvature flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 106, pp. 77–91, 1993.
- [2] Sussman M., Smereka P., and Osher S. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 114, pp. 146–159, 1994.
- [3] Sethian J. A. *Level Set Methods and Fast Marching Methods*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1999.
- [4] Osher S. and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2002.

第4章

最適化アルゴリズム

4.1 はじめに

本章では、本研究で提案する構造最適化法のアルゴリズムについて説明する。すなわち、第2章で説明したレベルセット関数の更新方法と、第3章で説明したレベルセット関数の再初期化方法を用いて、最適構造を求める具体的な手続きについて説明する。なお、単純化されたレベルセット方程式に基づきレベルセット関数を更新する都度、レベルセット関数を形状境界に対する符号付き距離関数に再初期化すると、特に二次元問題においては、構造物に穴が創出されるという形態の変化が起こらない。この問題を解決するため、本研究で提案する構造最適化法では、必要に応じてトポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出し、構造物の形態を変更する。トポロジカルデリバティブに基づく構造物の形態変更方法についても、本章で説明する。

4.2 フローチャート

図4.1に、本研究で提案する構造最適化法のフローチャートを示す。この図に示すように、初期構造を最初に与え、レベルセット関数を初期化する。次に、有限要素法を用いて状態変数と随伴変数を計算し、それらに基づき、目的汎関数と $f(\phi(\mathbf{x}))$ を計算する。目的汎関数が収束すれば、最適化は終了する。収束しなければ、制約汎関数と $g(\phi(\mathbf{x}))$ を計算する。次に、式(2.30)を用いてレベルセット関数を更新し、その後レベルセット関数を再初期化する。レベルセット関数は時間的、空間的に離散化されて更新されるので、式(2.30)を用いてレベルセット関数を更新する時に、式(2.15)に示す制約条件が満たされない可能性がある。ゆえに、もし制約条件が満たされない場合は、制約条件を満たすようにレベルセット関数を修正する。この修正法については4.3節にて説明する。最後に、トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する形態変更が必要かどうか調べる。もし形態変更が必要であれば、適切な個数の穴が創出される。そして、状態変数と随伴変数を計算するステップへと戻る。

4.3 制約条件を満たすためのレベルセット関数修正法

2.5節で説明したように、本研究で提案する構造最適化法では、レベルセット関数は時間的、空間的に離散化されて更新されるので、レベルセット関数が更新されると、式(2.15)に示す制約条件は満たされない可能性がある。そのような場合、制約条件を満たすようにレベルセット関数を修正しなければならない。OsherとSantosa [1] は、ニュートン法を用いてラグランジュ乗数を修正し、制約条件を満たす方法を提案した。Wang

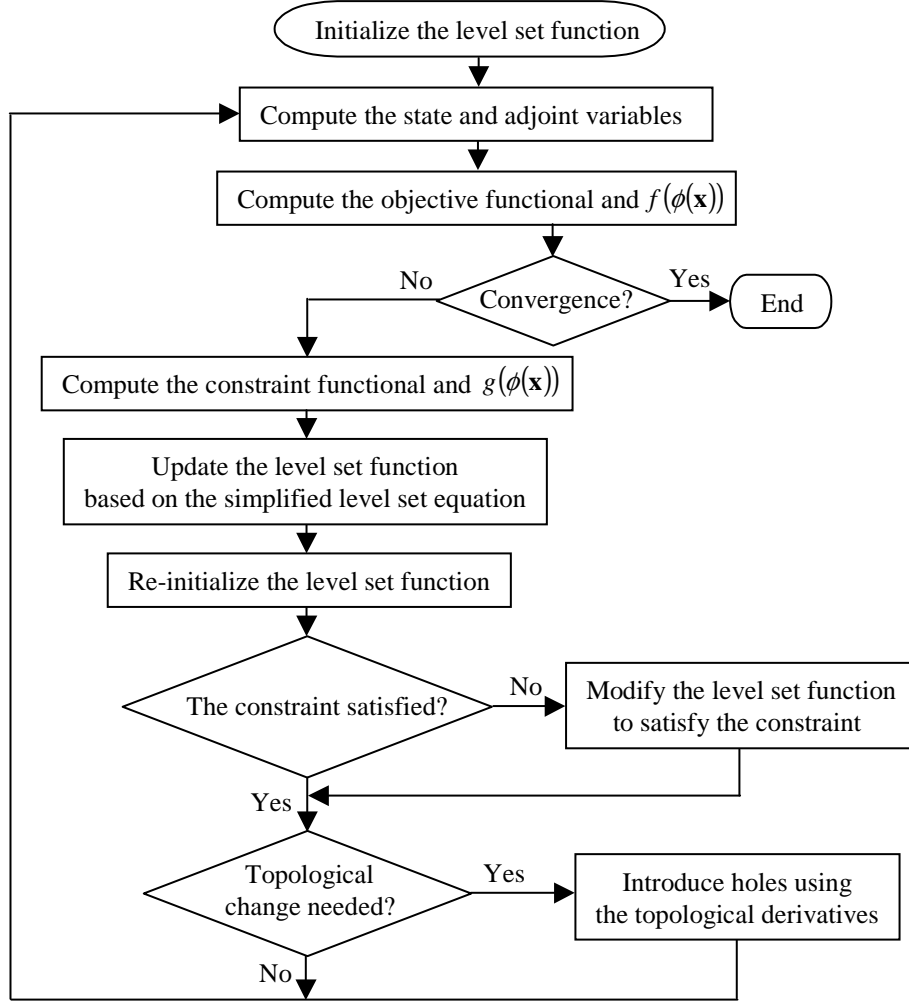


図 4.1 A flowchart of the optimization process.

ら [2] は，体積制約条件を満たすようにラグランジュ乗数を決定する “Bi-sectioning Algorithm” を用いる方法を提案した。

本研究では，制約条件を満たすようにレベルセット関数を修正するために，Osher と Santosa [1] が提案した修正法と似た方法を提案する。Osher と Santosa の方法ではラグランジュ乗数を修正するのに対し，ここで提案する修正法では，制約条件を満たしていないレベルセット関数 $\phi_v(\mathbf{x})$ に対し，参照領域全域においてある一定の値 α を加え，レベルセット関数を $\phi_v(\mathbf{x}) + \alpha$ に修正する。このとき，レベルセット関数の変動 $\psi(\mathbf{x})$ は以下ようになる。

$$\psi(\mathbf{x}) = \alpha \quad \text{for } \forall \mathbf{x} \in D \quad (4.1)$$

上式と式 (2.17) を用いて，以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} G(\phi_v + \alpha) &= G(\phi_v) + \left\langle \frac{dG(\phi_v)}{d\phi_v}, \alpha \right\rangle + O(\alpha^2) \\ &= G(\phi_v) + \alpha \int_D g(\phi_v(\mathbf{x})) d\Omega + O(\alpha^2) \end{aligned} \quad (4.2)$$

上式において $O(\alpha^2)$ を無視することにより，以下の式が得られる．

$$\alpha = \frac{G(\phi_v + \alpha) - G(\phi_v)}{\int_D g(\phi_v(\mathbf{x})) d\Omega} \quad (4.3)$$

$G(\phi_v + \alpha)$ に G_{max} 以下の適切な値を設定することにより， $\phi_v(\mathbf{x}) + \alpha$ が制約条件を満たすような α を計算できる．この方法を用いてレベルセット関数を $\phi_v(\mathbf{x})$ から $\phi_v(\mathbf{x}) + \alpha$ へ修正すると，半径が $|\alpha|$ 以下の穴や物体領域が消滅するが，レベルセット関数の修正量 α が小さければ，構造物の形態はほとんど変化しない．実際には，レベルセット関数は Courant 条件を満たしながら更新されるので，ほとんどの場合において α は十分に小さく，この方法を用いてレベルセット関数は適切に修正される．

4.4 トポロジカルデリバティブに基づく形態変更方法

構造物に穴が創出される形態変更を実現するために，本研究で提案する構造最適化法では，Allaire ら [3] が提案した，トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する方法を用いる．この方法の基本的な考え方は，Bubblee Method [4] と同じであり，数学的，物理学的な根拠に基づき，目的汎関数への影響が最も小さい箇所に穴を創出し，構造物の形態を変更するというものである．

トポロジカルデリバティブ $\tau(\mathbf{x})$ [5] は以下の以下のように定義される．

$$\tau(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{F(\Omega \setminus \overline{B_r(\mathbf{x})}) - F(\Omega)}{|B_r(\mathbf{x})|} \quad (4.4)$$

ここで， $B_r(\mathbf{x})$ は半径 r ，中心座標が \mathbf{x} の微小な穴である．上述のトポロジカルデリバティブは，物体領域 Ω 内のある点に微小な穴を創出したときの目的汎関数の感度を表している．He ら [6] の研究に基づき，式 (2.16) における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $\tau(\mathbf{x})$ の間には以下の関係が成り立つことが分かった．

$$f(\phi(\mathbf{x})) = -\tau(\mathbf{x})\delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (4.5)$$

それぞれの構造最適化問題において $f(\phi(\mathbf{x}))$ を導出すれば，上式を用いてトポロジカルデリバティブ $\tau(\mathbf{x})$ を得ることができる．トポロジカルデリバティブの絶対値が最小となる箇所に微小な穴を創出すると，穴の創出による影響を最小限に抑えつつ構造物の形態を変更することが可能となる．

本研究では，このトポロジカルデリバティブの値を用いて，以下の手続きにより穴を創出することにより，形態変更を行う．まず，レベルセット関数の更新に用いる各有限要素の中心点において，トポロジカルデリバティブの値を求める．次に，有限要素の中心点群の中で，形状境界から十分に離れており，かつトポロジカルデリバティブの値の絶対値が最小値となる点から小さい順に n_{tp} 個選択する．なお，候補点が形状境界から十分に離れているかどうかは，レベルセット関数値が閾値 b_{tp} 以上かどうかで判断する．そして，選択した n_{tp} 個の点に対して，点を中心とする半径 r_{tp} の穴を創出する．

ここで一つ注意すべき点がある．He ら [6] は二次元問題におけるトポロジカルデリバティブの導出について厳密な議論を行ったが，三次元問題についてはそのような厳密な議論を行っておらず，二次元問題において He らが得た結論が三次元問題でもそのまま成り立つかどうかは証明されていない．しかしながら，工学的な見地からすると，式 (4.5) は三次元問題においても適切であるように思えるため，本研究では，式 (4.5) を三次元問題においても用いる．5.4.2 節，6.4.2 節，7.4.2 節の数値例において，三次元問題についても式 (4.5) を用いて適切な最適構造が得られることを示す．

参考文献

- [1] Osher S. and Santosa F. Level-set methods for optimization problems involving geometry and constraints: Frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, Vol. 171, pp. 272–288, 2001.
- [2] Wang S. Y., Lim K. M., Khoo B. C., and Wang M. Y. An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, Vol. 221, pp. 395–421, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2006.06.029.
- [3] Allaire G., Gournay F., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, Vol. 34, pp. 59–80, 2005.
- [4] Eschenauer H. A., Kobelev V., and Schumacher A. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Structural Optimization*, Vol. 8, pp. 42–51, 1994.
- [5] Sokolowski J. and Zochowski A. On the topological derivative in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, pp. 1251–1272, 1999.
- [6] He L., Kao C. Y., and Osher S. Incorporating topological derivatives into shape derivatives based level set methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 225, pp. 891–909, 2007. DOI: 10.1016/j.jcp.2007.01.003.

第5章

平均コンプライアンス最小化問題への適用

5.1 はじめに

本章では、本研究で提案する構造最適化法を平均コンプライアンス最小化問題へ適用する。ある指定された荷重条件下での剛性は、しばしば構造物の性能を評価する指標の一つとなる。高い剛性を持つ構造を設計することを目的として、従来より、トポロジー最適化に基づく方法 [1][2], Evolutionary Structural Optimization Method に基づく方法 [3], レベルセット法に基づく方法 [4][5][6] など、様々な構造最適化法が提案されている。

ここでは、構造物の剛性を評価する尺度として平均コンプライアンスを採用し、本研究で提案する構造最適化法に基づき構造最適化問題を定式化し、高い剛性を持つ構造を得るための構造最適化法を構築する。この構造最適化法を用いて、従来の研究により最適構造について知見が得られている数値例を解く。本研究で提案する構造最適化法を用いて得られた最適構造と、従来の構造最適化法を用いて得られた最適構造を比較し、本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する。また、平均コンプライアンス最小化問題を解くにあたり、適切な最適構造を得るために導入した数値計算法についても説明する。

5.2 定式化

参照領域 D においてレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ により表現される、等方性弾性材料からなる構造物に関して、構造物の変位が境界 ∂D_u において完全拘束され、境界 ∂D_t において表面力 \mathbf{t} が作用し、構造物に物体力 \mathbf{b} が作用する境界条件下において、平均コンプライアンス最小化問題を定式化する。平衡状態における変位場を \mathbf{u} とすると、体積制約条件付きの平均コンプライアンス最小化問題は以下のように定式化される。

$$\text{Minimize } F(\phi) = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\partial D_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (5.1)$$

$$\text{Subject to } G(\phi) = \int_D H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \leq G_{max} \quad (5.2)$$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi) = L(\mathbf{v}, \phi) \quad (5.3)$$

for $\phi \in \Psi, \mathbf{u} \in U, \forall \mathbf{v} \in U$

ここで、 $H(\phi(\mathbf{x}))$ は以下に示す Heaviside 関数である。

$$H(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & (\phi(\mathbf{x}) < 0) \\ 1 & (\phi(\mathbf{x}) \geq 0) \end{cases} \quad (5.4)$$

Bilinear Form $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)$ と Load Linear Form $L(\mathbf{v}, \phi)$ は以下のように定義される.

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi) = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (5.5)$$

$$L(\mathbf{v}, \phi) = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\partial D_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (5.6)$$

ここで, $\boldsymbol{\epsilon}$ は線形ひずみテンソル, \mathbf{D} は弾性定数テンソルであり, 空間 U は以下のように与えられる.

$$U = \{ \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(D) \text{ with } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \partial D_u \} \quad (5.7)$$

まず, 式 (5.1) に示す $F(\phi)$ の ϕ に関する変分を求める. $F(\phi)$ の変分は以下のように記述される.

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (5.8)$$

Fréchet 微分 $\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle$ と $\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle$ を以下に示す.

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\partial D_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} d\Gamma \quad (5.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.10)$$

ここで, \mathbf{w} は変位場 \mathbf{u} の試行関数であり, $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ は Dirac delta 関数である. 式 (5.3) において \mathbf{v} に \mathbf{w} を代入すると, 以下の式が得られる.

$$\int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\partial D_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{w} d\Gamma = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (5.11)$$

式 (5.9) に上式を代入すると, 以下の式が得られる.

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (5.12)$$

$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)$ と $L(\mathbf{v}, \phi)$ に対する Fréchet 微分を以下に示す.

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (5.13)$$

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.14)$$

$$\left\langle \frac{\partial L(\mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.15)$$

また, 式 (5.3) より, 以下の式が導出される.

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial L(\mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (5.16)$$

式 (5.13), 式 (5.14), 式 (5.15) を上式に代入すると, 以下の式が得られる.

$$\int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.17)$$

上式において、 \mathbf{v} に \mathbf{u} を代入すると、以下の式が得られる。

$$\int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.18)$$

さらに、式 (5.12) に上式を代入すると、以下の式が得られる。

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \mathbf{u}}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.19)$$

最後に、式 (5.8) に、式 (5.10) と式 (5.19) を代入すると、 $F(\phi)$ の変分は以下のように得られる。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \int_D \{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.20)$$

平均コンプライアンス最小化問題は自己随伴問題であるため、上式に示すように、 $F(\phi)$ の変分は状態変数のみを用いて表される。

一方、 $G(\phi)$ の変分は単純に以下のようなになる。

$$\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (5.21)$$

以上より、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は以下のように得られる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\} \delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (5.22)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (5.23)$$

また、式 (4.5) より、平均コンプライアンス最小化問題におけるトポロジカルデリバティブは以下のようなになる。

$$\tau(\mathbf{x}) = -2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} + \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) \quad (5.24)$$

5.3 数値計算法

5.3.1 オイラー座標系における状態変数計算法

レベルセット法に基づく構造最適化法では、オイラー座標系において変位場を計算するための数値計算法が幾つか提案されており、単純な Ersatz Material Approach [6] がしばしば用いられる。この方法では、空洞領域におけるヤング率等の物性値を、物体領域における物性値と比較して極めて小さな値に設定することにより、空洞領域を擬似的に表現している。形状境界と交差する有限要素においては、その要素内での物体領域と空洞領域の面積比に基づき物性値を決定する。Wang と Wang [7] は、Superimposed FEM を用いて変位場を計算する構造最適化法を提案した。Superimposed FEM を用いることにより、変位場をより正確に計算することができるが、この方法を三次元問題を適用するためには、複雑な実装が必要となる。

本研究では、オイラー座標系において変位場を計算するために、式 (5.4) における Heaviside 関数 $H(\phi(\mathbf{x}))$ を、以下に示す式で定義される $\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて近似する。

$$\tilde{H}(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & (\phi(\mathbf{x}) < -h) \\ \frac{1}{2} + \frac{15}{16} \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right) - \frac{5}{8} \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right)^3 + \frac{3}{16} \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right)^5 & (-h \leq \phi(\mathbf{x}) \leq h) \\ 1 & (h < \phi(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (5.25)$$

ここで、 h は、完全な物体領域 ($h < \phi(\mathbf{x})$) と完全な空洞領域 ($\phi(\mathbf{x}) < -h$) の間の遷移幅を表現するためのパラメータであり、遷移幅は $2h$ に等しくなる。この近似により、Dirac Delta 関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ も以下に示す式で定義される $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ によって近似される。

$$\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) = \begin{cases} 0 & (\phi(\mathbf{x}) < -h) \\ \frac{15}{16h} \left\{ 1 - \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right)^2 \right\}^2 & (-h \leq \phi(\mathbf{x}) \leq h) \\ 0 & (h < \phi(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (5.26)$$

上式は、近似された Dirac Delta 関数が、形状境界近傍の幅 $2h$ の領域において、非ゼロの値をとることを意味している。

式 (5.25) に示すように、完全な空洞領域における値が 0 になるように Heaviside 関数を近似すると、要素剛性行列がゼロ行列となる要素が現れるため、全体剛性行列が特異行列となる。これを回避するために、要素剛性行列がゼロ行列となる要素については、変位場の計算対象から外す。すなわち、要素剛性行列がゼロ行列となる要素のみと結合している節点については、変位場を計算しない。つまり、空洞領域における変位場は計算されず、結果として計算コストを削減することができる。一方、Ersatz Material Approach では、完全な空洞領域においても物性値は微小な値をとるため、要素剛性行列がゼロ行列となる要素は存在せず、この点が本研究で用いる方法と異なる。なお、本研究で用いる方法は、近似された Heaviside 関数 $\tilde{H}(\phi)$ の表現形式が異なるものの、Wang と Wang [8] が提案した数値計算法と本質的には同じである。

5.3.2 法線方向速度の計算

式 (2.24) に示すように、本研究で提案する構造最適化法では、レベルセット関数の等値面に対する法線方向速度 V_N は $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ からなる。さらに、式 (5.22) と式 (5.23) に示すように、平均コンプライアンス最小化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は Dirac Delta 関数を含む。5.3.1 節で説明した数値計算法を用いると、Dirac Delta 関数は式 (5.26) に示す $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ によって近似されるので、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ 、 $g(\phi(\mathbf{x}))$ 、そして結果的に法線方向速度 V_N も、近似された Dirac Delta 関数 $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて表現される。ゆえに、平均コンプライアンス最小化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ は以下のように与えられる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\} \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \quad (5.27)$$

上式において、 $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ は、形状境界近傍の空洞領域側、すなわちレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ が $-h < \phi(\mathbf{x}) < 0$ となる領域において非ゼロの値をとるため、空洞領域において本来ゼロとなるべき、物体力 \mathbf{b} と弾性定数テンソル \mathbf{D} が、非ゼロの値をもつ。これが原因となり、形状境界が滑らかでない最適構造が得られるという現象が生じる。この現象を回避する方法の一つは、式 (5.26) における h を十分に小さい正の値に設定することであるが、数値積分の観点から、 h は少なくとも有限要素の要素長程度の値に設定する必要があるので、この方法は使えない。これに代わる方法として、本研究では、 \mathbf{b} と \mathbf{D} に近似された Heaviside 関数 $\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ を掛ける方法を用いる。この方法を用いることにより、結果的に、平均コンプライアンス最小化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ は以下ようになる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \{2\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} - \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u})\} \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \tilde{H}(\phi(\mathbf{x})) \quad (5.28)$$

式 (5.27) の代わりに式 (5.28) を用いても、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ は形状境界近傍の空洞領域側において非ゼロの値をとるが、この値は無視できるくらいに小さく、式 (5.28) を用いてレベルセット関数を更新することにより、形状境界が滑らかな最適構造が得られる。

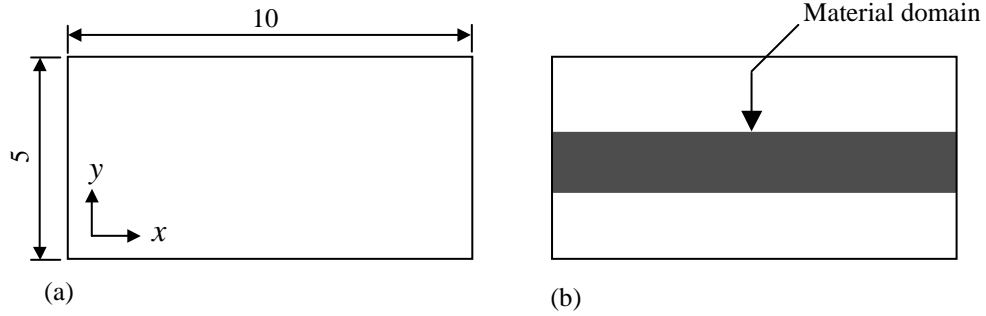


図 5.1 Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

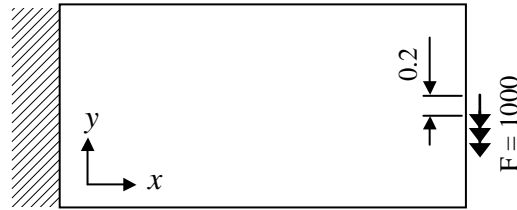


図 5.2 Boundary conditions for the two-dimensional minimum compliance problem.

一方, $g(\phi(\mathbf{x}))$ は, 近似された Dirac Delta 関数 $\tilde{\delta}(\phi)$ を用いて以下のように与えられる.

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \quad (5.29)$$

平均コンプライアンス最小化問題においては, 式 (5.28) に示す $f(\phi(\mathbf{x}))$ と, 式 (5.29) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて, 法線方向速度 V_N を計算する. また, 式 (4.3) に基づいてレベルセット関数を修正する場合にも, 式 (5.29) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いる.

5.4 数値例

本節では, 二次元および三次元の平均コンプライアンス最小化問題の例題を幾つか用意し, 本研究で提案する構造最適化法を用いて, これらの例題について最適構造を得る. 得られた最適構造と, 従来の構造最適化法を用いた場合に得られる最適構造を比較し, 本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する.

