

博士論文

機能構造の創生を目的とした構造最適化に関する研究

竹澤 晃弘

2009年2月

要旨

近年、機械構造物やマイクロメカニズム、電磁波利用デバイス等の様々な構造の設計において、構造最適化法を用いた最適設計が注目を集めている。本論文では、様々な機能を有する構造物の最適設計に適用することを目的とした構造最適化に関する研究を扱う。即ち、構造の表現方法に関する基礎研究及び、特定の機能の最適化を目標とした構造最適化法の構築の応用研究に関して述べる。以下、各章の概略を示す。

序章では、本論文の研究対象である構造最適化法について、その分類及び方法論の詳細について述べる。即ち、構造最適化をパラメトリック形状最適化とジオメトリック形状最適化、トポロジー最適化に分類し、それぞれの定式化について述べる。さらに、近年提案された、ジオメトリック形状最適化の一種である、レベルセット法に基づく形状最適化について述べる。

第二章では、序章で述べたレベルセット法に基づく形状最適化と同等の性能を、高い安定性で実現するための方法として、フェーズフィールド法に基づくオイラー型形状最適化法を提案する。

第三章では、トポロジー最適化の応用として、一般的にロードセルと呼ばれる単軸荷重変換器及び、ロボットマニピュレーション等に使用される多軸荷重変換器を対象として、高感度、高精度の測定を実現可能なセンサ構造を創成するための構造最適化法を提案する。第四章では、機械構造の構想設計支援技術としての構造最適化について論じ、構想設計支援を目的とした、フレーム要素、パネル要素等の離散構造要素を用いた構造最適化法を提案する。

第五章では、第四章で提案した離散構造要素を用いた構造最適化法の応用研究として、特定の周波数帯の弾性波を透過させないバンドギャップ構造の創生を目的とした、構造最適化法を提案する。

以上の検討を通じ、機能構造創成設計における構造最適化の有効性を示す。

目次

1	序章	1
1.1	導入	1
1.2	構造最適化の分類	1
1.3	パラメトリック形状最適化	2
1.4	ジオメトリック形状最適化	3
1.5	トポロジー最適化	10
2	フェーズフィールド法に基づくオイラー型形状最適化	21
2.1	導入	21
2.2	フェーズフィールド法について	21
2.3	定式化	25
2.4	数値計算の実装	30
2.5	数値例	32
2.6	結言	40
3	荷重変換器構造のトポロジー最適化	41
3.1	導入	41
3.2	定式化	42
3.3	最適化の手続き	49
3.4	数値例	52
3.5	結言	62
4	離散構造要素を用いた構造最適化	63
4.1	導入	63
4.2	定式化	68
4.3	最適化の手順	74
4.4	数値例	80
4.5	結言	105
5	離散構造要素を用いたバンドギャップ構造の最適化	106
5.1	導入	106
5.2	定式化	107
5.3	最適化の手続き	109
5.4	数値例	110
5.5	結言	117
6	結論	118
7	出版物	127

1 序章

1.1 導入

本論文では、様々な機能を有する構造物の最適設計に適用することを目的とした構造最適化を研究対象とし、構造の表現方法に関する基礎研究及び、特定の機能の最適化を目標とした構造最適化法の構築の応用研究を行う。それぞれの研究の詳細については第二章以下で述べ、序章では、それらの研究の基礎となる、構造最適化の既存方法について詳細に記述する。即ち、構造最適化の分類及び、それぞれの方法論の詳細について述べる。

1.2 構造最適化の分類

構造最適化においては、ある特定の目的、例えば剛性の最大化や熱伝導特性の最大化、固有振動数の最大化に対し、最適となる構造を導出することを目的とする。最適化の目的とする評価指標は、目標関数として定式化され、それぞれの問題に関する支配方程式を解くことで導出される。最適構造には、目的に応じて許容される空間が設定され、それを満たすように、最適化の過程でその値が変化する設計変数が設定される。これらを、構造最適化を行う際の一般的な手順としてまとめると、以下のように表される。

1. 構造の性能評価のための数学モデルの構築（線形弾性問題、固有振動数問題、熱伝導問題等）
2. 最適化の目標関数の決定。（剛性の最大化、固有振動数の最大化、特定箇所の変位の最大化等）
3. 構造最適化法の決定及び設計変数の決定。（寸法最適化、形状最適化、トポロジー最適化等）

構造最適化は、最適化の過程で許容される設計変更に基づき、工学的には以下のように分類されるのが一般的である。

1. 寸法最適化 与えられた初期案に対し、その形状を表現する各種寸法諸元の最適化を行う。
2. 形状最適化 与えられた初期案に対し、領域形状を寸法緒言で離散的に表現されるものと解釈するのではなく、スプライン関数等で滑らかに表現されるものとし、その領域形状を表現する滑らかな関数に対して最適化を行う。
3. トポロジー最適化 構造外形の滑らかな表現は形状最適化と等しいが、外形のみならず、穴の数等の形態も最適化する。

寸法最適化では、フレームの断面形状やプレートの厚さ、機械製品の特定の寸法等、定められた形状の寸法を最適化することを目的としているため、最適化を通じて設計対象の幾何形状を大きく変更することは難しい。しかし、既存設計案の改善といった目的には適しており、機械製品、建築構造物、船舶等の設計において広く活用されている。形状最適化では、設計領域の連続した境界を変化させ、最適な境界形状を得ることを目的としている。寸法最適化と比較し、設計案の抜本的な変更が可能であるため、最適化による大きな性能向上が期待できる。また、最適化において外形が明確に定義されるため、その形状に制約を与え、製造要件等も最適化の目的、あるいは制約として考慮することが可能である。ただし、最適化過程で設計案に穴を空ける等の形態変化を行うことはできない。一方、トポロジー最適化では、設計案の形態変化が可能であり、さらに大きな最適化の効果が期待できる。しかし、一般的な方法では、最適解は密度分布の濃度が高い領域の集合として表され、構造が明確に定義されるわけではないため、その最適解から直接設計案を得ることが困難である、ま

た，外形に関する設計要件を扱うのが困難である等の性質がある．以上のように，各構造最適化法にはそれぞれ利点と欠点が存在するため，扱う設計問題に応じて，適切な手法を選択することが重要である．以上の構造最適化法の包括的な議論に関しては，Hemp[50]，Kirsh[54]，Prager[86]，Rozvany[93]，Rozvany ら [94] がまとめている．

他方，構造最適化を行う際の各種問題に関する支配方程式は，材料力学に基づき離散化された問題となる一部の寸法最適化問題を除き，設計対象となる領域における偏微分方程式となる．そして，その偏微分方程式で支配される領域形状に対し，最適化を行う．これは，上記の分類におけるいずれの手法においても共通であるが，問題によってその解法は全く異なる．これに対する数学的な分類は以下ようになる [2] ．

1. パラメトリック形状最適化 領域形状の変更が，偏微分方程式で表される支配方程式の係数変化として表される場合．(面積が一定のプレートの厚さの最適化，格子が固定されたトラス構造における断面寸法の最適化等)
2. ジオメトリック形状最適化 領域形状の変更が，偏微分方程式が支配する領域自体の変更として表される場合．(構造の外形全体の最適化等)
3. トポロジー最適化 構造の外形のみならず，穴の数等の形態も最適化する場合．

なお，パラメトリック形状最適化は，工学的には寸法最適化と同義で用いられる場合もあり，ここで用いるトポロジー最適化は工学的な意味よりも狭義になる．以下，各最適化の数学的扱いについて概略を述べる．

1.3 パラメトリック形状最適化

1.3.1 最適化問題の定式化

パラメトリック形状最適化の代表的な例として，図 1.1 に示すプレートの最適厚さを導出する問題が挙げられる．

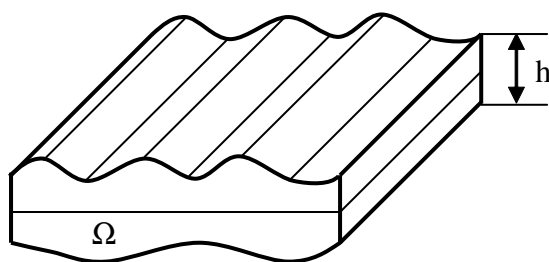


Figure 1.1: Example of admissible design and design variable in plate thickness optimization problem

この問題では，領域 Ω における板厚 h を設計変数とし，最適化を行う．この領域に垂直に荷重が作用するとして，以下の線形弾性問題を考える．

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}\nabla\mathbf{u}) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで， \mathbf{A} は曲げに関する弾性テンソルであり，板厚 h を用いて，以下のように表される．

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mu h(\mathbf{x})\mathbf{I} \quad (1.2)$$

ここで、 μ は弾性定数であり、 I は単位テンソルである。さらに、板厚 h には、以下のように厚さの上限値と下限値に制約が加えられる。

$$0 < h_{\min} \leq h(\mathbf{x}) \leq h_{\max} < +\infty \quad (1.3)$$

これらの式においては、領域 Ω は板厚方向には変化するが、面内方向に関しては一定であり、最適化の仮定で領域 Ω の変化を考慮する必要がない。領域 Ω の体積が一定であるとする、この問題において許容される解の集合 \mathcal{U}_{ad} は以下のように表される。

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \left\{ h(\mathbf{x}) : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that } h_{\min} \leq h(\mathbf{x}) \leq h_{\max} \text{ and } \int_{\Omega} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = h_0 |\Omega| \right\} \quad (1.4)$$

ここで、 h_0 は領域の総体積を決定する、板厚の平均値である。以上より、目標関数 J の最小化を目的とした場合、領域 Ω の板厚最適化問題は以下のように表される。

$$\inf_{h \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(h) \quad (1.5)$$

この問題は分布系の最適制御問題における係数最適化問題 [59] と類似しており、いくつかの数学的議論が共通となる。プレートの厚さの最適化問題に関する初期の研究は、Rossow と Taylor [90] 等が挙げられる。しかし、問題によっては式 (1.5) の定式化で必ずしも解が得られるわけではない。そもそも、この問題には数学的には最適解が存在しないことが証明されている [73]。それは、Cheng と Olhoff [27] が数値計算によって得た不安定解にも明確に表れている。不安定解は、最大厚さと最小厚さの厚さ分布が繰り返される形状で得られ、その形状はプレートの厚み分布の離散化度合いによって異なり、唯一の最適解が得られないことを示している。この問題に対して解を得るには、後に説明するトポロジー最適化における均質化法を用いた緩和と似た議論が必要になる。

1.4 ジオメトリック形状最適化

1.4.1 最適化問題の定式化

ジオメトリック形状最適化問題に関する研究の起源は、1908 年の Hadamard [44] の薄膜の基本振動数の最大化問題に関する研究であると言われている。Hadamard は滑らかな境界を仮定して、境界が法線方向に移動したときの移動量に関する目標関数の変動量、即ち境界に関する変分を定義した。この、初期形状を与え、その境界が形状感度によって導出された速度で法線方向に移動するという考え方は、変分原理を適用することによって、理論的に明確であり、数値計算法としても効果的な優れた方法となる。このジオメトリック形状最適化の例として、図 1.2 に示す領域の最適化問題を考える。

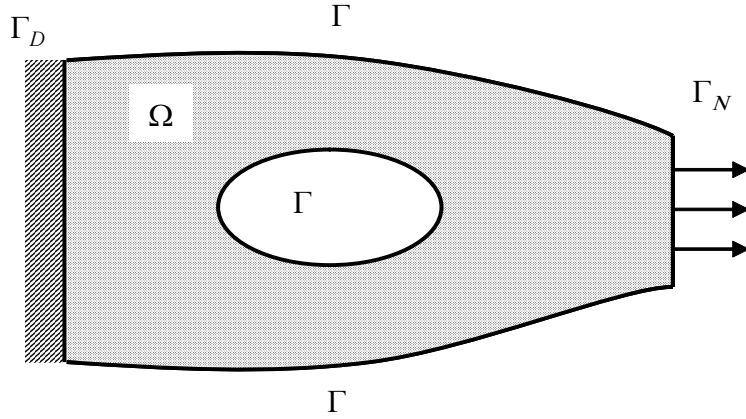


Figure 1.2: Example of admissible design and design variable in shape optimization problem

領域 Ω の境界 $\partial\Omega$ は以下のように，通常境界 Γ とノイマン境界条件 Γ_N ，ディリクレ境界条件 Γ_D で構成されるものとする．

$$\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_N \cup \Gamma_D \quad (1.6)$$

このとき，領域 Ω における線形弾性問題が以下のように表されるとする．

$$\begin{cases} -\Delta \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \Gamma_D \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = g & \text{on } \Gamma_N \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \text{on } \Gamma \end{cases} \quad (1.7)$$

ここで，弾性テンソルは簡単のため，単位テンソル I とし，変位ベクトルを \mathbf{u} とした．また，領域 Ω の体積が V_0 となるよう制約されるとすると，この問題における許容される設計案の集合は，以下のように表される．

$$\mathcal{U}_{\text{ad}} = \left\{ \Omega \subset \mathbb{R}^N \text{ such that } \Gamma_D \cup \Gamma_N \subset \partial\Omega \text{ and } \int_{\Omega} d\mathbf{x} = V_0 \right\} \quad (1.8)$$

以上より，目標関数 J の最小化を目的とした場合の，領域 Ω の形状最適化問題は以下のように表される．

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(\Omega) \quad (1.9)$$

この問題は，設計変数が Ω であり，最適化の過程で式 (1.7) によって支配される領域が変化することになるため，一般的に寸法最適化よりも解を得ることが困難になる．この最適化問題の実装方法としては，例えば，境界 $\partial\Omega$ を図 1.3 のように滑らかなスプライン曲線によって表し，そのコントロールポイントを形状感度に従い，法線方向に移動させることにより，最適化を行う．

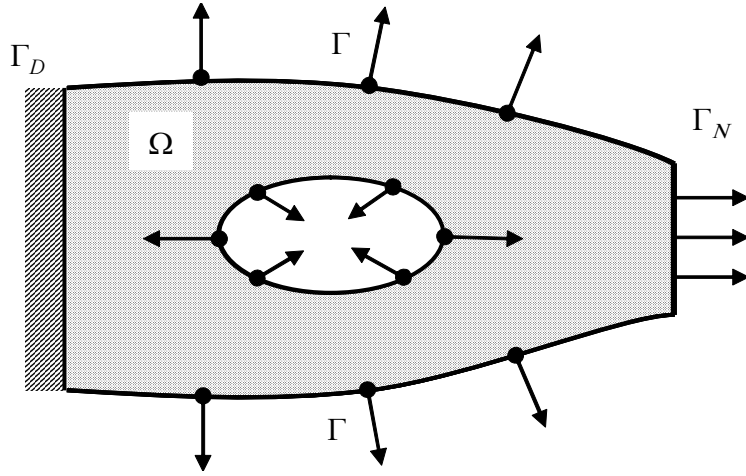


Figure 1.3: Example of representation of domain by control points and spline curve

このように領域 Ω を表現した場合、目標関数及び後述の形状感度導出のため、一般的には式 (1.7) を有限要素法を用いて解くが、最適化の過程で領域 Ω が変化するため、繰り返し計算ごとにメッシュの再生成を行わなければならない。そのため、メッシュの再生成が不要なパラメトリック形状最適化の場合と比較して、計算量が非常に多くなる。

1.4.2 感度解析

この最適化問題の解法としては、形状微分に基づき感度を導出し、設計変数を勾配法によって更新する方法が一般的である。ここでは、Murat と Simon[74, 100] の方法に基づき、形状微分を導出する。最初に、領域 Ω について変換 T を以下のように定義する。

$$T = (Id + \theta), \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad (1.10)$$

これを用いて、領域 Ω を図 1.4 のように、領域 Ω_0 と変換 T を用いて以下のように表す。

$$\Omega_\theta = T(\Omega_0) = (Id + \theta)(\Omega), \quad \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \quad (1.11)$$

ここで、 Id は単位元を表し、十分小さな θ に対し、 $(Id + \theta)$ は \mathbb{R}^d 空間における微分同相写像となる。

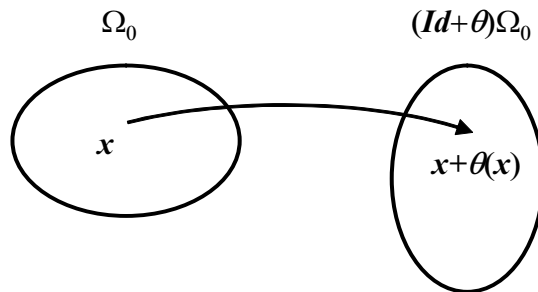


Figure 1.4: Definition of domain transformation

さらに、以下の定義が成り立つ。

定義 1-1 Ω における $J(\Omega)$ の形状微分は, $\theta \rightarrow J((Id + \theta)(\Omega))$ を適用した, $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ 空間における 0 でのフレッシュェ微分となるとする. 即ち, 以下の式が成り立つと仮定する.

$$J((Id + \theta)(\Omega)) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \text{ with } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0 \quad (1.12)$$

ここで, $J'(\Omega)$ は $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ 空間における連続した線形形式となる.

さらに, 古典的な結果に従えば, 直接微分 $J'(\Omega)$ は $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ は境界 $\partial\Omega$ における法線方向のトレース $\theta \cdot n$ にも依存するので, 以下の補題が成り立つ (図 1.5 参照).

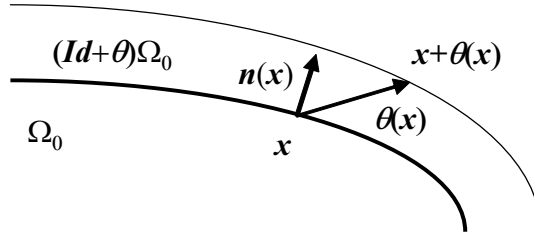


Figure 1.5: Variation of a domain by a vector

補題 1-2 Ω を有界な滑らかな開集合とし, $J(\Omega)$ を Ω における微分可能な関数とする. このとき, 微分 $J'(\Omega)$ は以下を満たす.

$$J'(\Omega)(\theta_1) = J'(\Omega)(\theta_2) \quad (1.13)$$

ただし, $\theta_1, \theta_2 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ は $\theta_2 - \theta_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ かつ以下を満たす.

$$\theta_1 \cdot n = \theta_2 \cdot n \text{ on } \partial\Omega \quad (1.14)$$

補題 1-3 Ω を有界な滑らかな開集合とし, $\phi(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ を定義し, 以下のように $J(\Omega)$ を定義する.

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \phi(x) dx \quad (1.15)$$

このとき, J は Ω で微分可能で, 任意の $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ について以下が成り立つ.

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Omega} \text{div}(\theta(x)\phi(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x)\phi(x) ds \quad (1.16)$$

補題 1-4 Ω を有界な滑らかな開集合とし, $\phi(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ を定義し, 以下のように $J(\Omega)$ を定義する.

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(x) ds \quad (1.17)$$

このとき, J は Ω で微分可能で, 任意の $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ について以下が成り立つ.

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + H\phi \right) ds \quad (1.18)$$

ここで, H は $\partial\Omega$ の平均曲率であり, $H = \text{div}n$ で定義される.

例えば，目標関数に以下で表される平均コンプライアンスを設定すると，

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dx + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} ds = \int_{\Omega} \mathbf{A}e(\mathbf{u})e(\mathbf{u})dx \quad (1.19)$$

形状感度は以下のように表される．

$$J'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\Gamma_N} \left(2 \left[\frac{\partial \mathbf{g} \cdot \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} + H\mathbf{g} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \right] - \mathbf{A}e(\mathbf{u})e(\mathbf{u}) \right) \boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\Gamma_D} \mathbf{A}e(\mathbf{u})e(\mathbf{u})\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.20)$$

以上の結果をもとに，目標関数の形状微分を以下のように記述する．

$$J'(\Omega)(\boldsymbol{\theta}) = \int_{\partial\Omega} v\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.21)$$

ここで， v は式 (1.20) のように目標関数に依存する関数である．この結果をふまえ， $\boldsymbol{\theta}$ を以下のように設定する．

$$\boldsymbol{\theta} = -v\mathbf{n} \quad (1.22)$$

さらに，以下のように領域 Ω を更新する．

$$\Omega_t = (\mathbf{Id} + t\boldsymbol{\theta})\Omega \quad (1.23)$$

ここで， $t > 0$ は微小な降下幅である．これを式 (1.12) に代入して，

$$J(\Omega_t) = J(\Omega) - t \int_{\partial\Omega} v^2 ds + \mathcal{O}(t^2) \quad (1.24)$$

となるため，このとき，目標関数の減少が保障されることになる．

また，この定式化において，関数 v の滑らかさが保障されていないため，式 (1.22) において， $\boldsymbol{\theta}$ が不連続になる可能性があり，このことが数値計算の妨げになる場合がある．そこで，関数 v の滑らかさを保障するため，例えば次式を用いて v を L^2 空間上の関数から， H_0^1 空間上の関数に変換する方法がある．

$$\begin{cases} -\Delta\boldsymbol{\theta} = 0 \text{ in } \Omega \\ \boldsymbol{\theta} = 0 \text{ on } \Gamma_D, \frac{\partial\boldsymbol{\theta}}{\partial\mathbf{n}} = -v\mathbf{n} \text{ on } \Gamma_N \end{cases} \quad (1.25)$$

1.4.3 レベルセット法に基づく形状最適化

通常の形状最適化では，設計変数は滑らかな境界であり，その移動によって最適解が更新されるため，一度それらを定めたら，あくまでもそれらを基準とした形状変更しか行うことができない．そのため，局所最適解に陥り易く，また，形状の更新の度に有限要素メッシュの再生成が必要なため，計算量が非常に多くなる．近年，これらの問題を解消した新たな形状最適化法として，レベルセット法に基づく形状最適化が Allaire[5, 6]，Wang[113] によって提案された．レベルセット法は Osher と Sethian[79] によって平均曲率流の数値計算法として提案され，現在では数値流体力学，画像処理等の様々な分野における移動境界問題に適用されている．レベルセット法では，領域の境界が陰関数を用いて表現されるため，オイラー型のメッシュを用いて数値計算が可能であり最適化の過程で計算量が一定である，穴の消失といった形態の変化が考慮可能である等の利点がある．ここでは，Allaire[6] の方法に基づき，レベルセット法に基づく形状最適化について説明する．

初めに、レベルセット関数を用いて最適化の対象となる領域を表現する。今、弾性テンソルが A で表される材料で構成される最適構造 Ω を含む設計領域 D を考えると、この領域の状態はレベルセット関数で以下のように表現される。

$$\begin{aligned}\psi = 0 &\iff x \in \partial\Omega \cap D \\ \psi < 0 &\iff x \in \Omega \\ \psi > 0 &\iff x \in (D \setminus \bar{\Omega})\end{aligned}\tag{1.26}$$

即ち、レベルセット関数の 0 等高線が境界を表し、負になる箇所が最適構造を表し、正になる箇所には構造が存在しないことを表す。このレベルセット関数 ψ を用いて、領域 Ω の法線ベクトル n は $\nabla\psi/|\nabla\psi|$ と表され、その曲率 κ は $\text{div}n$ で表される。 n や κ は理論的には境界のみで定義可能だが、レベルセット法においては、領域 Ω 全体で定義可能である。ここで、領域 $D \setminus \bar{\Omega}$ に非常に弱い材料が存在すると仮定すると、弾性テンソルは以下のように表される。

$$A^*(x) = \rho(x)A \text{ with } \rho = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega, \\ 10^{-3} & \text{in } D \setminus \Omega. \end{cases}\tag{1.27}$$

このように、密度関数 ρ は構造と非構造に対応する不連続な値となり、中間値は存在しない。

ここで、簡単のため、構造に体積力は作用しないものとし、構造の境界 ∂D が次のように構成されるものとする。

$$\partial D = \partial D_D \cup \partial D_N \cup \partial D_0\tag{1.28}$$

ここで、 ∂D_D はディリクレ境界条件が設定される境界を表し、 ∂D_N は表面力が作用するノイマン境界条件が設定される境界を表し、 ∂D_0 は表面力が作用しないノイマン境界条件が設定される境界を表すものとする。

以上より、レベルセット関数によって表現される構造における線形弾性問題は、以下のように表される。

$$\begin{aligned}-\text{div}(A^*e(u)) &= 0 \text{ in } D \\ u &= 0 \text{ on } \partial D_D \\ (A^*e(u))n &= g \text{ on } \partial D_N \\ (A^*e(u))n &= 0 \text{ on } \partial D_0\end{aligned}\tag{1.29}$$

さらに、この境界が仮想的な時間 t で変化すると考える。最初に、レベルセット関数の定義より、

$$\psi(t, x(t)) = 0 \text{ for any } x(t) \in \partial\Omega(t)\tag{1.30}$$

この式を t で微分して、領域境界の法線方向の速度を $V(t, x)$ とすると、

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \dot{x}(t) \cdot \nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + Vn \cdot \nabla\psi = 0\tag{1.31}$$

が得られる。さらに、法線ベクトル n は $n = \nabla\psi/|\nabla\psi|$ と表されるので、レベルセット関数の一般的な支配方程式であるハミルトン-ヤコビ方程式が以下のように得られる。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + V|\nabla\psi| = 0\tag{1.32}$$

このハミルトン-ヤコビ方程式は、最適構造の境界 $\partial\Omega$ のみならず、速度 V が求められる領域 D 全体で定義される。一般に、このハミルトン-ヤコビ方程式は滑らかな解を持たず、解の存在と滑らかさは粘性解理論によって議論される。