5.4.1 二次元問題

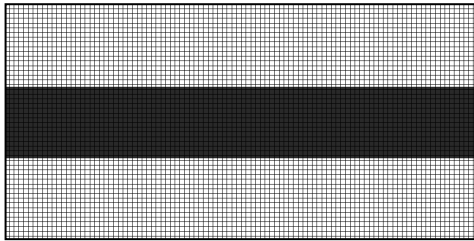
図 5.1(a) に, 本節で議論する例題の参照領域 D を示す. 参照領域は, 要素長 0.1 の四節点四角形平面応力要素を用いて, 構造メッシュ, もしくは非構造メッシュに分割される. 図 5.1(b) に初期構造を示す. 図 5.2 に境界条件を示す. この図に示すように, 参照領域の左辺において構造物の変位は拘束され, 右辺中心において y 方向の表面力が作用している. 物体領域の面積の上限値 G_{max} を 15, つまり参照領域の面積の 30% に設定する. 等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 , ポアソン比を 0.3 に設定する. 式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し, 式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.1 に設定する. また, レベルセット関数を再初期

化するには本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる。3.3 節で説明したパラメータ n_p については 8 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} , b_{tp} , r_{tp} については、それぞれ 4, 0.4, 0.1 に設定する。

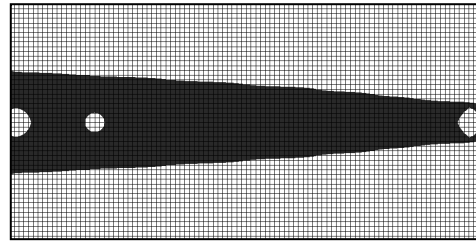
最初に、参照領域を構造メッシュで分割した場合と、非構造メッシュで分割した場合の最適構造について調べる。図 5.3 に、参照領域を構造メッシュで分割した場合において、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。図 5.4 に、参照領域を非構造メッシュで分割した場合において、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。これらの図に示すように、参照領域を構造メッシュで分割しても非構造メッシュで分割しても、本研究で提案する構造最適化法を用いて、本質的に同じ最適構造を得ることができる。これらの最適構造は、従来のレベルセット法に基づく構造最適化法 [6][9][10][11] を用いて得られる最適構造とほぼ同じであり、図 5.2 に示す境界条件を設定した平均コンプライアンス最小化問題について、本研究で提案する構造最適化法を用いて、妥当な最適構造が得られることがわかった。

次に、初期構造と得られる最適構造の関係について調べる。ここでは、図 5.5(a), 図 5.6(a), 図 5.7(a), 図 5.8(a) に示す四つの初期構造を設定した場合に、どのような最適構造が得られるのか調べる。図 5.5(a) は、参照領域全体が物体領域で満たされた、穴のない初期構造である。この初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を図 5.5 に示す。図 5.6(a) は、参照領域の中心に一つの穴があいた初期構造である。この初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を図 5.6 に示す。図 5.7(a) は、参照領域に四つの穴があいた初期構造である。この初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を図 5.7 に示す。図 5.8(a) は、参照領域に多数の穴があいた初期構造である。この初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を図 5.8 に示す。これらの図に示す最適構造は、本質的には図 5.3 に示す最適構造と同じ構造である。つまり、図 5.2 に示す境界条件を設定した場合、本研究で提案する構造最適化法を用いて、これら全ての初期構造から、従来のレベルセット法に基づく構造最適化法 [6][9][10][11] を用いて得られる最適構造と本質的にはほぼ同じの、適切な最適構造が得られることがわかった。なお、穴のない初期構造から最適構造を求める場合のみ、トポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} を 2 に設定している。また、穴のない初期構造から最適構造を求める場合、最適化の初期の段階では、物体領域の面積は明らかに制約条件を満たすことができない。このため、物体領域の面積の上限値 G_{max} を、最適化の初期の段階では大きな値に設定し、最適化が進行するにつれて徐々に小さくしていく。図 5.5 に示すように、最終的に得られる最適構造は、他の最適構造と同じく制約条件を満たしている。

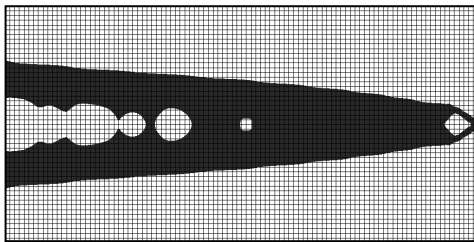
最後に、第 3 章で議論した三つの再初期化法が最適構造に及ぼす影響を調べる。図 5.9(c) は Fast Marching Method に基づく再初期化法を用いて得られる最適構造であり、図 5.9(d) はその拡大図である。ここで、Fast Marching Method に基づく再初期化法は、Osher と Fedkiw が紹介した方法 [12] で実装されている。図 5.9(a) は幾何学的再初期化法を用いて得られる最適構造であり、図 5.9(a) は図 5.3(h) と同じである。図 5.9(b) は図 5.9(a) の拡大図である。図 5.9(b) と (d) を比較すると、Fast Marching Method に基づく再初期化法を用いた場合、形状境界が明らかに滑らかでなくなることが分かる。3.4 節で説明したように、形状境界が有限要素を対角に横切る場合、Fast Marching Method に基づく再初期化により大きな数値誤差が生じる。この数値誤差のため、滑らかでない形状境界が得られると考えられる。一方で、二次のオーダーの ENO スキームと一次のオーダーの風上差分法を用いて実装された、偏微分方程式に基づく再初期化法を用いる場合、反復回数、Courant 数、式 (3.3) に示すパラメータ Δ は、前もって与える必要がある。しかしながら、これらのパラメータに関して、最適化の過程において一定で、高い計算精度で再初期化を行える適切な値を見つけることは困難であり、偏微分方程式に基づく再初期化法を用いて構造最適化を実行することはできなかった。



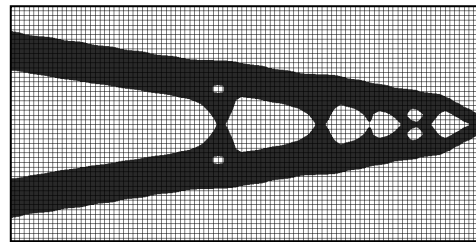
(a) Initial configuration



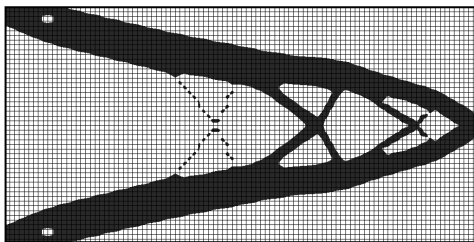
(b) Iteration 10



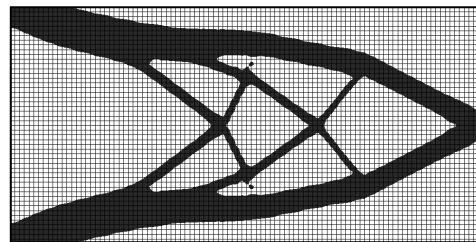
(c) Iteration 20



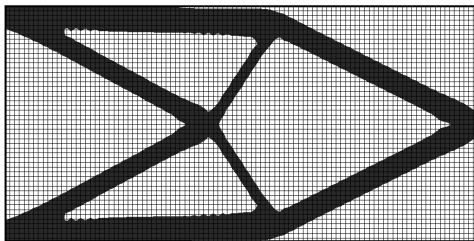
(d) Iteration 40



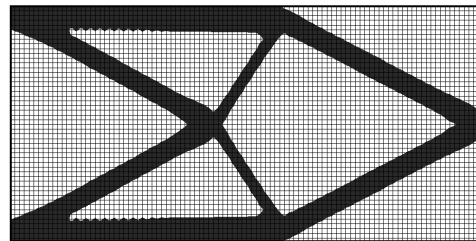
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160

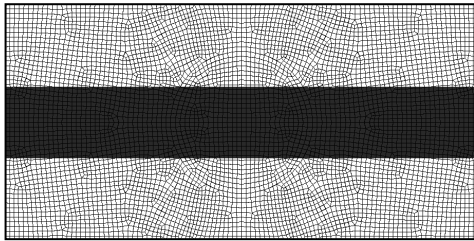


(g) Iteration 320

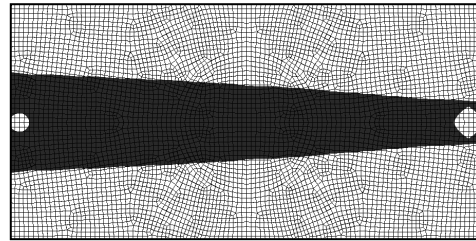


(h) Optimal configuration

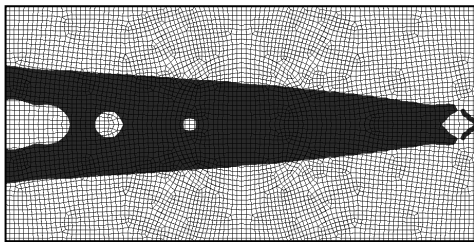
图 5.3 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the reference domain is discretized using a structural mesh.



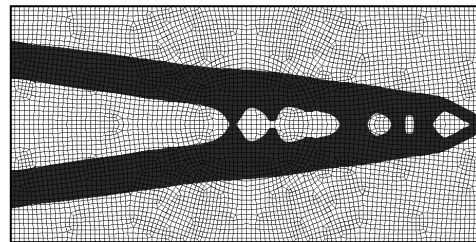
(a) Initial configuration



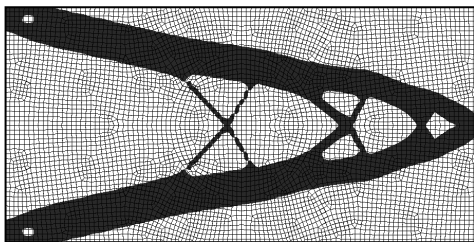
(b) Iteration 10



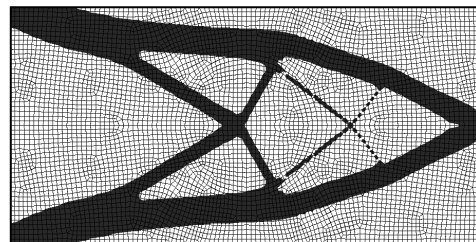
(c) Iteration 20



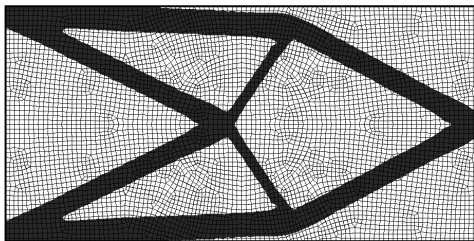
(d) Iteration 40



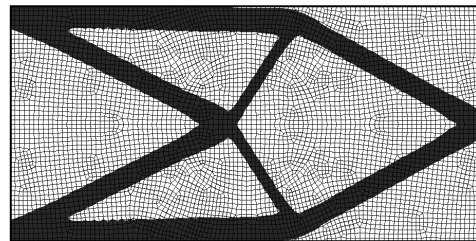
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160

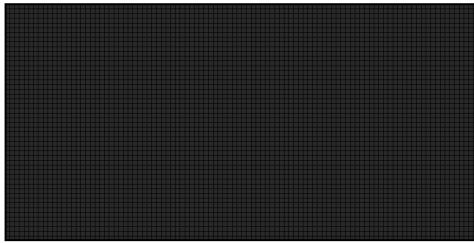


(g) Iteration 320

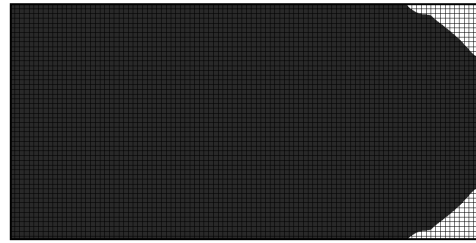


(h) Optimal configuration

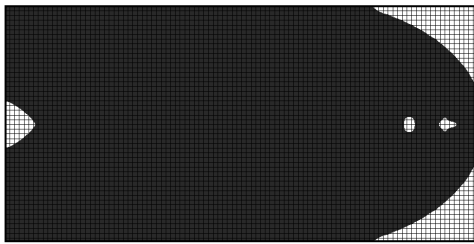
图 5.4 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the reference domain is discretized using a non-structural mesh.



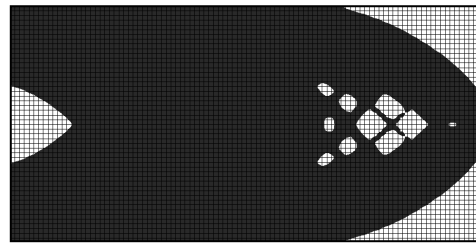
(a) Initial configuration



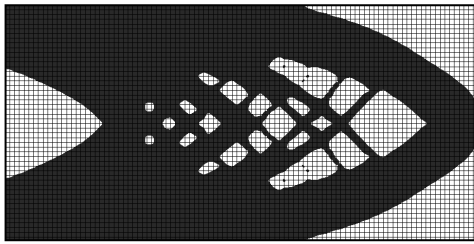
(b) Iteration 10



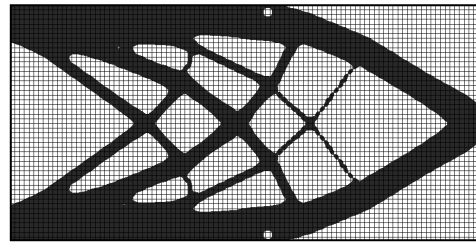
(c) Iteration 20



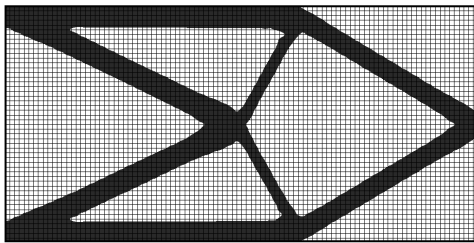
(d) Iteration 40



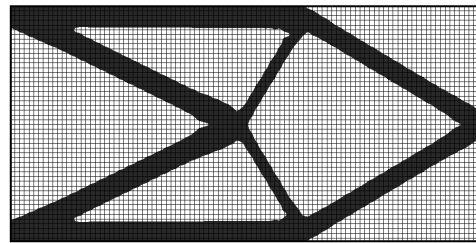
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160

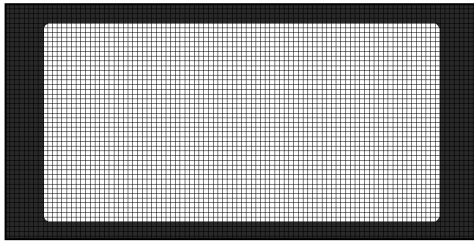


(g) Iteration 320

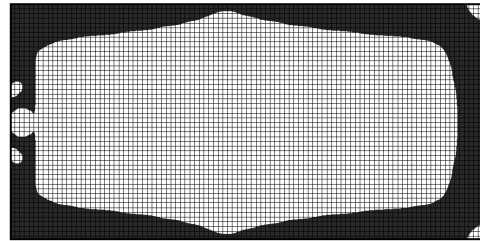


(h) Optimal configuration

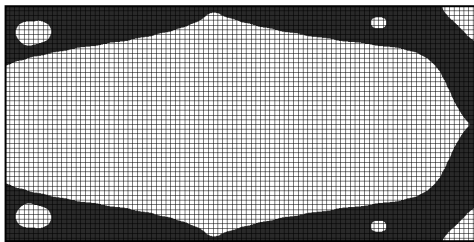
图 5.5 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has no hole.



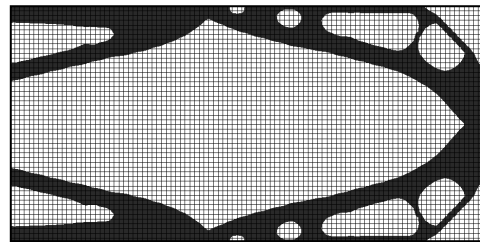
(a) Initial configuration



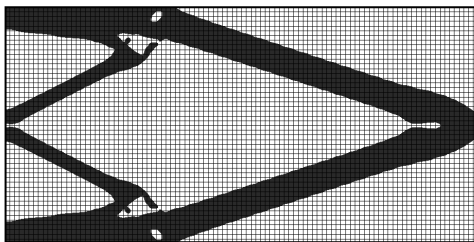
(b) Iteration 10



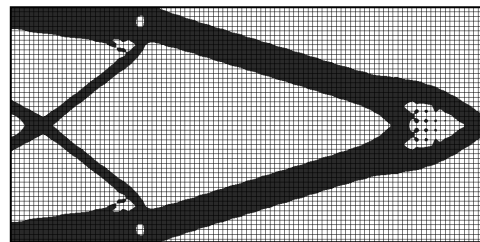
(c) Iteration 20



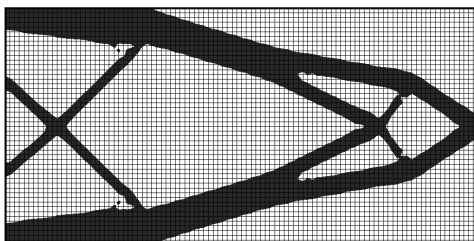
(d) Iteration 40



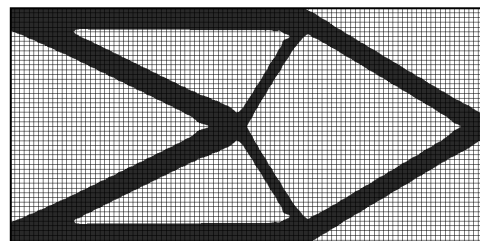
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160

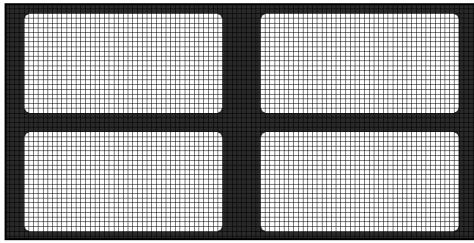


(g) Iteration 320

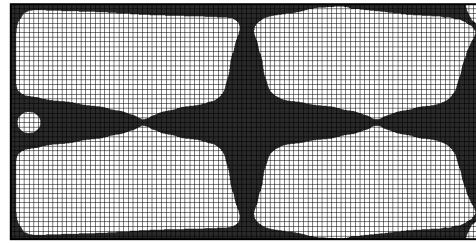


(h) Optimal configuration

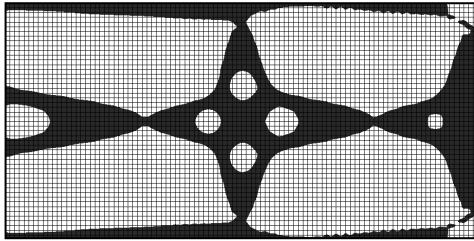
图 5.6 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has a hole.



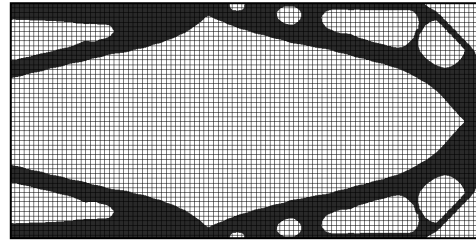
(a) Initial configuration



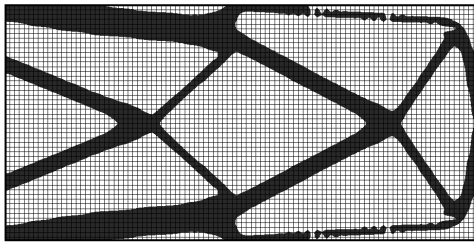
(b) Iteration 10



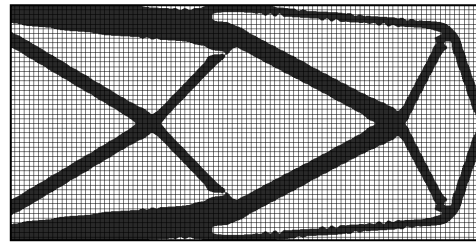
(c) Iteration 20



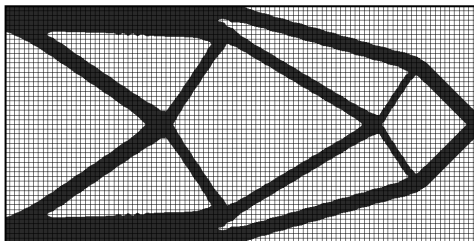
(d) Iteration 40



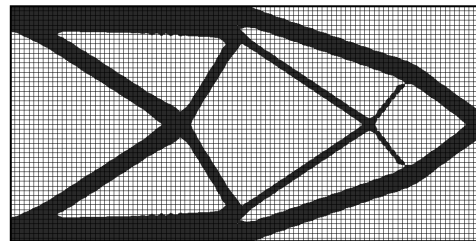
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160

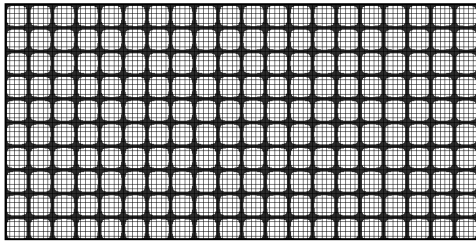


(g) Iteration 320

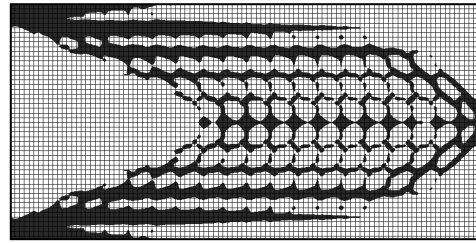


(h) Optimal configuration

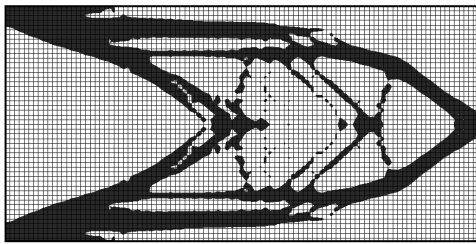
图 5.7 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has four holes.



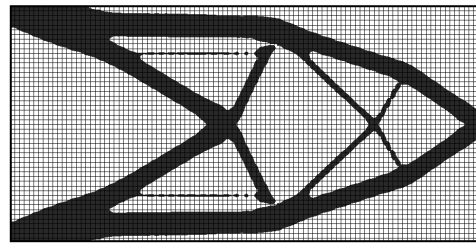
(a) Initial configuration



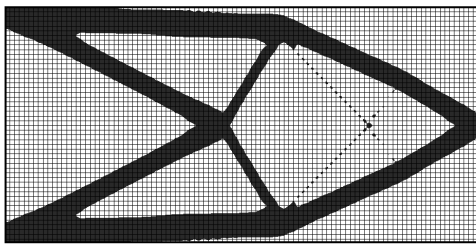
(b) Iteration 10



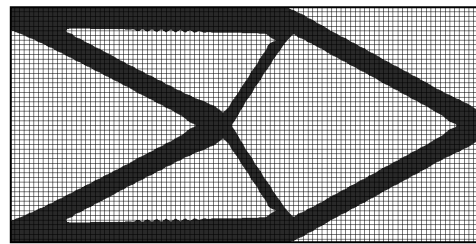
(c) Iteration 20



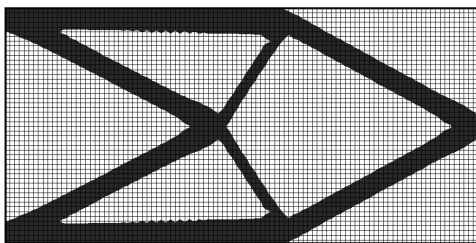
(d) Iteration 40



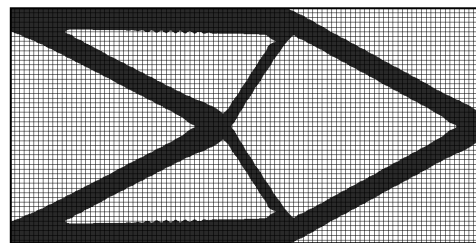
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160



(g) Iteration 320



(h) Optimal configuration

图 5.8 Optimization procedure for the two-dimensional minimum compliance problem where the initial configuration has a large number of holes.

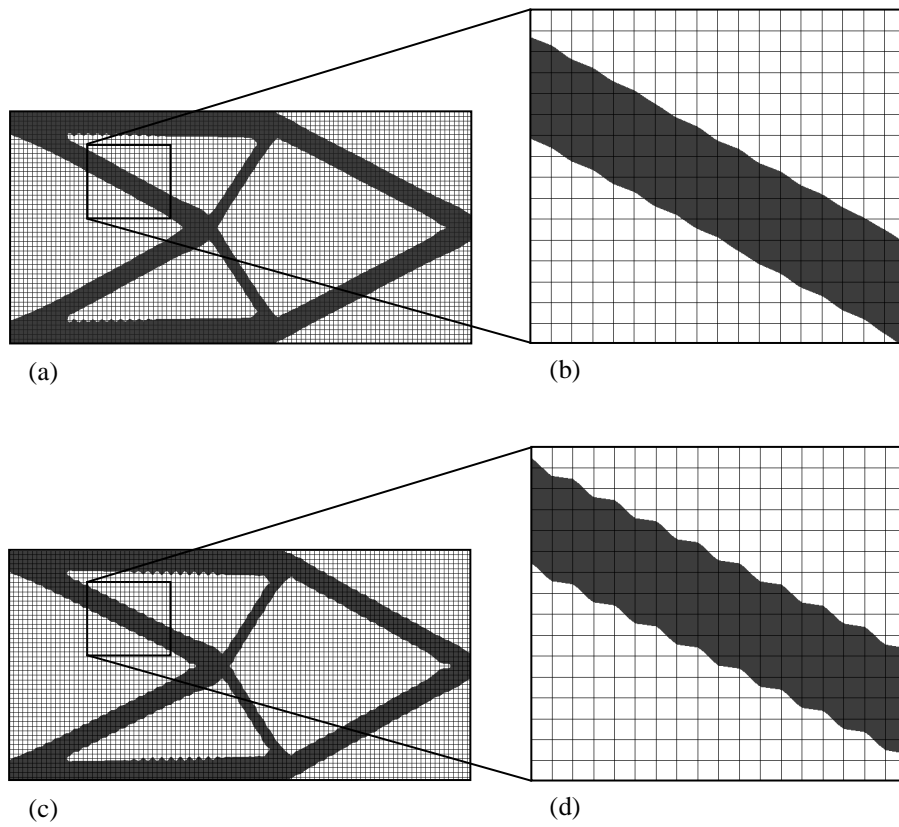


图 5.9 最优配置用于二维最小刚度问题: (a) 使用提出的重新初始化方案获得; (b) (a) 的放大视图; (c) 使用快速行进方法基于重新初始化方案获得; 和 (d) (c) 的放大视图。

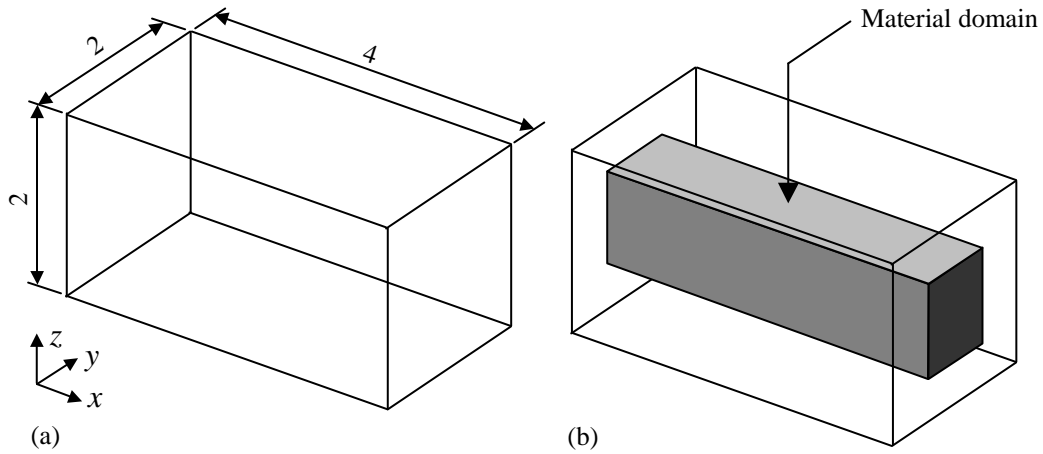


図 5.10 Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

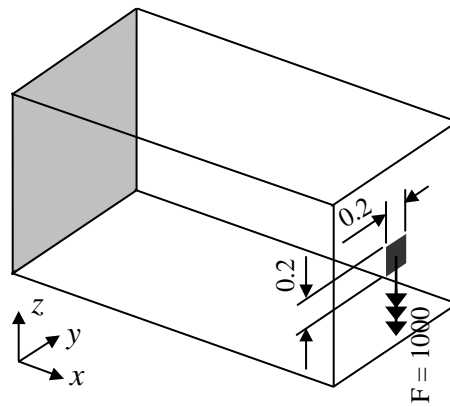


図 5.11 Boundary conditions for the three-dimensional minimum compliance problem.

5.4.2 三次元問題

図 5.10(a) に、本節で議論する例題の参照領域 D を示す。参照領域は、要素長 0.1 の八節点六面体要素を用いて、構造メッシュに分割される。図 5.10(b) に初期構造を示す。図 5.11 に境界条件を示す。この図に示すように、参照領域の左側面において構造物の変位は拘束され、右側面の中心に z 方向の表面力が作用している。物体領域の体積の上限値 G_{max} を 4.8、つまり参照領域の体積の 30% に設定する。等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 、ポアソン比を 0.3 に設定する。式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し、式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.1 に設定する。レベルセット関数を再初期化するには、本研究で提案する幾何学的再初期化法を用い、3.3 節で説明したパラメータ n_p については 4 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} 、 b_{tp} 、 r_{tp} については、それぞれ 8、0.2、0.1 に設定する。

図 5.12 に、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。興味深いことに、図 5.12 に示す最適

構造は、二次元問題において均質化設計法を用いて得られる最適構造 [6] に似ている。中間密度にペナルティを与えずに均質化設計法を用いた場合、外縁部の密度が高く、内縁部にグレースケールをもつ片持ちはり、最適構造として得られる。同様に、図 5.12 に示す最適構造は、外縁部の厚みが厚く、内縁部に向かうにつれ厚みが急激に薄くなる片持ちはりである。

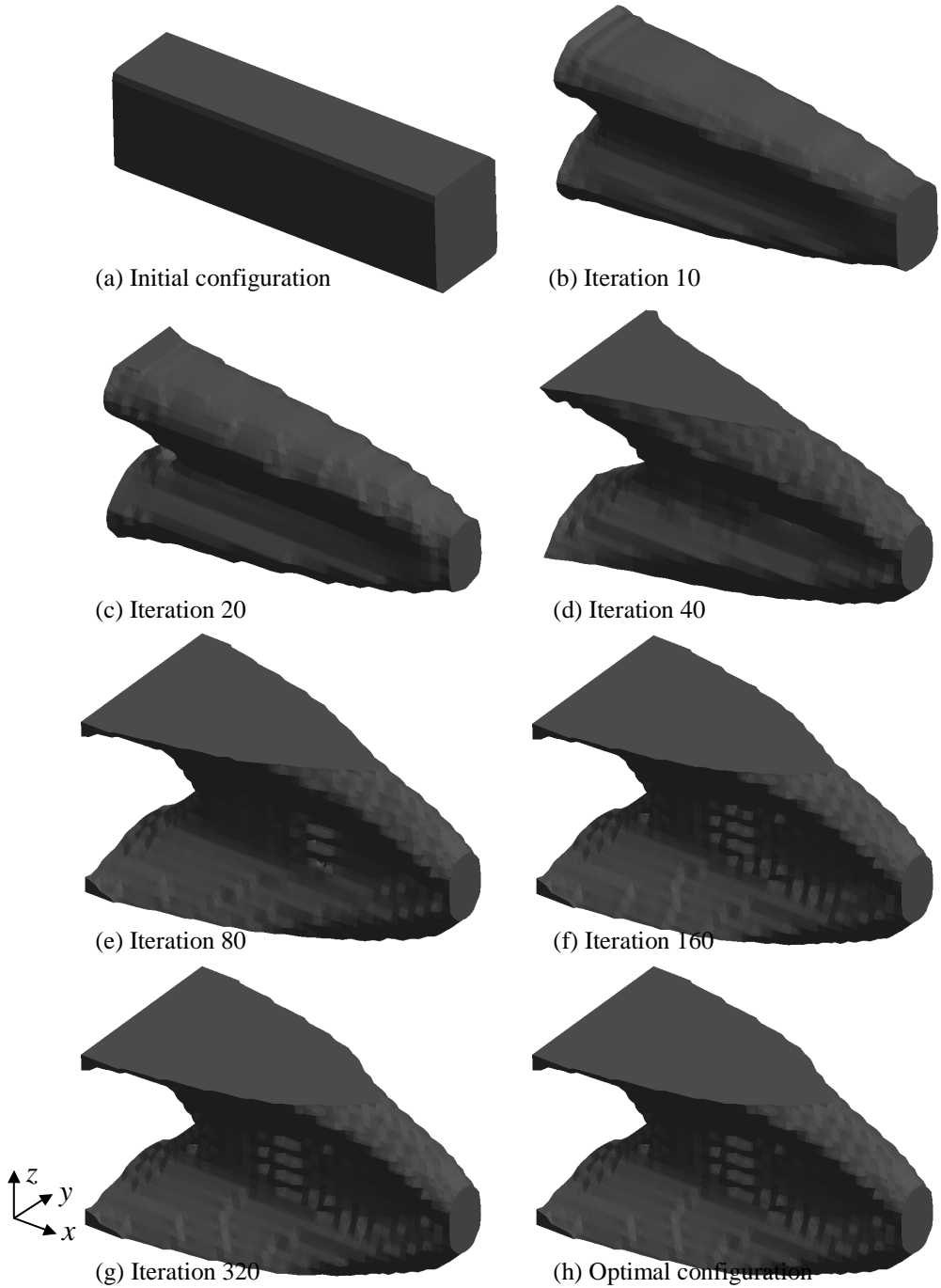


图 5.12 Optimization procedure for the three-dimensional minimum compliance problem.

参考文献

- [1] Bendsøe M. P. and Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [2] Suzuki K. and Kikuchi N. A homogenization method for shape and topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, pp. 291–318, 1991.
- [3] Xie Y. M. and Steven G. P. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, Vol. 49, pp. 885–896, 1993.
- [4] Sethian J. A. and Wiegmann A. Structural boundary design via level-set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, pp. 489–528, 2000.
- [5] Wang M. Y., Wang X., and Guo D. A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, pp. 227–246, 2003.
- [6] Allaire G., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, pp. 363–393, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [7] Wang S. Y. and Wang M. Y. A moving superimposed finite element method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, pp. 1892–1922, 2006. DOI: 10.1002/nme.1527.
- [8] Wang M. Y. and Wang X. M. “Color” level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 469–496, 2004. DOI: 10.1016/j.cma.2003.10.008.
- [9] Allaire G., Gournay F., Jouve F., and Toader A. M. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Control and Cybernetics*, Vol. 34, pp. 59–80, 2005.
- [10] Amstutz S. and André H. A new algorithm for topology optimization using a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 216, pp. 573–588, 2006. DOI: 10.1016/j.jcp.2005.12.015.
- [11] Wang S. Y. and Wang M. Y. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 65, pp. 2060–2090, 2006. DOI: 10.1002/nme.1536.
- [12] Osher S. and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2002.

第6章

最低次の固有振動数最大化問題への適用

6.1 はじめに

本章では、本研究で提案する構造最適化法を最低次の固有振動数最大化問題へ適用する。最低次の固有振動数は、構造物の動的な安定性を示す評価尺度であり、この値がより大きくなるように構造物を設計することにより、比較的低い振動数領域において動的な安定性がより高い構造物を得られる [1][2]。それより高い振動数領域では、固有振動数が外部励起荷重の振動数と一致しないように構造物を設計することにより、共振現象による不安定性を回避する。

動的に安定な構造物を得ることを目的として、従来より、トポロジー最適化に基づく方法 [1][2] や、力法に基づく方法 [3]、レベルセット法に基づく構造最適化法 [4] が提案されている。

ここでは、構造物の動的な安定性を評価する尺度として最低次の固有振動数を採用し、本研究で提案する構造最適化法に基づき構造最適化問題を定式化し、動的に安定な構造物を得るための構造最適化法を構築する。この構造最適化法を用いて幾つかの数値例を解き、得られた最適構造を基に、本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する。

6.2 定式化

参照領域 D においてレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ により表現される、等方性弾性材料からなる構造物に関して、構造物の変位が境界 ∂D_u において完全拘束される境界条件下において、最低次の固有振動数最大化問題を定式化する。なお、構造物に作用する物体力と減衰については、存在しないものとして定式化を行う。 ω_k を最低次から k 番目の固有振動数、 \mathbf{u}_k を最低次から k 番目の固有振動モードとすると、 k 番目の固有値 λ_k は $\lambda_k = \omega_k^2$ と表現でき、最低次の固有振動数最大化問題において、目的汎関数は以下のように定式化される。

$$F(\phi) = -\omega_1^2 = -\lambda_1 \quad (6.1)$$

上式では、固有値に負の符号を与えることにより、最大化問題を最小化問題に置き換えている。しかしながら、最低次の固有振動数のみを考慮した場合、最適化が進行する過程で最低次の固有振動に関する振動モードの形状が入れ替わり、目的汎関数が取束しない可能性がある。この問題を回避するため、本節では、Ma ら [2] が提案した定式化を用いる。Ma らの定式化に基づく、目的汎関数は以下のように定式化される。

$$F(\phi) = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\omega_k^2}\right)^{-1} = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1} \quad (6.2)$$

ここで、 q は最低次からの固有振動モードの数である。以上より、参照領域全体における物体領域の体積を制約条件とした構造最適化問題は、以下のように定式化される。

$$\text{Minimize } F(\phi) = -\left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1} \quad (6.3)$$

$$\text{Subject to } G(\phi) = \int_D H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \leq G_{max} \quad (6.4)$$

$$a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) = \lambda_k b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) \quad (6.5)$$

for $\phi \in \Psi, \mathbf{u}_k \in U, \forall \mathbf{v} \in U, k = 1, \dots, q$

ここで、Bilinear Form $a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)$ と $b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)$ は以下で与えられる。

$$a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k)H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad (6.6)$$

$$b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) = \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad (6.7)$$

ρ は質量密度である。

式 (6.3) に示す $F(\phi)$ の ϕ に関する変分は以下のようになる。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-2} \left\{ -\sum_{k=1}^q \frac{\left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle}{\lambda_k^2} \right\} \quad (6.8)$$

そして、 $a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)$ と $b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)$ の Fréchet 微分は以下のようになる。

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad (6.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k)\delta(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \quad (6.10)$$

$$\left\langle \frac{\partial b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle = \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \quad (6.11)$$

$$\left\langle \frac{\partial b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \delta(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \quad (6.12)$$

ここで、 \mathbf{w} は最低次から k 番目の固有振動モード \mathbf{u}_k の試行関数である。式 (6.5) から以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle &= \lambda_k \left\langle \frac{\partial b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) \\ &\quad + \lambda_k \left\langle \frac{\partial b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) \end{aligned} \quad (6.13)$$

さらに、上式に、式 (6.9)、式 (6.10)、式 (6.11)、式 (6.12) を代入することにより、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} &\int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega + \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k)\delta(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \\ &= \lambda_k \left\{ \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega + \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k \delta(\phi(\mathbf{x}))\psi d\Omega \right\} \\ &\quad + \left\{ \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \right\} \int_D \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x}))d\Omega \end{aligned} \quad (6.14)$$

上式において \mathbf{v} に \mathbf{u}_k を代入することにより、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \right\} \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \\ &= \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \\ & \quad - \lambda_k \left\{ \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{w} H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \right\} \end{aligned} \quad (6.15)$$

さらに、式 (6.5) において \mathbf{v} に \mathbf{w} を代入することにより、以下の式が得られる。

$$\int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega = \lambda_k \int_D \rho \mathbf{w} \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (6.16)$$

式 (6.15) に上式を代入することにより、以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left\{ \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \right\} \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \\ &= \int_D \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \lambda_k \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \end{aligned} \quad (6.17)$$

式 (6.8) と式 (6.17) より、 $F(\phi)$ の形状感度は以下のようになる。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left\{ \sum_{k=1}^q \frac{\int_D \{-\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) + \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k\} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega}{\lambda_k^2 \int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega} \right\} \quad (6.18)$$

最低次の固有振動数最大化問題は自己随伴問題であるため、上式に示すように、 $F(\phi)$ の変分は状態変数のみを用いて表される。なお、固有振動モードは質量密度に関して、以下のように正規化できる。

$$\int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega = 1 \quad (6.19)$$

ゆえに、最低次の固有振動数最大化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は以下のようになる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left\{ \sum_{k=1}^q \frac{\{-\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) + \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k\} \delta(\phi(\mathbf{x}))}{\lambda_k^2} \right\} \quad (6.20)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (6.21)$$

6.3 数値計算法

最低次の固有振動数最大化問題においても、オイラー座標系において固有振動数と固有振動モードを計算するために、5.3.1 節で説明したように、Heaviside 関数 $H(\phi(\mathbf{x}))$ を式 (5.25) に示す $\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ で近似し、Dirac Delta 関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ を式 (5.26) に示す $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ で近似する。式 (6.20)、式 (6.21) に示すように、最低次の固有振動数最大化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は Dirac Delta 関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ を含むため、平均コンプライアンス最小化問題と同様に、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は、近似された Dirac Delta 関数 $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて以下のように記述される。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left\{ \sum_{k=1}^q \frac{\{-\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) + \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k\} \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))}{\lambda_k^2} \right\} \quad (6.22)$$

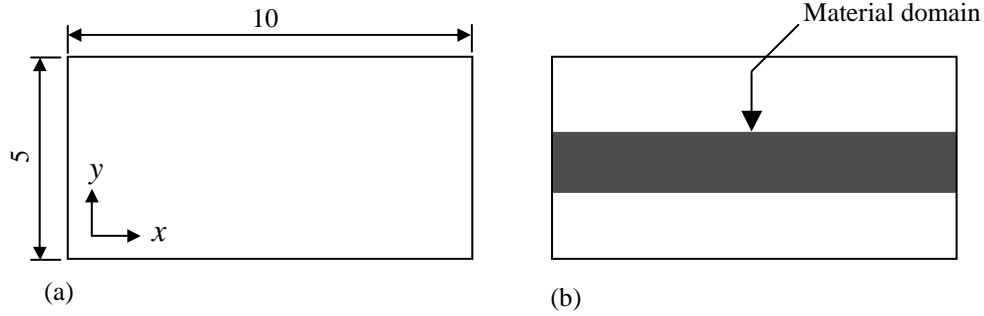


図 6.1 Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \quad (6.23)$$

さらに，5.3.2 節で平均コンプライアンス最小化問題について法線方向速度 V_N を導出する際に述べたのと同じ理由により，式 (6.22) において， ρ と \mathbf{D} を，それぞれ $\rho\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ と $\mathbf{D}\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ に置き換える．最終的に，最低次の固有振動数最大化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ は以下ようになる．

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \left(\sum_{k=1}^q \frac{1}{\lambda_k} \right)^{-2} \left\{ \sum_{k=1}^q \frac{-\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) + \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k}{\lambda_k^2} \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \tilde{H}(\phi(\mathbf{x})) \right\} \quad (6.24)$$

最低次の固有振動数最大化問題においては，式 (6.24) に示す $f(\phi(\mathbf{x}))$ ，式 (6.23) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて法線方向速度 V_N を計算する．また，式 (4.3) に基づいてレベルセット関数を修正する場合にも，式 (6.23) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いる．

平均コンプライアンス最小化問題と同様に，最低次の固有振動数最大化問題においても，要素剛性行列がゼロ行列となる要素については，計算対象から除外する．オイラー座標系において構造物の固有振動数と固有振動モードを計算する場合，要素剛性行列がゼロ行列となる要素を計算対象から除外することにより，Wang と Wang [5] が主張したように計算コストが削減できるだけでなく，空洞領域に関する意味のない固有振動モード，すなわち Localized Mode [6] を最適化の対象から除外できる．

6.4 数値例

本節では，二次元および三次元の最低次の固有振動数最大化問題について，幾つかの例題を用意し，本研究で提案する構造最適化法を用いて最適構造を得る．得られた最適構造を基に，本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する．

6.4.1 二次元問題

図 6.1(a) に，本節で議論する参照領域 D を示す．参照領域は，要素長 0.1 の四節点四角形平面応力要素を用いて，構造メッシュ，または，非構造メッシュに分割される．図 6.1(b) に初期構造を示す．図 6.2 に境界条件を示す．この図に示すように，参照領域の左辺と右辺において構造物の変位は完全拘束され，参照領域の中央に集中質量が設置される．物体領域の面積の上限値 G_{max} を 15，つまり参照領域 D の面積の 30% に設定

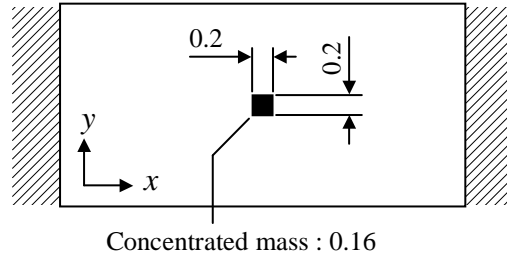


図 6.2 Boundary conditions for the two-dimensional eigen-frequency optimization problems.

表 6.1 Lowest, 2nd and 3rd eigen-frequencies for the optimal configurations in Section 6.4.1

Figures	Lowest eigen-frequency (Hz)	2nd eigen-frequency (Hz)	3rd eigen-frequency (Hz)
Figure 6.3	2,019	3,370	13,720
Figure 6.4	2,019	3,372	13,730
Figure 6.5	1,430	3,713	14,070
Figure 6.6	2,056	2,289	12,540

する。等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 ，ポアソン比を 0.3，質量密度を $= 7.8 \times 10^{-6}$ に設定する。式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し，式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.1 に設定する。また，レベルセット関数を再初期化するには本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる。3.3 節で説明したパラメータ n_p については 8 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} ， b_{tp} ， r_{tp} については，それぞれ 4，0.3，0.1 に設定する。また，式 (6.2) におけるパラメータ q を 3 に設定する。すなわち，最低次と二番目，三番目の固有振動数を最適化の対象とする。上述の条件設定において，初期構造の最低次，二番目，三番目の固有振動数は，それぞれ 1,189Hz，4,077Hz，14,050Hz となる。

最初に，参照領域を構造メッシュで分割した場合と，非構造メッシュで分割した場合の最適構造について調べる。図 6.3 に，参照領域を構造メッシュで分割した場合において，初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。図 6.4 に，参照領域を非構造メッシュで分割した場合において，初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。最適構造の最低次，二番目，三番目の固有振動数を表 6.1 に示す。これらの結果より，二次元の平均コンプライアンス最小化問題の場合と同様に，設計領域を構造メッシュで分割しても非構造メッシュで分割しても，ほとんど同じ最適構造が得られることが分かる。最適構造における最低次の固有振動モードは，構造物の中心における振幅が最大となる y 方向の一次曲げモードであり，図 6.3 と図 6.4 に示すように，最適化が進行するにつれて，構造物の一次曲げモードに関する剛性は効果的に改善されていく。このように，本研究で提案する構造最適化法を用いて，最低次の固有振動数を最大化することができる。

次に，トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出しなかった場合，得られる最適構造がどのように変化するか調べる。図 6.3 に，最適化の過程でトポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する場合において，初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。図 6.5 に，最適化の過程でトポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出しない場合において，初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。これらの最適構造の最低次，二番目，三番目の固有振動数を表 6.1 に示す。図 6.3 と図

6.5 を比べると、トポロジカルデリバティブに基づき構造物に穴を創出した場合の方が、集中質量の位置における y 方向の剛性がより高くなる。そのような剛性は、振動の腹が参照領域の中心に位置する一次曲げモード、すなわち最低次の固有振動モードの固有振動数を高くする。ゆえに、構造物に穴を創出し構造物の形態の変更することにより、より最低次の固有振動数の高い最適構造が得られる可能性がある。

最後に、目的汎関数が式 (6.1) で与えられる場合、すなわち、最低次の固有振動数のみが目的汎関数となる場合について、得られる最適構造を調べる。この場合、最適化の過程で最低次の固有振動モードのモード形状が入れ替わり、目的汎関数が収束しない可能性がある。図 6.6 に、目的汎関数が式 (6.1) で与えられた場合において、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。得られた最適構造の最低次、二番目、三番目の固有振動数を、表 6.1 に示す。この数値例では、最低次の固有振動モードのモード形状は入れ替わらなかったため、目的汎関数は収束した。図 6.6 に示す最適構造は、中心付近において二つの穴をもつものに対し、図 6.6 に示す最適構造には、そのような穴は存在しない。しかしながら、図 6.6 に示す最適構造と図 6.3 に示す最適構造とで、最低次の固有振動数を比較すると、その違いは 2% しかない。それゆえ、収束性を考慮して 6.2 節で定式化された目的汎関数を用いても、得られる最適構造の性能が著しく悪化することはない。

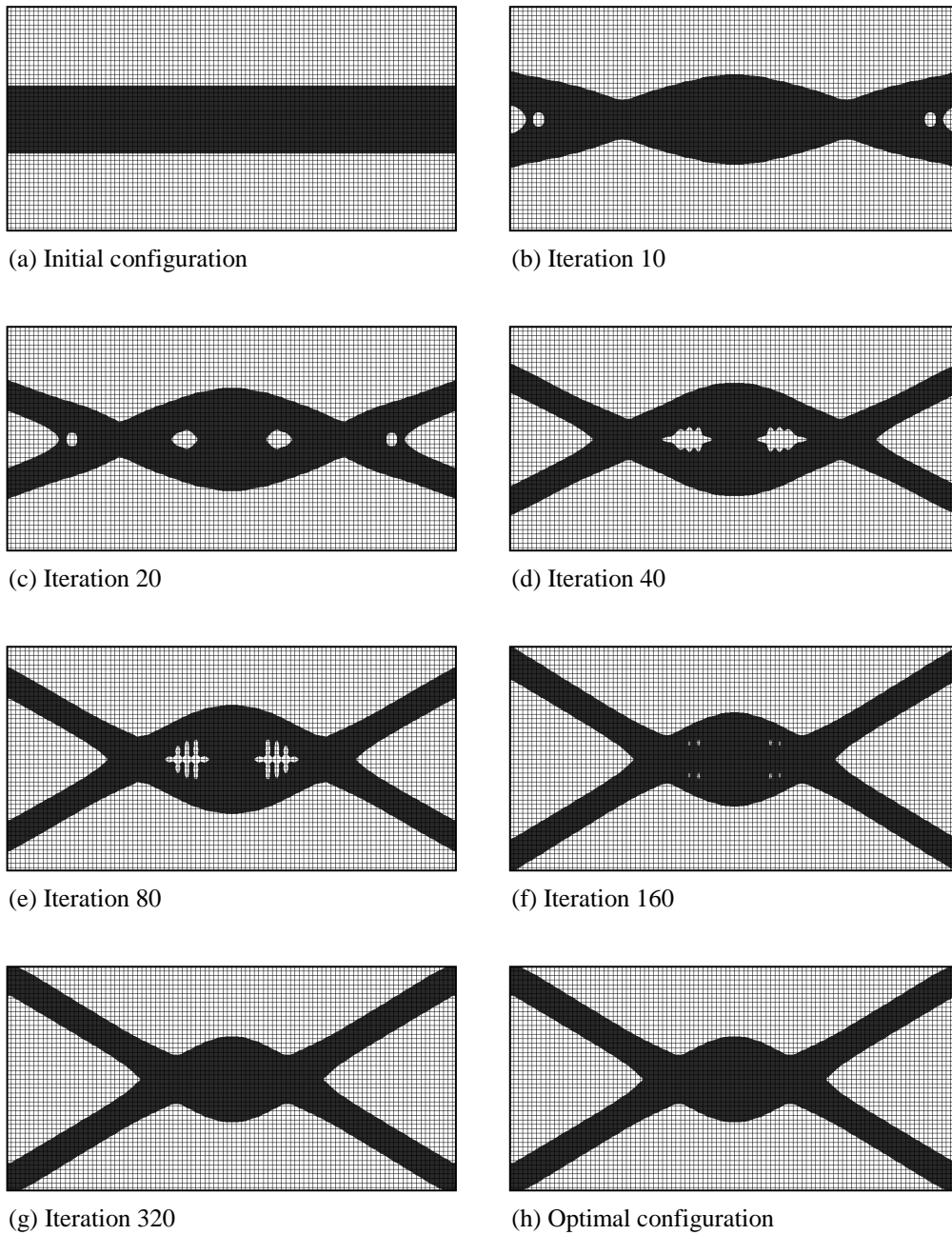
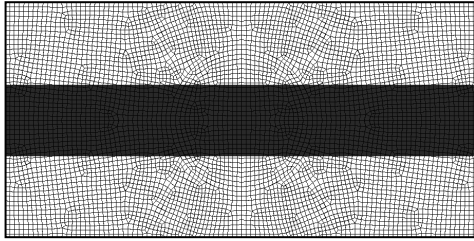
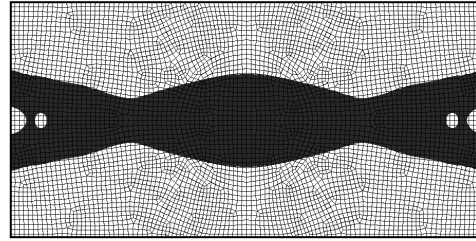


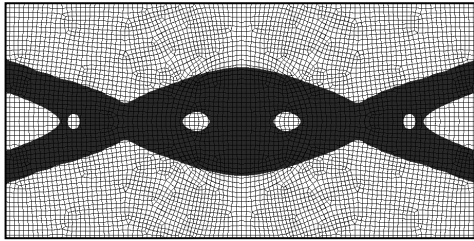
图 6.3 Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where the reference domain is discretized using a structural mesh.