以上のレベルセット関数を用いた領域表現に基づき，形状最適化問題を考える．以下の領域最適化問題に対し，

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) \quad (1.33)$$

形状微分を以下のように考える．

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v\theta \cdot \mathbf{n} ds \quad (1.34)$$

関数 v は例えば式 (1.20) のように計算される．ここで，法線方向 \mathbf{n} ，平均曲率 H ，状態変数 u 及び随伴状態 p が領域 D 全体で定義されるため，関数 v も領域全体で定義される． D における θ を以下のように定義する．

$$\theta = -v\mathbf{n} \quad (1.35)$$

よって， θ の法線成分 $\theta \cdot \mathbf{n} = -v$ がハミルトン-ヤコビ方程式の移流速度に対応することになり，以下の式が得られる．

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - v|\nabla \psi| = 0 \quad (1.36)$$

この式を解くことにより，レベルセット関数で表現される領域の最適形状が得られる．

1.4.4 形態の変化を考慮した形状最適化

形状最適化においては，構造に穴を開けたりするような形態の変更を行うことは不可能である．最適設計問題においては，形態の変化によって時に劇的な性能向上が起こりうるため，これは重大な欠点となりうる．それに対し，領域 Ω に関して，図 1.5 に示すように穴の数も含めた最適化を行う方法が存在する．

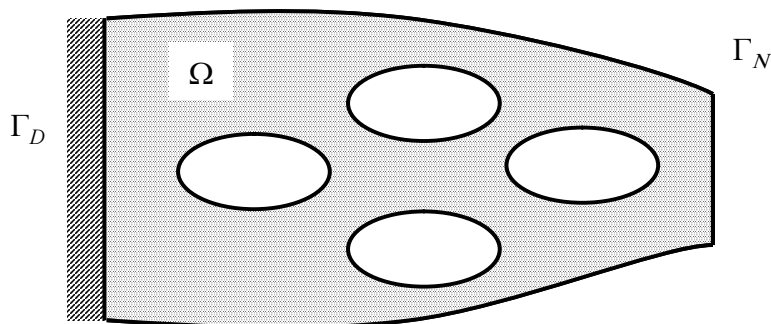


Figure 1.6: Example of domain hole nucleation is admissible

第一に，バブルメソッド [34] やトポロジカルデリバティブ [39, 101] のように，領域の最適化の仮定で，ある基準を設け，構造中に微小な空孔を生成する方法がある．このトポロジカルデリバティブとレベルセット法に基づく形状最適化も提案されている [4, 22]．しかし，これらの方法は，最適化過程での場当たりの手法であり，大域的に最適解を求める方法として最適ではない．第二に，領域 Ω を包括するような領域 D を設定し， D 内に特性関数 χ を設定し，それを用いて領域 Ω を表現する方法がある．この方法においては特性関数 χ の連続性は仮定されておらず，形状最適化問題を領域 D 内の材料分布問題として考えることができるため，穴の生成，消失といった形態変化も実現可能になる．この方法が一般的にトポロジー最適化と呼ばれており，次節で詳しく説明する．

1.5 トポロジー最適化

トポロジー最適化法においては，形状の最適化問題が，ある領域内の複合材料の二相最適化問題として表される．そのうち一相を，弾性問題の場合は極めて弱い，熱伝導問題の場合は極めて熱伝導率の低い材料と仮定することで，その材料が存在する領域は空孔と見なされる．即ち，構造の形状及び形態はそれらの二相の材料の境界として表現される．体積制約は片方の材料の総体積に設けられ，その条件化で最も優れた構造を導出することが目的となる．しかし，この条件では，片方の材料が無限小の形状で分布するような構造が最適解となりうる．このような，一方の材料の無限小の集合がもう一方の材料内に分布している状態，即ち複合材料としてのみ解釈可能であり，その解を最適形状を表すものとして解釈することはできない．このような問題を解決する方法は二つある．一つは，ペリメータ制約のような，領域の滑らかさや形態に制約を与える条件を加えること [8, 43, 84]，もう一つは図 1.7 のように均質化法の考え方をを用いて，このような微小材料が分布するの複合材料の性質を数学的に導出し，二相の最適化問題を材料密度最適化問題に置き換える方法である．この操作により，不良問題を解く方法は，均質化法による緩和 (relaxzation) と呼ばれる．以下トポロジー最適化に関する最も一般的な解法である均質化法について述べる．

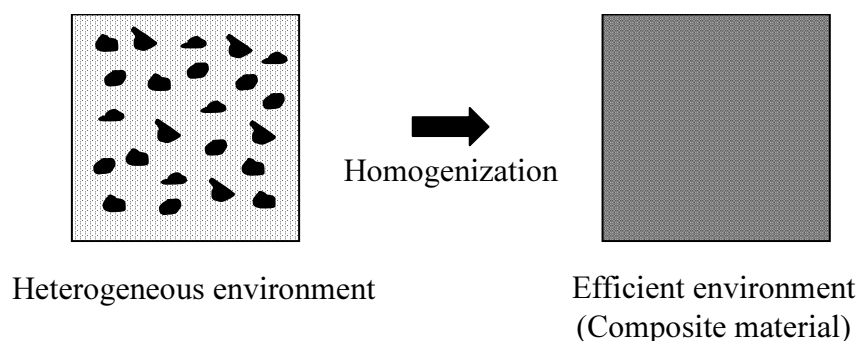


Figure 1.7: Homogenization of a microstructure

均質化法を最適化に導入する最初の試みはフランスで Murat と Tartar [76, 106]，ロシアで Cherkhev と Lurie [40, 63, 64]，アメリカで Kohn と Strang [56] によって行われた．それらの理論の数値計算法としての実装は，Givansky と Cherkhev [40]，Goodman と Kohn，Reyna [42]，Lavrov と Lurie，Cherkhev [58] らによって学術的な問題に対して行われ，1988 年 Bendsøe と Kikuchi [13] によって初めて工学的な形状，形態最適化法として実装された．この方法はその後多くの工学的問題に適用され，発展し続けてきた．

以下，文献 [1] に基づき，線形弾性問題に関するトポロジー最適化について述べる．

1.5.1 特性関数を用いた定式化

領域 Ω において，以下の弾性テンソル A と B を持つ，等方性の弾性体 A と B が複合材料として混在しているとする．

$$A = 2\mu_A I_4 + \left(\kappa_A - \frac{2\mu_A}{N} \right) I_2 \otimes I_2 \quad (1.37)$$

$$B = 2\mu_B I_4 + \left(\kappa_B - \frac{2\mu_B}{N} \right) I_2 \otimes I_2 \quad (1.38)$$

ここで、 μ_A と μ_B は横弾性係数、 κ_A と κ_B は体積弾性係数、 I_4 と I_2 はそれぞれ、恒等テンソルと恒等マトリクスである。ただし、各弾性係数には次の関係が成り立つとする。

$$0 < \mu_A \leq \mu_B, \quad 0 < \kappa_A \leq \kappa_B \quad (1.39)$$

このとき、ラーメの定数は以下で表される。

$$\lambda_A = \kappa_A - \frac{2\mu_A}{N}, \quad \lambda_B = \kappa_B - \frac{2\mu_B}{N} \quad (1.40)$$

ここで、領域 Ω において、相 A が占める位置においては $\chi(x) = 1$ となり、相 B が占める位置においては $\chi(x) = 0$ となる特性関数を導入すると、領域中の位置 x における弾性テンソルは以下のように定義される。

$$\mathbf{A}_\chi(x) = \chi(x)\mathbf{A} + (1 - \chi(x))\mathbf{B} \quad (1.41)$$

ここで、両材料間の界面が完全に結合されており、変位、応力等の物理量がその間で連続であると仮定すると、体積力 $f(x)$ が作用し、境界 $\partial\Omega$ が完全固定された場合の、領域 Ω における状態方程式は以下で表される。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_\chi e(\mathbf{u}_\chi)) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}_\chi = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.42)$$

ここで、 $\mathbf{u}_\chi(x)$ は変位ベクトル、 $e(\mathbf{u}_\chi)$ は $e(\mathbf{u}_\chi) = (\nabla\mathbf{u}_\chi + (\nabla\mathbf{u}_\chi)^T)/2$ で表されるひずみテンソルである。 $\mathbf{A}_\chi(x)$ は $L^\infty(\Omega)$ 空間に属し、強圧なので、式 (1.42) は $H_0^1(\Omega)$ 空間に属する唯一の解 \mathbf{u}_χ を持つ。ここで、この構造の性能が以下の目標関数 J によって評価されるとする。

$$J(\chi) = \int_{\Omega} [\chi(x)g_A(x, \mathbf{u}_\chi(x)) + (1 - \chi(x))g_B(x, \mathbf{u}_\chi(x))]dx \quad (1.43)$$

ここで、 g_A と g_B は位置 x とその位置における変位 $\mathbf{u}_\chi(x)$ のみに依存する関数である。最適構造は J を最小化する特性関数 χ によって表される。代表的な例としては、次式で表される Ω の平均コンプライアンス、即ち荷重によって成される仕事がある。

$$J(\chi) = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{u}_\chi(x)dx \quad (1.44)$$

ここで、特性関数 χ は $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ 空間に属し、その領域全体での積分が一定の値 V_A になる、即ち材料 A の総体積が V_A で制約されるものとする。

$$\inf_{\substack{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\}), \\ \int_{\Omega} \chi(x)dx = V_A}} J(\chi) \quad (1.45)$$

このような体積制約は、変分問題においては、一般的にラグランジュ未定乗数を用いて計算される。即ち、式 (1.45) は一般的に次のように表される。

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})} J(\chi) + l \int_{\Omega} \chi(x)dx \quad (1.46)$$

式 (1.46) において、いずれのラグランジュ未定乗数においても対応する体積制約 V_A の値が存在する。しかし、その関係は一般的には明確でないため、数値計算においては厳密な体積制約を実現するのは困難である。

式 (1.45) と式 (1.46) で表される問題に関して重要なことは、許容される解においてなめらかさや形態の制約が全く含まれていないことである。これらの最小化問題について、目標関数 J の極小値に近づく以下の最小化数列 $(\chi_n)_{n \leq 1}$ を考える。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(\chi_n) = \inf J(\chi) \quad (1.47)$$

式 (1.45) と式 (1.46) で表される最小化問題が少なくとも一つの解を持つためには、以下の条件を満たす、 $(\chi_n)_{n \leq 1}$ の補数列が存在し、その極限が以下のような条件を満たすことが必要である。

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \chi_n = \chi_\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} J(\chi_n) \leq J(\chi_\infty) \end{cases} \quad (1.48)$$

式 (1.47) と式 (1.48) を満たすには、 $(\chi_n)_{n \leq 1}$ がコンパクトであり、 J が連続である必要がある。しかし、 $(\chi_n)_{n \leq 1}$ については以下の式が成り立ち、

$$\|\chi_n\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \quad (1.49)$$

弱収束のみが定義できる。このとき、明らかに最小化数列はコンパクトであるが、 J が連続という条件を満たすことができない。このように、通常の方法では、式 (1.45) と式 (1.46) で表される最小化問題の解の存在は証明できない。ここで、後に説明する補題 1-6 より、 $L^\infty(\Omega)$ 空間で極限 χ_∞ に弱収束する $(\chi_n)_{n \leq 1}$ の補数列が存在する。この極限 χ_∞ は通常、特性関数ではなく連続関数となる。

補題 1-5 K が \mathbb{R}^p 空間の捕集合のとき、 $L^\infty(\Omega; K)$ 空間の弱閉包 (weak closure) は $L^\infty(\Omega; \mathcal{K})$ となる。ただし、 \mathcal{K} は K の凸閉包である。

この補題の証明は例えば [1] を参照されたい。この結果を $K = \{0, 1\}$ に当てはめると、 $\mathcal{K} = [0, 1]$ がその凸閉方と見なせる。即ち、領域 Ω における、相 A によって占められる領域を表す特性関数の極限は、領域 Ω における相 A の密度分布を表す関数になる。言い方を変えれば、式 (1.45) と式 (1.46) の最適化問題において許容される解の空間は通常は最小化数列で表現されることはなく、 $L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ 空間で唯一の解を持つことはない。このことは、Cheng と Olhoff の論文にもあるメッシュ依存の不安定解にも見られる [27]。よって式 (1.45) と式 (1.46) の最適化問題は数学的には不良問題となり、解を得るためには許容する解空間の定義を変更したり、問題を緩和したり、新たに幾何的な制約を加える必要がある。

1.5.2 均質化法を用いた緩和

ここでは、式 (1.45) と式 (1.46) の最適化問題の解を得るために、問題を緩和することを考える。即ち、最小化数列の挙動を考え、それに合わせた解空間を再設定する。補題 1-4 より、通常、特性関数の弱収束先は $[0, 1]$ の値をとる密度関数になる。この密度関数に対応する弾性テンソルの収束について以下で説明する。

最初に、均質化法における重要な概念である H-収束について説明する。H-収束は、その基本的概念が共通しているため、広義では G-収束と呼ばれることもあるが、G-収束の適用範囲が対称な作用素に限られているのに対して、H-収束は非対称作用素にも適用可能である。G-収束は Spagnolo[103]、De Giorgi と Spagnolo[30] によって導入され、H-収束は Murat と Tartar[75] によって導入された。後者はしばしば強 G-収束と呼ばれることがある。H-収束の特徴はソボレフ空間における弱収束を系統的に扱えることにある。

ここで $L^p(\Omega)$ 空間の弱収束とは以下のように定義される。 u_ϵ ($\epsilon \rightarrow 0$) を $L^p(\Omega)$ 空間の関数列として、 $L^p(\Omega)$ 空間の双対空間 $L^{p'}(\Omega)$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) における任意のテスト関数を $\phi(x)$ とすると、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\epsilon(x) \phi(x) dx = \int_{\Omega} u(x) \phi(x) dx \quad (1.50)$$

が成り立つとき、 u_ϵ は u に弱収束するといい、次のように表記する。

$$u_\epsilon \rightharpoonup u \quad \text{in } L^p(\Omega) \quad (1.51)$$

ただし, $p = +\infty$ のときは $L^\infty(\Omega)$ の双対空間は $L^1(\Omega)$ 空間でないため, $L^1(\Omega)$ 空間に属する任意のテスト関数 $\phi(x)$ を用いて式 (1.50) が成り立つものとし, *弱収束と表記する.

ここで, 有界な数列 u_ϵ に関して, 以下の補題が成り立つ.

補題 1-6 $(u_\epsilon)_{\epsilon>0}$ が $L^p(\Omega)$ $1 < p \leq +\infty$ 空間での有界な数列のとき, 即ち ϵ の値によらず以下の式を満たす定数 C が存在するとき,

$$\|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C \quad (1.52)$$

$L^p(\Omega)$ 空間において $1 < p < +\infty$ のときは u に弱収束, $p = +\infty$ のときは*弱収束する補数列 $(u_\epsilon)'_\epsilon$ が存在する.

また, $W^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) をソボレフ空間とすると, 強収束と弱収束はソボレフ空間においても定義できる. さらに, 以下の Rellich の定理より, $W^{1,p}(\Omega)$ 空間での弱収束は $L^p(\Omega)$ 空間での強収束を意味する.

補題 1-7 (Rellich の定理) (u_ϵ) が $W^{1,p}(\Omega)$ ($1 \leq p < \infty$) 空間での有界な数列のとき, $L^p(\Omega)$ 空間で u に強収束する補数列 u_ϵ が存在し, それは $W^{1,p}$ 空間では u に弱収束する.

これは, 二次元の場合はソボレフの埋蔵定理より $W^{1,p}$ 空間は $L^p(\Omega)$ 空間にコンパクトに埋め込まれることにより証明できる.

以上の弱収束の概念を線形弾性問題に対して適用する. \mathcal{M}_N^s を N 次元実数正方形行列の空間とし, \mathcal{M}_N^4 を対称行列に作用する次の 4 階の対称テンソルの空間とする.

$$\mathcal{M}_N^4 = \{A = (a_{ijkl})_{1 \leq i,j,k,l \leq N} | a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl} = a_{ijlk}\} \quad (1.53)$$

ここで, 任意の正の定数 α と β ($\alpha\beta \leq 1$) を用いて弾性テンソルの許容空間 $\mathcal{M}_{\alpha,\beta}$ は \mathcal{M}_N^4 の補空間として以下で定義される.

$$\mathcal{M}_{\alpha,\beta} = \left\{ M \in \mathcal{M}_N^4 \text{ such that } \begin{cases} M\xi \cdot \xi \leq \alpha|\xi|^2 \\ M^{-1}\xi \cdot \xi \leq \beta|\xi|^2 \end{cases} \forall \xi \in \mathbb{R}^N \right\} \quad (1.54)$$

さらに, 許容される弾性テンソルの空間として, $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$ を定義し, 連続する弾性テンソルの法則の数列 $A^\epsilon(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha,\beta})$, $\epsilon \rightarrow 0$ を考える. このとき, 荷重ベクトル $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ を用いて, 線形弾性体の釣り合い式が次のように成り立つ.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^\epsilon(x) e(u_\epsilon)(x) = f(x) \text{ in } \Omega \\ u_\epsilon = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.55)$$

ここで, u_ϵ は $H_0^1(\Omega)^N$ 空間で定義される変位ベクトル, $e(u_\epsilon)$ は $e(u_\epsilon) = 1/2(\nabla u_\epsilon + (\nabla u_\epsilon)^T)$ で定義される, $L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)$ に属するひずみテンソルであり, 応力テンソルは $\sigma_\epsilon = A^\epsilon e(u_\epsilon)$ と表され, 同様に $L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)$ に属する. さらに, 式 (1.55) は以下のように弱形式で表すことができる.

$$\int_{\Omega} A^\epsilon e(u_\epsilon) : e(\phi) = \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)^N} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega) \quad (1.56)$$

f が滑らかで, $L^2(\Omega)^N$ 空間に属するとき, 双対プロダクト $\langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)^N}$ は $\int_{\Omega} f(x) \cdot \phi(x) dx$ に等しい. ここで, 式 (1.56) の ϕ を u_ϵ で置き換えると, A^ϵ が強圧なので以下の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} \alpha \|e(u_\epsilon)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)}^2 &\leq \int_{\Omega} A^\epsilon e(u_\epsilon) : e(u_\epsilon) dx \\ &= \langle f, \phi \rangle_{H^{-1}, H_0^1(\Omega)^N} \\ &\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)^N} \|u_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)^N} \end{aligned} \quad (1.57)$$

さらに, Ω はディレクレ境界条件を伴う有界な領域なので, Ω について Korn の不等式 [3] が成り立つ. 即ち, 次式を満たす定数 C が存在する.

$$\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq C \|e(\phi)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)} \quad \forall \phi \in H_0^1(\Omega)^N \quad (1.58)$$

また, 式 (1.58) の逆も成り立つので, $\|e(\phi)\|_{L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)}$ は $H_0^1(\Omega)^N$ 空間における通常のノルム $\|\phi\|_{H_0^1(\Omega)^N}$ に等しい. これらにより, Lax-Milgram の定理を適用し, 式 (1.55) と式 (1.56) は唯一の弱解 $u_\epsilon \in H_0^1(\Omega)^N$ を持つ. さらに, この解について次の予想ができる.

$$\|u_\epsilon\|_{H_0^1(\Omega)^N} \leq \frac{C}{\alpha} \|f\|_{H^{-1}(\Omega^N)} \quad (1.59)$$

即ち, 数列 u_ϵ は $H_0^1(\Omega)^N$ 空間で有界であり, $H_0^1(\Omega)$ 空間は $L^p(\Omega)$ 空間に対して相対的にコンパクトなため, $H_0^1(\Omega)^N$ においても補題 1-6 が成り立ち, $H_0^1(\Omega)^N$ 空間で u に弱収束する. 同様に, 弾性テンソル A^ϵ についても有界なので, 応力テンソル列 $\sigma_\epsilon = A^\epsilon e(u_\epsilon)$ も $L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)$ 空間において有界であり, $L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s)$ で σ に弱収束するような補数列 σ_ϵ が存在する. 均質化法を適用する目的はひずみと応力とのそれぞれの収束限界における関係を求めることにある.

以上の議論を含め, H-収束の定義を以下のようにまとめる.

定義 1-8 任意の $f \in H^{-1}(\Omega)^N$ に対して, 次式が解数列 (u_ϵ) を持ち,

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^\epsilon(x) e(u_\epsilon)(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u_\epsilon = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.60)$$

u_ϵ が以下の条件を満たすとき,

$$\begin{aligned} u_\epsilon &\rightharpoonup u \text{ in } H_0^1(\Omega)^N \\ A^\epsilon e(u_\epsilon) &\rightharpoonup A^* e(u) \end{aligned} \quad (1.61)$$

$L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$ 空間に属する弾性テンソル列 $A^\epsilon(x)$ は H-極限 $A^*(x) \in \mathcal{M}_{\alpha, \beta}$ に H-収束すると言う. ただし, u は以下の式の解である.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} A^*(x) e(u)(x) = f(x) & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.62)$$

ここで, 上記の弾性テンソルに関する H-収束の定義は次の定理により意味を成す.

定理 1-9 $L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$ 空間における弾性テンソル列 $A^\epsilon(x)$ に対し, 均質化弾性テンソル $A^*(x) \in L^\infty(\Omega; \mathcal{M}_{\alpha, \beta})$ に弱収束する補数列 A^ϵ が存在する.

この H-収束の概念を等方性の弾性体 A と B の複合材料問題に拡張する. それぞれの材料の弾性テンソル A と B は対称で正定とし, このような正定対称テンソルの集合を T_N^s として, 以下を定義する.

定義 1-10 $\chi^\epsilon \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$ を特性関数列とし, A^ϵ を次式で表されるテンソル列とする.

$$A^\epsilon(x) = \chi^\epsilon(x)A + (1 - \chi^\epsilon(x))B \quad (1.63)$$

さらに, 次を満たす $\theta \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ と $A^* \in L^\infty(\Omega; T_N^s)$ が存在するとする.

$$\chi^\epsilon \rightharpoonup \theta(x) \text{ in } L^\infty(\Omega; [0, 1]) \quad (1.64)$$

$$A^\epsilon(x) \text{ H-converges to } A^*(x) \quad (1.65)$$

このとき、H-極限である A^* は、弾性体 A と B がそれぞれ θ と $1 - \theta$ の割合で混合され、マイクロストラクチャが特性関数列 $(\chi^\epsilon)_{\epsilon>0}$ で定義される複合材料の均質化弾性テンソルである。

ここで、 A^* はマイクロストラクチャの形状とそれぞれの材料の含有割合に基づき定まる値だが、その取り得る値の範囲を明確にする必要がある。H-収束理論に基づき導出された A^* の値の閉包を G-closure と呼び、以下にその定義を述べる。最初に、定義 1-10 に基づく、 A^* の取り得る値の集合を G_θ とすると、以下のように定義される。

$$G_\theta = \left\{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{T}_N^s) \mid \begin{array}{l} \exists \chi^\epsilon \text{ satisfying (1.64)} \\ A^\epsilon, \text{ defined by (1.63), satisfies (1.65)} \end{array} \right\} \quad (1.66)$$

ここで、G-closure の導出のため、上記の複合材料が周期的なマイクロストラクチャによって構成されている場合を考える。このとき、定数 $\theta \in [0, 1]$ に対し、周期的なマイクロストラクチャの均質化により得られる H-極限の集合で構成される \mathcal{T}_N^s の補集合を P_θ とすると、その特性関数を次のように定義すると、

$$\int_Y \chi(y) dy = \theta \quad (1.67)$$

P_θ に属する A^* は以下の二次形式で表される。

$$A^* \xi \cdot \xi = \min_{w(y) \in H_0^1(Y)} \int_Y (\chi(y) \mathbf{A} + (1 - \chi(y)) \mathbf{B}) (\xi + \nabla w) \cdot (\xi + \nabla w) dy \quad (1.68)$$

ここで、弾性問題の場合は、 ξ は定ひずみ、 w は変位ベクトルで、周期関数 Y のソボレフ空間 $H_{\#}^1(Y)$ に属する。よって、 P_θ は以下のように定義できる。

$$P_\theta = \{ A^* \in \mathcal{T}_N^s \text{ defined by (1.68) with } \chi(y) \text{ satisfying (1.67)} \} \quad (1.69)$$

この P_θ の閉包により、 G_θ は定義できる。

$$G_\theta = \overline{P_\theta} \quad (1.70)$$

これを用いて、 G_θ は以下のように再定義される。

定理 1-11 任意の関数 $\theta(x) \in L^\infty(\Omega; [0, 1])$ に対し、G-closure の集合 G_θ は以下で表される。

$$G_\theta = \{ A^* \in L^\infty(\Omega; \mathcal{T}_N^s) \mid A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ a.e. in } \Omega \} \quad (1.71)$$

ここで、任意の $\theta(x) \in [0, 1]$ に対し、 $G_\theta \subset \mathcal{T}_N^s$ は式 (1.70) で定義される。式 (1.71) は周期的な均質化によって得られる複合材料は、全ての複合材料の集合に対して稠密であることを示している。

以上の理論を用いて、以下の最適化問題の緩和を行う。

$$\inf_{\chi \in L^\infty(\Omega; \{0,1\})} J(\chi) \quad (1.72)$$

目標関数 J は以下で定式化されるものとする。

$$J(\chi) = \int_\omega [\chi(x) g_A(x, \mathbf{u}_\chi(x)) + (1 - \chi(x)) g_B(x, \mathbf{u}_\chi(x))] dx + l \int_\Omega \chi(x) dx \quad (1.73)$$

ここで、 l はラグランジュ未定乗数であり、 $\mathbf{u}_\chi(x)$ は次式の解で、 $H_0^1(\Omega)^N$ 空間に属する。

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\mathbf{A}_\chi e(\mathbf{u}_\chi)) = \mathbf{f} \text{ in } \Omega \\ \mathbf{u}_\chi = 0 \text{ on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.74)$$

ここで, $f \in L^2(\Omega)^N$ は体積力, $A_\chi = \chi A + (1 - \chi)B$ は弾性テンソルである. 補題 1-5 より, 特性関数列の弱収束極限は $[0, 1]$ の値をとる密度関数 θ になる. さらに, 異なる材料 A と B によって構成される複合材料の弾性テンソルはこの密度関数の関数になる. 許容可能な設計案はこれらの密度関数と弾性テンソルによって表され, その集合を CD と表記すると, 以下のように定義される.

$$CD = \{(\theta, A^*) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times \mathcal{M}_N^s) \mid A^*(x) \in G_{\theta(x)} \text{ a.e. in } \Omega\} \quad (1.75)$$

さらに, 目標関数は以下のように表される.

$$J^*(\theta, A^*) = \int_{\Omega} [\theta(x)g_A(x, \mathbf{u}(x)) + (1 - \theta(x))g_B(x, \mathbf{u}(x))]dx + l \int_{\Omega} \theta(x)dx \quad (1.76)$$

$\mathbf{u}(x)$ は次式の解で, $H_0^1(\Omega)^N$ 空間に属する.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A^* \mathbf{e}(\mathbf{u})) = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.77)$$

よって, 緩和された最適化問題は以下のように表される.

$$\min_{(\theta, A^*) \in CD} J^*(\theta, A^*) \quad (1.78)$$

式 (1.78) が式 (1.45) の緩和された問題であることを, 以下の定理にまとめる.

定理 1-12 最小化問題 (1.78) は以下の点において, 最小化問題 (1.45) の緩和された問題である.

1. 問題 (1.78) には少なくとも一つ解が存在する.
2. 特性関数で表される元問題の最小化数列 χ_n は $L^\infty(\Omega; [0, 1])$ 空間で密度関数 θ に弱収束する. さらに, それに対応する弾性テンソル $A_{\chi_n} = \chi_n A + (1 - \chi_n)B$ は (θ, A^*) が最小化作用素になるような複合材料の弾性テンソル A^* に H-収束する.
3. 反対に, J^* の全ての最小化作用素 $(\theta, A^*) \in CD$ は, 原問題の最小化数列 χ_n によって到達される. すなわち, θ は χ_n の $L^\infty(\Omega; [0, 1])$ における*弱収束極限であり, A^* は $A_{\chi_n} = \chi_n A + (1 - \chi_n)B$ の H-収束極限である.

1.5.3 最適化問題の緩和

以上の理論より, ここでは, 式 (1.45) と式 (1.46) の最適化問題において, 特性関数の弱収束先は $[0, 1]$ の値をとる密度関数であり, それに対応する均質化弾性テンソルの弱収束も確認された. ここでは, 式 (1.37) ~ 式 (1.40) で定義される複合材料について, ひずみエネルギー最小化問題におけるトポロジー最適化問題の緩和を行う. ただし, 材料 A は極めて弱い材料で, ほぼ空孔と見なせるものとする. 最初に, 問題 (1.74) において, 特性関数 χ に関する以下の最小化問題を考える.

$$\inf_{\chi} J(\chi) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \mathbf{u}_{\chi}(x)dx + l \int_{\Omega} \chi(x)dx \quad (1.79)$$

ここで, $\mathbf{u}_{\chi}(x)$ は式 (1.74) の解である. 第一項のひずみエネルギーを以下のように補ひずみエネルギーに変換する.

$$c(\chi) = \int_{\Omega} f(x) \cdot \mathbf{u}_{\chi}(x)dx = \min_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s) \\ -\operatorname{div}\sigma = \mathbf{f} \text{ in } \Omega}} \int_{\Omega} A_{\chi}^{-1} \sigma : \sigma dx \quad (1.80)$$

ここで、この最小化問題において、特性関数 χ が密度関数 θ に弱収束するとすると、最小化問題は以下のように表される。

$$\min_{(\theta, \mathbf{A}^*) \in \mathcal{CD}} \left\{ J^*(\theta, \mathbf{A}^*) = c(\theta, \mathbf{A}^*) + l \int_{\Omega} \theta dx \right\} \quad (1.81)$$

ただし、

$$c(\theta, \mathbf{A}^*) = \min_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s) \\ -\operatorname{div} \sigma = \mathbf{f} \text{ in } \Omega}} \int_{\Omega} \mathbf{A}^{*-1} \sigma : \sigma dx \quad (1.82)$$

であり、 \mathcal{CD} は式 (1.75) で表される。

ここで、この複合材料が、図 1.8(a) のように一方向への単純積層の場合には、均質化弾性テンソル \mathbf{A}^* は以下のように表される。

$$(1 - \theta) \left(\mathbf{A}^{*-1} - \mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} = \left(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} + \theta f_{\mathbf{A}}(e) \quad (1.83)$$

ここで、 $f_{\mathbf{A}}(e)$ は 4 階の非正定の対称テンソルで、任意の対象行列 ξ を用いて、以下のように表される。

$$f_{\mathbf{A}}(e) \xi \cdot \xi = \mathbf{A} \xi \cdot \xi - \frac{1}{\mu_{\mathbf{A}}} |\mathbf{A} \xi e|^2 + \frac{\mu_{\mathbf{A}} + \lambda_{\mathbf{A}}}{\mu_{\mathbf{A}} (2\mu_{\mathbf{A}} + \lambda_{\mathbf{A}})} ((\mathbf{A} \xi) e \cdot e)^2 \quad (1.84)$$

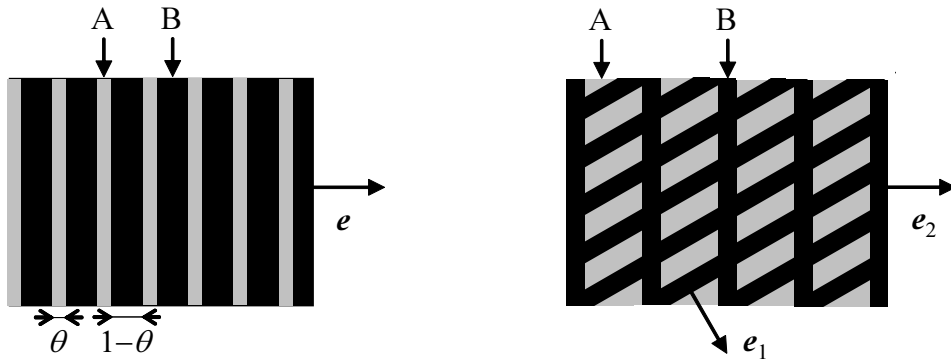
また、図 1.8(b) のように複数の配向角が存在する場合には、この式をそれぞれの配向角について重ね合わせることで適用可能であり、rank- p 材料に関する均質化弾性テンソル \mathbf{A}_p^* は以下のように導出される。

$$(1 - \theta) \left(\mathbf{A}_p^{*-1} - \mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} = \left(\mathbf{B}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \right)^{-1} + \theta \sum_{i=1}^p m_i f_{\mathbf{A}}(e_i) \quad (1.85)$$

ただし、

$$\sum_{i=1}^p m_i = 1 \text{ and } m_i \geq 0, 1 \leq i \leq p \quad (1.86)$$

である。



(a) A simple rank-1 laminate

(b) A simple rank-2 laminate

Figure 1.8: Example of laminates

また、Hashin-Shtrilman のエネルギー境界理論 [47] より、以下の補題が成り立つ。

補題 1-13 A^* が G_θ に属する等方性の均質化弾性テンソルで、以下のように定義されるとする。

$$A^* = 2\mu_* I_4 + \left(\kappa_* - \frac{2\mu_*}{N} \right) I_2 \otimes I_2 \quad (1.87)$$

このとき、弾性係数 κ_* と μ_* は以下を満たす。

$$\frac{1-\theta}{\kappa_* - \kappa_A} \leq \frac{1}{\kappa_B - \kappa_A} + \frac{\theta}{2\mu_A + \lambda_A} \quad (1.88)$$

$$\frac{1-\theta}{\kappa_B - \kappa_*} \leq \frac{1}{\kappa_B - \kappa_A} + \frac{1-\theta}{2\mu_B + \lambda_B} \quad (1.89)$$

かつ

$$\frac{1-\theta}{2(\mu_* - \mu_A)} \leq \frac{1}{2(\mu_B - \mu_A)} + \frac{\theta(N-1)(\kappa_A + 2\mu_A)}{(N^2 + N - 2)\mu_A(2\mu_A + \lambda_A)} \quad (1.90)$$

$$\frac{\theta}{2(\mu_B - \mu_*)} \leq \frac{1}{2(\mu_B - \mu_A)} + \frac{\theta(N-1)(\kappa_B + 2\mu_B)}{(N^2 + N - 2)\mu_B(2\mu_B + \lambda_B)} \quad (1.91)$$

以上の条件は、rank- p の等方性材料の積層複合材料について、 $p \leq (N+3)(N+2)(N+1)N/24$ を満たすとき、自動的に満たされる。これに従うと、 $N=2$ のとき、 $p=3$ が、 $N=3$ のとき、 $p=6$ が最適となる。

この条件を補わずみエネルギーに拡張して、以下の定理が成り立つ。

定理 1-14 $\sigma_1, \dots, \sigma_p$ を \mathcal{M}_N^s に属する対称行列とすると、 G_θ に属する任意の均質化弾性テンソル A^* は以下を満たす。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p A^{*-1} \sigma_i : \sigma_i &\geq \sum_{i=1}^p B^{-1} \sigma_i : \sigma_i \\ &+ \theta \max_{(\eta_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_N^s} \left[\sum_{i=1}^p \left(2\sigma_i : \eta_i - (A^{-1} - B^{-1})^{-1} \eta_i : \eta_i \right) - (1-\theta)g^c(\eta_1, \dots, \eta_p) \right] \end{aligned} \quad (1.92)$$

ただし、

$$g^c(\eta_1, \dots, \eta_p) = \max_{e \in S_{N-1}} \sum_{i=1}^p f_B^c(e) \eta_i : \eta_i \quad (1.93)$$

かつ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p A^{*-1} \sigma_i : \sigma_i &\leq \sum_{i=1}^p A^{-1} \sigma_i : \sigma_i \\ &+ (1-\theta) \min_{(\eta_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathcal{M}_N^s} \left[\sum_{i=1}^p \left(2\sigma_i : \eta_i - (A^{-1} - B^{-1})^{-1} \eta_i : \eta_i \right) - \theta h^c(\eta_1, \dots, \eta_p) \right] \end{aligned} \quad (1.94)$$

ただし、

$$h^c(\eta_1, \dots, \eta_p) = \min_{e \in S_{N-1}} \sum_{i=1}^p f_A^c(e) \eta_i : \eta_i \quad (1.95)$$

また、 $M = A, B$ に対して $f_M^c(e)$ は以下のように定義される。

$$f_M^c(e) \eta : \eta = M \eta : \eta - \frac{1}{\mu_M} |M \eta e| + \frac{\mu_M + \lambda_M}{\mu_M(2\mu_M + \lambda_M)} ((M \eta) e \cdot e)^2 \quad (1.96)$$

ただし、 S_{N-1} は単位球面を示す。

ここで、 $A = 0$ とすると、以下が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^p A^{*-1} \sigma_i : \sigma_i \geq \sum_{i=1}^p B^{-1} \sigma_i : \sigma_i + \frac{\theta}{1-\theta} g^*(\sigma_1, \dots, \sigma_p) \quad (1.97)$$

ただし、

$$g^c(\sigma_1, \dots, \sigma_p) = \max_{e \in S_{N-1}} \left(\sum_{i=1}^p 2\sigma_i : \eta_i - g^c(\eta_1, \dots, \eta_p) \right) \quad (1.98)$$

ここで、現在は積層方向ごとに考慮しているひずみエネルギーを一つのエネルギーとして考えると、 $p = 1$ と見なせるので、

$$A^{*-1} \sigma : \sigma \geq B^{-1} \sigma : \sigma + \frac{\theta}{1-\theta} g^*(\sigma) \quad (1.99)$$

が成り立つ。さらに、 $N = 2$ のとき、 $g^*(\sigma)$ は以下で得られる。

$$g^*(\sigma) = \frac{(\kappa + \mu)}{4\kappa\mu} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2 \quad (1.100)$$

ここで、 σ_1 と σ_2 は応力 σ の固有値を示す。さらに、rank-2 材料の場合は、それぞれの固有ベクトルの方向が積層方向に対応し、積層パラメータは以下のように決定される。

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2|} \quad (1.101)$$

また、 $N = 3$ のとき、 $\sigma_1 \leq \sigma_2 \leq \sigma_3$ とすると、 $g^*(\sigma)$ は以下で得られる。

$$g^*(\sigma) = \frac{1}{4\mu} \begin{cases} (|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|)^2 & \text{if } |\sigma_3| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2| \\ 2((|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2 + |\sigma_3|^2) & \text{if } |\sigma_3| \geq |\sigma_1| + |\sigma_2| \end{cases} \quad (1.102)$$

さらに、rank-3 材料の場合は、それぞれの固有ベクトルの方向が積層方向に対応し、積層パラメータは以下のように決定される。

$$m_1 = \frac{|\sigma_3| + |\sigma_2| - |\sigma_1|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_2 = \frac{|\sigma_1| - |\sigma_2| + |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|}, \quad m_3 = \frac{|\sigma_1| + |\sigma_2| - |\sigma_3|}{|\sigma_1| + |\sigma_2| + |\sigma_3|} \quad (1.103)$$

さらに、以上のような積層複合材料によって表される集合を、 $\mathcal{LD} (\subset \mathcal{CD})$ とすると、

$$\mathcal{LD} = \{(\theta, A^*) \in L^\infty(\Omega; [0, 1] \times \mathcal{M}_N^4) \mid A^*(x) \in L_{\theta(x)} \text{ a.e. in } \Omega\} \quad (1.104)$$

と表される。さらに、問題 (1.81) について、

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{CD}} J^*(\theta, A^*) = \min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{LD}} J^*(\theta, A^*) \quad (1.105)$$

が成り立つ。

以上の結果をもとに、最適化問題を以下のように表す。

$$\min_{(\theta, A^*) \in \mathcal{LD}} \left\{ J^*(\theta, A^*) = c(\theta, A^*) + l \int_{\Omega} \theta dx \right\} \quad (1.106)$$

ただし、

$$c(\theta, A^*) = \min_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s) \\ -\operatorname{div} \sigma = f \text{ in } \Omega}} \int_{\Omega} A^{*-1} \sigma : \sigma dx \quad (1.107)$$

ここで，式 (1.99) と式 (1.100) より，二次元の場合は，

$$\min_{\substack{\sigma \in L^2(\Omega; \mathcal{M}_N^s) \\ -\operatorname{div} \sigma = f \text{ in } \Omega}} \int_{\Omega} \mathbf{A}^{*-1} \sigma : \sigma dx = \mathbf{B}^{-1} \sigma : \sigma + \frac{\theta}{1-\theta} \frac{(\kappa + \mu)}{4\kappa\mu} (|\sigma_1| + |\sigma_2|)^2 \quad (1.108)$$

が成り立つので，式 (1.106) の θ に関する停留点が以下で得られる．

$$\theta = \max \left(0, 1 - \sqrt{\frac{g^*(\sigma)}{-l}} \right) \quad (1.109)$$

これにより，材料 B の最適密度分布 $1 - \theta$ が求められ，最適構造が得られる．

1.5.4 その他の均質化法に基づくトポロジー最適化

以上で述べた方法以外にも，均質化法に基づくトポロジー最適化法として，明確なマイクロストラクチャの形状を仮定し，それに基づき均質化弾性テンソルを導出し，マイクロストラクチャの寸法を設計変数にする方法（例えば [13, 69, 104]），完全に仮想的な材料を想定し，均質化弾性テンソルと材料密度分布の関係を仮定する方法（例えば [11, 14, 117]）が提案されている．特に後者の方法は，SIMP(The solid isotropic material with penalization model) 法と呼ばれ，その簡易な定式化のため，工学分野で広く用いられている．

2 フェーズフィールド法に基づくオイラー型形状最適化

2.1 導入

本章では、構造最適化の基礎研究として、フェーズフィールド法を用いた新たな形状最適化法を提案する。偏微分方程式で特定の物理問題が記述されるある領域において、特定の物理量の最適化を目的とし、その領域形状を変化される構造最適化問題を考える。このような問題は、機械製品の性能向上を目指す上で非常に重要な技術であり、様々な解法が提案されている。これらの解法の一般的な区分として、対称となる領域の境界を移動することにより最適化を行う形状最適化、対象の形状のみならず形態も最適化可能なトポロジー最適化が挙げられる。形状最適化は、Hadamardの研究[44]に始まり、多くの研究者によって発展させられてきた[48, 85, 102]。しかし、従来の一般的な方法においては二つの大きな問題点がある。一つは領域を支配する偏微分方程式の数値計算を行う際に、有限要素法を用いるのが一般的なため、領域の形状が更新される度に有限要素メッシュを再生成する必要があるため、計算コストが非常に高いこと。もう一つは、スプライン関数等で領域を陽的に表現するため、境界同士の接触による穴の消失等の境界のトポロジー変化を表現できないことである。トポロジー最適化は、多くの数学者によって基礎理論が構築され(例えば[56, 76, 63]), BendsøeとKikuchi[13]によって初めて工学的な形状・形態最適化手法として実装された。この方法は領域の形状のみならず形態も最適化可能であり、様々な工学的問題に適用され[15]、成功を収めている。しかし、基本的には最適構造が材料密度分布で表されるため、そこから明確な構造を得ることが難しい、圧力や熱放射等の境界形状に依存するような境界条件の設定が困難という問題点がある。近年、これらの問題を解消する方法として、序章で説明したレベルセット法に基づく形状最適化が提案されている。しかし、レベルセット関数の発展方程式であるハミルトン・ヤコビ方程式は移流方程式であり、数値計算上不安定になり易く、必ずしも安定した解が得られるわけではない。

他方、レベルセット法と同様に平均曲率流を含む移動境界を表現可能な方法として、フェーズフィールド法[24, 29]がある。フェーズフィールド法は相転移をシミュレートする方法として開発され、レベルセット法と同様に様々な移動境界問題に適用されてきた[17, 26, 66]。さらに、フェーズフィールド法のトポロジー最適化への適用もいくつか提案されている[18, 23, 114, 115, 118, 119]。しかし、レベルセット法とフェーズフィールド法の類似性が数多くの文献で述べられているにもかかわらず(例えば[6, 9, 21, 110]), フェーズフィールド法がレベルセット法と同様に陰関数を用いた領域表現に基づく形状最適化法として実装された例はない。そこで、本研究では、フェーズフィールド法を用い、オイラー型メッシュでの計算が可能で、形態変化にも対応可能というレベルセット法と同様の利点を持ち、かつ数値計算上安定した形状最適化法の構築を目指す。

2.2 フェーズフィールド法について

2.2.1 フェーズフィールド関数と発展方程式

フェーズフィールド法[24, 29]は相転移における移動境界問題をシミュレートするための方法として開発された。フェーズフィールド法においては、領域全体に相の状態を表すフェーズフィールド関数を設定し、異なる相にそれぞれ対応する値を設定する。これにより、領域内のある箇所における相の状態が関数の値により決定される。異なる相間の境界では、フェーズフィールド関数は滑らかに補間され、その領域はインターフェイスと呼ばれる。領域内に二つの相が存在するとき、フェーズフィールド関数を $\phi(x)$ とし、二つの相にそれぞれ $\phi = 0$, $\phi = 1$ とした場合の例を図2.1に示す。物理的な意味としては、フェーズフィールド関数は領域内

の各箇所における相の平均化された値を表す．このフェーズフィールド関数を用いて，二つの相に関する Van der Waals の自由エネルギーは以下のように表される．

$$F(\phi) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) \right\} dV \quad (2.1)$$

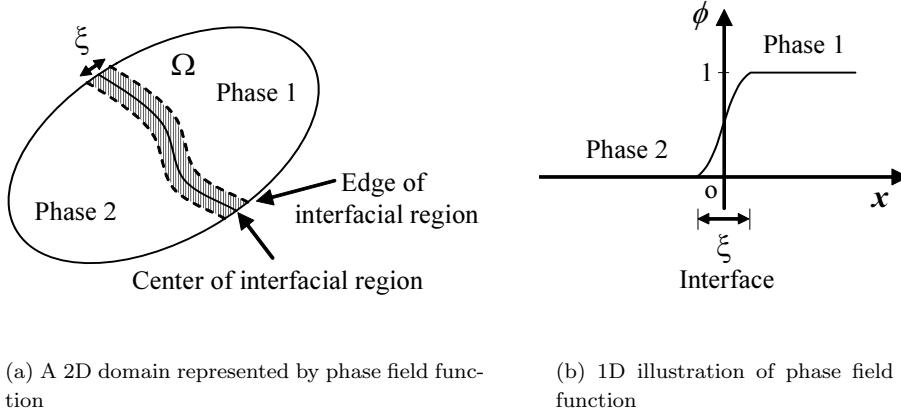


Figure 2.1: Example of domain represented by phase field function

第一項は平均場理論における干渉エネルギーを表し，第二項は二重井戸型ポテンシャルを表す．図 2.1 のように二つの相にそれぞれ $\phi = 0, \phi = 1$ が対応する場合は，井戸型ポテンシャルは $f'(0) = f'(1) = 0$ という性質を持つ．この二重井戸型ポテンシャルは，それぞれの相において，自由エネルギーが極小値をとることを意味する．しかし，異なる相間で，フェーズフィールド関数が急激に変化し勾配が大きくなることは，第一項の値の増加に繋がるため，その間は $0 < \phi < 1$ の値をとる微小なインターフェース領域が存在し，関数は滑らかに補間されることになる．

次に，このフェーズフィールド関数の時間変化を決定する発展方程式について述べる．最初に，フェーズフィールド関数が領域内でその総和が保存される量である場合を考える．この保存系のフェーズフィールド関数を改めて C と表すと，領域内で以下の連続の式が成り立つ．

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{j} \quad (2.2)$$

ここで， \mathbf{j} は流束ベクトルである．さらに，閉じた系での自由エネルギーが増加しないと仮定すると，以下の式が成り立つ．

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\delta F}{\delta C} \frac{\partial C}{\partial t} dx \leq 0 \quad (2.3)$$

式 (2.2) を式 (2.3) に代入して，流入のない境界条件を適用すると，次式が得られる．

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{\Omega} \left(\nabla \frac{\delta F}{\delta C} \right) \cdot \mathbf{j} dx \quad (2.4)$$

これが非正であるためには， \mathbf{j} が F に関して線形であると仮定すると，

$$\mathbf{j} = -M(C) \left(\nabla \frac{\delta F}{\delta C} \right) \quad (2.5)$$

が得られる．ただし， $M(C) > 0$ とする．これを式 (2.4) に代入して，

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot \left\{ M(C) \left(\nabla \frac{\delta F}{\delta C} \right) \right\} \quad (2.6)$$

簡単のため M を定数とし， F に式 (2.1) を用いると，

$$\frac{\partial C}{\partial t} = M \nabla^2 \left(-\nabla^2 C + \frac{\partial W}{\partial C} \right) \quad (2.7)$$

これは，Cahn-Hilliard 方程式 [25] と呼ばれ，保存場に関するフェーズフィールド関数の発展方程式として用いられる．

続いて，フェーズフィールド関数が領域内で保存されない場合について考える．フェーズフィールド関数を ϕ とすると，式 (2.3) は非保存の場合についても成り立つので，

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_{\Omega} \frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx \leq 0 \quad (2.8)$$

これが任意の ϕ で満たされるためには，

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -M(\phi) \frac{\delta F}{\delta \phi} = M \left\{ \nabla^2 \phi - \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \right\} \quad (2.9)$$

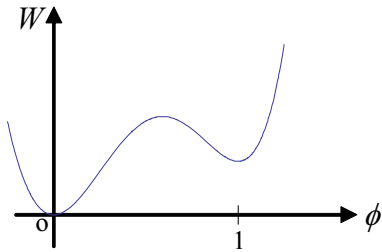
でなければならない．式 (2.9) は Allen-Cahn 方程式 [7] と呼ばれ，非保存場のフェーズフィールド関数の発展方程式として用いられる．

2.2.2 フェーズフィールド法とペリメータ最小化問題

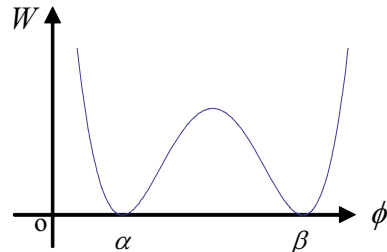
ここでは，Cahn-Hilliard 方程式で記述される系のように，領域内で秩序変数が保存される場合の解の存在について述べる．先の例で挙げたように，フェーズフィールド関数 $\phi(\Omega; [\alpha, \beta])$ の α と β がそれぞれ異なる相に対応する場合に，以下の最小化問題を考える．

$$\inf_{\substack{\phi \\ \int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}) dx = V_0}} \int_{\Omega} \frac{W(\phi)}{\varepsilon} + \varepsilon |\nabla \phi|^2 dx \quad (2.10)$$