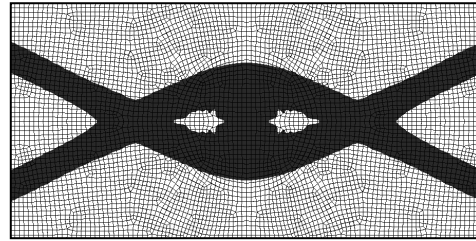
(a) Initial configuration



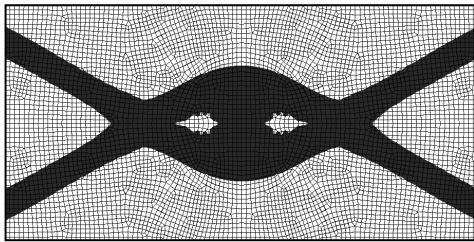
(b) Iteration 10



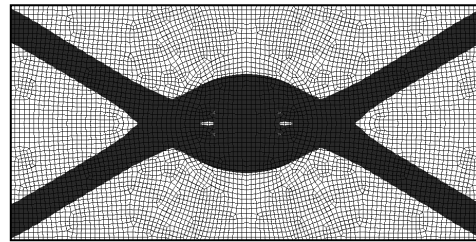
(c) Iteration 20



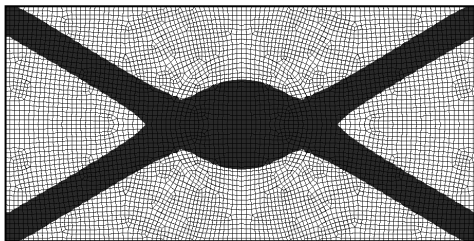
(d) Iteration 40



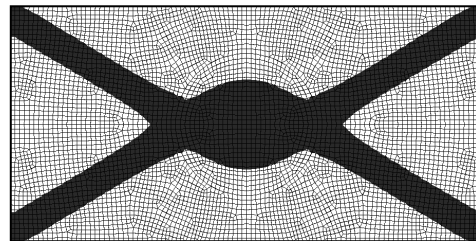
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160



(g) Iteration 320



(h) Optimal configuration

Fig. 6.4 Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where the reference domain is discretized using a non-structural mesh.

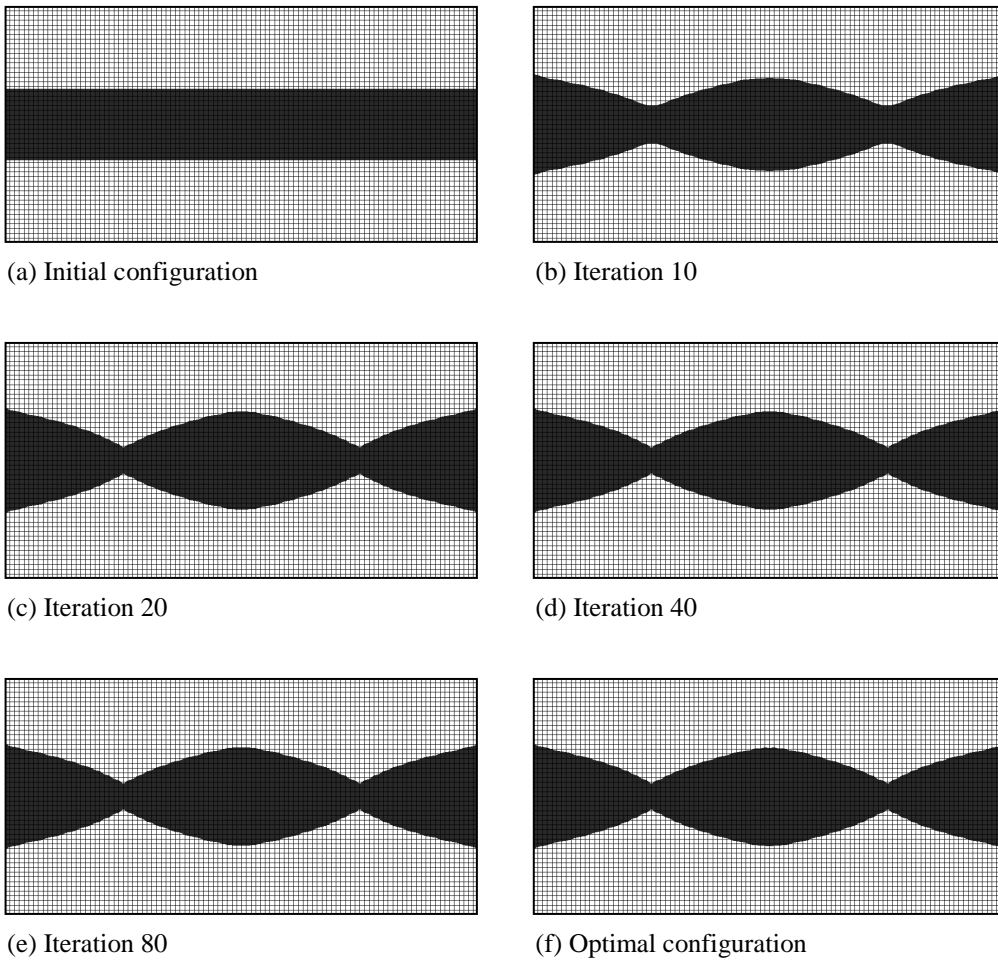


图 6.5 Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where a hole introducing method based on the topological derivative is not used.

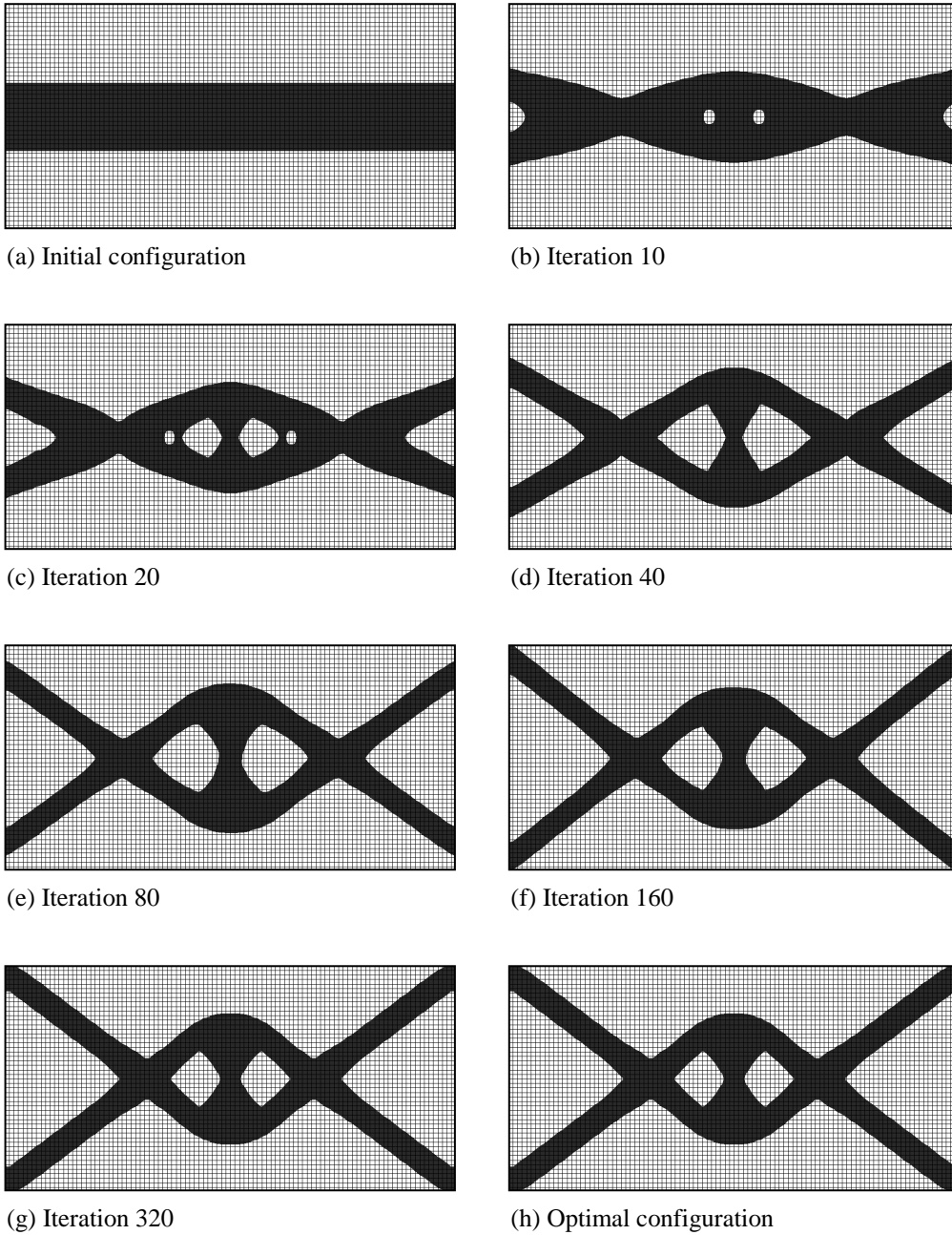


图 6.6 Optimization procedure for the two-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem where only the lowest eigen-frequency is maximized.

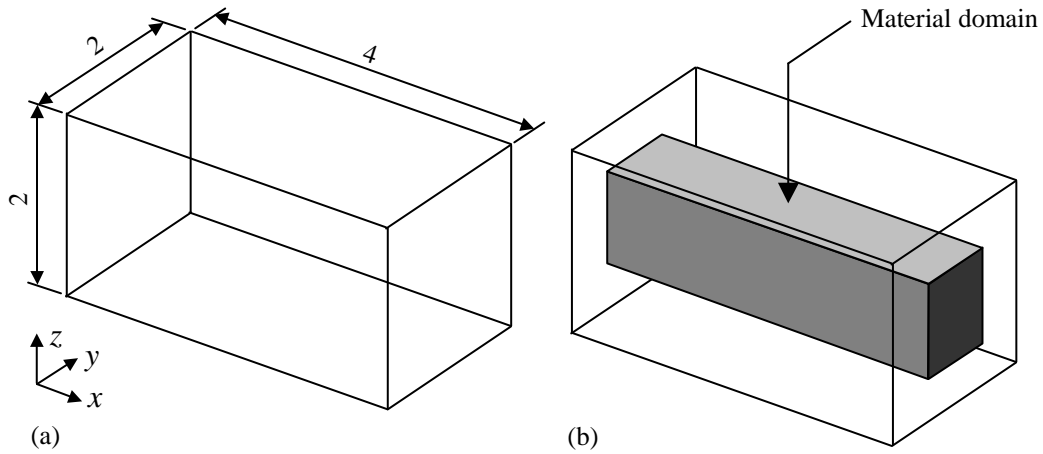


図 6.7 Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

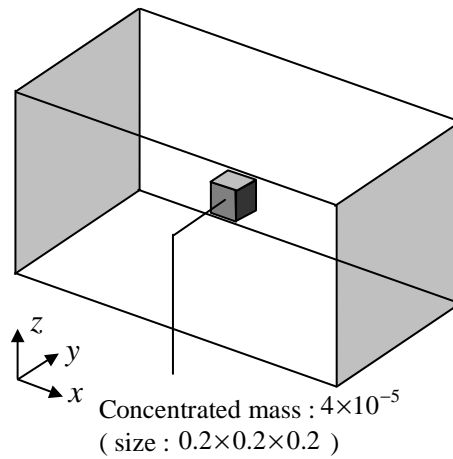


図 6.8 Boundary conditions for the three-dimensional eigen-frequency optimization problem.

6.4.2 三次元問題

図 6.7(a) に、本節で議論する参照領域 D を示す。参照領域は、要素長 0.1 の八節点六面体要素を用いて、構造メッシュに分割される。図 6.7(b) に初期構造を示す。図 6.8 に境界条件を示す。この図に示すように、参照領域の左側面と右側面において構造物の変位は完全拘束され、参照領域の中央に集中質量が設置される。物体領域の体積の上限値 G_{max} を 4.8、つまり参照領域 D の体積の 30% に設定する。等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 、ポアソン比を 0.3、質量密度を $= 7.8 \times 10^{-6}$ に設定する。式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し、式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.1 に設定する。また、レベルセット関数を再初期化するには本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる。3.3 節で説明したパラメータ n_p については 4 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} , b_{tp} , r_{tp} につ

いては、それぞれ 8, 0.2, 0.1 に設定する。また、式 (6.2) におけるパラメータ q を 3 に設定する。すなわち、最低次と二番目、三番目の固有振動数を最適化の対象とする。上述の条件設定において、初期構造の最低次、二番目、三番目の固有振動数は、それぞれ 45,460Hz, 49,290Hz, 85,560Hz となる。

図 6.9 に、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。最適構造の最低次、二番目、三番目の固有振動数は、それぞれ 52,390Hz, 52,590Hz, 82,680Hz である。この最適構造は、図 6.3 に示す二次元問題における最適構造を軸対称にした構造であり、妥当な最適構造が得られている。

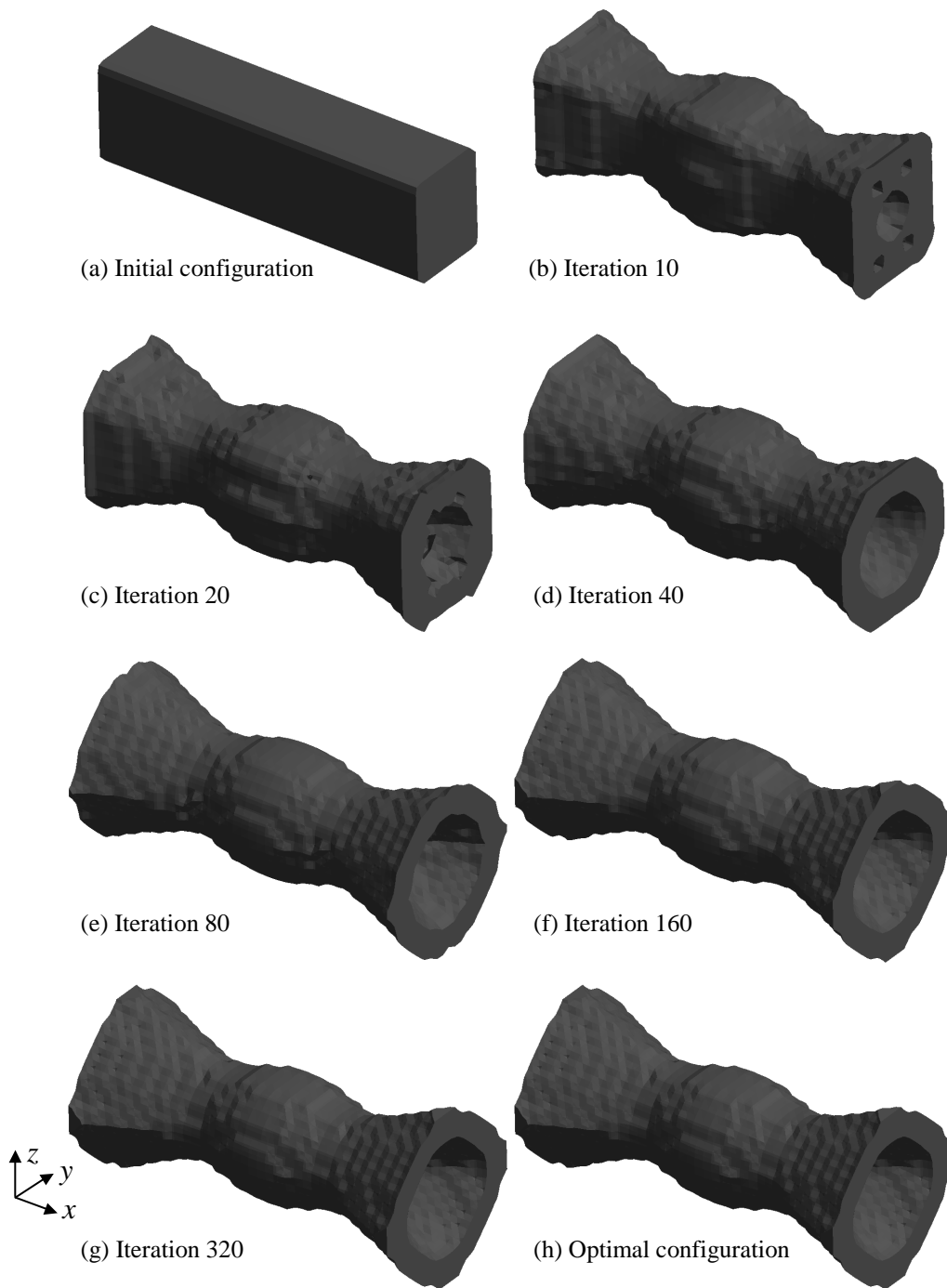


图 6.9 Optimization procedure for the three-dimensional lowest eigen-frequency maximization problem.

参考文献

- [1] Diaz A. R. and Kikuchi N. Solutions to shape and topology eigenvalue optimization using a homogenization method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, pp. 1487–1502, 1992.
- [2] Ma Z. D., Kikuchi N., and Cheng H. C. Topological design for vibrating structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 121, pp. 259–280, 1995.
- [3] 吳志強, 畔上秀幸, 下田昌利, 桜井俊明. 固有振動問題における領域最適化解析 (質量最小化問題). 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 61, No. 587, pp. 49–54, 1995.
- [4] Allaire G. and Jouve F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 3269–3290, 2005. DOI: 10.1016/j.cma.2004.12.018.
- [5] Wang M. Y. and Wang X. M. “Color” level sets: A multi-phase method for structural topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 193, pp. 469–496, 2004. DOI: 10.1016/j.cma.2003.10.008.
- [6] Pedersen N. L. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 20, pp. 2–11, 2000.

第7章

特定の固有振動数を持つ構造を求める問題への適用

7.1 はじめに

第6章で述べたように、最低次の固有振動数がより大きくなるように構造物を設計することにより、動的に安定な構造物が得られる一方で、共振現象を積極的に利用することにより、より高い動的機能を持つ構造物を得ることも可能である。代表的な例として、機械式レゾネータ [1] やバイプロモータ [2] があげられる。これらの構造物は、ある特定の固有振動数や固有振動モード形状を持っており、その固有振動に関する共振現象を利用することにより所定の機能を実現する。

より高い動的機能を持つ構造物を得ることを目的として、現在までに幾つかの構造最適化法が提案されている。Nishiwaki ら [3] や Tcherniak [4] は、周期荷重を負荷した場合の出力変位最大化を目的としたトポロジー最適化法 [5] を提案し、機械式レゾネータなどの構造物を創出した。しかし、この方法においては、目標関数が極度の多峰性を持つため、グレースケールを含まない物理的に意味のある最適構造を得ることが非常に難しい。Maeda ら [6] は、この問題を解決しながら、さらに高い動的機能を持つ構造物を創成する方法として、固有振動モードと固有振動数に加え、剛性も考慮した目的関数を定式化することによりグレースケールを回避するトポロジー最適化法を提案した。しかし、この方法では、最適構造が剛性の付加方法に左右される問題点を持ち、抜本的な解決には至っていない。

他方、グレースケールなどの数値的問題を抜本的に解決可能な、レベルセット法に基づく構造最適化法を振動問題へ適用する試みも幾つかなされている。Osher と Santosa [7] は、質量密度のみが異なる2種類の材料で構成された膜を対象として、固有振動数の最適化を目的とした2相の形状最適化法を提案したが、一般的な構造物を対象とした方法論への展開はなされていない。Allaire と Jouve [8] は、一般的な構造物を対象とし、レベルセット法に基づく構造最適化法を最低次の固有振動数最大化問題に適用したが、より高い動的機能を持つ構造物を得るための方法については議論していない。

そこで本章では、共振現象を積極的に利用することにより実現可能な、より高い動的機能を持つ構造物を得るために、本研究で提案する構造最適化法を、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題に適用する。この構造最適化法を用いて幾つかの数値例を解き、得られた最適構造を基に、本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する。

7.2 定式化

参照領域 D においてレベルセット関数 ϕ により表現される、等方性弾性材料からなる構造物に関して、構造物の変位が境界 ∂D_u において完全拘束される境界条件下において、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題を定式化する。なお、構造物に作用する物体力と減衰については、存在しないものとして定式化を行う。 ω_k を最低次から k 番目の固有振動数、 \mathbf{u}_k を最低次から k 番目の固有振動モードとすると、 k 番目の固有値 λ_k は $\lambda_k = \omega_k^2$ と表現できる。特定の固有振動数を持つ構造を求める問題において、 s 番目の固有振動数の目標値を $\omega_{obj,s}$ とすると、目的汎関数は以下のように定式化される。

$$F(\phi) = (\omega_s^2 - \omega_{obj,s}^2)^2 = (\lambda_s - \lambda_{obj,s})^2 \quad (7.1)$$

しかしながら、このように目的汎関数を定式化すると、最適化の過程において、固有振動数を特定の値に一致させたい固有振動モード形状と、隣り合う固有振動モード形状が入れ替わる可能性がある。これを回避するため、本章では、以下に示す目的汎関数を用いる。

$$F(\phi) = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ w_k \left(\frac{\omega_k^2 - \omega_{obj,k}^2}{\omega_{obj,k}^2} \right)^2 \right\} = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}} \right)^2 \right\} \quad (7.2)$$

ここで、 w_k は k 番目の固有振動数の一致に関する重み係数であり、 $\lambda_{obj,k} = \omega_{obj,k}^2$ である。 $\omega_{obj,s-1}$ を $\omega_{obj,s}$ よりも十分に小さな値に設定し、 $\omega_{obj,s+1}$ を $\omega_{obj,s}$ よりも十分に大きな値に設定することにより、目標の固有振動モード形状と隣り合う固有振動モード形状が入れ替わることを回避する。目標の固有振動数が最低次の固有振動数の場合は、 $w_0 = 0$ と設定して、最低次と二番目の固有振動数のみを考慮して最適化を行う。以上より、参照領域全体における物体領域の体積を制約条件とした構造最適化問題は、以下のように定式化される。

$$\text{Minimize } F(\phi) = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}} \right)^2 \right\} \quad (7.3)$$

$$\text{Subject to } G(\phi) = \int_D H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \leq G_{max} \quad (7.4)$$

$$a(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) = \lambda_k b(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}, \phi) \quad (7.5)$$

for $\phi \in \Psi, \mathbf{u}_k \in U, \forall \mathbf{v} \in U, k = s-1, s, s+1$

式 (7.3) に示す $F(\phi)$ の変分は以下ようになる。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ 2w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}^2} \right) \left(\left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \mathbf{u}_k}, \mathbf{w} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \right) \right\} \quad (7.6)$$

λ_k の Fréchet 微分については、6.2 節の結果をそのまま用いることができ、式 (6.17) を上式に代入することにより、以下の式が得られる。

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ 2w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}^2} \right) \frac{\int_D \{ \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) - \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \} \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega}{\int_D \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega} \right\} \quad (7.7)$$

特定の固有振動数を持つ構造を求める問題は自己随伴問題であるため、上式に示すように、 $F(\phi)$ の変分は状態変数のみを用いて表される。なお、固有振動モードは式 (6.19) に示すように正規化できるので、特定の固

有振動数を持つ構造を求める問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は以下ようになる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ 2w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}^2} \right) \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) - \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \right) \delta(\phi(\mathbf{x})) \right\} \quad (7.8)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (7.9)$$

7.3 数値計算法

特定の固有振動数を持つ構造を求める問題においても、オイラー座標系において固有振動数と固有振動モードを計算するために、5.3.1節で説明したように、Heaviside関数 $H(\phi)$ を、式(5.25)に示す $\tilde{H}(\phi)$ で近似し、Dirac Delta関数 $\delta(\phi)$ を、式(5.26)に示す $\tilde{\delta}(\phi)$ で近似する。式(7.8)、式(7.9)に示すように、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は Dirac Delta関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ を含むため、平均コンプライアンス最小化問題や最低次の固有振動数最大化問題と同様に、 $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は、近似された Dirac Delta関数 $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて以下のように表現される。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ 2w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}^2} \right) \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) - \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \right) \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \right\} \quad (7.10)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \quad (7.11)$$

さらに、5.3.2節で平均コンプライアンス最小化問題について法線方向速度 V_N を導出する際に述べたのと同じ理由により、式(7.10)において、 ρ と \mathbf{D} を、それぞれ $\rho \tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ と $\mathbf{D} \tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ に置き換える。最終的に、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ は以下ようになる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = \sum_{k=s-1}^{s+1} \left\{ 2w_k \left(\frac{\lambda_k - \lambda_{obj,k}}{\lambda_{obj,k}^2} \right) \left(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{u}_k) - \lambda_k \rho \mathbf{u}_k \cdot \mathbf{u}_k \right) \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \tilde{H}(\phi(\mathbf{x})) \right\} \quad (7.12)$$

特定の固有振動数を持つ構造を求める問題においては、式(7.12)に示す $f(\phi(\mathbf{x}))$ 、式(7.11)に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて法線方向速度 V_N を計算する。また、式(4.3)に基づいてレベルセット関数を修正する場合にも、式(7.11)に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いる。

最低次の固有振動数最大化問題と同様に、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題においても、要素剛性行列がゼロ行列となる要素については、計算対象から除外する。これにより、最低次の固有振動数最大化問題を解く場合と同様に、Localized Mode を最適化の対象から除外することができる。

7.4 数値例

本節では、二次元および三次元の特定の固有振動数を求める問題について、幾つかの例題を用意し、本研究で提案する構造最適化法を用いて最適構造を得る。得られた最適構造を基に、本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する。

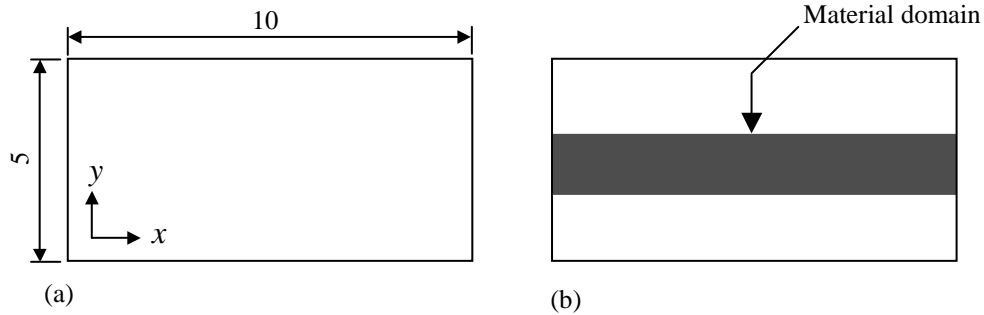


図 7.1 Reference domain and initial configuration for the two-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

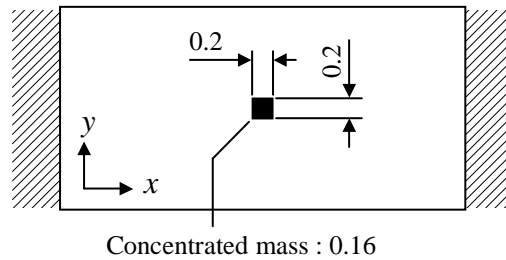


図 7.2 Boundary conditions for the two-dimensional eigen-frequency optimization problems.