ただし， ε は 0 に近い微小な値とする．ここで， $W(\phi)$ は図 2.2(a) のような井戸型ポテンシャルに，アフィン変換 $c_1 \phi + c_2$ を加えた，極小値が等しい二重井戸型ポテンシャルである．この変換は保存系においては定数になるため，式 (2.10) の最小化問題に影響を与えない．



(a) Example of double well potential



(b) The double well potential after the affine translation

Figure 2.2: Affine translation for double well potential

この問題の解は以下のように表される．

$$\phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \approx \phi(\mathbf{x}) + \phi_1\left(\frac{\text{dist}(\mathbf{x}, S)}{\varepsilon}\right) \quad (2.11)$$

ここで， $\phi(\Omega; \{\alpha, \beta\})$ は領域 Ω で最小の境界 S を有する関数であり， ϕ_1 は $\phi_1(\infty) = 0$ となる関数で，図 2.3 に示すような異なる相間でのインターフェースを与える．式 (2.10) において，第一項は ϕ を α と β に近づける効果があり，第二項は不要なインターフェイス領域に制約を与える効果がある．式 (2.11) の解を式 (2.10) に代入して考えると，両項が ε^{-1} のオーダーになるため， $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき，問題 (2.10) は以下に示すインターフェイス最小化問題と解釈可能である．

$$\inf_{\substack{\phi \rightarrow \{\alpha, \beta\} \\ \int_\Omega \chi(\mathbf{x}) dx = V_0}} \text{Per}(\{\phi = \alpha\}, \Omega) \quad (2.12)$$

ここで， $\text{Per}(A, \Omega)$ は A の Ω におけるペリメータを表す．これにより， ϕ は $[\alpha, \beta]$ の値をとる滑らかな関数で定義されているのに対し， $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき問題 (2.10) の解は結果として $\{\alpha, \beta\}$ の不連続な値となる．以上の証明は [19, 72] を参照されたい．

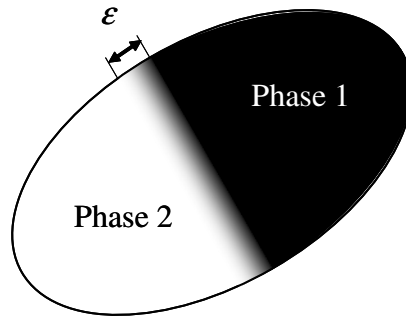


Figure 2.3: Example of interface

2.2.3 フェーズフィールド法における界面移動について

式 (2.9) の Allen-Cahn 方程式に従い，発展する系においては，二重井戸型ポテンシャルの効果により，十分時間がたてばインターフェイス領域が形成され，それが法線方向に次式で現される速度で移動することが知られている．

$$v = \alpha + \frac{1}{t}\kappa + O\left(\frac{1}{t^2}\right), \quad t \gg 1 \quad (2.13)$$

ここで， α は二重井戸型ポテンシャルによって定まる定数であり， κ はインターフェイスの曲率を表す．二重井戸型ポテンシャルの二つの極小値が等しい場合には， α は 0 となり，式 (2.13) は完全な平均曲率運動を表す．極小値間に差がある場合には，インターフェイス領域におけるポテンシャルの値が小さくなるような方向に速度 α が定まる．このことは，[9, 35, 95] 等で証明されている．各項に関する厳密な証明は [9] で，異なる時空スケールを導入することで行われている．第一項の α の運動を示す際には，双曲型スケーリング $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \varepsilon^{-1}t)$ が用いられ，第二項の平均曲率の項については，双曲型スケーリング $(\mathbf{x}, t) \rightarrow (\varepsilon^{-1}\mathbf{x}, \varepsilon^{-2}t)$ が導入される．

2.2.4 フェーズフィールド法を用いたトポロジー最適化

ここで、フェーズフィールド法を用いたトポロジー最適化手法がいくつか提案されている。Bourdin と Chambolle[18] は式 (2.10) の最小化問題が式 (2.13) のペリメータ最小化問題と解釈可能なことを利用して、ペリメータ制約を加えたトポロジー最適化の新たな定式化として、以下の最小化問題を提案している。

$$\inf_{\int_{\Omega} \chi(\mathbf{x}) dx = V_0} F(\rho) + \mu P_{\varepsilon}(\rho) \quad (2.14)$$

ただし、

$$P_{\varepsilon}(\rho) = \int_{\Omega} \frac{W(\rho)}{\varepsilon} + \varepsilon |\nabla \rho|^2 dx \quad (2.15)$$

ここで、 μ はラグランジュ未定乗数、 ρ は領域 Ω で定義される $[0, 1]$ の値をとる密度関数で、式 (2.15) における W は式 (2.10) と同様の二重井戸型ポテンシャルを表す。式 (2.10) と式 (2.13) に関する理論を適用すると、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、式 (2.14) の最小化問題の解となる ρ は、 $\{0, 1\}$ の値で得られる。即ち、通常のトポロジー最適化と同様に、密度関数の 0 が空孔、1 が構造に対応するとすると、明確にどちらかに判別可能な解が得られ、 ρ が $[0, 1]$ の中間値をとり、構造の判別が困難になる問題は生じない。Bourdin はこの性質を利用して、この方法を形状依存の荷重が作用する構造の最適化に利用した。また、Bourdin が式 (2.14) を差分法で解くことで解を得ているのに対し、Wang と Zhou は [115, 114] は同様の考え方で設計変数の更新に勾配法を用いた方法を提案している。さらに、Burger[23] は応力制約に基づくトポロジー最適化手法にこの方法を適用している。また、Zhou と Wang[119, 118] は同様の最小化問題について、密度関数を保存場と考え、Cahn-Hilliard 方程式に基づく最適化を行っている。これらの方法においては、フェーズフィールド法を用いて、トポロジー最適化問題にペリメータ制約を与え、明瞭な最適形状を得るという目的においては優れた効果を得ているものの、フェーズフィールド法を用いて定式化した際の境界移動の法則等においては議論が行われていない。本研究では、特に式 (2.13) のインターフェースの法線方向の移動速度に関する性質を用いて、フェーズフィールド法を用いた新たな形状最適化法を提案する。

2.3 定式化

2.3.1 フェーズフィールド関数を用いた領域表現

ここでは、Allen-Cahn 方程式に支配される系において、インターフェースの移動が式 (2.13) で表されることを利用し、レベルセット法を用いた形状最適化と類似のオイラー型形状最適化法を提案する。最初に、 d 次元実数空間に属する、体積が一定値 V となる領域 Ω の最適化問題を考える。このとき、図 2.4(a) に示すように、 Ω を包括するような設計領域 D を考え、その中の許容される解の集合 \mathcal{U}_{ad} を以下のように定義する。

$$\mathcal{U}_{ad} = \{\Omega \subset D \text{ such that } \Omega \in \mathbb{R}^d, |\Omega| = V_0\} \quad (2.16)$$

このとき、領域 Ω の形状最適化問題は以下のように定義される。

$$\inf_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega) \quad (2.17)$$

ここで、 $J(\Omega)$ は領域 Ω で定義される、任意の目標関数である。ここでは、この問題の数値解法として、レベルセット法に基づく形状最適化と同様に、設計領域 D 全体にフェーズフィールド関数 ϕ を定義し、領域 Ω を陰的に表すことを考える。即ち、図 2.4(b) に示すように、 $\Omega_A \subset \Omega$ となる Ω_A と、 $\Omega_B \subset D \setminus \Omega$ とな

る Ω_B を定義し、さらに、領域 D のうち Ω_A と Ω_B の間に、微小な厚みを持つ領域 ξ が存在すると仮定し、 $\xi \subset D \setminus (\Omega_A \cup \Omega_B)$ を定義する。即ち、以下の関係が成り立つと仮定する。

$$\Omega \subset (\Omega_A \cup \xi), D \setminus \Omega \subset (\Omega_B \cup \xi) \quad (2.18)$$

このとき、これらの領域 Ω_A と Ω_B はフェーズフィールド関数を用いて以下のように表される。

$$\begin{aligned} \phi = 1 &\iff \mathbf{x} \in \Omega_A \\ 0 < \phi < 1 &\iff \mathbf{x} \in \xi \\ \phi = 0 &\iff \mathbf{x} \in \Omega_B \end{aligned} \quad (2.19)$$

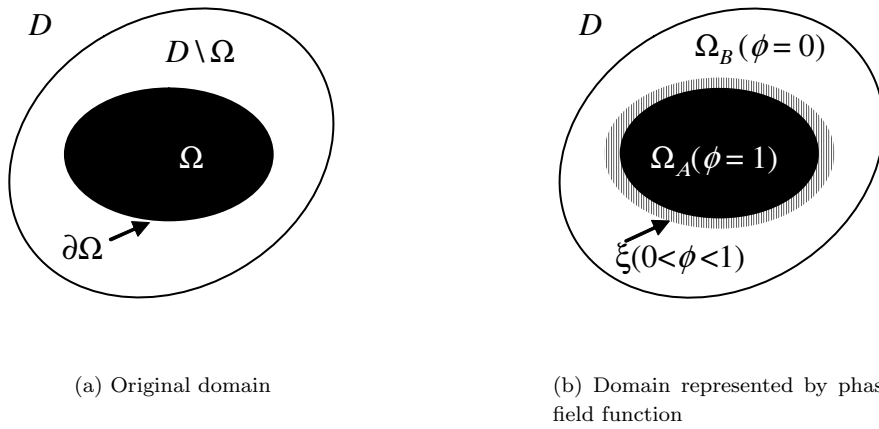


Figure 2.4: Example of domain representation

以上の定義において、境界 $\partial\Omega$ は ξ 内に存在することがわかるが、その位置は不定である。即ち、式 (2.19) によって完全に領域 Ω が厳密に表されるわけではない。しかし、領域 ξ は微小な厚みを持つ領域であり、その厚みが十分小さい場合は、 $\partial\Omega \approx \xi$ と見なすことができる。このとき、 $\Omega \approx \Omega_A$ となり、領域 Ω が式 (2.19) により、 ϕ で近似的に表されることになる。

式 (2.19) のように、 $[0, 1]$ 範囲で定義される関数を用いた領域表現方法は、均質化法に基づくトポロジー最適化でも用いられているが、その物理的意味は全く異なる。即ち、均質化法に基づくトポロジー最適化においては、材料密度分布関数で表された領域の最適化問題は、特性関数で表される領域の最適化問題の弱収束解と厳密にその物理的意味が解釈可能であるが、通常、式 (2.1) で表されるように関数の勾配を目標関数に含むような場合には均質化法を適用することができない [107]。即ち、関数 ϕ の物理的な意味は不明瞭であるが、ここでは領域表現のための陰関数としてのみ定義する。

2.3.2 目標関数について

領域 D における、線形弾性体問題を考える。領域 Ω_A が弾性テンソル \mathbf{A} を有する材料で構成され、領域 Ω_B を非常に弱い材料が占めていると仮定し、領域 Ω における弾性テンソル \mathbf{A}^* を以下のように定義する。

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{A} & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_A \\ k(\phi)\mathbf{A} \ (0 < k(\phi) < 1) & \text{if } \mathbf{x} \in \xi \\ 10^{-3}\mathbf{A} & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_B \end{cases} \quad (2.20)$$

ここで、領域 ξ においては、材料の存在が明確に定義できないため、弾性テンソルの厳密な導出が不可能である。さらに、領域 D の境界 ∂D のうち、ディリクレ境界条件が設定される境界を Γ_D 、ノイマン境界条件が設定される境界を Γ_N とする。今、領域 D が境界 ∂D で完全固定され、領域 D に作用する体積力が 0 であると、境界 Γ_N に分布荷重 \mathbf{g} が作用するものとする、領域 D における線形弾性問題は弱形式で以下のように表される。

$$\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} ds, \text{ for } \mathbf{u} \in V, \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.21)$$

Where

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^N \text{ such that } \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_D\} \quad (2.22)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \{\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T\} \quad (2.23)$$

ここで、 \mathbf{u} は変位ベクトル、 \mathbf{v} はテスト関数、 \mathbf{e} はひずみテンソル、 $:$ はテンソルプロダクトを表す。

本研究では、線形弾性問題として、剛性最大化問題と、特定箇所の変位を目標値に近づけるメカニズム創生問題を考える。コンプライアンス最小化問題においては、以下で表される平均コンプライアンスを目標関数とする。

$$J(\phi) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} ds = \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}) dx \quad (2.24)$$

コンプライアントメカニズム創生問題では、以下で表される、変位と変位の目標値との最小自乗誤差を目標関数とする。

$$J(\phi) = \left(\int_D l(\mathbf{x}) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} \quad (2.25)$$

さらに、領域 Ω_A を構成する材料の質量密度を ρ とし、領域 Ω_B を占める材料の質量密度を非常に小さな値に設定すると、領域 D における質量密度 $\bar{\rho}$ は以下のように表される。

$$\bar{\rho} = \begin{cases} \rho & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_A \\ m(\phi)\rho \ (0 < m(\phi) < 1) & \text{if } \mathbf{x} \in \xi \\ 10^{-3}\rho & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_B \end{cases} \quad (2.26)$$

このとき、領域 D が境界 ∂D で完全固定された場合の固有振動数問題は弱形式で下記のように表される。

$$\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx = \omega_k^2 \int_D \bar{\rho} \varphi_k \cdot \mathbf{v} dx, \text{ for } \varphi_k \in V, \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.27)$$

ここで、 ω_k は k 次の固有振動数を表し、 φ_k はそれに対応する固有モードベクトルを表す。本研究では、固有振動数最適化問題に対し、以下の、固有振動数の平方の重み付き和を目標関数とする。

$$J(\phi) = \sum_{k=1}^n w_k \omega_k^2 \quad (2.28)$$

ここで、固有振動数 w_k は以下の式により表される。

$$\omega_k^2 = \lambda_k = \min_{\varphi_1, \dots, \varphi_k \in V} \max_{\varphi \in \text{span}[\varphi_1, \dots, \varphi_k]} \frac{\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\varphi_k) dx}{\int_D \bar{\rho} |\varphi_k|^2 dx} \quad (2.29)$$

以上の目標関数に関する最小化問題に、式 (2.16) に含まれる体積制約を、ラグランジュ未定乗数 μ を乗じて加え、最終的に最適化問題は以下のように定式化される。

$$\min_{\phi} \bar{J}(\phi) = J(\phi) + \mu \int_D \phi(\mathbf{x}) dx \quad (2.30)$$

2.3.3 フェーズフィールド関数の発展方程式

式 (2.19) におけるフェーズフィールド関数は仮想的な時間 $t > 0$ を設定し、以下の方程式に従い、更新されるものとする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \kappa \nabla^2 \phi - \frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \quad (2.31)$$

この式は 2.2.2 節で述べたように、 $f(\phi)$ が二重井戸型ポテンシャルであり、 ϕ の総体積が一定となる場合には、以下のように、表面エネルギーとポテンシャル $f(\phi)$ の領域 D での総和と領域 Ω_A のペリメータの最小化問題と解釈できる。

$$\inf_{\substack{\phi \\ \int_{\Omega} \phi(\mathbf{x}) dx = V_0}} \int_D \frac{\kappa}{2} |\nabla \phi|^2 + f(\phi) dx \text{ and } \text{Per}(\Omega_A) \quad (2.32)$$

ここで、 $f(\phi)$ を以下のように定義する。

$$f(\phi) = H(\mathbf{x})g(\phi) + W(\mathbf{x})w(\phi) \quad (2.33)$$

ここで、 $w(\phi)$ は $w(0) = w(1) = w'(0) = w'(1)$ を満たす関数、即ち等しい極小値を持つ二重井戸型ポテンシャルで、 $W(\mathbf{x})$ はポテンシャルの高さを決定する係数である。また、 $g(\phi)$ は $g(0) = 0, g(1) = 1, g'(0) = g'(1) = 0$ を満たす関数で、 $H(\mathbf{x})$ はその係数であり、この項により、ポテンシャル $f(\phi)$ の極小値に差が与えられる。2.2.3 節で述べたように、式 (2.33) においては、領域 ξ において、関数 ϕ はポテンシャル $f(\phi)$ の極小値が低い方に変化する。ここで、図 2.5 のように、

$$H(\mathbf{x}) = h\bar{J}'(\mathbf{x}, \phi) \quad (h > 0) \quad (2.34)$$

とおき、 $\bar{J}'(\mathbf{x}, \phi)$ の項を無視すると、位置 \mathbf{x} における ϕ の変化は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \phi_{t+1}(\mathbf{x}) &= \phi_t(\mathbf{x}) - \eta(t)H(\mathbf{x}) \\ &= \phi_t(\mathbf{x}) - \eta(t)h\bar{J}'(\mathbf{x}, \phi) \quad \mathbf{x} \in \xi \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで $\eta(t) > 0$ は $H(\mathbf{x})$ の値に基づき決定される、 ϕ の時間 t での変化量を表す値である。これは、領域 ξ において、 ϕ が通常の勾配法と同様に、目標関数の ϕ に関する感度 $\bar{J}'(\mathbf{x}, \phi)$ に従い更新されることを示している。即ち、この定式化により、目標関数の減少が通常の勾配法と同様に議論可能なことを示す。

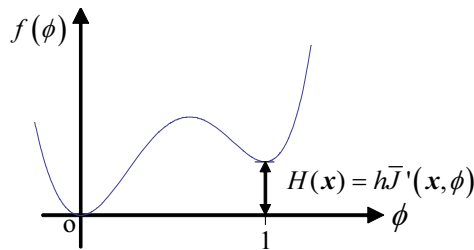


Figure 2.5: Setting of double well potential

2.3.4 感度解析

本研究では、前節で述べたように、式 (2.31) のポテンシャルの決定に目標関数 $J(\phi)$ の関数 ϕ に関する感度を用いる。ここでは、目標関数 $J(\phi)$ の関数 ϕ に関する感度 $J'(x, \phi)$ を導出する。最初に、式 (2.24) の平均コンプライアンスの感度を導出する。随伴状態 \mathbf{p} を用いて、ラグランジアン $L(\phi)$ を定義する。

$$L(\phi) = \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{u} ds - \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{p} ds \right) \quad (2.36)$$

この $L(\phi)$ の微小変化量を以下のように導出する。

$$\begin{aligned} dL(\phi) &= \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} ds d\phi - \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi - \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi \\ &\quad - \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx d\phi + \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} ds d\phi \\ &= - \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi \\ &\quad + \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} ds \right) d\phi \\ &\quad - \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} ds \right) d\phi \end{aligned} \quad (2.37)$$

右辺の第二項、第三項は等式制約となる式 (2.21) で $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi}$ とした際に等しいので、値が 0 となる。さらに、第四項、第五項は同式において、 $\mathbf{u} = \mathbf{p}, \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi}$ とした場合に等しいため、同様に値が 0 になる。よって \mathbf{u} と \mathbf{p} の支配方程式が等しく、 $\mathbf{p} = \mathbf{u}$ となることから、この問題は自己随伴問題であり、目標関数 $J(\phi)$ の ϕ に関する感度は以下のように表される。

$$\frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} = - \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{u}) dx \quad (2.38)$$

続いて、メカニズム創生問題で使用される、式 (2.25) の目標変位と変位との最小自乗誤差の感度を導出する。最初に、ラグランジアン $L(\phi)$ を以下のように定義する。

$$L(\phi) = \left(\int_D l(x) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^\alpha dx \right)^{1/\alpha} + \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \mathbf{p} ds \quad (2.39)$$

この $L(\phi)$ の微小変化量を以下のように導出する。

$$\begin{aligned} dL(\phi) &= \frac{C_0}{\alpha} l(x) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^{\alpha-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} d\phi + \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi \\ &\quad + \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi + \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx d\phi - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} ds d\phi \\ &= \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi \\ &\quad + \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx - \int_{\Gamma_N} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} ds \right) d\phi \\ &\quad + \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx + \frac{C_0}{\alpha} l(x) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^{\alpha-1} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \phi} \right) d\phi \end{aligned} \quad (2.40)$$

ただし, C_0 は以下で表される定数である .

$$C_0 = \left(\int_D l(\mathbf{x}) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^\alpha dx \right)^{1/\alpha-1} \quad (2.41)$$

右辺第二項, 第三項は式 (2.37) と同様に値が 0 となる . 第四項, 第五項は随伴状態 \mathbf{p} が以下の式を満たすものとする, 値が 0 になる .

$$\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\mathbf{p}) : \mathbf{e}(\mathbf{q}) dx + C_0 l(\mathbf{x}) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_0|^{\alpha-2} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \mathbf{q} = 0 \text{ for } \forall \mathbf{q} \quad (2.42)$$

よって, 目標関数 $J(\phi)$ の ϕ に関する感度は以下のように表される .

$$\frac{\partial J(\phi)}{\partial \phi} = \frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} = \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\mathbf{u}) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx \quad (2.43)$$

ただし, 随伴状態 \mathbf{p} は式 (2.43) を満たす .

続いて, 式 (2.28) に含まれる k 次の固有値の感度を導出する . 随伴状態 \mathbf{p} を用いて, ラグランジアン $L(\phi)$ を以下のように定義する .

$$L(\phi) = \lambda_k + \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \lambda_k \int_D \bar{\rho} \varphi_k \mathbf{p} ds \quad (2.44)$$

この $L(\phi)$ の微小変化量を以下のように導出する .

$$\begin{aligned} dL(\phi) &= \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi} d\phi + \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi + \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx d\phi \\ &+ q \int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx d\phi - \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi} \int_D \bar{\rho} \varphi_k \mathbf{p} dx d\phi - \lambda_k \int_D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \phi} \varphi_k \mathbf{p} dx d\phi \\ &- \lambda_k \int_D \bar{\rho} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \phi} \mathbf{p} dx d\phi - \lambda_k \int_D \bar{\rho} \varphi_k \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} dx d\phi \\ &= \left(\int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \lambda_k \int_D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \phi} \varphi_k \mathbf{p} dx \right) d\phi + \left(\frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi} - \frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi} \int_D \bar{\rho} \varphi_k \mathbf{p} dx \right) d\phi \\ &+ \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e} \left(\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} \right) dx - \lambda_k \int_D \bar{\rho} \varphi_k \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi} dx \right) d\phi \\ &+ \left(\int_D \mathbf{A}^* \mathbf{e} \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial \phi} \right) : \mathbf{e}(\mathbf{p}) dx - \lambda_k \int_D \bar{\rho} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \phi} \mathbf{p} dx \right) d\phi \end{aligned} \quad (2.45)$$

右辺の第五項, 第六項は等式制約となる式 (2.27) で $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \phi}$ とした際に等しいので, 値が 0 となる . さらに, 第七項, 第八項は同式において, $\varphi_k = \mathbf{p}, \mathbf{v} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial \phi}$ とした場合に等しいため, 同様に値が 0 になる . よって \mathbf{u} と \mathbf{p} の支配方程式が等しく, $\mathbf{p} = \varphi_k$ となることから, この問題は自己随伴問題である . さらに, φ_k が正規化されており, $\int_D \bar{\rho} |\varphi_k|^2 dx = 0$ とすると, 第三項, 第四項は相殺される . よって, k 次の固有値 λ_k の ϕ に関する感度は以下のように表される .

$$\frac{\partial \lambda_k}{\partial \phi} = \frac{\partial L(\phi)}{\partial \phi} = \int_D \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial \phi} \mathbf{e}(\varphi_k) : \mathbf{e}(\varphi_k) dx - \lambda_k \int_D \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \phi} |\varphi_k|^2 dx \quad (2.46)$$

2.4 数値計算の実装

2.4.1 アルゴリズム

以上の議論をふまえ, 最適化アルゴリズムを以下のように構築する .

1. 初期形状 Ω_0 に対応する ϕ の初期値を決定する .
2. 目標関数が収束するまで以下のループを繰り返す .
 - (a) 有限要素法により変位 u , 固有モード φ_k , 随伴状態 p を導出する .
 - (b) 目標関数を導出する .
 - (c) 目標関数の感度を導出し , 二重井戸型ポテンシャル $f(\phi)$ を式 (2.33) より導出する .
 - (d) 式 (2.31) の反応拡散方程式を有限体積法により解く .

2.4.2 各種関数の設定

本研究では , 式 (2.31) に用いる関数を以下のように設定する .

$$g(\phi) = \phi^3(6\phi^2 - 15\phi + 10), \quad w(\phi) = \phi^2(1 - \phi^2) \quad (2.47)$$

さらに , 関数 $w(\phi)$ の高さを決定する係数 $W(x)$ は $W(x) = \frac{1}{0.5^3}H(x)$ とする .