7.4.1 二次元問題

図 7.1(a) に参照領域 D を示す。参照領域は、要素長 0.1 の四節点四角形平面応力要素を用いて、構造メッシュに分割される。図 7.1(b) に初期構造を示す。図 7.2 に境界条件を示す。この図に示すように、参照領域の左辺と右辺において構造物の変位は完全拘束され、参照領域の中央に集中質量が設置される。物体領域の面積の上限値 G_{max} を 15、つまり参照領域 D の面積の 30% に設定する。等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 、ポアソン比を 0.3、質量密度を 7.8×10^{-6} に設定する。式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し、式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.01 に設定する。また、レベルセット関数を再初期化するには本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる。3.3 節で説明したパラメータ n_p については 8 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} , b_{tp} , r_{tp} については、それぞれ 4, 0.3, 0.1 に設定する。上述の条件設定において、初期構造の最低次、二番目、三番目、四番目の固有振動数は、それぞれ、1,189Hz, 4,077Hz, 14,050Hz, 16,290Hz である。

最初に、最低次の固有振動数を特定の値に一致させる問題について調べる。式 (7.2) に示す重み付け係数 w_1 と w_2 は、それぞれ 0.9 と 0.1 に設定する。図 7.3 から図 7.7 に、最低次の固有振動数をある特定の値に一致させる場合において、初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す。図 7.3, 図 7.4, 図 7.5, 図 7.6, 図 7.7 における最低次の固有振動数の目標値は、それぞれ、300Hz, 600Hz, 900Hz, 1,500Hz, 1,800Hz である。これらすべての例題において、最低次と二番目の固有振動モード形状の入れ替わりを防ぐために、二番目の固有振動数の目標値を 4,000Hz に設定する。各最適構造の最低次と二番目の固有振動数を表 7.1 に示す。この表より、本研究で提案する構造最適化法を用いることにより、最低次の固有振動数を特定の値に一致

表 7.1 Lowest, 2nd, 3rd and 4th eigen-frequencies for the optimal configurations in Section 7.4.1

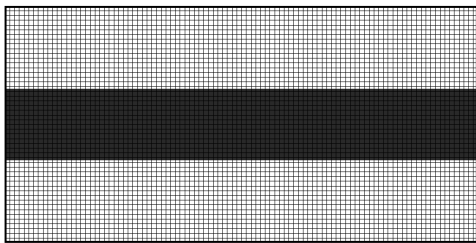
Figures	Lowest eigen-frequency (Hz)	2nd eigen-frequency (Hz)	3rd eigen-frequency (Hz)	4th eigen-frequency (Hz)
Figure 7.3	299.6	3,537	-	-
Figure 7.4	601.4	3,816	-	-
Figure 7.5	900.5	3,983	-	-
Figure 7.6	1,499	3,932	-	-
Figure 7.7	1,786	3,678	-	-
Figure 7.8	1,201	3,399	13,870	-
Figure 7.9	-	3,432	6,980	16,273
Figure 7.10	1,800	3,357	-	-

させる問題において、目標値にほぼ等しい固有振動数をもつ構造物が得られていることがわかる。比較的低い固有振動数を持つ構造を、トポロジー最適化を用いて求めると、グレースケールを含む最適構造が得られるのに対し、本研究で提案する構造最適化法を用いると、図 7.3, 図 7.4, 図 7.5 に示すような明瞭な最適構造が得られることがわかる。また、図 7.3, 図 7.4, 図 7.5 に示す例題では、構造物の形態は初期構造から変化しなかったのに対し、図 7.6 と図 7.7 に示す例題では、最適化の過程で構造物の形態が変化した。図 6.5 に示したように、図 7.2 に示す境界条件を与えた場合、トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する形態変更方法を用いなければ、最低次の固有振動数は最大で 1,430Hz となる。ゆえに、目標とする固有振動数を 1,430Hz より大きい値に設定する場合は、構造物の形態を変更する必要がある。

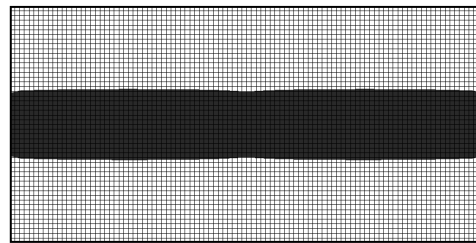
次に、二番目と三番目の固有振動数がある特定の値に一致させる問題について調べる。図 7.8 に、二番目の固有振動数の目標値を 3,400Hz に設定した場合の、初期形状から最適形状まで最適化が進行する様子を示す。この例題では、最低次、二番目、三番目の固有振動モード形状の入れ替わりを回避するために、最低次と三番目の固有振動数の目標値を、それぞれ、1,200Hz と 14,000Hz に設定する。また、重み係数 w_1 , w_2 , w_3 を、それぞれ、0.1, 0.8, 0.1 に設定する。図 7.9 に、三番目の固有振動数の目標値を 7,000Hz に設定した場合の、初期形状から最適形状まで最適化が進行する様子を示す。二番目、三番目、四番目の固有振動モード形状の入れ替わりを回避するために、二番目と四番目の固有振動数の目標値を、それぞれ、4,000Hz と 16,000Hz に設定する。また、重み係数 w_2 , w_3 , w_4 を、それぞれ、0.1, 0.8, 0.1 に設定する。表 7.1 に、これらの最適構造の固有振動数を示す。この表より、本研究で提案する構造最適化法を用いることにより、二番目と三番目の固有振動数を特定の値に一致させる問題において、目標値にほぼ等しい固有振動数をもつ構造物が得られていることがわかる。図 7.8 と図 7.9 に示すように、二番目もしくは三番目の固有振動数を特定の値に一致させた場合でも、明瞭な最適構造が得られる。

最後に、二番目の固有振動数については目標値を設定せずに、最低次の固有振動数のみを 1,800Hz に一致させる問題について調べる。図 7.10 に、初期形状から最適形状まで最適化が進行する様子を示す。この最適構造の最低次の固有振動数と二番目の固有振動数は、それぞれ 1,800Hz と 3,357Hz である。この例題では、最適化の過程において、最低次と二番目の固有振動モード形状は入れ替わらなかった。得られた最適構造は、図 7.7 に示す最適構造によく似ている。図 7.7 に示す例題と図 7.10 に示す例題を比較すると、図 7.7 に示す例題では二番目の固有振動数の目標値を 4,000Hz に設定しているため、図 7.7 に示す最適構造の二番目の固有振動数の方が、より 4,000Hz に近い値をとる。一方で、図 7.10 に示す最適構造の最低次の固有振動数が、正

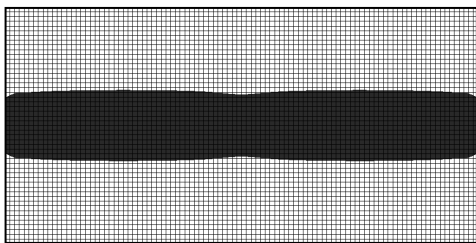
確に 1,800Hz に一致しているのに対し，図 7.7 に示す最適構造の最低次の固有振動数は，厳密には，1,800Hz に一致していない．しかしながら，7.7 に示す最適構造の最低次の固有振動数は 1,786Hz であり，目標値と 1% しか異なっておらず，最低次の固有振動数は，十分に目標値に一致していると言える．



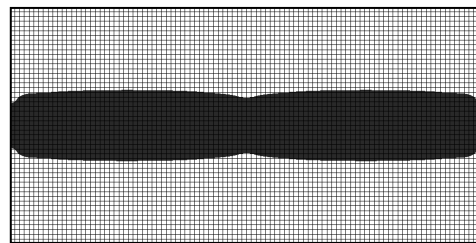
(a) Initial configuration



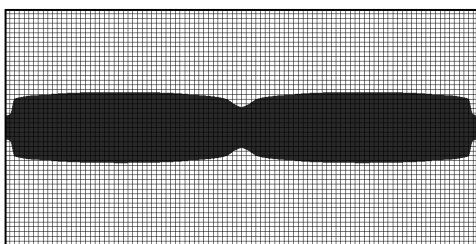
(b) Iteration 10



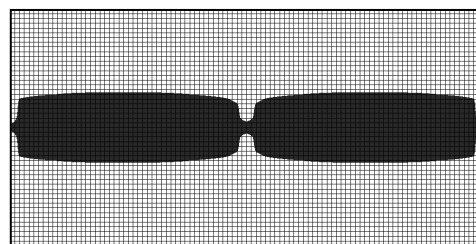
(c) Iteration 20



(d) Iteration 40

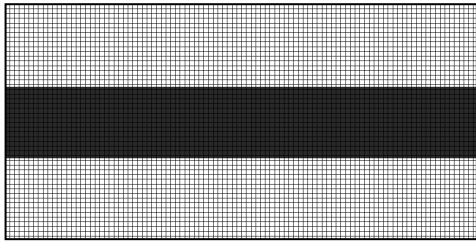


(e) Iteration 80

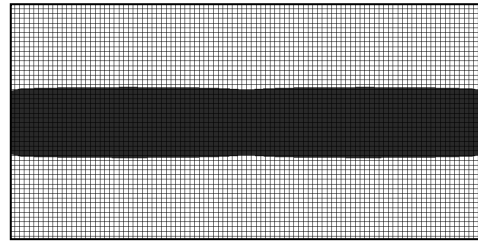


(f) Optimal configuration

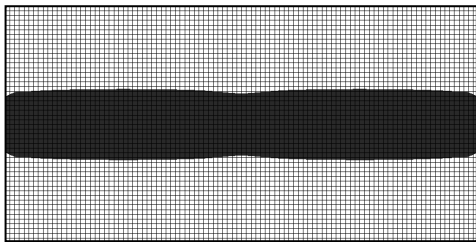
图 7.3 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 300Hz.



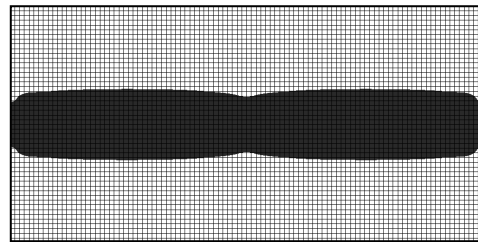
(a) Initial configuration



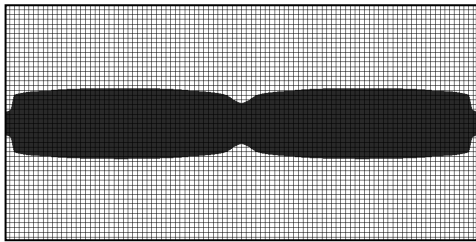
(b) Iteration 10



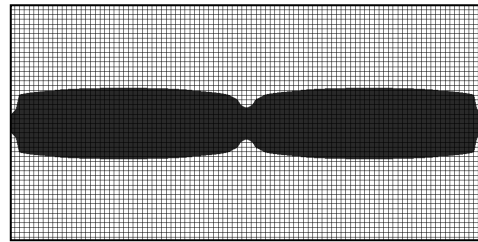
(c) Iteration 20



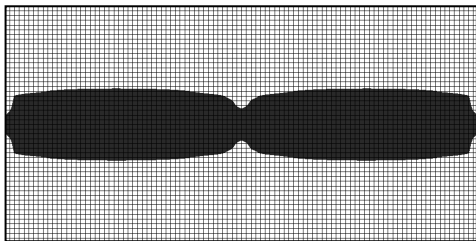
(d) Iteration 40



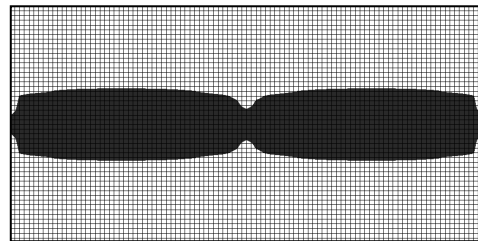
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160



(g) Iteration 320



(h) Optimal configuration

图 7.4 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 600Hz.

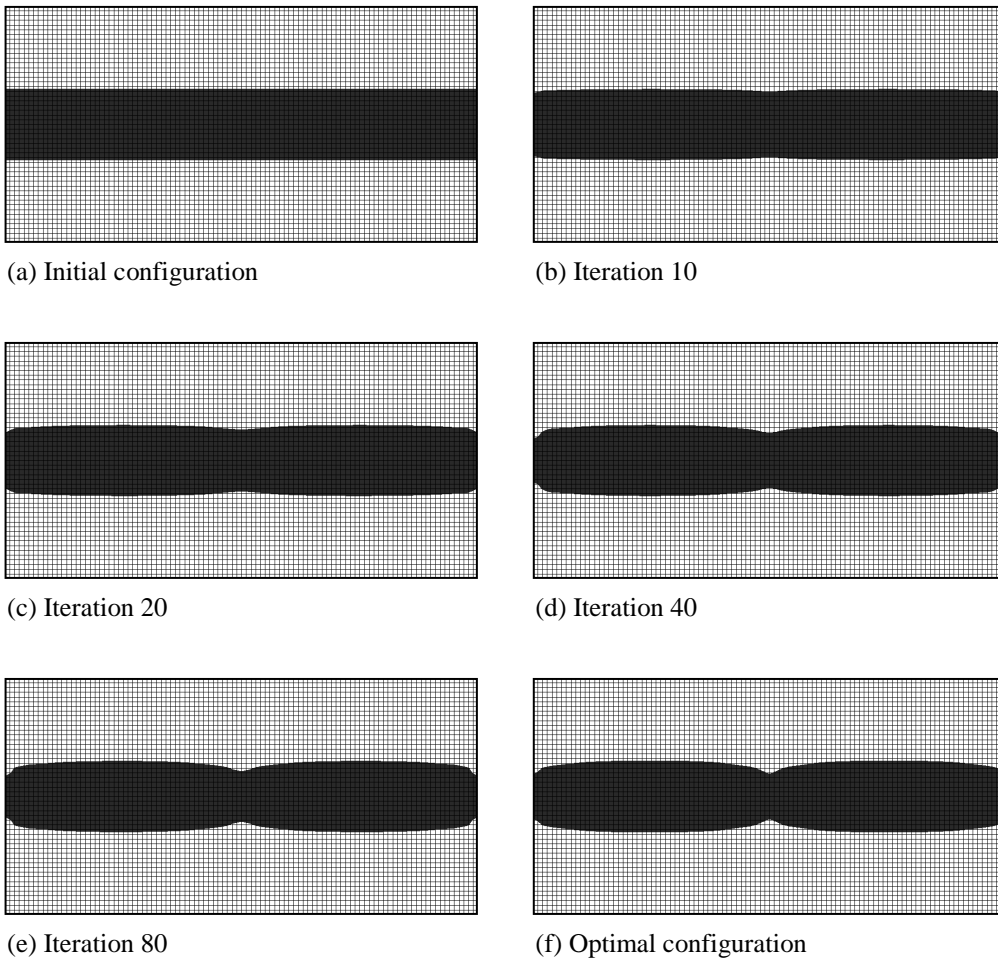


图 7.5 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 900Hz.

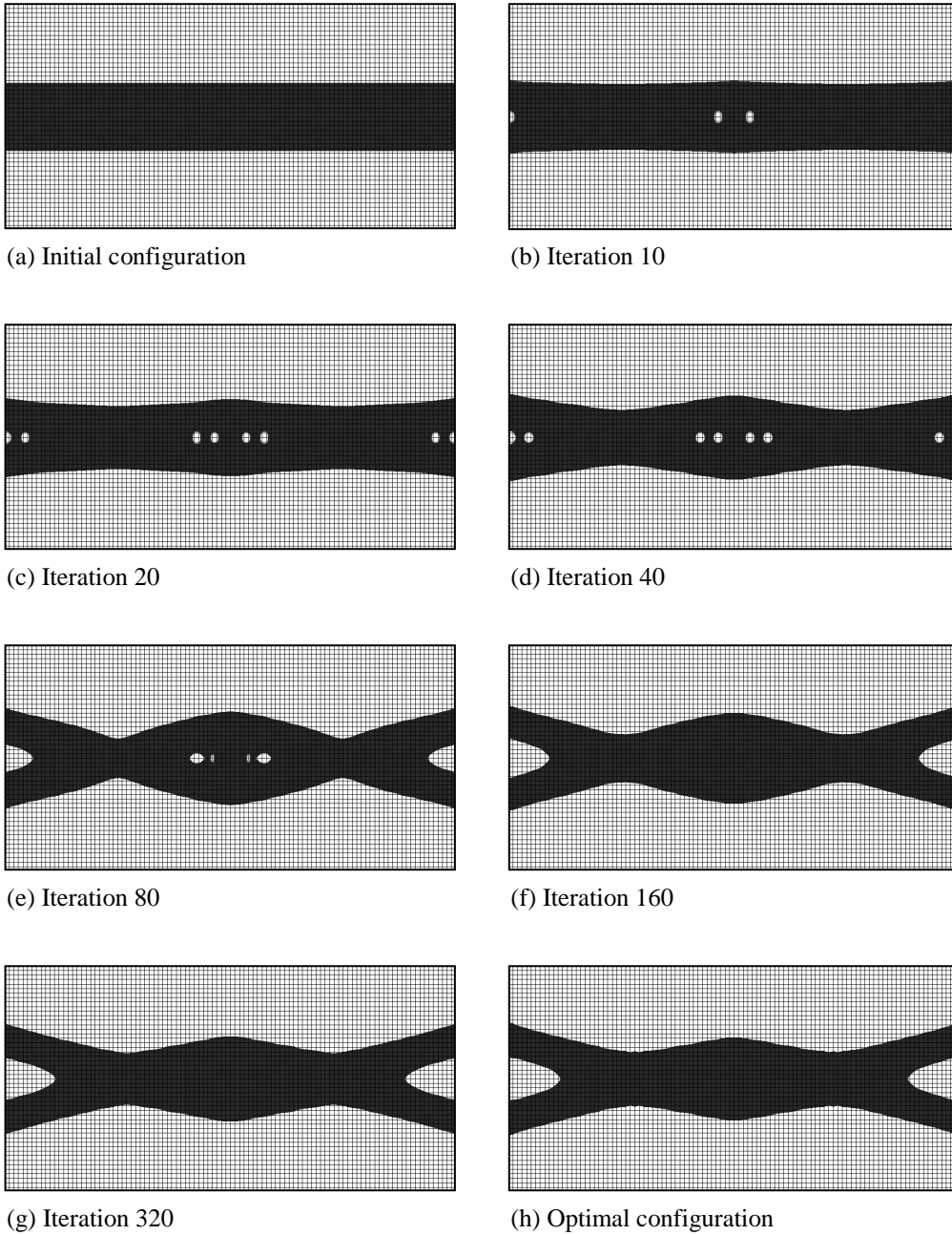


图 7.6 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,500Hz.

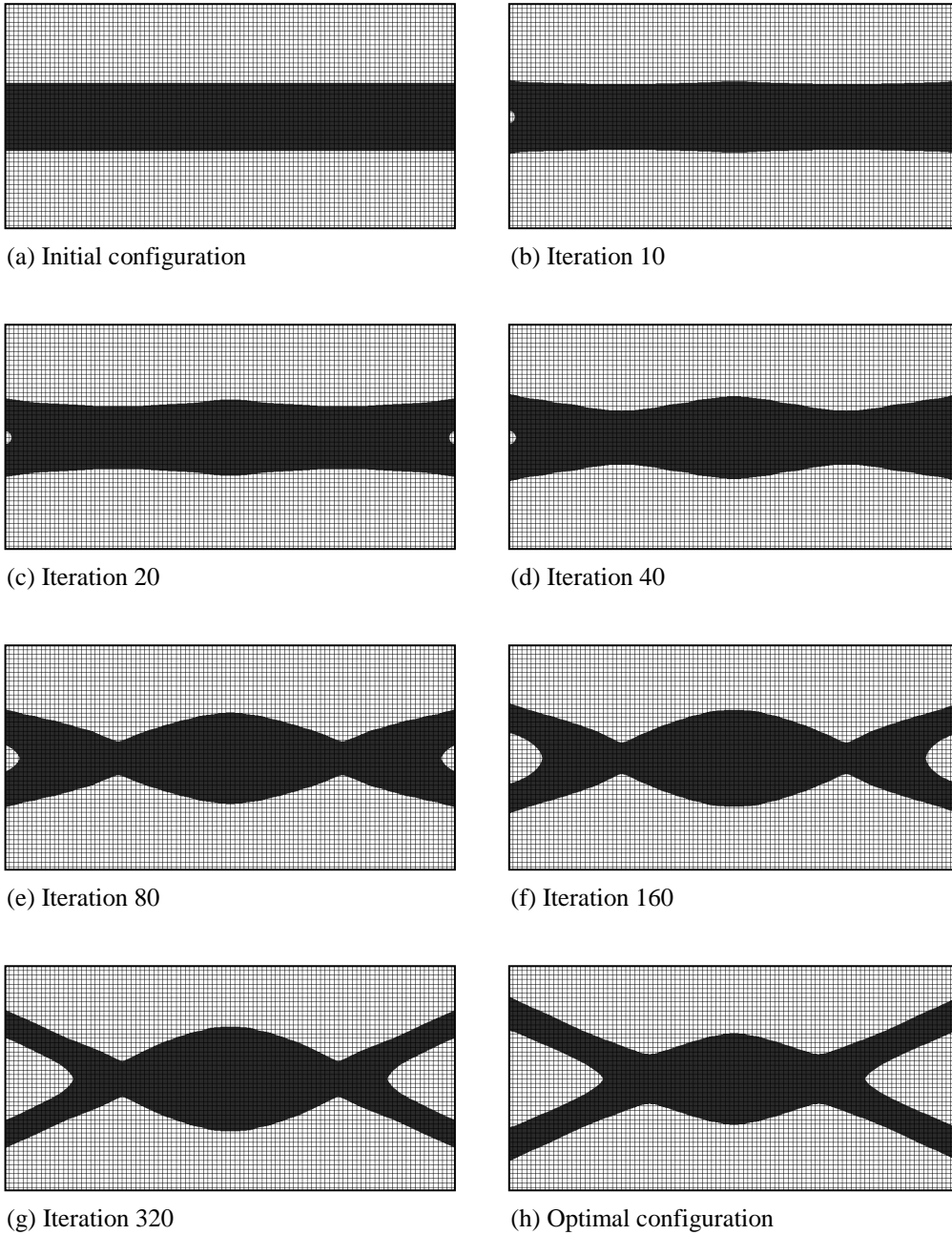
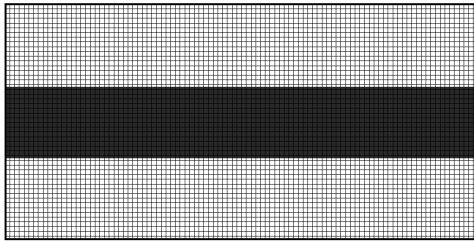
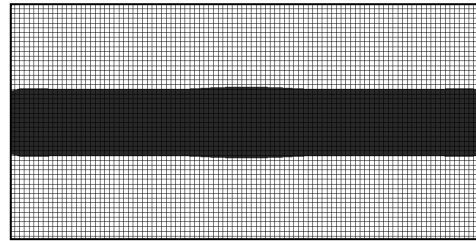


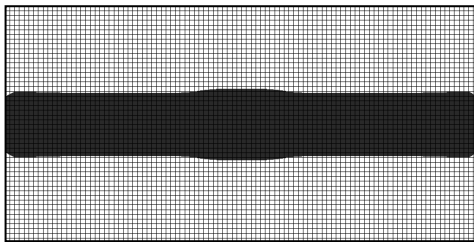
图 7.7 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,800Hz.



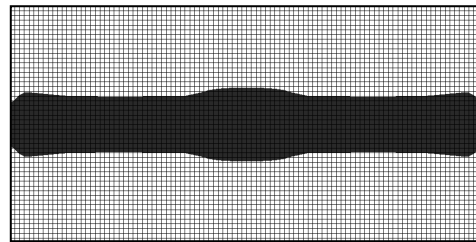
(a) Initial configuration



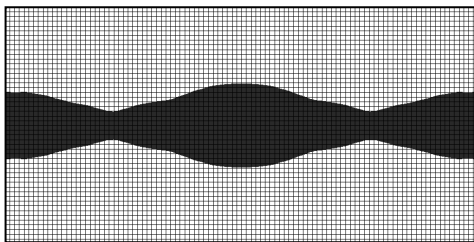
(b) Iteration 10



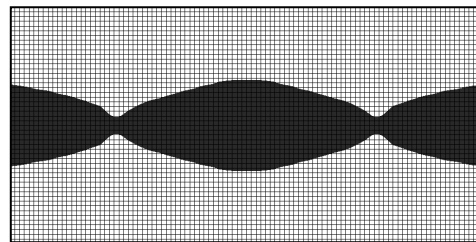
(c) Iteration 20



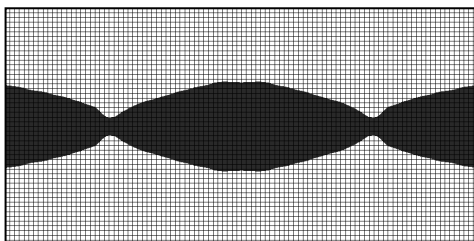
(d) Iteration 40



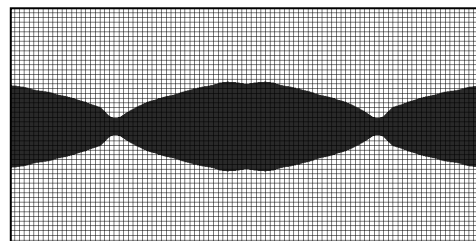
(e) Iteration 80



(f) Iteration 160



(g) Iteration 320



(h) Optimal configuration

图 7.8 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose 2nd eigen-frequency target value = 3,400Hz.