また , 式 (2.20) で表される , 領域 ξ における弾性定数には , トポロジー最適化法における SIMP 法 [11, 14, 117] で使用されている , ペナルティ係数 p を定義し , 関数 ϕ を p 乗した値を材料の元の弾性テンソルに乗じる方法により以下のように導出する .

$$\mathbf{A}^* = \phi^p \mathbf{A} \quad (0 < \phi < 1) \quad (2.48)$$

また , 式 (2.26) で表される , 領域 ξ における $\bar{\rho}$ の値は , ρ を係数とする ϕ の線形関数として以下のように表す .

$$\bar{\rho} = \phi \rho \quad (0 < \phi < 1) \quad (2.49)$$

2.4.3 有限体積法

ここで , 有限体積法に関して若干補足する . 離散化された各要素の体積 CV について以下の保存則が成り立つとする .

$$\int_{CV} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx = \int_{CV} \kappa \nabla^2 \phi dx - \int_{CV} \frac{\partial f}{\partial \phi} dx \quad (2.50)$$

本研究では以下のように , 拡散項は陰解法による離散化を行い , 反応項は湧き出し項として扱う .

$$\frac{\phi_P^{n+1} - \phi_P^n}{\Delta t} = \kappa \sum_i A_i \frac{\phi_A^{n+1} - \phi_P^n}{d_{AP}} + \left(\frac{\partial f(\phi)}{\partial \phi} \right)_P^n V_P \quad (2.51)$$

ここで , ϕ_P^n は時間 n における要素 P の ϕ の値 , V_P は要素 P の体積 , \sum_i は要素 P の境界に関する総和 , A_i は要素 P の境界の長さもしくは面積 , d_{AP} は隣り合う要素同士の間隔を示す . この式を t について解くことにより , 各 t における ϕ の値が導出される . なお , 時間 t の更新幅 Δt は , 勾配法における最急降下幅に相当するため , 以下のように更新されるものとする . k 回目の繰り返し計算における関数 ϕ の値を ϕ_k , 目標関数の値を $\bar{J}_k(\phi_k)$, 時間 t の更新幅を Δt_k とすると ,

1. $\frac{\bar{J}_k(\phi_k) - \bar{J}_{k-1}(\phi_{k-1})}{\bar{J}_{k-1}(\phi_{k-1})} \leq \bar{J}_{thre}$ のとき .
 - $\Delta t_{k+1} = \max(1.5\Delta t_k, \Delta t_{max})$ として , $k+1$ 回目の繰り返し計算へ .
2. $\frac{\bar{J}_k(\phi_k) - \bar{J}_{k-1}(\phi_{k-1})}{\bar{J}_{k-1}(\phi_{k-1})} > \bar{J}_{thre}$ のとき .
 - $\Delta t_k = 0.5\Delta t_k$ として , ϕ_k を再導出し , k 回目の繰り返し計算をやり直す .
 - 1 の条件を満たすまで , これを繰り返す .

2.5 数値例

簡単な数値例を用いて本手法の妥当性を検証する．簡単のため，各物理量は無次元化された単位量として扱う．いずれの数値例においても，材料のヤング率 E は 1.0，ポアソン比 ν は 0.3，質量密度 ρ は 1.0 とする．また，式 (2.48) のパラメータ p の値は 3 とする．さらに，式 (2.31) の計算においては，有限要素法による $f(\phi)$ の計算と，有限体積法による ϕ の更新を 1 ステップずつ交互に行うものとする．なお，関数 ϕ は各有限要素ごとに設定され，有限要素法と有限体積法においては共通のメッシュを使用するものとする．

2.5.1 剛性最大化問題

最初に，式 (2.24) の平均コンプライアンスの最小化を目的とした，二次元片持ち梁の最適化を行う．設計領域を図 2.6 に示す．設計領域の左端を完全固定し，右端中央に垂直荷重 1.0 を作用させる．

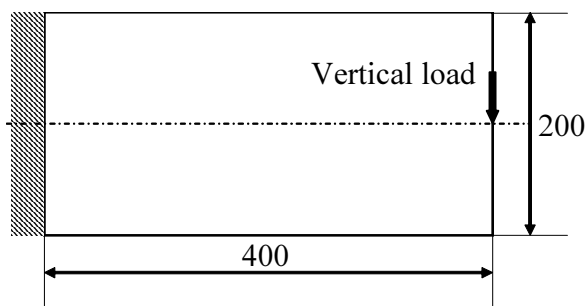
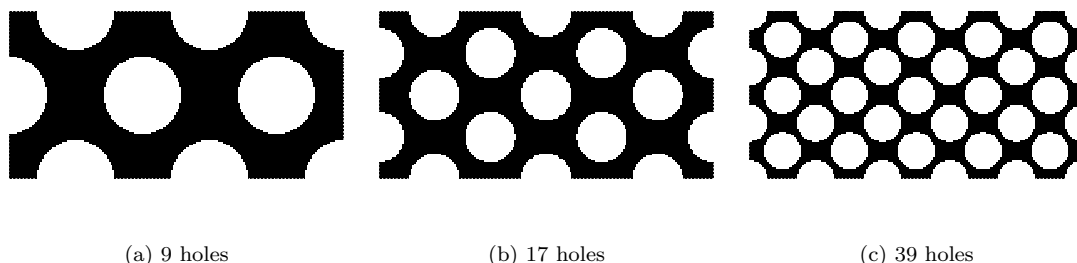


Figure 2.6: Design domain and boundary condition for cantilever problem

初期案が最適形状に与える影響 初期案が最適形状に与える影響について検討を行う．図 2.6 の設計領域を 100×200 個の正方形 4 節点アイソパラメトリック要素で分割する．図 2.7 にそれぞれ，穴の個数が 9 個と 17 個，39 個の場合の初期解を示す．穴の半径はそれぞれ 46 と 30，22 である．式 (2.31) における係数 κ は 0.5，式 (2.34) における係数 h は 2.0 とし，時間 t の最大更新幅 Δt_k は 1.0 とした．体積制約は総体積の約 40% と設定し，式 (2.30) のラグランジュ未定乗数を随時更新した．



(a) 9 holes

(b) 17 holes

(c) 39 holes

Figure 2.7: Initial designs

図 2.8 にそれぞれ，初期案の穴の個数が 9 個と 17 個，39 個の場合の最適解及び最適化途中の形状を示す．

いずれの初期解を使用した場合においても、最適解に初期解依存性が確認できる。これは、本手法では穴の生成が不可能なためである。しかし、初期案、最適化途中、最適解の図を比較してもわかるように、穴の消失に限り形態変化が可能である。図 2.9 に平均コンプライアンスの収束履歴を、図 2.10 に目標関数の収束履歴を示す。収束履歴において、一回目から二回目の繰り返し計算の際に目標関数が上昇していることがわかる。これは、初期案においてはインターフェイスが存在しないために、フェーズフィールド関数の更新ではインターフェイスの生成のみがおき、その変化には感度に基づき設定された二重井戸型ポテンシャルは影響しないためである。二回目以降の繰り返し計算においては、目標関数の滑らかな収束が得られていることがわかる。

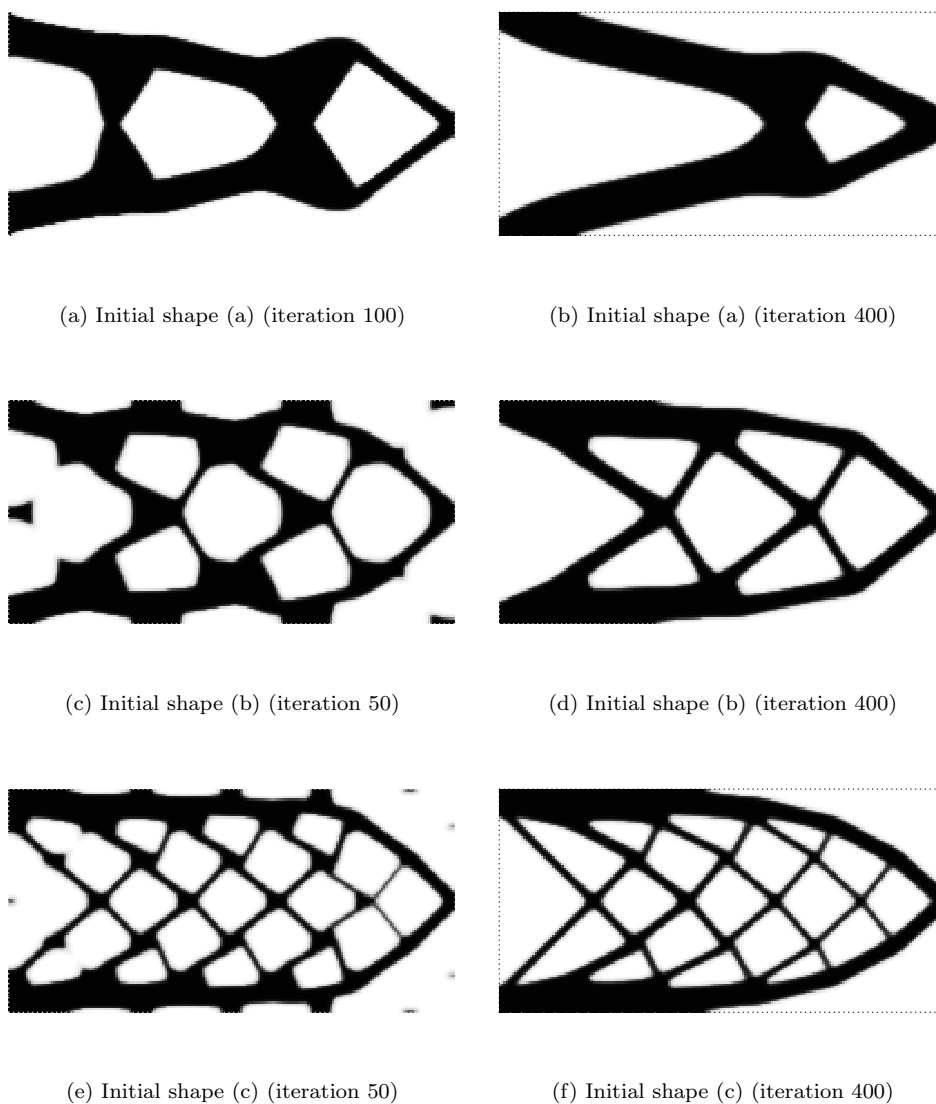


Figure 2.8: Optimal configurations of 2D cantilever

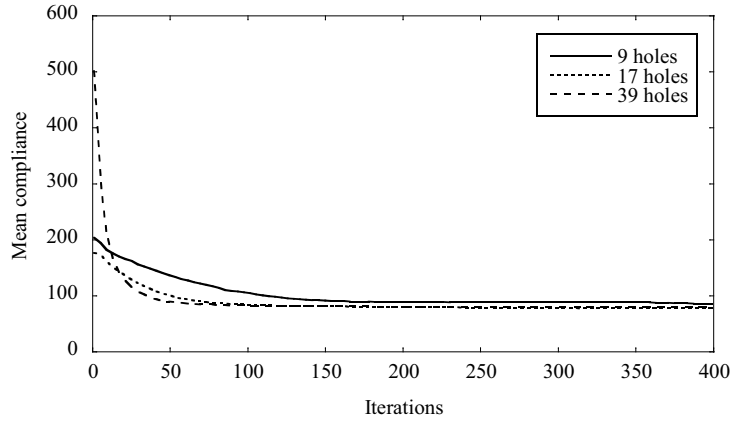


Figure 2.9: Convergence history of mean compliance

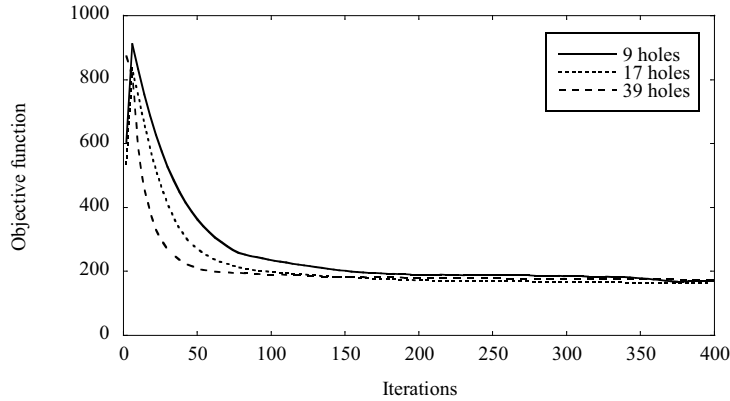


Figure 2.10: Convergence history of objective function

パラメータの影響 式 (2.31) における拡散項の係数 κ が最適形状に与える影響について検討を行う。前例題と同様に、関数 ϕ の設定及び、有限要素法による解析では、図 2.6 の設計領域を 100×200 個の正方形 4 節点アイソパラメトリック要素で分割する。初期解は図 2.8(c) に示す穴の個数が 39 個のものとする。式 (2.34) における係数 h は 2.0 とし、時間 t の最大更新幅 Δt_k は 1.0 とした。体積制約は総体積の約 40% と設定し、式 (2.30) のラグランジュ未定乗数を随時更新した。 κ を 0.5 と 1.0 の二通りに設定し最適化を行った。

図 2.11 にそれぞれ、 κ を 0.5 と 1.0 の二通りの場合の、繰り返し計算 200 回目と収束が確認された 1300 回目の最適形状を示す。図 2.12 にそれぞれの場合の目標関数の収束履歴を示す。 κ を 0.5 と 1.0 の場合を比較し、最終的な最適形状で領域のペリメータが大きく異なる形状が得られていることがわかる。これは、式 (2.31) が陰的にペリメータ制約を含み、 κ の値によってその影響が変化するためであると考えられる。また、特に大きな形態変化が起こった、 $\kappa = 1.0$ の場合について、繰り返し計算 200 回目と 1300 回目の最適形状、図 2.12 の目標関数の収束履歴を比較すると、計算開始からかなりの時間を経た後に大きな形態変化が起こっていることがわかる。

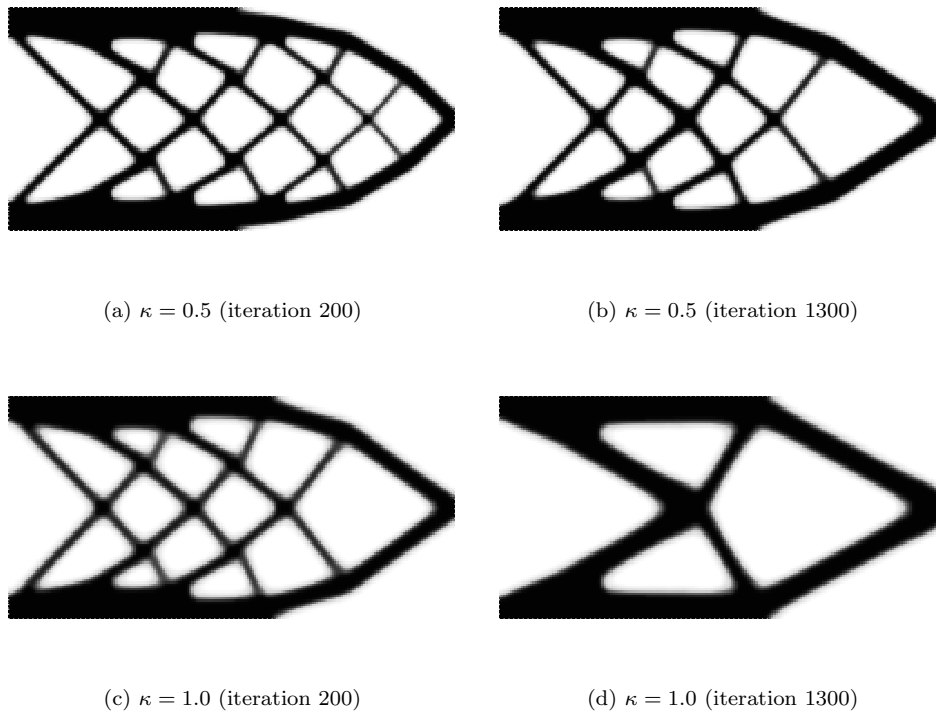


Figure 2.11: Optimal configurations of 2D cantilever

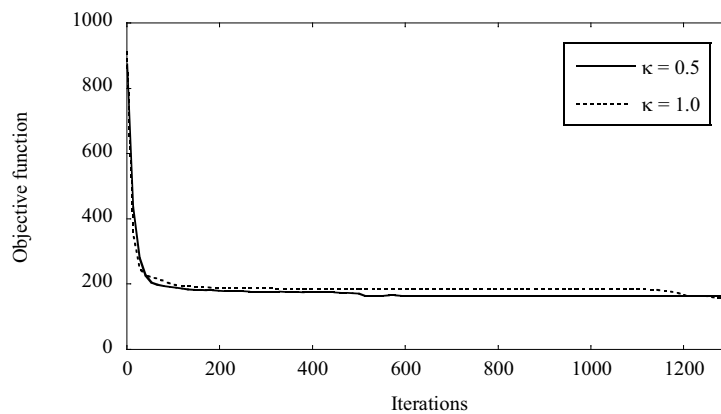


Figure 2.12: Convergence history of objective function

コンプライアントメカニズムの最適設計 続いて、コンプライアントメカニズムの最適設計に本手法を適用する．文献 [15] でも用いられているベンチマーク問題を参考にした設計領域を図 2.13 と図 2.16 に示す．いずれの場合も、関数 ϕ の設定及び、有限要素法による解析では、設計領域を 100×200 個の正方形 4 節点アイソパラメトリック要素で分割する．式 (2.34) における係数 h は 1.0 とし、時間 t の最大更新幅 Δt_k は 1.0 とした．体積制約は総体積の約 30% と設定し、式 (2.30) のラグランジュ未定乗数を随時更新した．さらに、 κ を 0.5 と 1.0 の二通りに設定し最適化を行った．

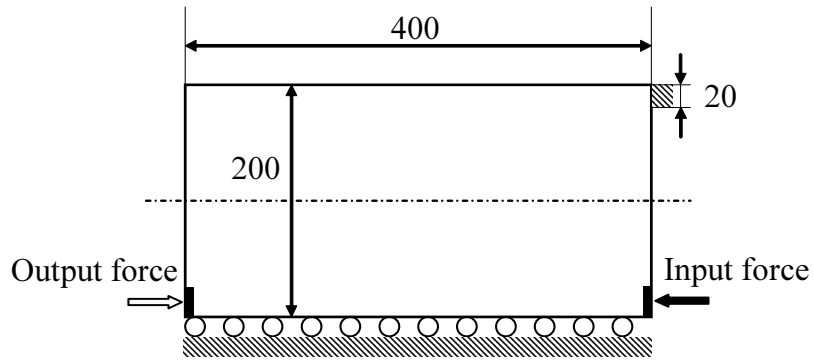


Figure 2.13: Design domain and boundary condition for inverter mechanism problem

図 2.14 に図 2.13 の設計領域で得られた最適解を，図 2.15 に目標関数の収束履歴を，図 2.17 に図 2.16 の設計領域で得られた最適解を，図 2.18 に目標関数の収束履歴を示す．文献 [15] で示されている例に近い形状が得られており，また，目標関数の収束履歴から判断しても妥当な形状であると考えられる． $\kappa = 0.5$ の場合と $\kappa = 1.0$ の場合を比較し，剛性問題の場合と同様， $\kappa = 1.0$ の場合の方が小さなペリメータの形状が得られていることがわかる．

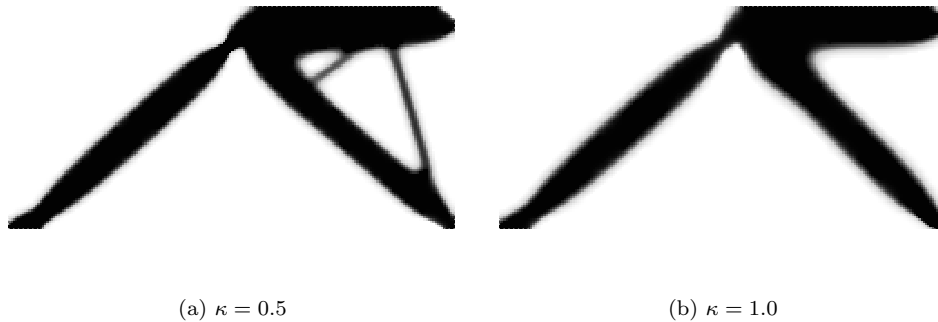


Figure 2.14: Optimal configurations of inverter mechanism

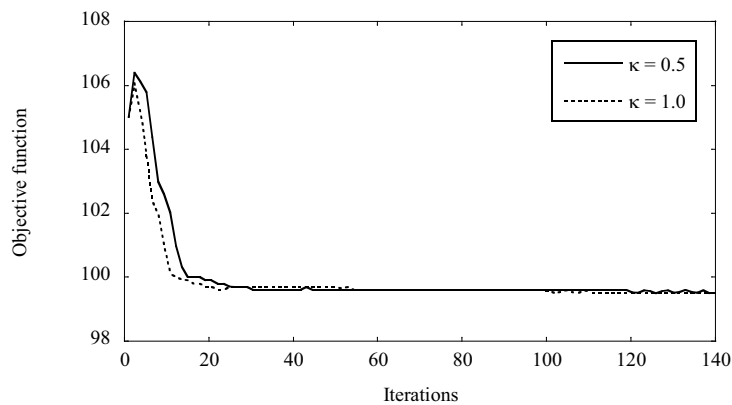


Figure 2.15: Convergence history of objective function

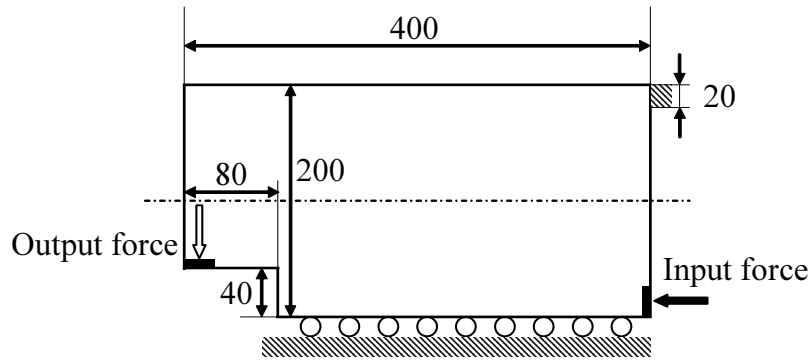


Figure 2.16: Design domain and boundary condition for gripper mechanism problem

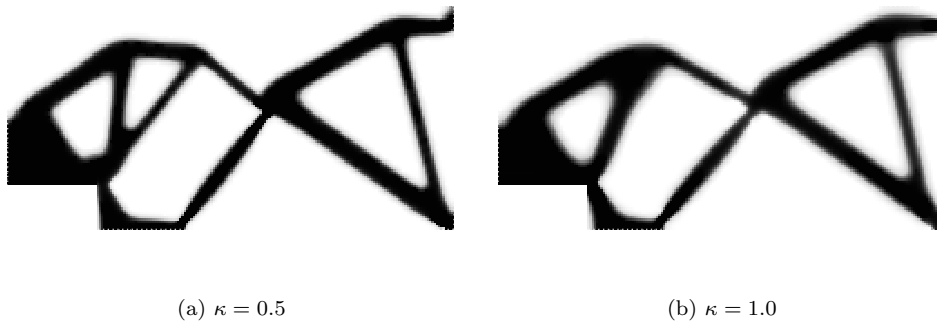


Figure 2.17: Optimal configurations of gripper mechanism

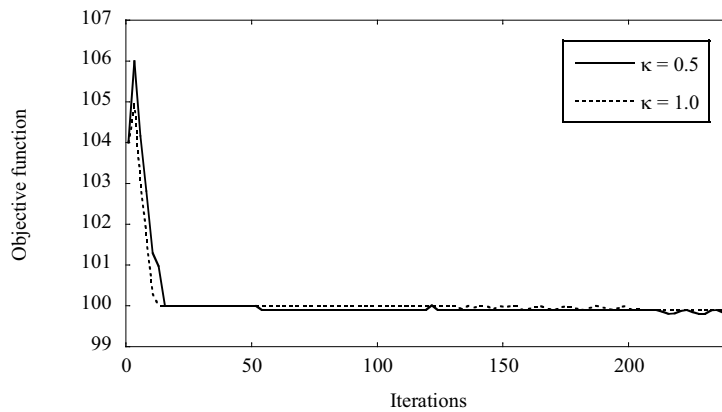


Figure 2.18: Convergence history of objective function

固有振動数最大化問題 続いて、固有振動数最大化問題に本手法を適用する。設計領域を図 2.19 に示す。設計領域の右端中央に質量 10^4 の非構造質量を設置した。関数 ϕ の設定及び、有限要素法による解析では、設計領域を 100×200 個の正方形 4 節点アイソパラメトリック要素で分割した。 κ は 0.5 とし、式 (2.34) にお

ける係数 h は 10.0 とし，時間 t の最大更新幅 Δt_k は 1.0 とした．体積制約は総体積の約 40% と設定し，式 (2.30) のラグランジュ未定乗数を随時更新した．これらの条件のもと，1 次の固有振動数のみを最大化した場合及び，式 2.28 において重み係数を $w_1 = 0.5$, $w_2 = 0.5$ とし 1 次と 2 次の固有振動数を同時に最大化した場合についてそれぞれ解を得た．

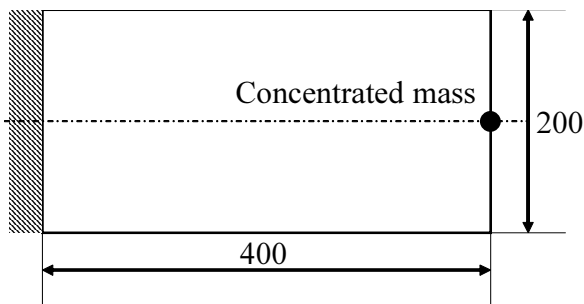


Figure 2.19: Design domain and boundary condition for eigen-frequency problem

それぞれの場合について，図 2.20 に最適形状を，図 2.21 と図 2.23 に目標関数の収束履歴を，図 2.22 と図 2.24 に 1 次から 3 次までの固有振動数の履歴を示す．1 次の固有振動数のみを最大化した場合には，1 次の固有モードが質点を中心とした上下運動のため，質点の箇所垂直荷重を作用させた場合とほぼ等しい解が得られる．対して，1 次と 2 次の固有振動数を同時に最大化した場合は，2 次の固有モードである質点を中心とした左右の運動に対しても剛性を持つ構造になっている．また，図 2.24 では 1 次の固有振動数のみならず 2 次の固有振動数も最大化されているのが確認できる．

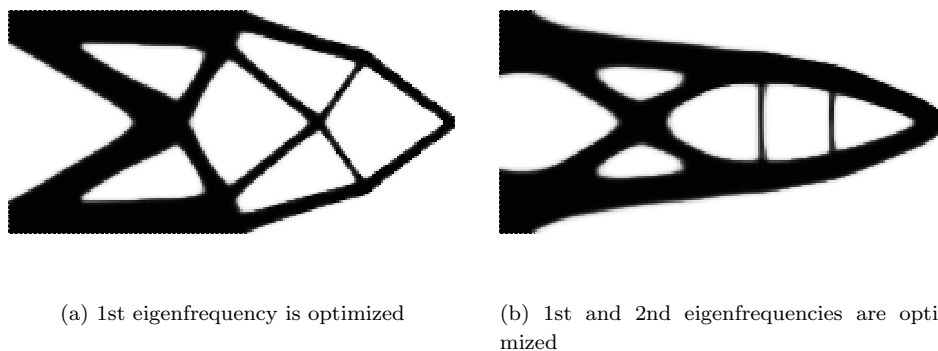


Figure 2.20: Optimal configurations

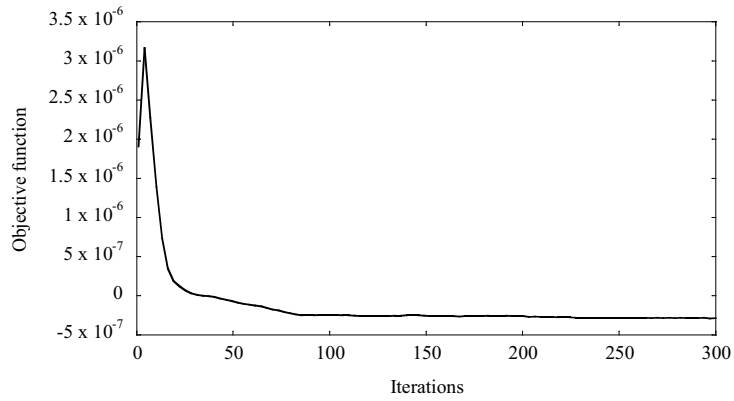


Figure 2.21: Convergence history of objective function (1st eigenfrequency is optimized)

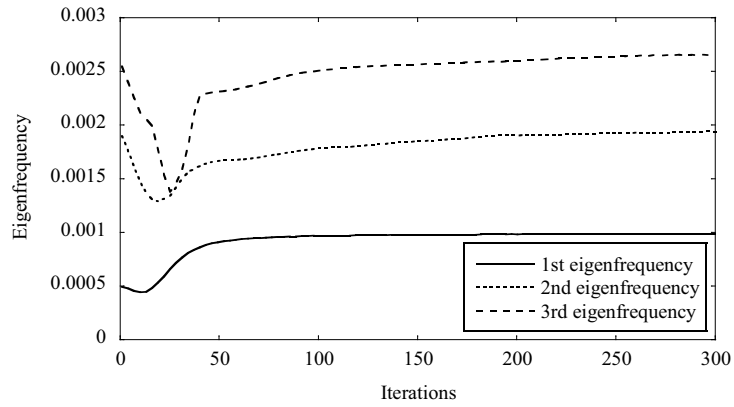


Figure 2.22: Convergence history of eigenfrequencies (1st eigenfrequency is optimized)

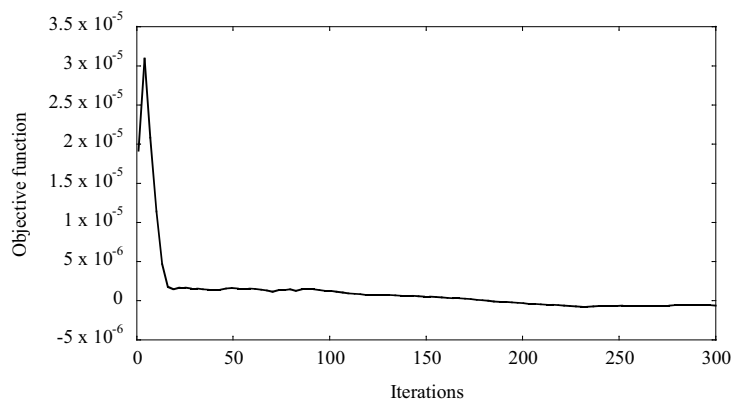


Figure 2.23: Convergence history of objective function (1st and 2nd eigenfrequencies are optimized)

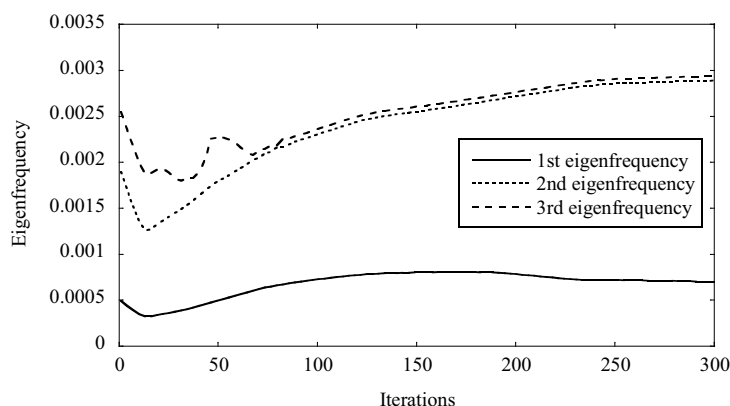


Figure 2.24: Convergence history of eigenfrequencies (1st and 2nd eigenfrequencies are optimized)

2.6 結言

本研究では、フェーズフィールド法を用い、オイラー型メッシュで数値計算可能な形状最適化法を提案し、簡単な数値例により本研究で提案する方法の妥当性を検証した。結果を以下に示す。

1. 最適化の対象とする領域をフェーズフィールド関数により表現した。
2. 感度解析の結果に基づき極小値が決定される二重井戸型ポテンシャルを定式化し、仮想的な時間発展とともに通常の勾配法と同様に設計変数が目標関数を減少させる方向に変化する発展方程式を構築した。
3. 最適化問題として、剛性最大化問題とコンプライアントメカニズム創生問題、固有振動数最大化問題を考え、それぞれについて目標関数を定式化した。また、それぞれの目標関数の、フェーズフィールド関数に対する感度を導出した。
4. 以上の定式化に基づき、有限体積法を用いた最適化アルゴリズムを構築した。
5. 簡単な数値例により、本研究で提唱する方法論の検証を行った。剛性最大化問題とコンプライアントメカニズム創生問題、固有振動数最大化問題のいずれにおいても妥当な解が得られ、本手法の妥当性が確認できた。

今後の展開としては、本手法のオイラー型形状最適化法としての有効性を検証するため、レベルセット法との厳密な比較が必要であると考えられる。さらに、現在では問題設定に関わらず、平均曲率運動が必ず含まれるが、問題によってはその機能が不要であるため、それを無効化することも課題である。さらに、適用範囲を、形状最適化問題として難易度の高い形状依存荷重が作用する問題に拡張することも考えられる。

3 荷重変換器構造のトポロジー最適化

3.1 導入

本章では、序章で述べたトポロジー最適化の応用研究として、単軸荷重変換器及び多軸荷重変換器の構造最適化法を構築する。機械製品の開発および利用において、性能評価のための荷重やひずみなどの物理量の測定は必要不可欠である。荷重を測定するための装置は、荷重変換器と呼ばれ、ひずみゲージなどのセンサデバイスと、荷重をひずみに変換するための変換器構造から構成される。単軸の荷重変換器においては、作用荷重の特定方向の成分のみ測定可能であるが、多軸荷重変換器は、作用荷重の複数方向の成分を検出可能である。このような、ひずみゲージと変換器構造で構成される荷重変換器としては、単軸のものはロードセル、ロボットマニピュレータの力制御に用いる多軸力覚センサ [120]、自動車の車軸に作用する力を検出する 6 分力計 [116] 等が挙げられる。

従来までに、これらの性能の評価方法として、数学的理論に基づいた方法がいくつか提案されている。例えば、中村ら [120] は、測定荷重に対する感度の評価尺度として、ひずみゲージ感度、力覚感度を導出している。内山ら [112] は、各軸方向の荷重成分測定の精度を評価するために、特異値分解と条件数に基づく尺度を提案している。また、これらの評価尺度に基づく変換器構造の最適設計法 [10, 53, 60, 111] も報告されている。しかし、寸法最適化に基づく既存の変換器構造に対する改善にとどまり、構造の抜本的な改善が可能な形状最適化やトポロジー最適化への適用については、いまだ報告例がない。

他方、1988 年に提案されたトポロジー最適化 [13] は、構造の形状のみならず形態の変更を可能とし、性能の抜本的改善が可能な最適構造創出法として著しい発展を遂げてきている。当初は、剛性最大化問題 [13]、固有振動数最適化問題 [65] などの構造の安定性を狙った設計問題に適用されていたが、コンプライアントメカニズムの最適設計 [78]、 piezoelectric アクチュエータの最適設計 [99]、マイクロメカニズムにおける振動アクチュエータ [67] の最適設計などにも応用されつつある。さらに、Rubio ら [96] は、センサデバイスに piezoelectric 抵抗材料を用いた単軸荷重変換器を対象とした場合の方法論を構築している。しかし、ひずみゲージをセンサデバイスとする単軸荷重変換器構造及び、多軸荷重変換器構造を取り扱ったトポロジー最適化手法については、未だ報告されていない。

そこで本研究では、センサデバイスとしてひずみゲージを用いた、単軸荷重変換器と多自由度荷重変換器の起歪構造の創成設計法をトポロジー最適化法に基づき構築する。以下、第二節では、トポロジー最適化の考え方と設計変数の設定法について述べる。第三節では、単軸荷重変換器と多軸荷重変換器の設計に共通で要求される機能である、荷重作用時の起歪構造のひずみ感度に関連したホイートストーンブリッジの電圧変化と荷重に抗する剛性について定式化を行う。第四節では、多軸変換器構造に要求される性能である、荷重作用時の変換器構造の荷重検出感度、および荷重成分検出の精度の評価尺度を、特異値分解に基づき定式化を行う。二つの機能を示す目標関数を考慮可能な多目的最適化問題を定式化する、さらに、最適化の際に必要なそれらの性能の設計変数に関する感度を導出し、この定式化と感度情報さらに、以上の評価尺度に加えて、負荷荷重に抗する剛性を考慮した多目的な目標関数を定式化する。に基づいた、逐次線形計画法を用いた最適化アルゴリズムを構築する。第五節では、簡単な数値例により、提案する方法論の妥当性を検証する。

3.2 定式化

3.2.1 本章で用いるトポロジー最適化法について

ここで、本章で使用するトポロジー最適化法について述べる。序章で述べたように、トポロジー最適化の基本的な考え方は固定設計領域と次式に示す特性関数 χ_Ω の導入にある。すなわち、最適構造となるべき（本来の）設計領域 Ω_d を包括する固定設計領域 D を最初に設け、その固定設計領域と特性関数 χ_Ω を用いて、最適化問題を材料分布問題、あるいは要素配置問題に置き換えることにある。

$$\chi_\Omega(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x} \in \Omega_d \\ 0 & \text{if } \mathbf{x} \in D \setminus \Omega_d \end{cases} \quad (3.1)$$

しかし、この問題には数学的に最適解が存在しないことが証明されているため、この問題に均質化理論を適用し、特性関数の弱収束極限を密度関数と考え、大域的な連続関数に緩和する方法を用いることになる。序章で述べたように、密度関数の導出法はいくつか提案されているが、ここでは、任意形状のマイクロストラクチャを領域内に定義する方法に分類される、連続的材料分布の節点補間による方法 [69] を用いる。この方法では、離散化近似において、各節点にマイクロ構造を配置し、固定設計領域 D において、設計変数の C^0 以上の連続性を仮定する。すなわち、固定設計領域に分布する設計変数 $r(\mathbf{x})$ を、形状関数 $N_i^r(\mathbf{x}) (i = 1, \dots, n)$ を構成要素とする形状関数ベクトル $M(\mathbf{x})$ を用いて、次のように離散化する。

$$r \approx r^h = M(\mathbf{x})\mathbf{R} = N_1^r R_1 + \dots + N_i^r R_i + \dots + N_n^r R_n \quad (3.2)$$

ここで、 \mathbf{R} は節点における設計変数ベクトルであり、 n は設計変数の数を表す。この場合、 i 番目の節点に対応する形状関数 $N_i^r(\mathbf{x})$ は、関係する要素内において連続的に変化するため、設計変数も連続的に分布することになり、材料の連続的な分布が考慮された最適解が得られるため、チェッカーボードなどの不安定構造が回避可能である。なお、本研究では、 C^0 連続な最も簡単な形状関数として、双一次関数を用いる。

図 3.1 に、設計空間の緩和に用いるマイクロ構造を示す。ここでは、ほぼ等方的な挙動を示す正六角形状のマイクロ構造を用いる。設計変数はマイクロ構造の正規化された空孔の寸法 r となり、完全孔の場合 1 で、完全稠密の場合 0 となり、以下の制約を受ける。

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (3.3)$$

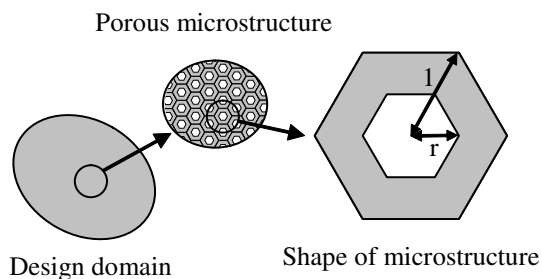


Figure 3.1: Hexagonal microstructure

このマイクロ構造を用いて、以下の手続きにより均質化された物理量を求める。最初に、次式より特性関数 χ を求める。

$$\int_Y \epsilon_y(\mathbf{v})^T \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \epsilon_y(\chi(\mathbf{x}, \mathbf{y})) dY = \int_Y \epsilon_y(\mathbf{v})^T \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dY \text{ for } \forall \mathbf{v} \in V_y \quad (3.4)$$

ここで， \mathbf{y} はマイクロ構造に設定した座標， Y はユニットセルの領域， \mathbf{E} はマイクロ構造の弾性テンソルで，

$$V_y = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : v_i \in H^1(Y) \text{ with } Y\text{-periodic in unit cell } Y\} \quad (3.5)$$

$$\epsilon(\mathbf{v})^T = \left\{ \frac{\partial v_1}{\partial y_1} \quad \frac{\partial v_2}{\partial y_2} \quad \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} \right) \right\} \quad (3.6)$$

である．上式で求められた特性関数 χ を用いて，次式により均質化された弾性テンソル \mathbf{E}^H を，

$$\mathbf{E}'' = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{E}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) (\mathbf{I} - \epsilon_y(\chi)) dY \quad (3.7)$$

として，また均質化された質量密度 ρ_m^H を，

$$\rho_m^H = \frac{1}{|Y|} \int_Y \rho_m(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dY \quad (3.8)$$

として求める．ここで， ρ_m はマイクロ構造の質量密度である．以上の手続きにより，設計空間の緩和を行う．

3.2.2 単軸荷重変換器の最適化における目標関数の設定

二次元平面内に作用する荷重の各成分を独立して検出可能な，二自由度荷重変換器の構造設計を行うことを想定し，図 3.2 に示すように境界 Γ_u を完全固定した二次元の線形弾性体 Ω_e において，境界 Γ_t に表面力 t が作用する場合を考える．さらに，同種の単軸型のひずみゲージが n_g 枚，この弾性体の領域 $\Omega_{g^{i_g}} (\subset \Omega_e) (i_g = 1, \dots, n_g)$ に，それぞれ完全接着されているものとする．このとき， i_g 番目のひずみゲージの抵抗変化は次のように表される．

$$\frac{\Delta R_{i_g}}{R_{i_g}} = K_s \frac{1}{\Omega_{g^{i_g}}} \int_{\Omega_{g^{i_g}}} \varepsilon_{x i_g} d\Omega \quad (3.9)$$

ここで， $\varepsilon_{x i_g}$ は i_g 番目のひずみゲージの図 3.3 に示す縦軸方向を基準にしたひずみの値である． K_s はゲージ率と呼ばれる，縦軸方向を基準にしたひずみと抵抗変化を関連付ける係数で，ひずみゲージ固有の値である．

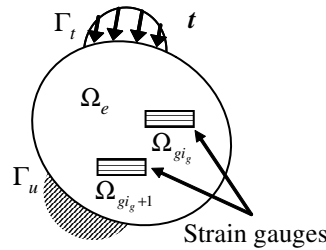


Figure 3.2: An elastic body with strain gauges subjected to two tractions

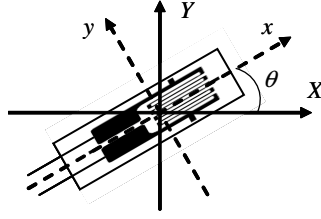


Figure 3.3: Coordinate system of strain gauge

さらに、ひずみゲージの縦軸方向が最大主ひずみ方向と一致しているとすると、

$$\varepsilon_{xi_g} = \frac{\varepsilon_{Xi_g} + \varepsilon_{Yi_g}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{Xi_g} - \varepsilon_{Yi_g}}{2}\right)^2 + (\gamma_{XYi_g})^2} \quad (3.10)$$

となる。ここで、 ε_{Xi_g} 、 ε_{Yi_g} 、 γ_{XYi_g} はそれぞれ、 i_g 番目のひずみゲージ設置箇所における、全体座標系に関するひずみ及びせん断ひずみである。

一般的にひずみゲージの抵抗変化は、ホイートストーンブリッジの出力電圧の変化として検出する。一つのホイートストーンブリッジには最大四枚のひずみゲージが接続され、全て同種のひずみゲージを用いた場合の出力電圧は以下の式で得られる。

$$\begin{aligned} V_{\text{out}} &= \frac{1}{4} V_{\text{in}} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \\ &= \frac{1}{4} K_s V_{\text{in}} (\varepsilon_{g1} - \varepsilon_{g2} + \varepsilon_{g3} - \varepsilon_{g4}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ただし、上式において出力電圧の最大値が得られるのは、明らかに $\varepsilon_{g_{i_g}} \geq 0$ ($i_g = 1, 3$) かつ $\varepsilon_{g_{i_g}} \leq 0$ ($i_g = 2, 4$) の場合である。しかし、最適解が必ずしもこの条件を満たすとは限らない。そこで、ホイートストーンブリッジの構成は、最適解が得られたのちに、各 $\varepsilon_{g_{i_g}}$ の正負に応じて構成を決定するものとし、最適解の導出過程では、各ひずみの絶対値をとった次式の仮想的な出力電圧を用いるものとする。

$$V_{\text{out}} = \frac{1}{4} K_s V_{\text{in}} \sum_{i_g=1}^{n_g} |\varepsilon_{g_{i_g}}| \quad (3.12)$$

この式を用いることにより、各ひずみゲージ設置箇所におけるひずみの正負によらず、最終的に最大の出力電圧となる最適構造が得られる。なお、ひずみの値によっては、全てのひずみゲージで単一のホイートストーンブリッジを構成することが不可能になるため、その際には複数のホイートストーンブリッジを用いることとする。ケース1とケース2のそれぞれの場合についてこの値を最大化することにより、複数の表面力に対する変換器の感度が同時に最大化される。

他方、荷重に抗する十分な剛性は、表面力 t と変位 u との積で表される次式の平均コンプライアンス [13] l を最小化することによりそれぞれ得られる。

$$l = \int_{\Gamma_t} t \cdot u d\Gamma \quad (3.13)$$

よって本最適化問題は、二つの目標関数をもつ多目的最適化問題となる。本研究では重み付き総和法により、目標関数を次式のように定式化する。

$$f = -w_V V_{\text{out}} + w_l l \quad (3.14)$$

ここで w_V と w_l は重み係数である。

3.2.3 多軸荷重変換器構造の最適化における目標関数の設定

本研究では、荷重変換器構造の評価尺度として、剛性、荷重検出感度、荷重成分検出の精度を考える。ここでは、内山ら [112] の特異値分解に基づく荷重成分検出の精度の評価方法を参考に、荷重検出感度、剛性を評価項目に加え、定式化を行う。なお、行列計算の詳細については例えば文献 [41] を参照されたい。

今、ひずみゲージ式荷重変換器のある点に作用する n 自由度の荷重を、 n 個の互いに独立したホイートストーンブリッジで検出する場合を考える。 S を、各ホイートストーンブリッジの電圧 V を成分とする信号ベクトル、 F を荷重ベクトルとする。なお、 S と F は、 n 次元実ベクトル空間に属するものとする。荷重変換器構造の変形が弾性変形である仮定すれば、次式の関係が成り立つ。

$$S = C_s F, \quad C_s \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.15)$$

ここで

$$S^T = (V_1, \dots, V_n), \quad S \in \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

$$F^T = (F_1, \dots, F_n), \quad F \in \mathbb{R}^n \quad (3.17)$$

さらに、 C_s はひずみコンプライアンスマトリクスで、荷重の作用およびひずみ検出箇所が一定であれば、このマトリクスにより変換器構造の性能を評価できる。すなわち、このコンプライアンスマトリクスの数学的な特性値は変換器構造の性能の評価尺度となりうる。そこで、ここでは、内山ら [112] の研究に基づき C_s を用いた変換器構造の新しい評価尺度を構築する。最初に、評価尺度を導出するため、 C_s を次式のように特異値分解する。

$$C_s = U_s \Sigma_s V_s^T \quad (3.18)$$

ただし

$$\Sigma_s = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (3.19)$$

$$U_s = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n), \quad U_s \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{R}^n \quad (3.20)$$

$$V_s = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n), \quad V_s \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^n \quad (3.21)$$

ここで、 U_s 、 V_s はそれぞれ、 n 次元実ベクトル空間の正規直交基底 $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ 、 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ によって構成される基底行列であり、直交行列となる。また、 $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ は C_s の特異値である。さらに、 n 個の特異値の中で、 r 個が正の値をとり、

$$\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r \geq \sigma_{r+1} = \dots = \sigma_n = 0 \quad (3.22)$$

とすれば、 C_s の階数は以下の式より与えられる。

$$\text{rank}(C_s) = r \quad (3.23)$$

まず、ひずみゲージ式荷重変換器は、入力された荷重に対して出力信号が一対一に対応する必要がある。このとき、式 (3.15) において、信号ベクトル S より、 F の値が一意に定まることが必要となる。よって、

$$\text{rank}(C_s) = n \quad (3.24)$$

が成り立たなければならない．すなわち，最小特異値が正でなければならない．

また，荷重を高感度で検出するために，作用する荷重によって生じる出力信号は可能な限り大きいことが望ましい．さらに，信号にはひずみゲージの測定誤差等に起因する誤差が必ず含まれているため，その誤差が各荷重成分に与える影響は最小化されることが望ましい．今， $\sigma_n > 0$ が成り立ち，入力された荷重に対して出力信号が一对一に対応するとき，特異値について以下の関係が成り立つ．

$$\max \frac{\|C_s F\|}{\|F\|} = \max \frac{\|S\|}{\|F\|} = \sigma_1 \quad (3.25)$$

$$\min \frac{\|C_s F\|}{\|F\|} = \min \frac{\|S\|}{\|F\|} = \sigma_n \quad (3.26)$$

ここで， $\|\cdot\|$ は L^2 ノルムを表す．さらに，入力荷重ベクトルの真の値を F_{true} とし，それによって生じる信号の真の値を S_{true} とすると，式 (3.25) と式 (3.26) より以下の関係が成り立つ．

$$\sigma_n \leq \frac{\|S_{\text{true}}\|}{\|F_{\text{true}}\|} \leq \sigma_1 \quad (3.27)$$

また， F_{true} の微小変化量 ΔF_{true} とそれに伴う S_{true} の微小変化量 ΔS_{true} を考えると，同様に以下の式が成り立つ．

$$\sigma_n \leq \frac{\|\Delta S_{\text{true}}\|}{\|\Delta F_{\text{true}}\|} \leq \sigma_1 \quad (3.28)$$

この式における， ΔF_{true} と ΔS_{true} の比は入力荷重の変化量に対する出力信号の変化量の比，すなわち荷重の検出感度を表す．すなわち， $\Delta S_{\text{true}}/\Delta F_{\text{true}}$ の下限値となる最小特異値 σ_n を最大化することで，荷重の検出感度を向上させることができる．

一方，出力信号に真の値からの誤差 ΔS_{error} が含まれ，それに基づき式 (3.15) より導出された荷重ベクトルにも真の値からの誤差 ΔF_{error} が含まれる場合を考える．このとき，式 (3.15) は以下のように表される．

$$S_{\text{true}} + \Delta S_{\text{error}} = C_s (F_{\text{true}} + \Delta F_{\text{error}}) \quad (3.29)$$

このとき，式 (3.28) と同様に，以下の関係が成り立つ．

$$\sigma_n \leq \frac{\|\Delta S_{\text{error}}\|}{\|\Delta F_{\text{error}}\|} \leq \sigma_1 \quad (3.30)$$

ここで，式 (3.30) を式 (3.27) で割ると，以下の関係が成り立つ．

$$\frac{\sigma_n}{\sigma_1} \leq \frac{\|\Delta F_{\text{error}}\|/\|F_{\text{true}}\|}{\|\Delta S_{\text{error}}\|/\|S_{\text{true}}\|} \leq \frac{\sigma_1}{\sigma_n} \quad (3.31)$$