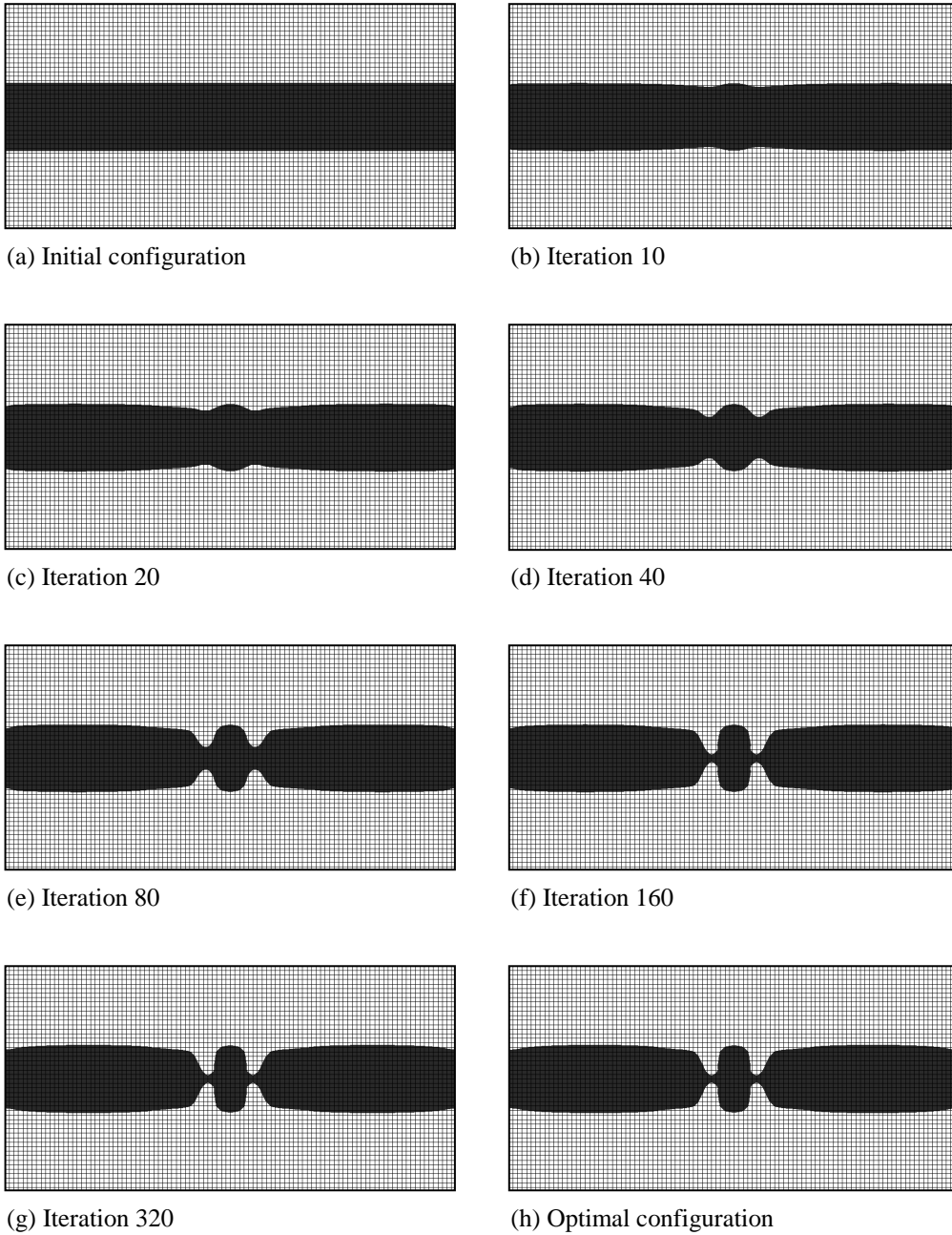


图 7.9 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose 3rd eigen-frequency target value = 7,000Hz.

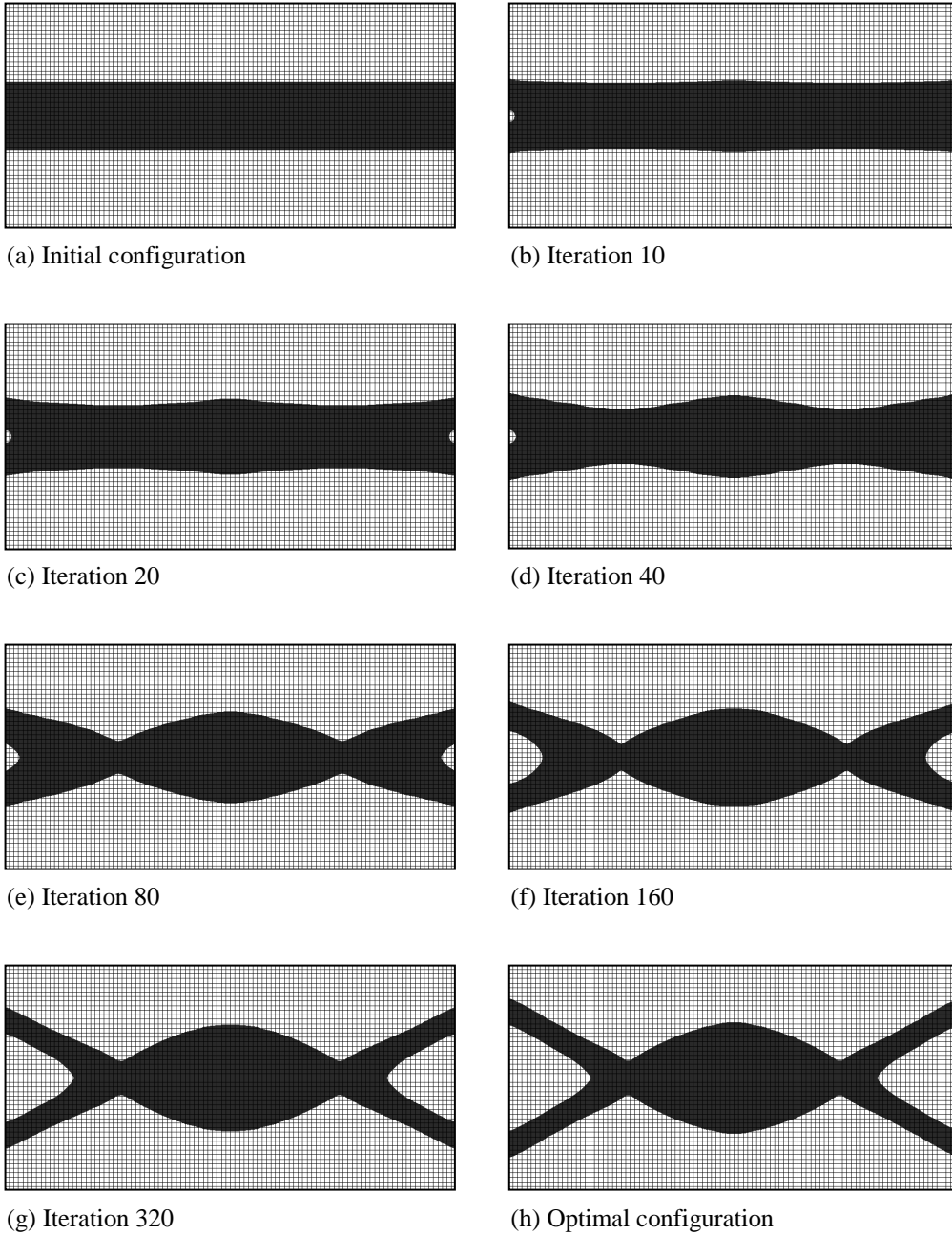


图 7.10 Optimization procedure for the two-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 1,800Hz (2nd eigen-frequency is not matched).

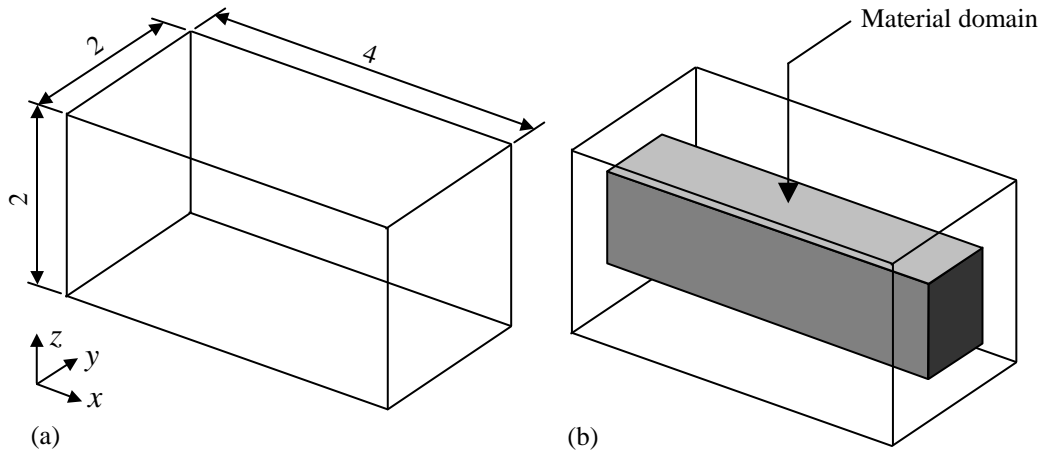


図 7.11 Reference domain and initial configuration for the three-dimensional case: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

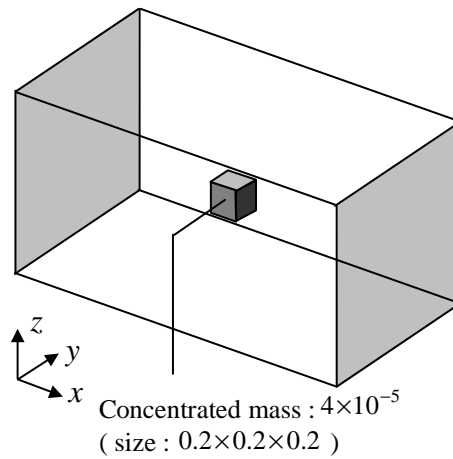


図 7.12 Boundary conditions for the three-dimensional eigen-frequency optimization problem.

7.4.2 三次元問題

図 7.11(a) に参照領域 D を示す。参照領域は、要素長 0.1 の八節点六面体要素を用いて、構造メッシュに分割される。図 7.11(b) に初期構造を示す。図 7.12 に境界条件を示す。この図に示すように、参照領域の左側面と右側面において構造物の変位は拘束され、参照領域の中央に集中質量が設置される。物体領域の体積の上限値 G_{max} を 4.8、つまり参照領域 D の体積の 30% に設定する。等方性弾性材料のヤング率を 2.1×10^8 、ポアソン比を 0.3、質量密度を 7.8×10^{-6} に設定する。式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し、式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.01 に設定する。また、レベルセット関数を再初期化する際には本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる。3.3 節で説明したパラメータ n_p については 4 に設定する。4.4 節で説明したトポロジカルデリバティブに基づく形態変更に関するパラメータ n_{tp} , b_{tp} , r_{tp} については、それぞれ

表 7.2 Lowest and 2nd eigen-frequencies for the optimal configurations in Section 7.4.2

Figures	Lowest eigen-frequency (Hz)	2nd eigen-frequency (Hz)
Figure 7.13 , 7.14	15,060	33,230
Figure 7.15 , 7.16	25,130	41,880
Figure 7.17 , 7.18	34,910	47,310

れ 8, 0.2, 0.1 に設定する. 上述の条件設定において, 初期構造の最低次と二番目の固有振動数は, それぞれ, 45,460Hz と 49,290Hz である.

図 7.13 から図 7.18 に, 最低次の固有振動数がある特定の値に一致させた場合において, 初期形状から最適形状まで最適化が進行する様子を示す. 図 7.13 と 7.14, 図 7.15 と 7.16, 図 7.17 と 7.18 に示す最適構造について, 最低次の固有振動数の目標値は, それぞれ, 15,000Hz, 25,000Hz, 35,000Hz である. これらの例題において, 最低次と二番目の固有振動モード形状の入れ替わりを回避するため, 二番目の固有振動数の目標値を 48,000Hz に設定し, 式 (7.2) に示す重み係数 w_1 と w_2 を, それぞれ, 0.9 と 0.1 に設定する. 表 7.2 に, これらの最適構造の固有振動数を示す. これらの例題では, 最適化過程において, 構造物の形態は変化しなかった. 最低次の固有振動モード形状は, 振動の腹が参照領域の中心に位置し, 振動の節が構造物の左右両端に位置する y 方向の一次曲げモードであるので, 最低次の固有振動数が低い構造物は, 図 7.13 に示すように, 振動の腹と節の y 方向の厚みを減らすことによって得られる. このように, 三次元問題においても, 本研究で提案する構造最適化法を用いて, 特定の固有振動数を持つ構造を得ることができる.

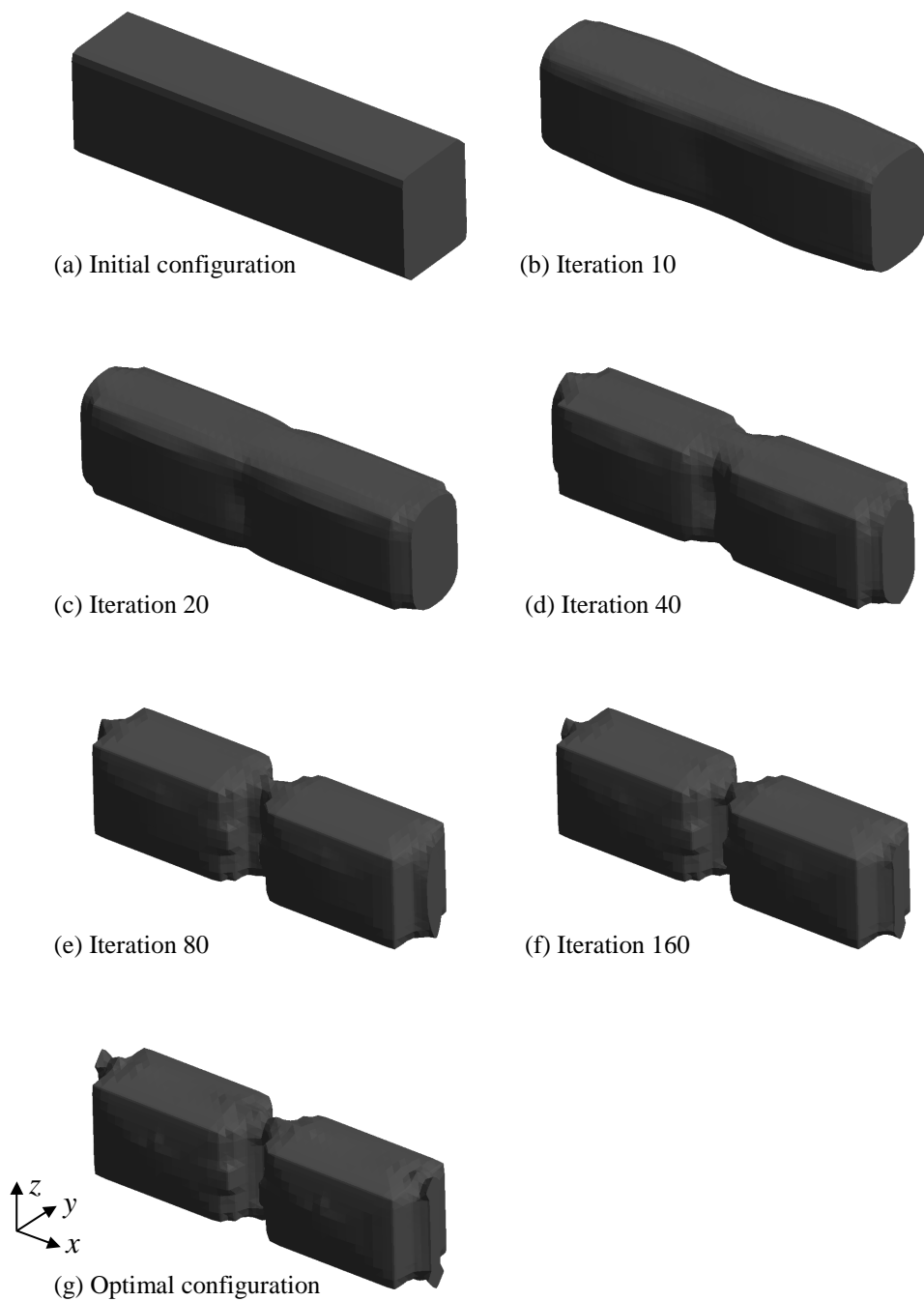


图 7.13 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 15,000Hz (iso-parametric view).

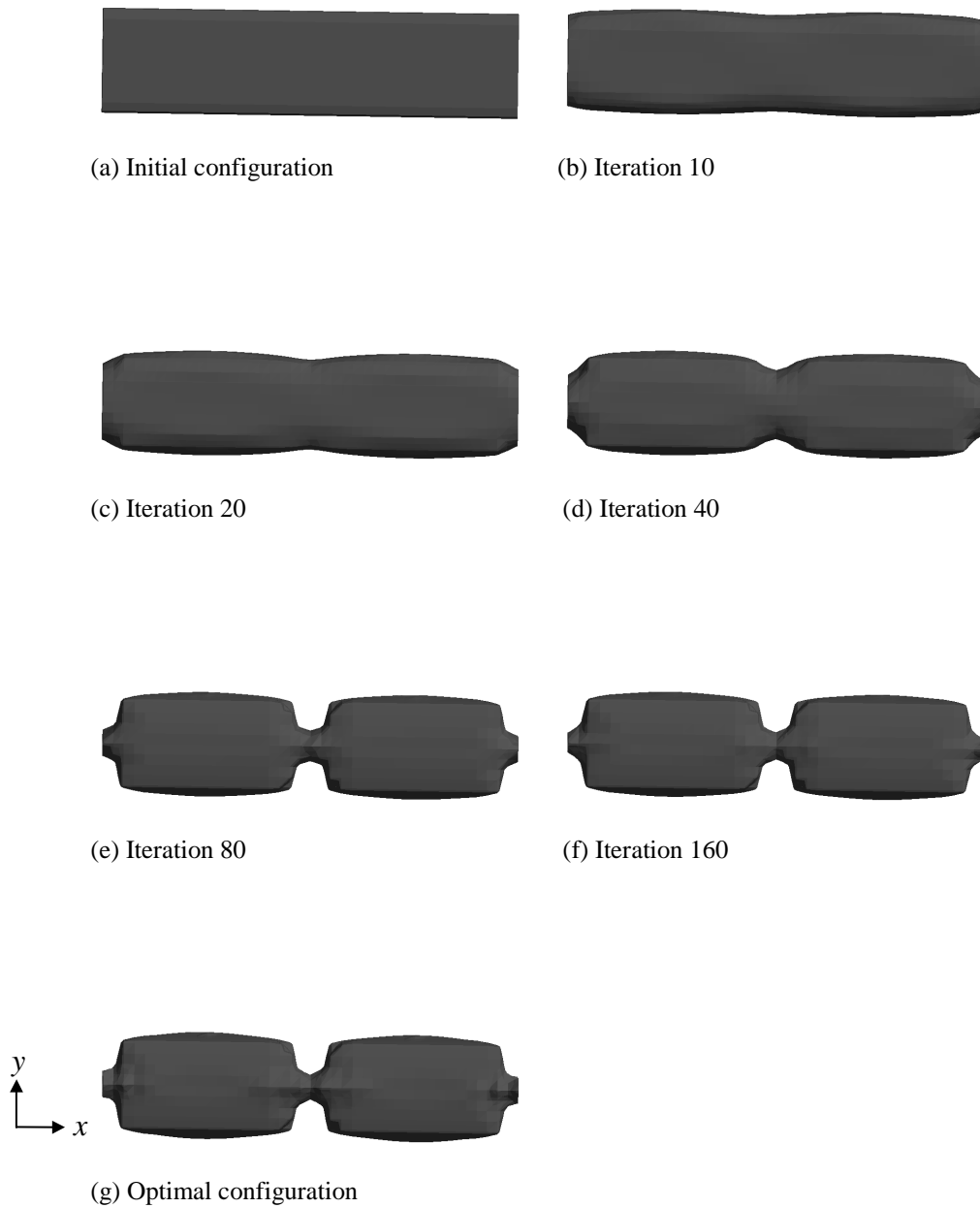


图 7.14 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 15,000Hz (top view).

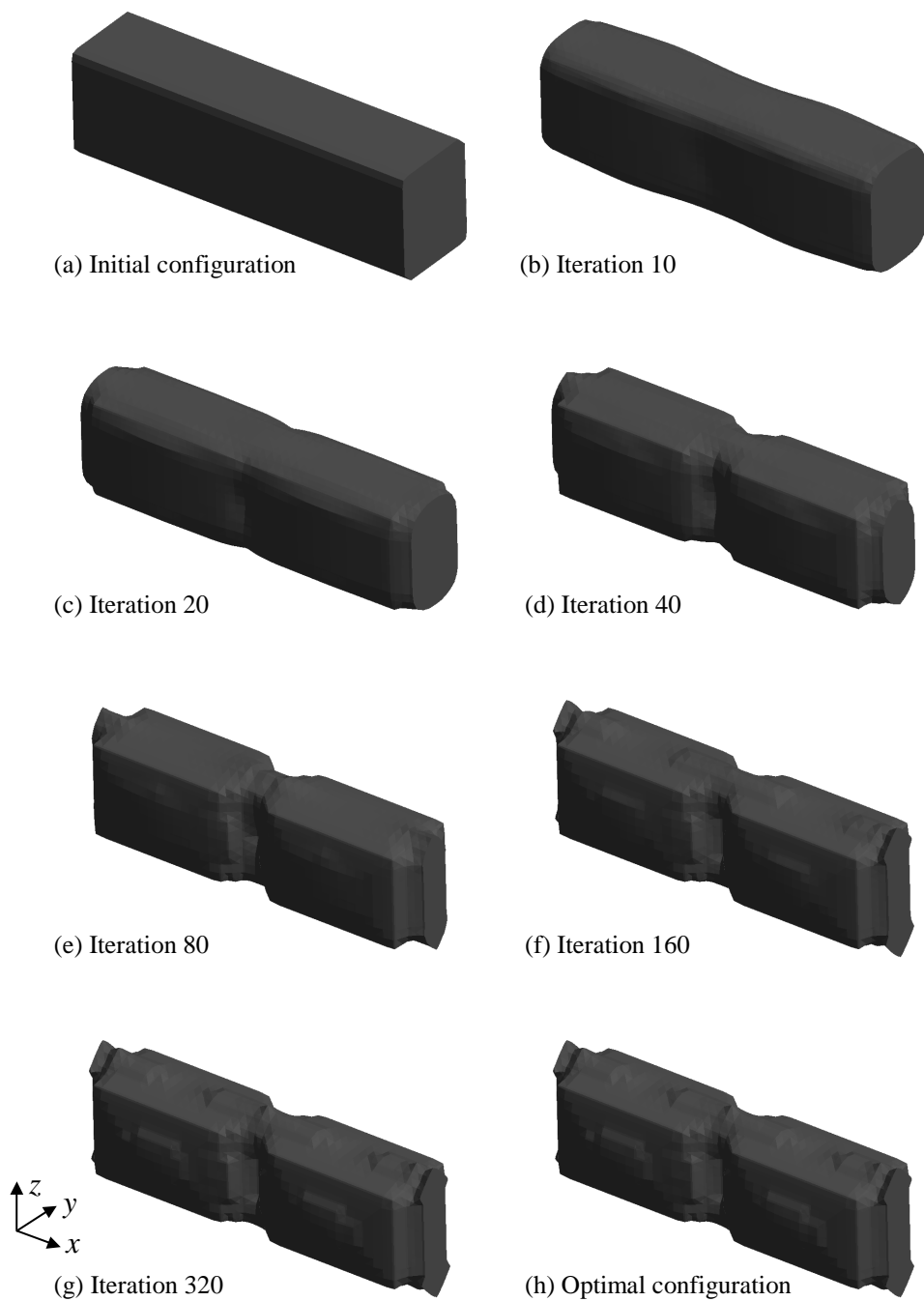


图 7.15 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 25,000Hz (iso-parametric view).