なお， σ_1/σ_n は C_s の条件数と呼ばれる．この式は，荷重ベクトル F の相対誤差 $\|\Delta F_{\text{error}}\|/\|F_{\text{true}}\|$ が，最大で信号ベクトル S の相対誤差 $\|\Delta S_{\text{error}}\|/\|S_{\text{true}}\|$ の条件数倍まで拡大されることを意味している．すなわち，信号の誤差が荷重に与える影響を小さくし，荷重成分検出の精度を向上させるには，条件数の値を最小化し，理想値である 1 に近づければよいことがわかる．なお，このとき，式 (3.28) の荷重検出感度において上限値と下限値が近づくことになるため，この操作は各荷重成分の検出感度を等しくすることとも解釈可能である．

以上より，ひずみコンプライアンスマトリクス C_s に対し特異値分解を行うことで，その階数，最小特異値，条件数に基づく変換器構造の評価指標が得られた．

3.2.4 出力信号の定式化

二次元の二軸荷重変換器構造を想定し、図 3.2 に示すように、境界 Γ_u を完全固定した二次元線形弾性体 Ω_e の微小境界 Γ_t に表面力 t を作用させた場合について考える。さらに、同種の単軸型のひずみゲージが n_g 個、領域 $\Omega_{g_{i_g}} (\subset \Omega_e) (i_g = 1, \dots, n_g)$ に、それぞれ完全接着されているものとする。このときの弾性体の変位ベクトルを u とすれば、以下のつりあい式が成り立つ。

$$\int_{\Omega_e} \varepsilon(v) : D : \varepsilon(u) d\Omega = \int_{\Gamma_t} t \cdot v d\Gamma \quad (3.32)$$

for $u \in V \quad \forall v \in V$

ただし、

$$V = \{v = v_i e_i : v = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (3.33)$$

ここで、 v は仮想変位ベクトルで、 $\varepsilon(u)$ はひずみテンソルで、微小ひずみを仮定している。 D はこの弾性体の弾性テンソルであり、 $:$ はテンソルプロダクトを示す。

また、簡単のため、ひずみゲージは設置領域のひずみの平均的を検出するものとする、 i_g 番目のひずみゲージの抵抗変化は次のように表される。

$$\frac{\Delta R_{i_g}}{R_{i_g}} = K_s \varepsilon_{x_{i_g}} \quad (3.34)$$

ここで、 $\varepsilon_{x_{i_g}}$ は図 3.3 に示すように、 i_g 番目のひずみゲージの縦軸方向を基準にしたひずみの値のひずみゲージ設置領域における平均値である。 K_s はゲージ率と呼ばれる、縦軸方向を基準にしたひずみと抵抗変化を関連付ける係数で、ひずみゲージ固有の値である。さらに、ひずみゲージの縦軸方向の角度 θ を用いて、 $\varepsilon_{x_{i_g}}$ は次式で表される。

$$\varepsilon_{x_{i_g}} = \varepsilon_{X_{i_g}} \cos^2 \theta + \varepsilon_{Y_{i_g}} \sin^2 \theta + 2\gamma_{XY_{i_g}} \sin \theta \cos \theta \quad (3.35)$$

ここで、 $\varepsilon_{X_{i_g}}$ 、 $\varepsilon_{Y_{i_g}}$ 、 $\gamma_{XY_{i_g}}$ はそれぞれ、 i_g 番目のひずみゲージ設置箇所における、全体座標系に関するひずみ及びせん断ひずみである。

本研究では式 (3.16) の信号出力信号 S の成分として、ひずみゲージの抵抗変化に起因するホイートストーンブリッジの出力電圧の変化を考える。一つのホイートストーンブリッジには最大で四つのひずみゲージが接続され、 i_w 番目のホイートストーンブリッジの出力電圧は以下の式で得られる。

$$\begin{aligned} V_{i_w} &= \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} \left(\frac{\Delta R_1}{R_1} - \frac{\Delta R_2}{R_2} + \frac{\Delta R_3}{R_3} - \frac{\Delta R_4}{R_4} \right) \\ &= \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} (\varepsilon_{g_1} - \varepsilon_{g_2} + \varepsilon_{g_3} - \varepsilon_{g_4}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

ここで、 V_{input} は入力電圧の値で、本研究では、全てのホイートストーンブリッジについて等しいものとする。

3.2.5 目標関数の設定

前節で述べたように、高性能な荷重変換器構造を設計するためには、ひずみコンプライアンスマトリクス C_s の階数をホイートストーンブリッジの数 n に保持したまま、最小特異値 σ_n を最大化させると同時に、条件数 σ_1/σ_n を最小化させ理想値 1 に近づける必要がある。このうち、 C_s の階数が n となる条件は、式 (3.23) と式 (3.24) より、最小特異値が正であることとわかり、 σ_n の最大化に伴い達成される。また、このとき、条

件数 σ_1/σ_n の最小化も達成される可能性があるが、後述するように、特異値の更新の際に用いる感度は固有値の感度導出アルゴリズムを用いて求めるため、条件数が理想値 1 の状態では多重固有値となり、感度導出及びその後の最適化が困難になる [49]。そこで本研究では、最小特異値が十分に最大化される前に条件数が 1 となることを防ぐため、他の特異値も重み付き総和法を用いて同時に最大化を行うものとする。ただし、条件数の最小化が達成されるために、最小特異値の増加分がその他の特異値の増加分よりも大きくなるように重みの値を設定する必要がある。

また、十分な剛性は、単軸荷重変換器の最適化の場合と同様、平均コンプライアンス l を最小化することにより得られる。

$$l = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} d\Gamma \quad (3.37)$$

以上、目標関数を次式のように定式化する。

$$f = - \sum_{p=1}^n w_s^p \sigma_p + \sum_{q=1}^m w_l^q l^q \quad (3.38)$$

ただし

$$\sum_{p=1}^n (w_s^p) + \sum_{q=1}^m (w_l^q) = 1 \quad (3.39)$$

ここで w_s^p と w_l^q は重み係数であり、 m は剛性を考慮する荷重ケースの数であり、 l^q は q 番目の荷重ケースに関する平均コンプライアンスである。

3.2.6 最適化問題の定式化

今、図 3.2 に示した二次元の線形弾性体 Ω_e のうち、領域 $\Omega_{g_{i_g}}$ に含まれない部分を固定設計領域 D とし、設計変数を式 (3.3) に示すミクロ構造の寸法 r とした場合について最適化問題を考える。すなわち、ひずみゲージは構造中のあらかじめ設定された位置に設置され、構造中のその箇所は最適化の対象とならない。また、ひずみゲージの縦軸方向はゲージ取り付け位置における最大主ひずみ方向と常に一致するものとする。このとき、最適化問題は以下のように定式化される。

$$\underset{\mathbf{r}}{\text{minimize}} \quad f \quad (3.40)$$

制約条件

$$g(\mathbf{r}) \leq \int_D (1 - r(\mathbf{x})) d\Omega - V^U \leq 0 \quad (3.41)$$

$$0 \leq r(\mathbf{x}) \leq 1 \quad (3.42)$$

$$\int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) : \mathbf{D} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) d\Omega = \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (3.43)$$

for $\mathbf{u} \in V \quad \forall \mathbf{v} \in V$

ただし

$$V = \{\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i : \mathbf{v} = 0 \text{ on } \Gamma_u\} \quad (3.44)$$

ここで、 $g(r)$ は体積制約を表し、 V^U は体積（二次元問題では面積）の上限値を示す。さらに、式 (3.43) は弱形式で表した力のつりあい式、式 (3.44) はディリクレ境界条件を表し、 D は弾性テンソル、 v はテスト関数である。

3.3 最適化の手続き

3.3.1 最適化アルゴリズム

最適化のフローチャートを以下に示す。

1. 初期形状を決定する。
2. 目標関数が収束するまで以下のループを繰り返す。
 - (a) 均質化弾性テンソルを導出する。
 - (b) 有限要素法により平衡方程式を解く。
 - (c) 各荷重ケースについて目標関数及び制約条件を計算する。
 - (d) 目標関数の感度を導出する。
 - (e) 求めた感度に基づき、逐次線形計画法 (SLP) を用いて設計変数を更新する。

3.3.2 有限要素法を用いたひずみコンプライアンスマトリクス の導出

ここで、多軸荷重変換機の最適化で用いる、ひずみコンプライアンスマトリクス C_s を有限要素法により導出する。最初に、式 (3.43) を有限要素近似した式を次式で表す。

$$Ku = f \quad (3.45)$$

ここで、 u 、 f はそれぞれ変位ベクトルと荷重ベクトルであり、 K は剛性マトリクスで、

$$K = \bigcup_{i_e=1}^{n_e} K_{i_e} = \bigcup_{i_e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{i_e}} B_{i_e}^T D_{i_e} B_{i_e} d\Omega \quad (3.46)$$

である。さらに式中の K_{i_e} 、 B_{i_e} 、 D_{i_e} はそれぞれ i_e 番目の要素の要素剛性マトリクス、 B マトリクス、弾性マトリクスである。 \bigcup は和集合を意味し、ここでは要素剛性マトリクスの重ね合わせを表すものとする。

続いて、 i_g 番目のひずみゲージが検出するひずみを離散化した値を、 $\varepsilon_{g_{i_g}}^h$ とし、対応する要素番号が i_e とすると、以下の式より導出される。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{g_{i_g}}^h &= T_{i_g} \varepsilon_{i_e}^h = T_{i_g} B_{i_e} u_{i_e} = T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T u \\ &= T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T K^{-1} f = T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T K^{-1} H_f F \\ &= T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T H_f F = A_{i_g} F \end{aligned} \quad (3.47)$$

ただし

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i_e}^h &= B_{i_e} u_{i_e}, \quad u_{i_e} = H_{i_e}^T u, \quad f = H_f F, \\ A_{i_g} &= T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T H_f \end{aligned} \quad (3.48)$$

ここで、 T_{i_g} は $\varepsilon_{g_{i_g}}^h$ と $\varepsilon_{i_e}^h$ を関連付けるベクトル、 $\varepsilon_{i_e}^h$ 、 u_{i_e} はそれぞれ i_e 番目の要素におけるひずみベクトルと変位ベクトルであり、 F は荷重が作用する節点における荷重ベクトルである。また、 Z_{i_e} は次式を解くことにより得られる。

$$K Z_{i_e} = H_{i_e} \quad (3.49)$$

式 (3.11) , (3.16) , (3.47) より ,

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} = \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{g1} - \varepsilon_{g2} + \varepsilon_{g3} - \varepsilon_{g4} \\ \vdots \\ \varepsilon_{gn_g-3} - \varepsilon_{gn_g-2} + \varepsilon_{gn_g-1} - \varepsilon_{gn_g} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n_g-3} - \mathbf{A}_{n_g-2} + \mathbf{A}_{n_g-1} - \mathbf{A}_{n_g} \end{pmatrix} \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.50)$$

式 (3.15) と式 (3.50) を比較して ,

$$\mathbf{C}_s = \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 - \mathbf{A}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{n_g-3} - \mathbf{A}_{n_g-2} + \mathbf{A}_{n_g-1} - \mathbf{A}_{n_g} \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

が得られる .

3.3.3 感度解析

前述のように , 本研究では設計変数の更新に , 比較的多くの設計変数を扱うことが可能な逐次線形計画法 (SLP) を用いている . SLP では目標関数と制約条件の設計変数に関する感度を必要とするため , 以下その導出方法について説明する . なお , 感度は , 有限要素近似後の離散化された値に基づき , 各節点について求めるものとする . ここでは , 節点番号を i_d ($i_d = 1, \dots, n_d$) とし , 要素番号は i_e ($i_e = 1, \dots, n_e$) とする . 最初に , 式 (3.15) を有限要素近似した式を次式で表す .

$$\mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (3.52)$$

ここで , \mathbf{U} , \mathbf{F} はそれぞれ k 番目の荷重ケースに対応する変位ベクトルと荷重ベクトルであり , \mathbf{K} は剛性マトリクスで ,

$$\mathbf{K} = \bigcup_{i_e=1}^{n_e} \mathbf{K}_{i_e} = \bigcup_{i_e=1}^{n_e} \int_{\Omega_{i_e}} \mathbf{B}_{u,i_e}^T \mathbf{D}_{i_e} \mathbf{B}_{u,i_e} d\Omega \quad (3.53)$$

である . さらに式中の \mathbf{K}_{i_e} , \mathbf{B}_{u,i_e} , \mathbf{D}_{i_e} はそれぞれ i_e 番目の要素の要素剛性マトリクス , B マトリクス , 弾性マトリクスである . 最初に式 (3.12) で表される出力電圧の , 節点 i_d における設計変数 r_{i_d} に関する感度を導出する .

$$\frac{\partial \Delta V_{\text{out}}}{\partial r} = \frac{1}{4} K_s V_{\text{in}} \sum_{i_g=1}^{n_g} \left| \frac{\partial \varepsilon_{g i_g}}{\partial r} \right| \quad (3.54)$$

即ち , k 番目の荷重ケースに対応する , i_g 番目のひずみゲージ設置箇所におけるひずみの , 設計変数 r に関する感度 $\frac{\varepsilon_{g i_g}}{r}$ を求めればよい . 即ち , 式 (3.9) に基づき ,

$$\frac{\partial \varepsilon_{g i_g}}{\partial r} = \frac{1}{\Omega_{g i_g}} \sum_{j=1}^m \frac{\partial (\varepsilon_{g i_g})_j^h}{\partial r} \quad (3.55)$$

と表せる . 但し , m は領域 $\Omega_{g i_g}$ に含まれる要素の数 , $(\varepsilon_{g i_g})_j^h$ は領域 $\Omega_{g i_g}$ に含まれる j 番目の要素の離散化された主ひずみである . ここで , i_e 番目の要素の荷重ケース k に対する離散化されたひずみベクトルの設計

変数 r_{id} に関する感度は次式で得られる．

$$\frac{\partial(\varepsilon_{ie})^h}{\partial r_{id}} = \mathbf{B}_{u,ie} \frac{\partial \mathbf{U}_{ie}}{\partial r_{id}} \quad (3.56)$$

即ち，感度は， \mathbf{U}_{ie} の r_{id} に関する感度を求めることにより導出できる．ここで，要素変位ベクトル \mathbf{U}_{ie} と全体変位ベクトル \mathbf{U} を関連付けるベクトル \mathbf{H}_{ie} を考える．即ち，

$$\mathbf{U}_{ie} = \mathbf{H}_{ie}^T \mathbf{U} \quad (3.57)$$

が成り立つので，

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ie}}{\partial r_{ie}} = \mathbf{H}_{ie}^T \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ie}} \quad (3.58)$$

となる．また，式 (3.52) より，

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial r_{ie}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{ie}} \mathbf{U} \quad (3.59)$$

なので，

$$\frac{\partial \mathbf{U}_{ie}}{\partial r_{ie}} = -\mathbf{H}_{ie}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{ie}} \mathbf{U} = -\mathbf{Z}_{ie}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{ie}} \mathbf{U} \quad (3.60)$$

が得られる．ただし， \mathbf{Z}_{ie} は次式を解くことで得られる．

$$\mathbf{K} \mathbf{Z}_{ie} = \mathbf{H}_{ie} \quad (3.61)$$

以上，式 (3.52) ~ 式 (3.54) と式 (3.60) より，出力電圧の設計変数 r_{id} に関する感度が得られる．

続いて，多軸荷重変換器構造の最適化における目標関数の感度，即ち，ひずみコンプライアンスマトリクス \mathbf{C}_s の感度を導出する．行列 \mathbf{C}_s の j 次の特異値を $\sigma_j(\mathbf{C}_s)$ ， j 次の固有値を $\lambda_j(\mathbf{C}_s)$ と表すと，以下の関係が成り立つ．

$$\sigma_j(\mathbf{C}_s) = \sqrt{\lambda_j(\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)} \quad (3.62)$$

すなわち， j 次の特異値の設計変数 r_{id} に関する感度は，

$$\frac{\partial \sigma_j(\mathbf{C}_s)}{\partial r_{id}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_j(\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)}} \frac{\partial \lambda_j(\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)}{\partial r_{id}} \quad (3.63)$$

で得られる．ここで， $\lambda_i(\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)$ の設計変数 r_{id} に関する感度は次式より求まる．

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_i(\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)}{\partial r_{id}} &= \phi_j^T \frac{\partial (\mathbf{C}_s^T \mathbf{C}_s)}{\partial r_{id}} \phi_j \\ &= \phi_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{C}_s^T}{\partial r_{id}} \mathbf{C}_s + \mathbf{C}_s^T \frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial r_{id}} \right) \phi_j \end{aligned} \quad (3.64)$$

ただし， ϕ_j は正規化された j 次の固有ベクトルである．次に， $\frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial r_{id}}$ を導出する．式 (3.51) より，

$$\frac{\partial \mathbf{C}_s}{\partial r_{id}} = \frac{1}{4} K_s V_{\text{input}} \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial r_{id}} - \frac{\partial \mathbf{A}_2}{\partial r_{id}} + \frac{\partial \mathbf{A}_3}{\partial r_{id}} - \frac{\partial \mathbf{A}_4}{\partial r_{id}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{A}_{n_g-3}}{\partial r_{id}} - \frac{\partial \mathbf{A}_{n_g-2}}{\partial r_{id}} + \frac{\partial \mathbf{A}_{n_g-1}}{\partial r_{id}} - \frac{\partial \mathbf{A}_{n_g}}{\partial r_{id}} \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

となる．次に $\frac{\partial A_{i_g}}{\partial r_{i_d}}$ を導出する．式 (3.48) より，

$$A_{i_g} \mathbf{F} = T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T \mathbf{u} \quad (3.66)$$

となる．両辺を r_{i_d} で偏微分して，

$$\frac{\partial A_{i_g}}{\partial r_{i_d}} \mathbf{F} = T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_{i_d}} \quad (3.67)$$

また，式 (3.45) より，

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_{i_e}} = -\mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} \mathbf{u} \quad (3.68)$$

なので，

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{i_g}}{\partial r_{i_d}} \mathbf{F} &= -T_{i_g} B_{i_e} H_{i_e}^T \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} \mathbf{u} \\ &= -T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} \mathbf{u} \\ &= -T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f} \\ &= -T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} \mathbf{K}^{-1} H_f \mathbf{F} \\ &= -T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} Z_f \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.69)$$

ただし， Z_f は次式を解くことにより得られる．

$$\mathbf{K} Z_f = H_f \quad (3.70)$$

すなわち，

$$\frac{\partial A_{i_g}}{\partial r_{i_d}} = -T_{i_g} B_{i_e} Z_{i_e}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial r_{i_e}} Z_f \quad (3.71)$$

が得られた．以上，式 (3.63)，式 (3.64)，式 (3.65)，式 (3.71) より特異値の設計変数に関する感度が得られる．

他方，平均コンプライアンス l の設計変数 r_{i_d} に関する感度は二章と同様に求まる．

3.4 数値例

いくつかの数値例により，本研究で提唱する方法論の妥当性を検討した．なお，構造物の材料はアルミニウムを想定し，解析のための有限要素には 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた．ひずみゲージは全て同種のものを使用し，ゲージ率が 2.1，検出部の全長が 4mm とした．さらに，ひずみゲージは各有限要素内に，有限要素の中心とひずみゲージの検出部の中心が一致するように配置した．また，ホイートストーンブリッジの入力電圧は，いずれの数値例においても 24V とした．さらに，いずれの数値例においても体積制約 V^U は全設計領域の 40% とした．

3.4.1 単軸荷重変換器構造の最適化

最初に，単軸荷重変換器の最適起歪構造の創成を目的とし，最適化を行った．図 3.4 に設計領域を示す．図に示すように，ひずみゲージを図で示す箇所に一枚から四枚貼り付け，構造の右端中央に垂直荷

重を作用させた．式 (3.14) の重み係数は $(w_V = 0.9995, w_l = 0.0005)$, $(w_V = 0.99975, w_l = 0.00025)$, $(w_V = 0.9999, w_l = 0.0001)$ の三通りとした．

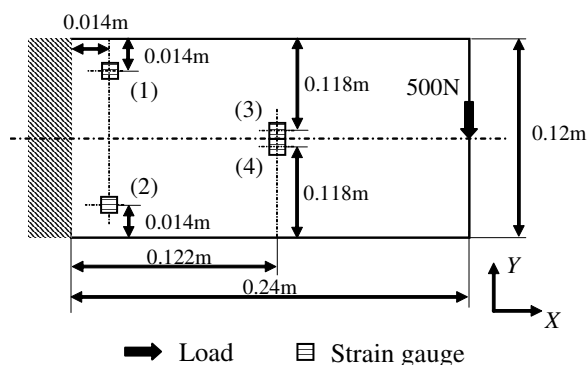
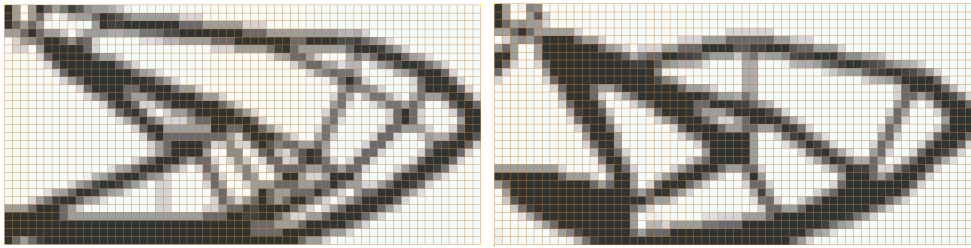


Figure 3.4: Design domain for example 1

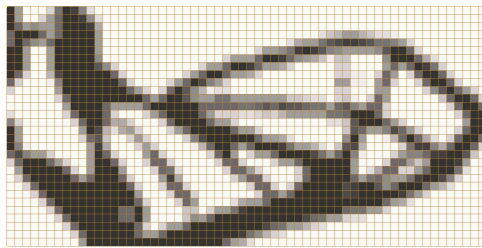
図 3.5 にひずみゲージを一枚，箇所 (1) に設置した場合の最適構造，図 3.6 にひずみゲージを二枚，箇所 (1) と (2) に設置した場合の最適構造，図 3.7 にひずみゲージを四枚，箇所 (1) ~ (4) に設置した場合の最適構造を示す．なお，最適構造は設計変数 r の値から計算される密度分布をグレースケールで表す．即ち黒の位置においては要素が完全に密であり，白の位置においては要素が配置されていないことを示す．また，表 3.1 に，最適構造におけるひずみゲージ設置角度 θ 及び各ひずみゲージの抵抗変化 ΔR ，式 (3.12) で求めた出力電圧 V_{out} ，平均コンプライアンス l の値を示す．なお，ひずみゲージ設置角度 θ は，図 3.3 に示す全体座標系とひずみゲージ座標系間の角度である．さらに，図 3.8 に各構造における最適化過程の出力電圧のグラフを示す．

このグラフより，いずれの構造においても，最適化の過程で出力電圧が上昇しており，最終的に最適解が得られていることがわかる．設置されるひずみゲージが一枚の場合には，出力電圧 V_{out} と図 3.5 から，重み係数 w_V が小さい場合には拘束境界下部に連結構造が生成し，重み係数 w_V が大きくなるにつれて，固定条件との連結構造が上部に移動し，ひずみゲージ設置位置のひずみを増加させていることがわかる．また，図 3.6 より，ひずみゲージが二枚設置された場合には，重み係数 w_V が大きくなるにつれて，ひずみゲージ取り付け位置近傍で構造が複雑になっており，ひずみが増加していることがわかる．さらに，図 3.7 より，ひずみゲージが四枚設置された場合には，構造中央のひずみゲージ設置箇所が上下の構造を連結しており，この箇所に大きなせん断ひずみが生じると考えられる．また，ひずみゲージが二枚と四枚の場合においては，SLP の計算誤差による影響があるため，不完全ではあるが上下対象の構造が得られており，表 3.1 に示すひずみゲージの取り付け角度 θ もほぼ上下対象であり，抵抗変化も絶対値がほぼ等しいことから，上下のセンサがそれぞれ引張りと圧縮でほぼ同じ値のひずみを検出していることがわかる．また，表 3.1 より，いずれのひずみゲージの枚数においても，重みの変化に応じて，出力電圧と平均コンプライアンスの最適値が変化しており，異なる重みの設定により，異なる性能を有する構造が得られることがわかる．しかし，同じ重みで得られた出力電圧をひずみゲージの枚数ごとに比較すると，ひずみゲージが一枚の場合において，ひずみゲージが二枚の場合と比較して，高い電圧が得られている場合がある．即ち，重みによっては，少ないひずみゲージでも大きな出力電圧が得られる最適構造が創成可能であることがわかる．



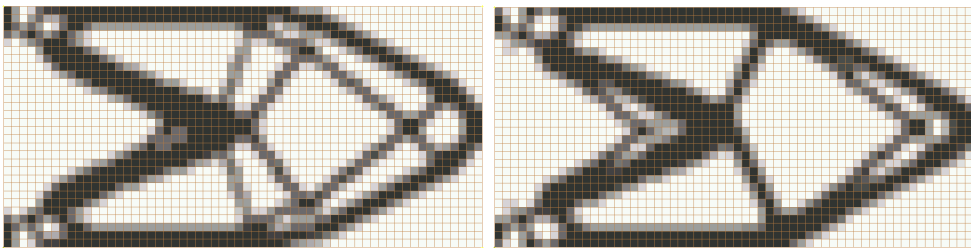
(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