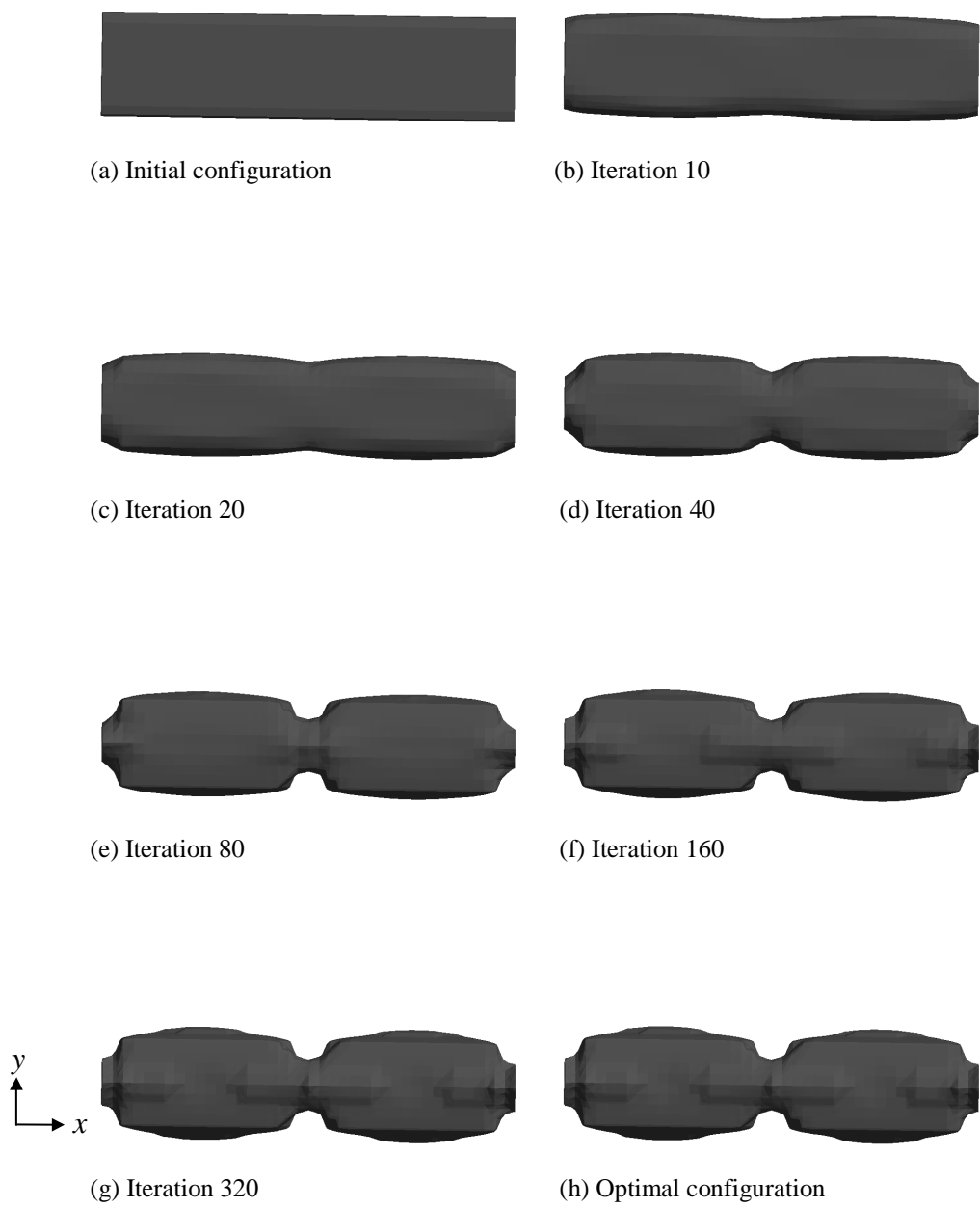


图 7.16 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 25,000Hz (top view).

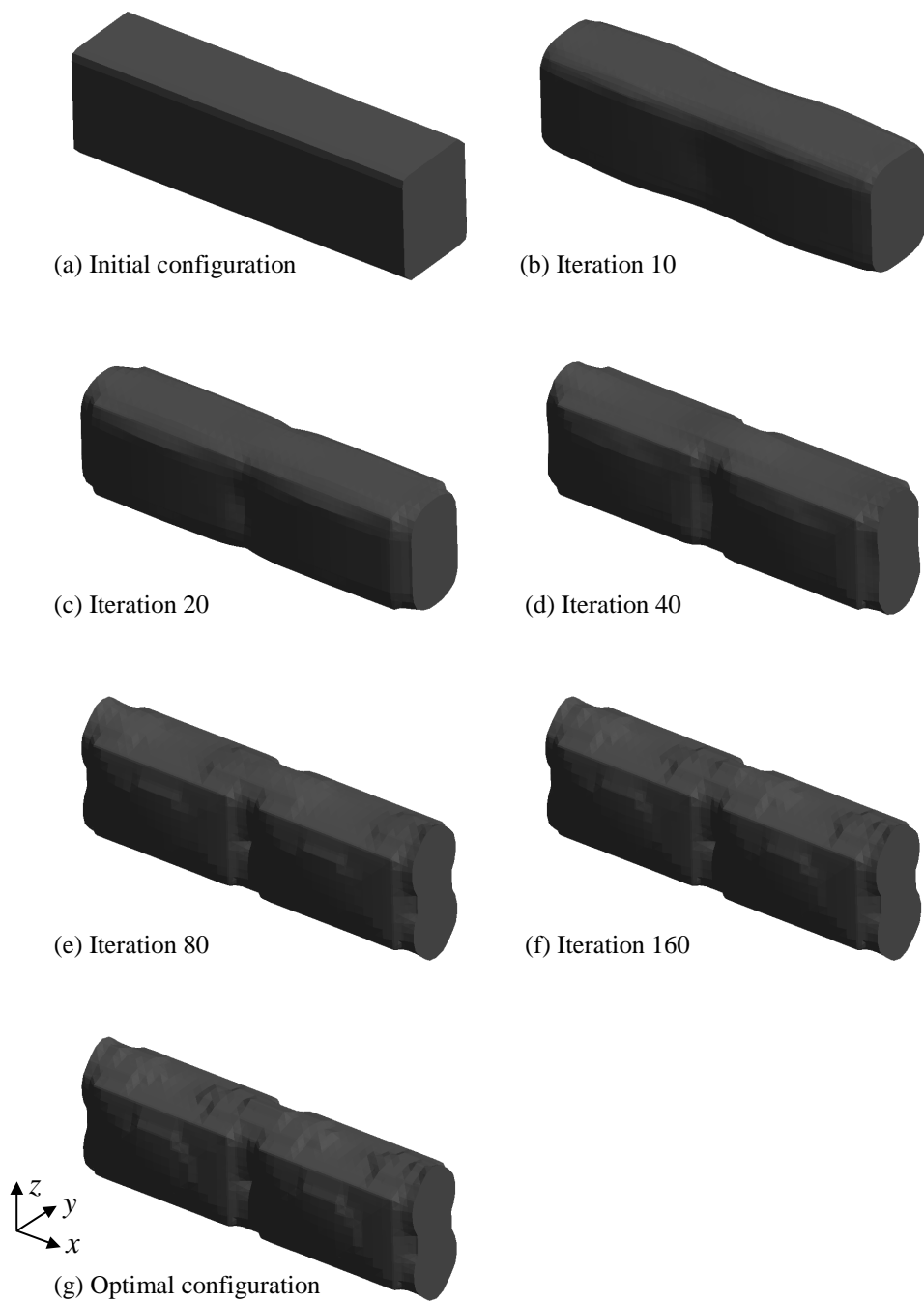


图 7.17 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 35,000Hz (iso-parametric view).

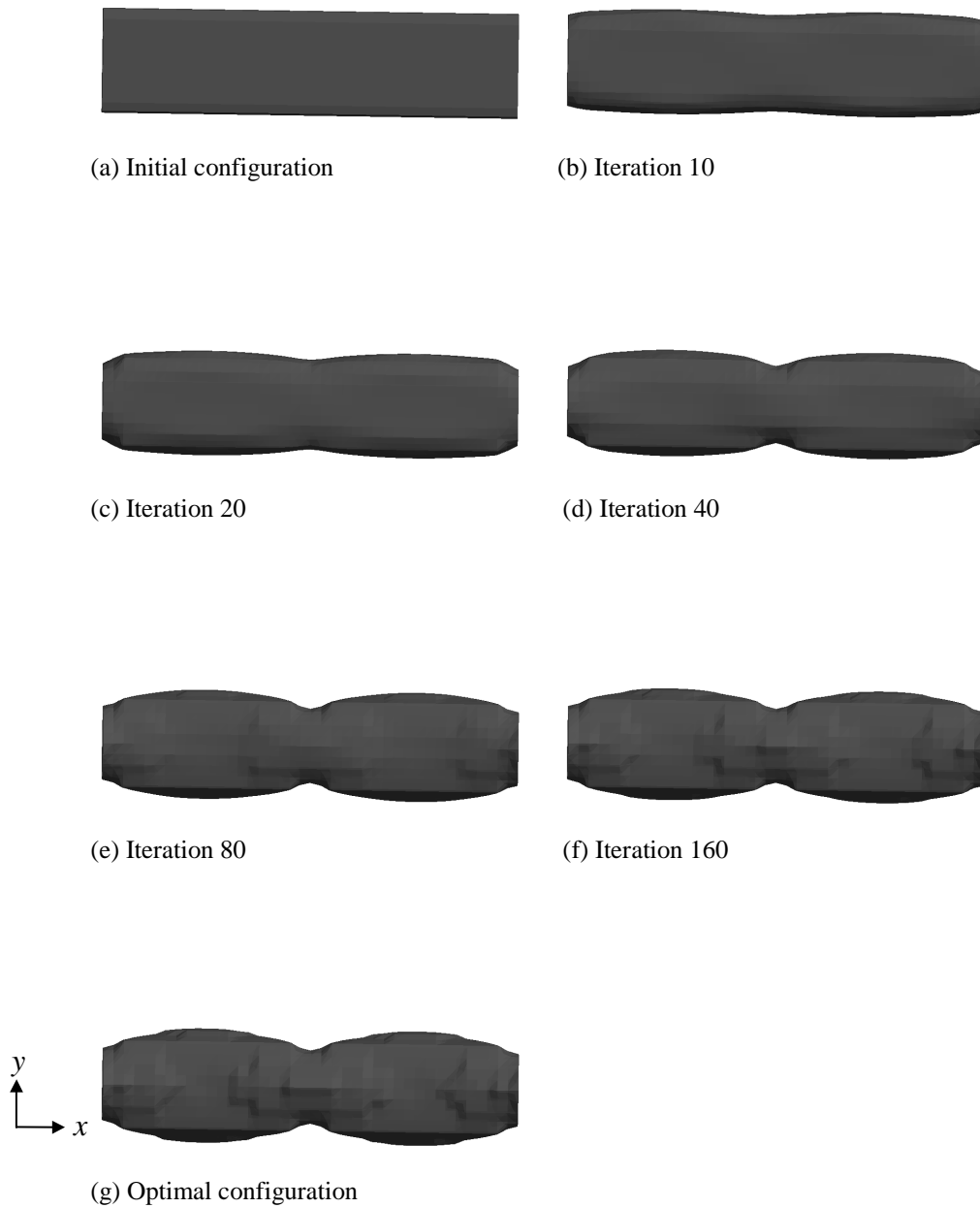


图 7.18 Optimization procedure for the three-dimensional eigen-frequency matching problem whose lowest eigen-frequency target value = 35,000Hz (top view).

参考文献

- [1] Jose K. A., Suh W. D., Xavier P. B., Varadan V. K., and Varadan V. V. Surface acoustic wave MEMS gyroscope. *Wave Motion*, Vol. 36, pp. 367–381, 2002.
- [2] Saitou K., Wang D. A., and Wou S. J. Externally resonated linear microvibromotor for microassembly. *Journal of Microelectromechanical Systems*, Vol. 9, pp. 336–346, 2000.
- [3] Nishiwaki S., Saitou K., Min S., and Kikuchi N. Topological design considering flexibility under periodic loads. *Structural Optimization*, Vol. 19, pp. 4–16, 2000.
- [4] Tcherniak D. Topology optimization of resonating structures using SIMP method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 54, pp. 1605–1622, 2002.
- [5] Bendsøe M. P. and Kikuchi N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 71, pp. 197–224, 1988.
- [6] Maeda Y., Nishiwaki S., Izui K., Yoshimura M., and Terada K. Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, pp. 597–628, 2006. DOI: 10.1002/nme.1626.
- [7] Osher S. and Fedkiw R. *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces*. Springer, New York, 2002.
- [8] Allaire G. and Jouve F. A level-set method for vibration and multiple loads structural optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 194, pp. 3269–3290, 2005. DOI: 10.1016/j.cma.2004.12.018.

第 8 章

熱伝導性能最大化問題への適用

8.1 はじめに

本章では、本研究で提案する構造最適化法を熱伝導性能最大化問題へ適用する。熱伝導問題を対象とした構造最適化法としては、トポロジー最適化を用いた方法 [1][2] や Evolutionary Structural Optimization Method に基づく方法 [3] が提案されている。さらに、レベルセット法に基づく構造最適化法も幾つか提案されている [4][5] もの、これらのレベルセット法に基づく構造最適化法では、形状境界からの熱伝達による放熱条件は考慮されていない。

レベルセット法では、形状境界の位置を、レベルセット関数を用いて明確に把握することが可能であるため、本章では、形状境界からの熱伝達による放熱条件を考慮した構造最適化問題に対して構造最適化法を構築する。すなわち、本章で議論する構造最適化問題は、レベルセット関数に依存する境界条件を取り扱う構造最適化問題である。以下、構造最適化問題を定式化し、幾つかの数値例を解き、得られた最適構造を基に、本研究で提案する構造最適化法の妥当性を考察する。

8.2 定式化

参照領域 D においてレベルセット関数 $\phi(\mathbf{x})$ により表現される、等方性熱伝導材料からなる構造物に関して、構造物の温度が境界 ∂D_T において 0°C に固定され、境界 ∂D_q において熱流束 q_h が流入し、形状境界 $\partial\Omega$ において熱伝達による放熱が起こる境界条件下において、熱伝導性能最大化問題を定式化する。ここで、熱伝達係数を h_c とし、雰囲気温度を 0°C とする。平衡状態における温度場を T とし、体積制約条件付きの熱伝導性能最大化問題を以下のように定式化する。

$$\text{Minimize } F(\phi) = \int_{\partial D_q} q_h T d\Gamma \quad (8.1)$$

$$\text{Subject to } G(\phi) = \int_D H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \leq G_{max} \quad (8.2)$$

$$a_h(T, \bar{T}, \phi) = L_h(\bar{T}, \phi) \quad (8.3)$$

for $\phi \in \Psi, \quad T \in T_{space}, \quad \forall \bar{T} \in T_{space}$

Bilinear Form $a_h(T, \bar{T}, \phi)$ と Load Linear Form $L_h(\bar{T}, \phi)$ は以下のように定義される.

$$a_h(T, \bar{T}, \phi) = \int_D \kappa \nabla \bar{T} \nabla T H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega \quad (8.4)$$

$$L_h(\bar{T}, \phi) = \int_{\partial D_q} q_h \bar{T} d\Gamma - \int_D h_c T \bar{T} \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega \quad (8.5)$$

ここで, κ は熱伝導率であり, 空間 T_{space} は以下のように与えられる.

$$T_{space} = \{ \bar{T} = \bar{T}_i \mathbf{e}_i : \bar{T}_i \in H^1(D) \text{ with } \bar{T} = 0 \text{ on } \partial D_T \} \quad (8.6)$$

まず, 式 (8.1) に示す $F(\phi)$ の ϕ に関する変分を求める. $a_h(T, \bar{T}, \phi) = L_h(\bar{T}, \phi)$ より, $F(\phi)$ は以下のように記述できる.

$$F(\phi) = \int_{\partial D_q} q_h T d\Gamma - \int_D \kappa \nabla \bar{T} \nabla T H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega + \int_{\partial D_q} q_h \bar{T} d\Gamma - \int_D h_c T \bar{T} \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega \quad (8.7)$$

$F(\phi)$ の変分は以下のように記述される.

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial T}, T^* \right\rangle + \left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle \quad (8.8)$$

Fréchet 微分 $\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial T}, T^* \right\rangle$ と $\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle$ を以下に示す.

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial T}, T^* \right\rangle = \int_{\partial D_q} q_h T^* d\Gamma - \int_D \kappa \nabla \bar{T} \nabla T^* H(\phi(\mathbf{x})) d\Omega - \int_D h_c T^* \bar{T} \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega \quad (8.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = - \int_D \kappa \nabla \bar{T} \nabla T \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \int_D h_c T \bar{T} \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega, \psi \right\rangle \quad (8.10)$$

ここで, T^* は温度場 T の試行関数である. 式 (8.9) より, $\bar{T} = T$ とおけば, $\left\langle \frac{\partial F(\phi)}{\partial T}, T^* \right\rangle = 0$ となることがわかる. つまり, ここで議論する構造最適化問題は自己随伴問題である. 式 (8.10) において $\bar{T} = T$ とおくことにより, 以下の式が得られる.

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = - \int_D \kappa \nabla T \nabla T \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \int_D h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega, \psi \right\rangle \quad (8.11)$$

上式右辺第二項については, 以下の関係が得られる.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \int_D h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) |\nabla \phi(\mathbf{x})| d\Omega, \psi \right\rangle &= \int_D h_c T^2 \frac{d\delta(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| \psi d\Omega + \int_D h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x}) \nabla \psi}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} d\Omega \\ &= \int_D h_c T^2 \frac{d\delta(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| \psi d\Omega - \int_D \nabla \cdot \left\{ h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \right\} \psi d\Omega + \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{n} \nabla \phi(\mathbf{x}) \right\} \frac{h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x}))}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \psi d\Gamma \end{aligned} \quad (8.12)$$

ここで, \mathbf{n} は ∂D に関する法線方向ベクトルである. 上式を式 (8.11) に代入し, 参照領域 D の境界積分の項を無視すると, $F(\phi)$ の形状感度は以下のようになる.

$$\left\langle \frac{dF(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = - \int_D \kappa \nabla T \nabla T \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega - \int_D h_c T^2 \frac{d\delta(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| \psi d\Omega + \int_D \nabla \cdot \left\{ h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \right\} \psi d\Omega \quad (8.13)$$

$G(\phi)$ の変分は以下ようになる。

$$\left\langle \frac{dG(\phi)}{d\phi}, \psi \right\rangle = \left\langle \frac{\partial G_\phi}{\partial \phi}, \psi \right\rangle = \int_D \delta(\phi(\mathbf{x})) \psi d\Omega \quad (8.14)$$

以上より, $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は以下のように得られる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = -\kappa \nabla T \nabla T \delta(\phi(\mathbf{x})) - h_c T^2 \frac{d\delta(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| + \nabla \cdot \left\{ h_c T^2 \delta(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \right\} \quad (8.15)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \delta(\phi(\mathbf{x})) \quad (8.16)$$

なお, 本章で議論する構造最適化問題においては, トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する形態変更法を用いないので, トポロジカルデリバティブの定式化は行わない。

8.3 数値計算法

熱伝導性能最大化問題においても, オイラー座標系において温度場を計算するために, 5.3.1 節で説明したように, Heaviside 関数 $H(\phi(\mathbf{x}))$ を式 (5.25) に示す $\tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ で近似し, Dirac Delta 関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ を式 (5.26) に示す $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ で近似する。式 (8.15), 式 (8.16) に示すように, 熱伝導性能最大化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は Dirac Delta 関数 $\delta(\phi(\mathbf{x}))$ を含むため, 平均コンプライアンス最小化問題と同様に, $f(\phi(\mathbf{x}))$ と $g(\phi(\mathbf{x}))$ は, 近似された Dirac Delta 関数 $\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて以下のように表現される。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = -\kappa \nabla T \nabla T \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) - h_c T^2 \frac{d\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| + \nabla \cdot \left\{ h_c T^2 \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \right\} \quad (8.17)$$

$$g(\phi(\mathbf{x})) = \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \quad (8.18)$$

ここで, $\frac{d\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi}$ は以下のようになる。

$$\frac{d\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} = \begin{cases} 0 & (\phi(\mathbf{x}) < -h) \\ -\frac{15}{4h^2} \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right) + \frac{15}{4h^2} \left(\frac{\phi(\mathbf{x})}{h} \right)^3 & (-h \leq \phi(\mathbf{x}) \leq h) \\ 0 & (h < \phi(\mathbf{x})) \end{cases} \quad (8.19)$$

さらに, 5.3.2 節で平均コンプライアンス最小化問題について法線方向速度 V_N を導出する際に述べたのと同じ理由により, 式 (8.17) において, κ を $\kappa \tilde{H}(\phi(\mathbf{x}))$ に置き換える。最終的に, 熱伝導性能最大化問題における $f(\phi(\mathbf{x}))$ は以下のようになる。

$$f(\phi(\mathbf{x})) = -\kappa \nabla T \nabla T \tilde{H}(\phi(\mathbf{x})) \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) - h_c T^2 \frac{d\tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x}))}{d\phi} |\nabla \phi(\mathbf{x})| + \nabla \cdot \left\{ h_c T^2 \tilde{\delta}(\phi(\mathbf{x})) \frac{\nabla \phi(\mathbf{x})}{|\nabla \phi(\mathbf{x})|} \right\} \quad (8.20)$$

熱伝導性能最大化問題においては, 式 (8.20) に示す $f(\phi(\mathbf{x}))$, 式 (8.18) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いて法線方向速度 V_N を計算する。また, 式 (4.3) に基づいてレベルセット関数を修正する場合にも, 式 (8.18) に示す $g(\phi(\mathbf{x}))$ を用いる。

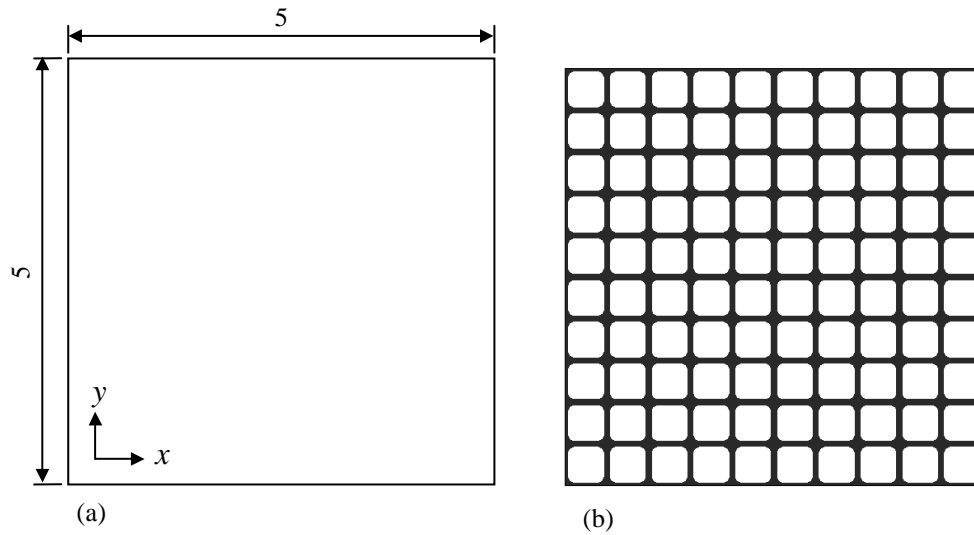


図 8.1 Reference domain and initial configuration: (a) reference domain; and (b) initial configuration.

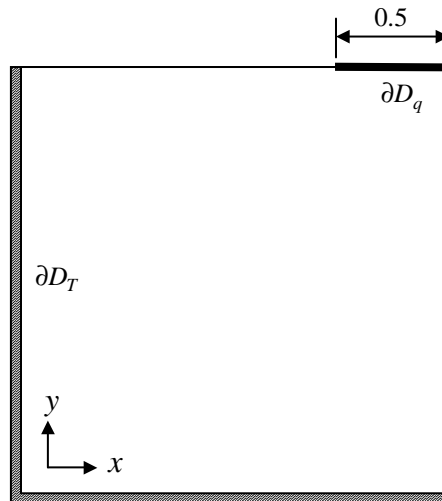


図 8.2 Boundary conditions.

8.4 数値例

ここでは、二次元の熱伝導性能最大化問題について、幾つかの例題を用意し、本研究で提案する構造最適化法を用いて最適構造を得る。得られた最適構造を基に、本研究で提案する構造最適化法の妥当性について考察する。

図 8.1(a) に参照領域 D を示す。参照領域は、要素長 0.1 の四節点四角形平面要素を用いて、構造メッシュに分割される。図 8.1(b) に初期構造を示す。図 8.2 に境界条件を示す。この図に示すように、境界 ∂D_T において温度は 0°C に固定され、境界 ∂D_q において 1 の熱流束が流入する。物体領域の面積の上限値 G_{max} を

7.5, つまり参照領域 D の面積の 30% に設定する. 等方性熱伝導材料の熱伝導率を 1.5×10^5 に設定する. 式 (5.25) におけるパラメータ h を 0.1 に設定し, 式 (2.31) におけるパラメータ $d\phi_{lim}$ を 0.1 に設定する. また, レベルセット関数を再初期化するには本研究で提案する幾何学的再初期化法を用いる. 3.3 節で説明したパラメータ n_p については 8 に設定する. なお, 本章で議論する熱伝導性能最大化問題においては, トポロジカルデリバティブに基づいて構造物に穴を創出する形態変更法は用いない.

図 8.3, 図 8.4, 図 8.4 に, 熱伝達係数 h_c を 0, 100, 500 に設定した場合において, 初期構造から最適構造まで最適化が進行する様子を示す. これらの図に示す最適構造を比較すると, 熱伝達係数 h_c をより大きな値に設定することにより, より形状境界が長い最適構造, すなわち, 熱伝達による放熱の効果を利用した最適構造が得られていることが分かる.

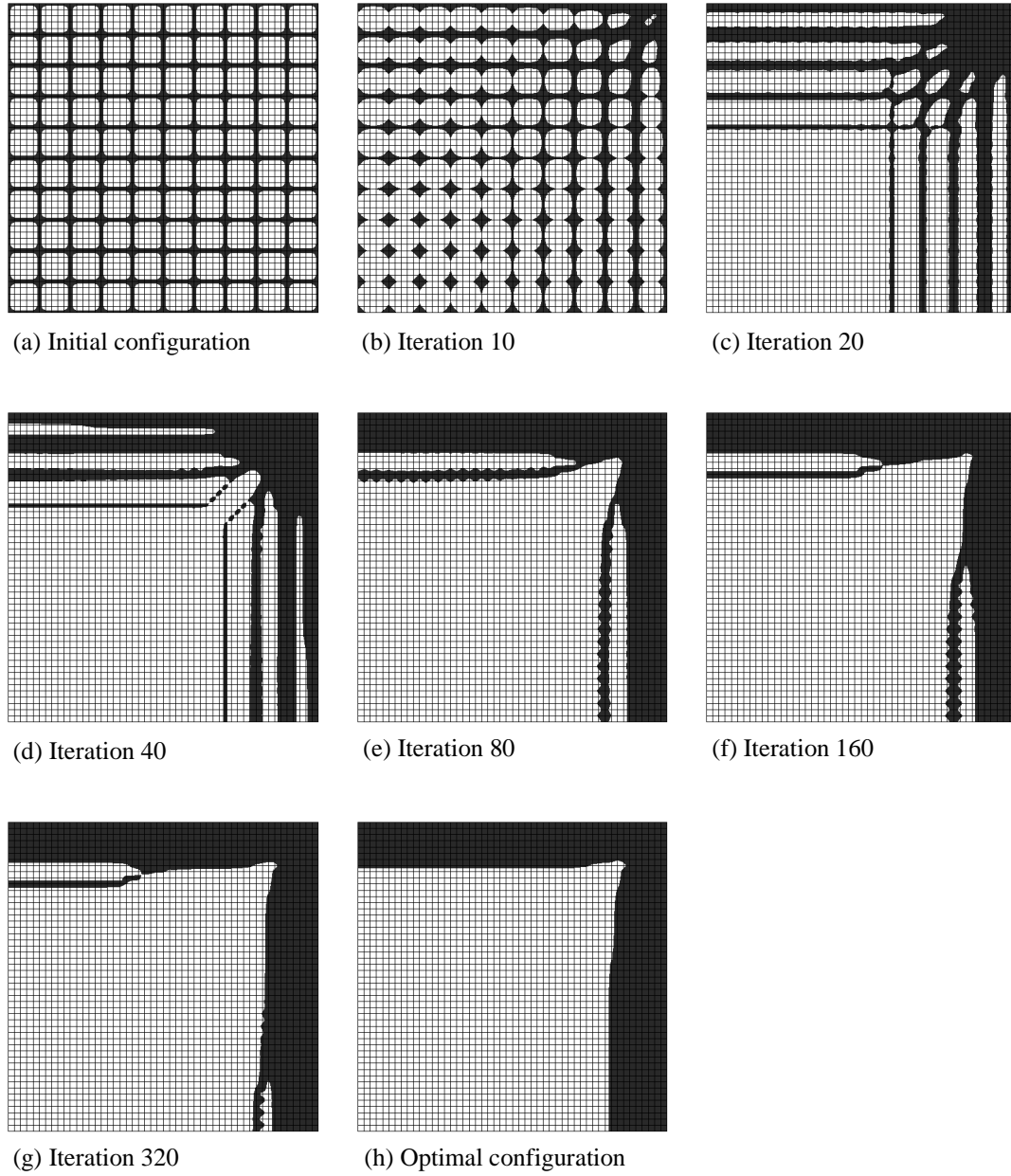


图 8.3 Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 0$.

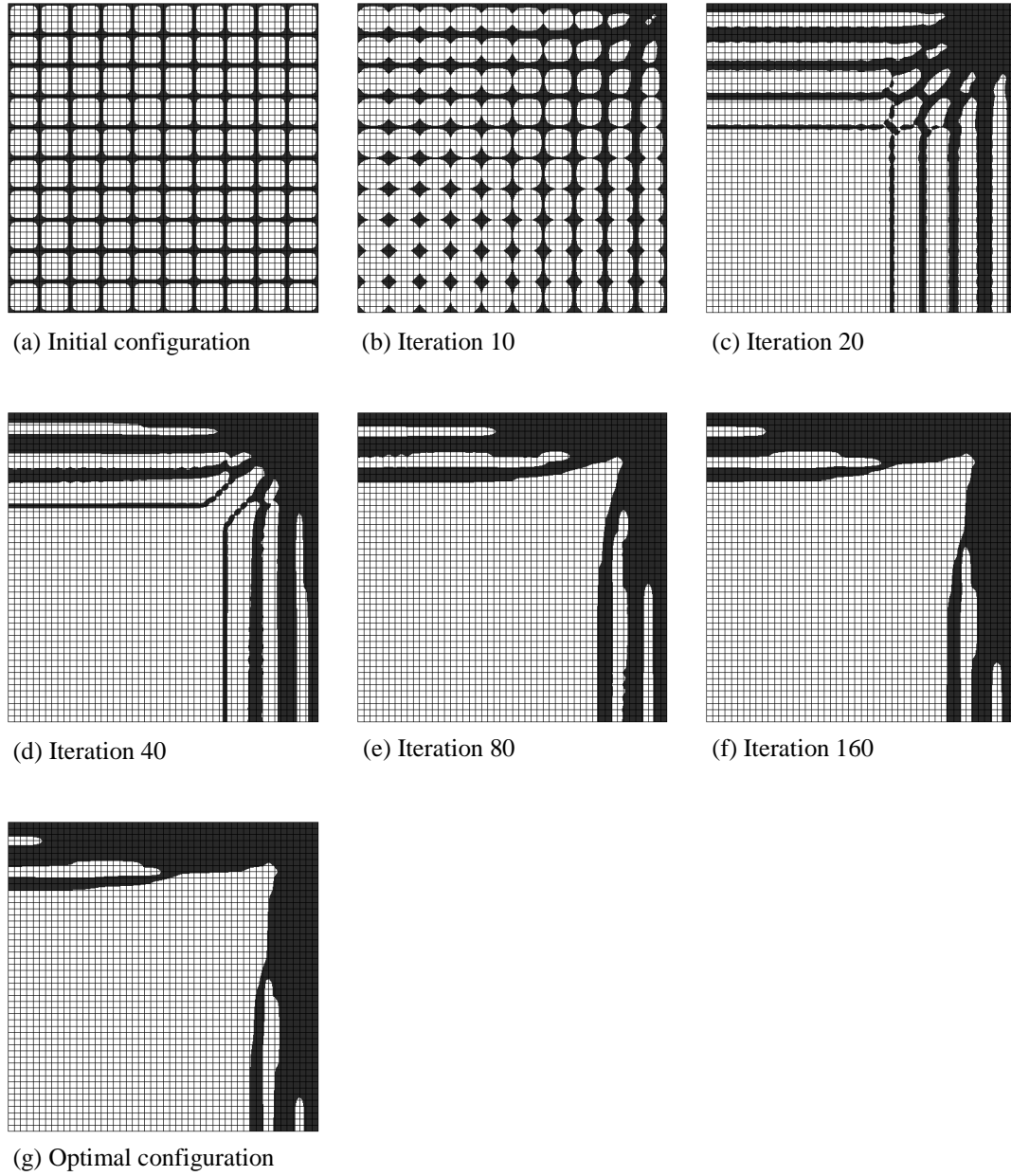


图 8.4 Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 100$.

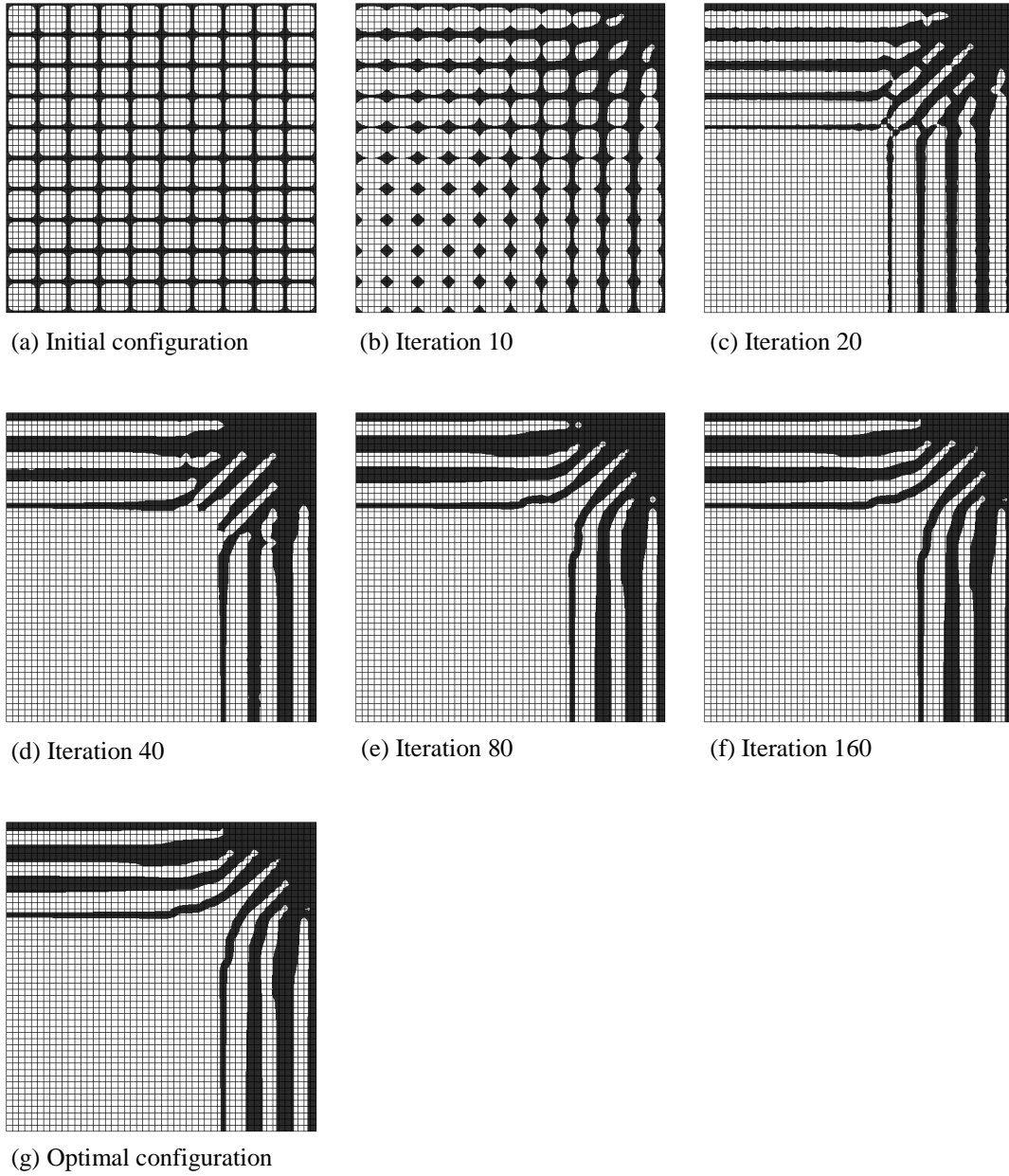


图 8.5 Optimization procedure for the heat conductor design problem whose heat transfer coefficient $h_c = 500$.

参考文献

- [1] Gersborg-Hansen A., Bendsøe M. P., and Sigmund O. Topology optimization of heat conduction problems using the finite volume method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 31, No. 4, pp. 251–259, 2006. DOI: 10.1007/s00158-005-0584-3.
- [2] 伊賀淳郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 材料分布の連続性を仮定した熱拡散問題のトポロジー最適化. 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 73, No. 733, pp. 2426–2433, 2007.
- [3] Li Q., Steven G. P., Querin O. M., and Xie Y. M. Shape and topology design for heat conduction by evolutionary structural optimization. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 42, pp. 3361–3371, 1999.
- [4] Ha S. H. and Cho S. Topological shape optimization of heat conduction problems using level set approach. *Numerical Heat Transfer, Part B*, Vol. 48, pp. 67–88, 2005. DOI: 10.1080/10407790590935966.
- [5] Zhuang C. G., Xiong Z. H., and Ding H. A level set method for topology optimization of heat conduction problem under multiple load cases. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 196, pp. 1074–1084, 2007. DOI: 10.1016/j.cma.2006.08.005.

第9章

結論

本研究では、レベルセット法に基づく新しい構造最適化法を構築した。新しい構造最適化法では、単純化されたレベルセット方程式を、有限要素法を用いて解き、レベルセット関数を更新する。有限要素法を用いてレベルセット関数を更新するため、参照領域のメッシュ分割に関する制約が少なく、レベルセット関数の更新手続きも容易に実装できる。レベルセット方程式を単純化するためには、従来法よりも高い精度でレベルセット関数を再初期化でき、参照領域が非構造メッシュに分割されても利用可能な再初期化法が必要となるので、本研究では新しい幾何学的再初期化法を併せて開発した。

さらに、本研究で提案する新しい構造最適化法を、平均コンプライアンス最小化問題、最低次の固有振動数最大化問題、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題、熱伝導性能最大化問題へ適用し、物理的に意味を持つ適切な最適構造を得た。幾つかの数値例において、参照領域が構造メッシュで分割されても非構造メッシュで分割されても、ほぼ同じ最適構造が得られ、本研究で提案する構造最適化法が参照領域のメッシュ分割に関する制約の少ない構造最適化法であることを確認した。また、三次元問題のような大規模な構造最適化問題においても、本研究で提案する構造最適化法を用いて、適切な最適構造が得られることを確認した。

各章の総括を以下に述べる。

第1章序論では、形状最適化、トポロジー最適化、レベルセット法に基づく構造最適化について、現在までに提案されている構造最適化法を簡単に紹介した。そして、本研究で提案する新しい構造最適化法の概要を説明した。

第2章レベルセット関数の更新方法では、レベルセット方程式を陽解法を用いて離散化し、更新前のレベルセット関数が常に形状境界に対する符号付き距離関数であることを保証することにより、レベルセット方程式を単純化した。そして、単純化されたレベルセット方程式を用いて、構造最適化問題を定式化した。さらに、有限要素法を用いて単純化されたレベルセット方程式を解き、レベルセット関数を更新する方法について説明した。

第3章再初期化法では、最初に従来の再初期化法について説明した。次に、本研究で提案する新しい幾何学的再初期化法について説明した。新しい幾何学的再初期化法は、形状境界からの符号付き距離の定義に従い、形状境界の変動を抑えながら、より厳密にレベルセット関数を再初期化する方法であり、この方法を用いると、形状境界の変動を防ぎつつ、高い精度でレベルセット関数を再初期化することができる。また、この方法は、有限要素法の形状関数を用いた補間に基づく方法であるため、参照領域が非構造メッシュに分割されても利用可能である。最後に、幾つかの数値例において、従来の再初期化法と新しい幾何学的再初期化法を用いた場合の再初期化精度を比較し、新しい幾何学的再初期化法が最も精度よくレベルセット関数を再初期化できることを確認した。

第4章最適化アルゴリズムでは、本研究で提案する構造最適化法のアルゴリズムについて説明し、さらに、最適化の過程において制約条件を満たすようにレベルセット関数を修正する修正法と、最適化の過程において穴の数が増える形態変更を行うためのトポロジカルデリバティブに基づく形態変更方法について説明した。

第5章平均コンプライアンス最小化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、平均コンプライアンス最小化問題へ適用した。最初に、本研究で提案する構造最適化法に基づき平均コンプライアンス最小化問題を定式化した。次に、適切な最適構造を得るために導入した数値計算法について説明した。最後に、幾つかの数値例について最適構造を求め、参照領域を構造メッシュで分割しても非構造メッシュで分割しても同じ最適構造が得られること、トポロジカルデリバティブに基づく形態変更方法を用いることにより様々な初期構造から同じ最適構造が得られること、さらに、三次元構造の最適化問題においても妥当な最適構造が得られることを確認した。

第6章最低次の固有振動数最大化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、最低次の固有振動数最大化問題へ適用した。最初に、本研究で提案する構造最適化法に基づき最低次の固有振動数最大化問題を定式化した。次に、適切な最適構造を得るために導入した数値計算法について説明した。最後に、幾つかの数値例について最適構造を求め、参照領域を構造メッシュで分割しても非構造メッシュで分割しても同じ最適構造が得られること、三次元構造の最適化問題においても妥当な最適構造が得られることを確認した。

第7章特定の固有振動数を持つ構造を求める問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題へ適用した。最初に、本研究で提案する構造最適化法に基づき、特定の固有振動数を持つ構造を求める問題を定式化した。次に、適切な最適構造を得るために導入した数値計算法について説明した。最後に、幾つかの数値例について最適構造を求め、最低次の固有振動数について、ある指定された値を持つ適切な構造が得られることを確認した。低い固有振動数を持つ構造を、トポロジー最適化法を用いて求めた場合、形態と形状を明確に定義できないグレースケールを含む構造が得られるが、本研究で提案する構造最適化法を用いた場合、低い固有振動数を持つ構造が明確に得られる。さらに、最低次から二番目、三番目の固有振動数についても、ある指定された値を持つ妥当な構造が得られること、三次元構造の最適化問題においても、最低次の固有振動数について、ある指定された値を持つ妥当な最適構造が得られることを確認した。

第8章熱伝導性能最大化問題への適用では、本研究で提案する構造最適化法を、構造物の熱伝導性能を最大化する問題へ適用した。最初に、本研究で提案する構造最適化法に基づき、熱伝導性能最大化問題を定式化した。次に、適切な最適構造を得るために導入した数値計算法について説明した。ここでは、構造物中の伝熱だけではなく、構造物表面からの放熱現象も考慮した定式化を行った。つまり、参照領域に固定された境界条件だけではなく、レベルセット関数の分布により決定される形状境界に対して境界条件を与え、構造最適化問題を定式化した。レベルセット法を用いて構造物の形態と形状を表現する場合、構造物の表面の位置を明確に把握できるため、このような構造物の表面に境界条件が与えられる構造最適化問題を定式化することが可能となる。最後に、幾つかの数値例について最適構造を求め、熱伝達係数をより大きな値に設定すると、表面積のより大きい構造が得られることを確認した。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、温かく御指導いただいた京都大学吉村允孝教授に深甚なる感謝の意を表します。また、同学西脇眞二准教授には、終始に渡り、懇切丁寧な御指導、有益な御教示、御支援、叱咤激励を頂きました。ここに深甚なる感謝の意を表します。同学泉井一浩助教には、社会人博士課程への編入学を勧めて頂き、入学後も多岐にわたりご助力頂きました。ここに深く感謝の意を表します。同学山田崇恭氏には、レベルセット法の理論考察に関して数々の有益な御助言を頂きました。ここに深く感謝の意を表します。John. E. Goodman 先生には、論文執筆にあたり懇切丁寧に御指導頂きました。ここに深く感謝の意を表します。そして、同学工学研究科航空宇宙工学専攻最適システム設計工学研究室の皆様へ感謝の意を表します。

大阪府立大学小木曾望准教授、豊田工業大学小林正和准教授、広島大学竹澤晃弘助手には、レベルセット法に関する勉強会を通して有益なご助言を頂きました。ここに深く感謝の意を表します。

豊田中央研究所菊池昇取締役、西川訓利取締役には、構造最適化法を実際の製品設計へ応用する研究にご理解を頂き、同研究所において研究の場を提供して頂きました。ここに深甚なる感謝の意を表します。同研究所佐藤和夫主任研究員、藤川久喜主任研究員には、同研究所において研究を遂行するにあたり、研究テーマを提示して頂き、多大なご指導を頂きました。ここに深く感謝の意を表します。同研究所川本敦史研究員、野村壮史研究員には、構造最適化、特にトポロジー最適化についてご教授頂きました。ここに深く感謝の意を表します。そして、同研究所電磁波応用研究室の皆様へ感謝の意を表します。

また、本研究の遂行にあたり以下の助成を受けました。関係者の皆様へ感謝の意を表します。

- レベルセット法に基づく最適設計法に関する研究、みずほ学術振興財団第 50 回工学関係研究助成、みずほ学術振興財団。

最後に、祖父母、両親、家族に感謝いたします。

出版

関連論文

- [1] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づく機械構造物の構造最適化 (新しい再初期化法の構築と剛性最大化問題への適用). 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 73, No. 725, pp. 72–79, 2007.
- [2] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. トポロジカルデリバティブを用いたレベルセット法に基づく構造最適化. 日本計算工学会論文集, No. 20070009, 2007.
- [3] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 振動特性を対象としたレベルセット法に基づく機械構造物の最適化. 日本機械学会論文集 (C 編), Vol. 74, No. 746, pp. 2442–2451, 2008.
- [4] Yamasaki S., Nishiwaki S., Yamada T., Izui K., and Yoshimura M. A structural optimization method based on the level set method using a new geometry-based re-initialization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. Submitted.
- [5] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づくコンプライアントメカニズムの構造最適化. 日本計算工学会論文集, No. 20080001, 2008.
- [6] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づくコンプライアント熱アクチュエータの構造最適化. 日本計算工学会論文集, No. 20080007, 2008.
- [7] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づく構造最適化における設計領域境界設定に関する一考察. 日本応用数理学会論文集, Vol. 18, No. 3, pp. 487–505, 2008.
- [8] Yamada T., Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. Design of compliant thermal actuators using structural optimization based on the level set method. *Journal of Computing and Information Science in Engineering*. Submitted.
- [9] Park S., Min S., Yamasaki S., Nishiwaki S., and Yoo J. Magnetic actuator design using level set based topology optimization. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 44, pp. 4037–4040, 2008.

関連国際会議発表

- [1] Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. A structural optimization method based on the level set method using a new type of re-initialization scheme. In *International Conference on Computational Methods*, p. 260, Hiroshima, April 2007.
- [2] Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. A structural optimization method for stiffness and vibration problems, based on the level set method using a new geometric re-initialization scheme.

- In *7th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization*, No. A0096, pp. 1937–1946, Seoul, May 2007. ISSMO.
- [3] Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. Eigen-frequency optimization method, based on the level set method using a geometric re-initialization scheme. In *Third Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Kyoto, December 2007. APACM.
- [4] Yamasaki S., Nishiwaki S., Yamada T., Izui K., and Yoshimura M. Structural optimization for eigen-frequency problem based on the level set method. In *The 7th International Conference on Optimization: Techniques and Applications*, pp. 269–270, Kobe, December 2007.
- [5] Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. A new structural optimization method based on the level set method and its applications. In *8th World Congress on Computational Mechanics*, Venice, June–July 2008. IACM.
- [6] Yamasaki S., Nishiwaki S., Yamada T., Izui K., and Yoshimura M. A new optimization method based on the level set method for vibration problems and heat conduction problems. In *12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, No. AIAA-2008-6082, British Columbia, September 2008. AIAA.
- [7] Nishiwaki S., Yamasaki S., Izui K., and Yoshimura M. Level set based structural optimization targeting vibration characteristics. In *The 2nd Korea-Japan Workshop on Computational Engineering*, pp. 100–117, Seoul, August–September 2007.
- [8] Yamada T., Nishiwaki S., Yamasaki S., Izui K., and Yoshimura M. Optimum structural design of thermal actuators using the level set method. In *Proceedings of the 5th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems*, Jeju, June 2008.
- [9] Yamada T., Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. Structural optimization for the design of compliant thermal actuators based on the level set method. In *8th World Congress on Computational Mechanics*, Venice, June–July 2008. IACM.
- [10] Yamada T., Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. Design of compliant thermal actuators using structural optimization based on the level set method. In *Design Automation Conference 2008*, No. DETC2008-49618, New York, August 2008. ASME.
- [11] Yamada T., Yamasaki S., Nishiwaki S., Izui K., and Yoshimura M. Structural optimization of compliant thermal micro actuators based on the level set method. In *12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, No. AIAA-2008-5937, British Columbia, September 2008. AIAA.
- [12] Park S., Min S., Yamasaki S., Nishiwaki S., and Yoo J. Magnetic actuator design using level set based topology optimization. In *The 2008 International Magnetics Conference*, Madrid, May 2008.
- [13] Ikeuchi S., Yamazaki S., Nishiwaki S., Izui K., Yoshimura M., Kurumatani M., and Terada K. Structural optimization based on the level set method using the finite cover method. In *Third Asian-Pacific Congress on Computational Mechanics*, Kyoto, December 2007. APACM.

関連国内発表

- [1] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づくトポロジー最適化. 第 19 回計算力学講演会, pp. 33–34, 愛知, November 2006. 日本機械学会.
- [2] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 幾何学的再初期化を用いたレベルセット法に基づく形状最適化. 第 7 回最適化シンポジウム, pp. 161–166, 兵庫, December 2006. 日本機械学会.
- [3] 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づく機械構造物の振動特性最適化. 第 20 回計算力学講演会, pp. 675–676, 京都, November 2007. 日本機械学会.
- [4] 山崎慎太郎, 山田崇恭, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 構造最適化に基づくデザイン知識の獲得に関する一考察. 第 18 回設計工学システム部門講演会, p. 141, 京都, September 2008. 日本機械学会.
- [5] 西脇眞二, 山崎慎太郎. レベルセット法に基づいた新しい形状最適化の方法. 日本機械学会年次大会, 第 8 巻, pp. 224–225, 大阪, September 2007. 日本機械学会.
- [6] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づく構造最適化におけるパラメータ設定の検討. 第 20 回計算力学講演会, pp. 677–678, 京都, November 2007. 日本機械学会.
- [7] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 熱アクチュエータのトポロジカルデリバティブを用いたレベルセット法に基づく構造最適化. 関西支部第 83 期定時総会講演会, セッション 12, p. 10, 大阪, March 2008. 日本機械学会.
- [8] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. コンプライアントメカニズムのトポロジカルデリバティブを用いたレベルセット法に基づく構造最適化. 2008 年度精密工学会春季大会, pp. 885–886, 東京, March 2008. 精密工学会.
- [9] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. レベルセット法に基づく構造最適化における設計領域境界設定に関する一考察. 研究部会連合発表会, 東京, March 2008. 日本応用数理学会.
- [10] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 熱変形を利用したマイクロアクチュエータのトポロジカルデリバティブを用いたレベルセット法に基づく構造最適化. 第 13 回計算工学講演会, pp. 477–480, 仙台, May 2008. 日本計算工学会.
- [11] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝. 有限設計領域におけるレベルセット法に基づく構造最適化. 第 50 回構造強度に関する講演会, pp. 4–6, 北九州, July 2008. 日本航空宇宙学会.
- [12] 山田崇恭, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 寺田賢二郎, 車谷麻緒. 有限被覆法を用いたレベルセット法に基づく構造最適化. 第 18 回設計工学システム部門講演会, p. 114, 京都, September 2008. 日本機械学会.
- [13] 池内駿介, 山崎慎太郎, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 車谷麻緒, 寺田賢二郎. レベルセット法に基づく構造最適化における有限被覆法の適用. 第 20 回計算力学講演会, pp. 679–680, 京都, November 2007. 日本機械学会.

その他の国際会議発表

- [1] Matsushima T., Nishiwaki S., Yamasaki S., Izui K., and Yoshimura M. An optimal design method for reducing brake squeal in disk brake systems. In *Design Automation Conference 2007*, No. DETC2007-

34708, Las Vegas, September 2007. ASME.

- [2] Nomura T., Sato K., Yamasaki S., and Nishiwaki S. Dielectric resonator antenna design using ftdt topology optimization. In *Proceedings of International Symposium on Antennas and Propagation 2008*, pp. 429–430, Taipei, October 2008.