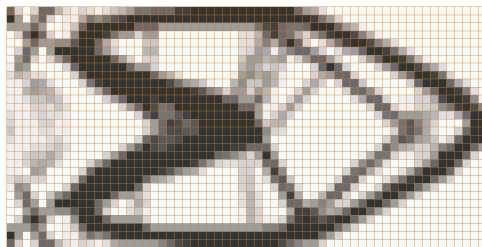
(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.5: Optimal configuration for load case 1 of example 1 (1 strain gauge)



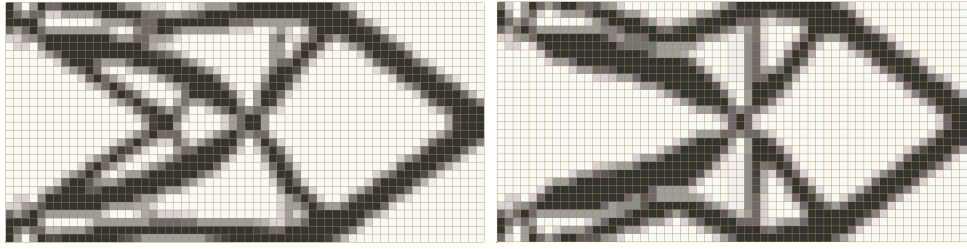
(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



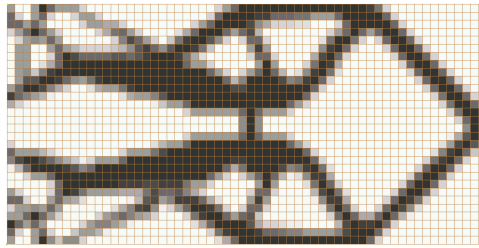
(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.6: Optimal configuration for load case 1 of example 1 (2 strain gauges)



(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.7: Optimal configuration load case 1 for example 1 (4 strain gauges)

Table 3.1: Optimal results for example 1

(a) 1 strain gauge

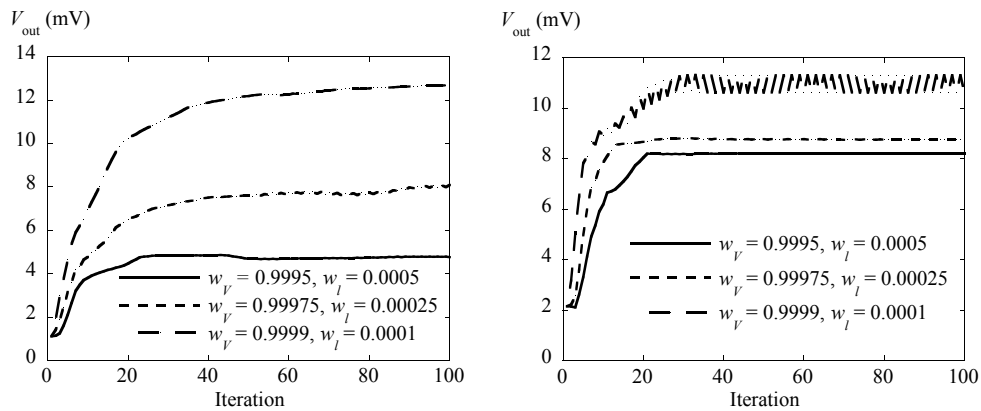
w_V	w_l	θ_1 (°)	θ_2 (°)	θ_3 (°)	θ_4 (°)	ΔR_1 (Ω)	ΔR_2 (Ω)	ΔR_3 (Ω)	ΔR_4 (Ω)	V_{out} (mV)	l (J)
0.9995	0.0005	-38.6	-	-	-	9.50×10^{-5}	-	-	-	4.79	2.39×10^{-2}
0.99975	0.00025	-34.7	-	-	-	1.59×10^{-4}	-	-	-	8.01	4.49×10^{-2}
0.9999	0.0001	-36.1	-	-	-	2.52×10^{-4}	-	-	-	12.70	1.05×10^{-1}

(b) 2 strain gauges

w_V	w_l	θ_1 (°)	θ_2 (°)	θ_3 (°)	θ_4 (°)	ΔR_1 (Ω)	ΔR_2 (Ω)	ΔR_3 (Ω)	ΔR_4 (Ω)	V_{out} (mV)	l (J)
0.9995	0.0005	-35.1	35.1	-	-	8.15×10^{-5}	-8.71×10^{-5}	-	-	8.21	2.52×10^{-2}
0.99975	0.00025	-36.1	36.0	-	-	8.71×10^{-5}	-8.65×10^{-5}	-	-	8.75	2.68×10^{-2}
0.9999	0.0001	-39.6	39.6	-	-	1.12×10^{-4}	-1.13×10^{-4}	-	-	11.31	4.96×10^{-2}

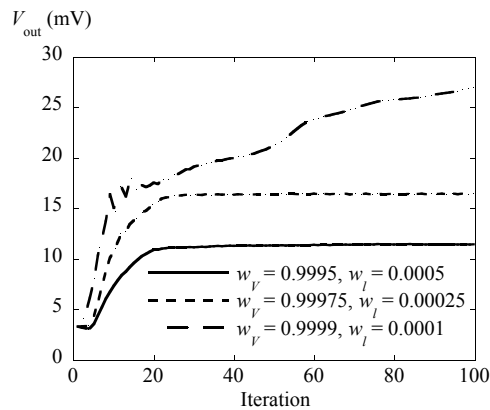
(c) 4 strain gauges

w_V	w_l	θ_1 (°)	θ_2 (°)	θ_3 (°)	θ_4 (°)	ΔR_1 (Ω)	ΔR_2 (Ω)	ΔR_3 (Ω)	ΔR_4 (Ω)	V_{out} (mV)	l (J)
0.9995	0.0005	-37.8	37.9	-44.0	44.1	6.69×10^{-5}	-6.41×10^{-5}	4.80×10^{-5}	-4.88×10^{-5}	11.49	2.33×10^{-2}
0.99975	0.00025	-35.5	35.5	-43.1	44.2	8.79×10^{-5}	-8.77×10^{-5}	7.50×10^{-5}	-7.78×10^{-5}	16.54	3.24×10^{-2}
0.9999	0.0001	-38.7	39.5	-44.9	44.9	1.07×10^{-4}	-1.11×10^{-4}	1.54×10^{-4}	-1.54×10^{-4}	26.34	6.36×10^{-2}



(a) 1 strain gauge

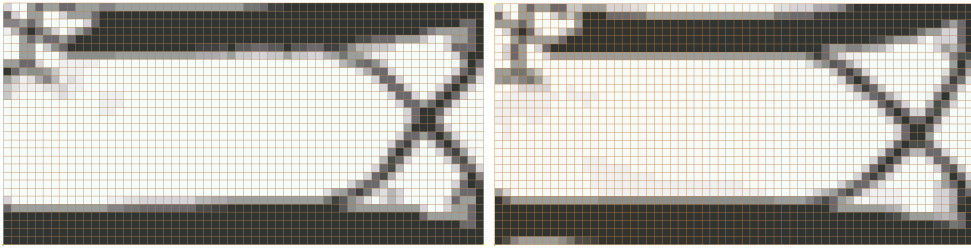
(b) 2 strain gauges



(c) 4 strain gauges

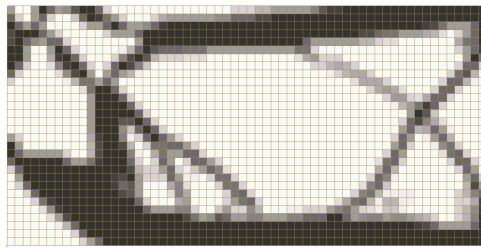
Figure 3.8: History of output voltage of load case 1 of example 1

次に，図 3.9 と図 3.10，図 3.11, 表 3.2 に，荷重ケース 2 に関する最適解を，荷重ケース 1 と同様に示す．最適構造の比較により，ひずみゲージを 4 枚貼り付けた場合にのみ，設計領域中央に，構造が生じていることがわかる．即ち，設計領域中央部は，本来は構造が不要な位置であり，ひずみゲージを設置したことで，ひずみゲージにひずみを与えるための構造が生じたと考えられる．また，ひずみゲージの設置角度より構造中央においてはせん断ひずみが支配的であると考えられ，これは力学的に妥当な結果であると考えられる．



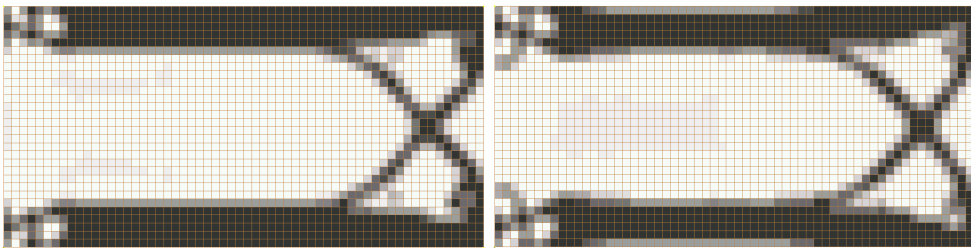
(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



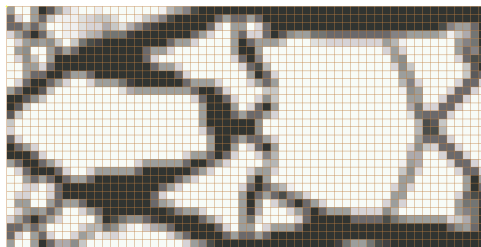
(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.9: Optimal configuration for load case 2 example 4 (1 strain gauge)



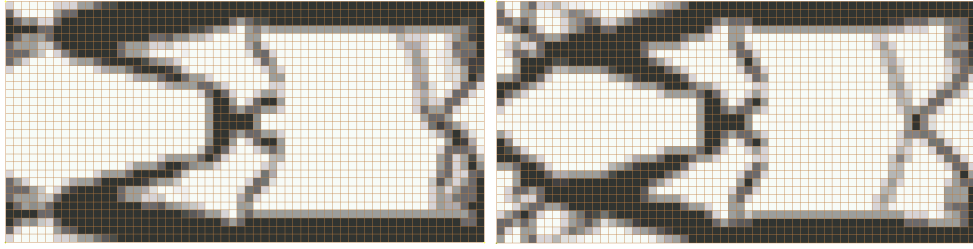
(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



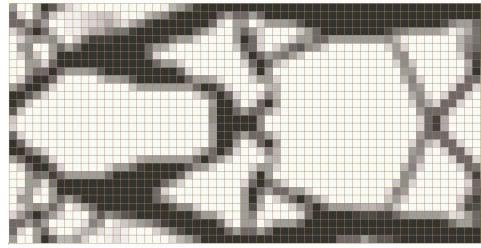
(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.10: Optimal configuration for example 5 (2 strain gauges)



(a) $w_V = 0.9995, w_l = 0.0005$

(b) $w_V = 0.99975, w_l = 0.00025$



(c) $w_V = 0.9999, w_l = 0.0001$

Figure 3.11: Optimal configuration for example 6 (4 strain gauges)

Table 3.2: Optimal results for load case 2 of example 1

(a) 1 strain gage											
w_V	w_l	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$	$\theta_4(^{\circ})$	$\Delta R_1 (\Omega)$	$\Delta R_2 (\Omega)$	$\Delta R_3 (\Omega)$	$\Delta R_4 (\Omega)$	$\Delta V_{\text{out}} (\text{mV})$	$l (\text{J})$
0.999	0.001	-40.6	-	-	-	5.00×10^{-5}	-	-	-	2.52	1.05×10^{-2}
0.99925	0.00075	-42.4	-	-	-	5.22×10^{-5}	-	-	-	2.63	1.16×10^{-2}
0.9995	0.0005	-40.1	-	-	-	1.18×10^{-4}	-	-	-	5.93	2.56×10^{-2}
(b) 2 strain gages											
w_V	w_l	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$	$\theta_4(^{\circ})$	$\Delta R_1 (\Omega)$	$\Delta R_2 (\Omega)$	$\Delta R_3 (\Omega)$	$\Delta R_4 (\Omega)$	$\Delta V_{\text{out}} (\text{mV})$	$l (\text{J})$
0.999	0.001	-31.7	31.7	-	-	3.65×10^{-5}	-3.65×10^{-5}	-	-	3.67	9.98×10^{-3}
0.99925	0.00075	-33.8	33.8	-	-	3.77×10^{-5}	-3.77×10^{-5}	-	-	3.80	1.04×10^{-2}
0.9995	0.0005	-36.1	36.1	-	-	4.58×10^{-5}	-4.60×10^{-5}	-	-	4.63	1.23×10^{-2}
(c) 4 strain gages											
w_V	w_l	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$	$\theta_4(^{\circ})$	$\Delta R_1 (\Omega)$	$\Delta R_2 (\Omega)$	$\Delta R_3 (\Omega)$	$\Delta R_4 (\Omega)$	$\Delta V_{\text{out}} (\text{mV})$	$l (\text{J})$
0.999	0.001	-9.0	9.1	-44.6	44.2	2.96×10^{-5}	-2.98×10^{-5}	2.30×10^{-5}	-2.30×10^{-5}	5.31	1.10×10^{-2}
0.99925	0.00075	-36.4	36.6	-43.6	43.6	4.44×10^{-5}	-4.44×10^{-5}	3.37×10^{-5}	-3.37×10^{-5}	7.88	1.55×10^{-2}
0.9995	0.0005	-36.9	38.3	-43.6	43.5	4.68×10^{-5}	-5.40×10^{-4}	4.92×10^{-5}	-4.90×10^{-5}	10.03	2.25×10^{-2}

また、ひずみゲージを四枚設置した場合には、抵抗変化 ΔR が正と負で二つづつになり、これらのひずみゲージで一つのホイートストーンブリッジを構成可能であることがわかる。これは、式 (3.12) を目標関数として、各ひずみゲージ設置位置の主ひずみの絶対値を最大化していることから、各主ひずみは初期構造における符号を保ちつつ、絶対値が最大化されるため、荷重に対して上下対象にひずみゲージを配置しているこれら

の例題においては妥当な結果であると考えられる．しかし，この方法では，ひずみの正負が最適化過程で変化することがないため，正負を変化させることで，さらに性能の良い最適解が得られる可能性がある．そこで，荷重ケース 1 でひずみゲージを二枚及び四枚設置した場合について，ひずみゲージ設置位置のひずみを全て，正の方向に最適化するとものとして，最適化を行った．そのうち，重み係数が ($w_V = 0.9999, w_I = 0.0001$) のときに，同じ重み係数に対する先の結果よりも高い出力電圧 V_{out} が得られたので，図 3.12 に最適構造，表 3.3 に最適構造における各種データを示す．但し，ひずみゲージを四枚設置した場合については，いずれのひずみゲージの抵抗変化も正となるため，最低二つのホイートストーンブリッジを構成する必要がある．この検討により，ひずみの正負は初期構造により決定されるため，最適解に初期構造依存性があること，また，条件によっては，ひずみの正負を最適化の条件として指定することで，さらに良好な解が得られる可能性があることがわかった．

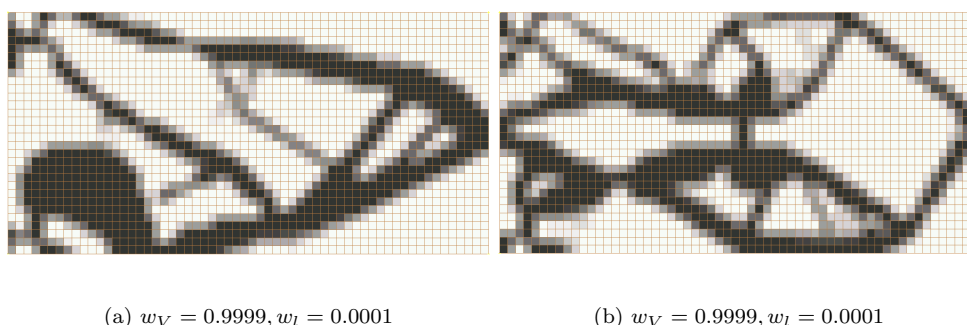


Figure 3.12: Optimal configuration for example 1 (Direction of strain is specified)

Table 3.3: Optimal results for example 1 (Direction of strain is specified)

(a) 2 strain gauges											
w_V	w_I	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$	$\theta_4(^{\circ})$	$\Delta R_1(\Omega)$	$\Delta R_2(\Omega)$	$\Delta R_3(\Omega)$	$\Delta R_4(\Omega)$	$V_{out}(\text{mV})$	$I(\text{J})$
0.9999	0.0001	-43.9	-51.0	-	-	2.00×10^{-4}	1.20×10^{-4}	-	-	16.15	7.34×10^{-2}
(b) 4 strain gauges											
w_V	w_I	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	$\theta_3(^{\circ})$	$\theta_4(^{\circ})$	$\Delta R_1(\Omega)$	$\Delta R_2(\Omega)$	$\Delta R_3(\Omega)$	$\Delta R_4(\Omega)$	$V_{out}(\text{mV})$	$I(\text{J})$
0.9999	0.0001	-39.5	-47.7	-45.4	-45.7	1.35×10^{-4}	9.48×10^{-5}	1.97×10^{-4}	1.97×10^{-4}	31.39	6.36×10^{-2}

3.4.2 多軸荷重変換器構造の最適化

図 3.13 に設計領域を示す．図に示すように，ひずみゲージは図中の箇所 (i) 及び箇所 (ii) に設置し，それぞれ 1 番目，2 番目のひずみゲージとする．そして，式 (3.16) において V_1, V_2 はそれぞれ箇所 (i) と箇所 (ii) のひずみゲージによって別個に構成されるホイートストーンブリッジの出力電圧を表すものとする．また，式 (3.51) で表されるひずみコンプライアンスマトリクス C_s は荷重に依存しないため，荷重検出の感度及び精度のみを最適化の対象とするのであれば，荷重条件は不要であるが，本研究では剛性も含めた最適化を行うため，図のように二通りの荷重を右端中央に作用させた．すなわち，式 (3.38) に基づき，ひずみコンプライアンスマトリクスの 1 次と 2 次の特異値を最大化すると同時に，ケース 1 とケース 2 の荷重に対する平均

コンプライアンスを最小化する．式 (3.38) の重み係数は ($w_s^1 = 0.05, w_s^2 = 0.45, w_l^1 = 0.25, w_l^2 = 0.25$) , ($w_s^1 = 0.04, w_s^2 = 0.36, w_l^1 = 0.30, w_l^2 = 0.30$) の二通りとした．以後，これらの重みをそれぞれ重み設定 1，重み設定 2 と表記する．また，箇所 (i) 及び箇所 (ii) のひずみゲージの設置角度はそれぞれ，ケース 1 とケース 2 の荷重によって生じる主ひずみの方向に等しくした．体積制約 V^U は全設計領域の 40% とした．

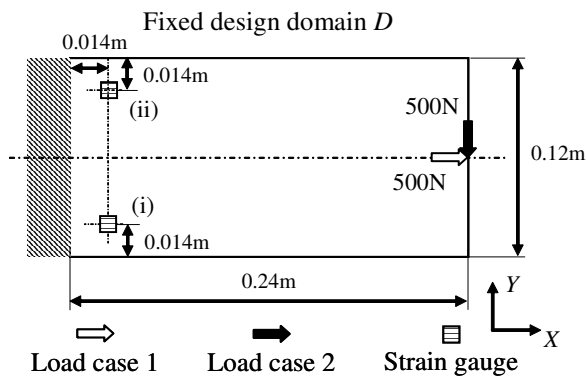
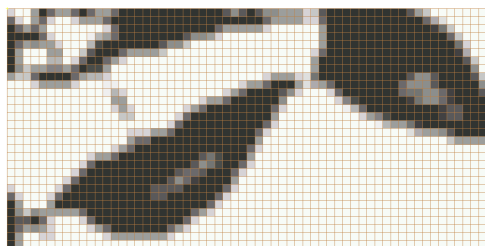
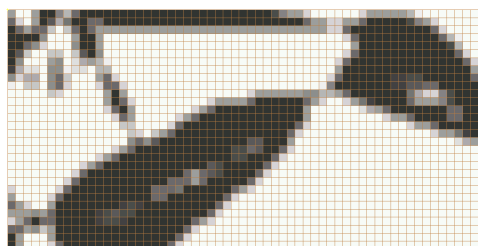


Figure 3.13: Design domain

図 3.14 にそれぞれの重み設定で得られた最適構造を示す．また，表 3.4 に，初期構造における 1 次，2 次の特異値 σ_1, σ_2 及び条件数 σ_1/σ_2 ，最適構造におけるひずみゲージ設置角度 θ ，ひずみコンプライアンスマトリクス の 1 次，2 次の特異値 σ_1, σ_2 及び条件数 σ_1/σ_2 ，それぞれ荷重ケース 1，2 に対する平均コンプライアンス l^1, l^2 ，荷重ケース j に対する i 番目のひずみゲージの抵抗変化 ΔR_i^j ，式 (3.11) で求めた，荷重ケース j に対する i 番目のひずみゲージが含まれるホイートストーンブリッジの出力電圧 V_i^j を示す．なお，ひずみゲージ設置角度 θ は，図 3.3 に示す全体座標系とひずみゲージ座標系間の角度である．また，本手法で荷重の検出感度が最大化されることを確認するため，最適化過程における，式 (3.16) で表される出力信号ベクトル S の L^2 ノルムの，それぞれの荷重ケースに対する値の変化を図 3.15 に示す．さらに，重み設定 1，2 で得られた最適構造におけるひずみコンプライアンスマトリクスの値をそれぞれ式 (3.72)，式 (3.73) に示す．



(a) Weighting coefficients settings 1

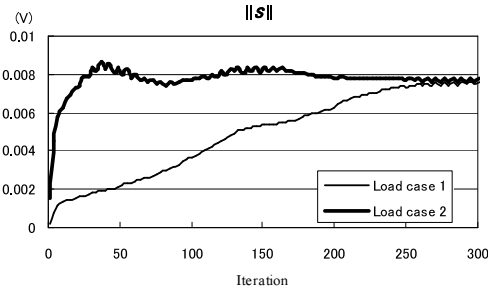


(b) Weighting coefficients settings 2

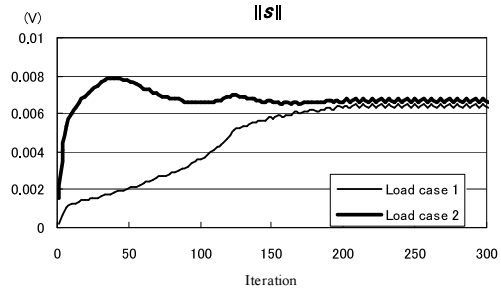
Figure 3.14: Optimal configurations for example 2

Table 3.4: Initial values and optimal results

	σ_1	σ_2	σ_1/σ_2						
Initial values	5.18×10^{-13}	3.83×10^{-12}	7.41						
	$\theta_1(^{\circ})$	$\theta_2(^{\circ})$	σ_1	σ_2	σ_1/σ_2	l^1 (J)	l^2 (J)		
Setting 1	42.1	-45.9	1.99×10^{-11}	1.91×10^{-11}	1.04	0.07	0.11		
Setting 2	42.9	-38.6	1.69×10^{-11}	1.61×10^{-11}	1.05	0.06	0.08		
	ΔR_1^1 (Ω)	ΔR_2^1 (Ω)	ΔR_1^2 (Ω)	ΔR_2^2 (Ω)	V_1^1 (mV)	V_1^2 (mV)	V_2^1 (mV)	V_2^2 (mV)	
Setting 1	-7.24×10^{-5}	-1.32×10^{-4}	-1.32×10^{-4}	7.85×10^{-5}	-3.65	-6.66	-6.68	3.95	
Setting 2	-7.55×10^{-5}	-1.06×10^{-4}	-1.01×10^{-4}	7.82×10^{-5}	-3.81	-5.35	-5.08	3.94	



(a) Weighting coefficients settings 1



(b) Weighting coefficients settings 2

Figure 3.15: History of output signals (L^2 norm)

$$C_s(\text{Setting 1}) = \begin{pmatrix} 0.93 & 1.70 \\ 1.69 & -1.00 \end{pmatrix} \times 10^{-11} \quad (3.72)$$

$$C_s(\text{Setting 2}) = \begin{pmatrix} 0.97 & 1.36 \\ 1.28 & -1.00 \end{pmatrix} \times 10^{-11} \quad (3.73)$$

図 3.14 より，本手法で，荷重の作用点から，ひずみゲージ設置位置まで，ヒンジを介し構造が連続しており，加重変換器の構造として成立しうる最適解が得られていることがわかる．また，最適解において低い密度の箇所を無視するものとする，重み設定 1 と 2 では，上下の構造を連結するバーの有無が異なっている．表 3.4 より，最適解においては，条件数 σ_1/σ_2 が理想値である 1 に近い値が得られており，荷重検出の精度に関して十分な性能を有していることがわかる．また，表 3.4 及び図 3.15 より，最適化の過程で，最小特異値及びそれぞれの荷重ケースに関する出力電圧が向上しており，本手法での最適化により荷重検出感度が向上することがわかる．また，重み設定 1 と 2 の比較により， w_s^1 ， w_s^2 の値が大きい重み設定 1 の方が，重み設定 2 よりも高い出力電圧が得られていることがわかる．また，最適解においては，荷重ケース 1 と荷重ケース 2 においてほぼ等しい出力電圧が得られていることがわかる．さらに，式 (3.72) と式 (3.73) より，ひずみコンプライアンスマトリクス C_s においては対角成分の絶対値がほぼ等しく，非対角成分の値が二つともほぼ等しい値になっていることがわかる．ここで， C_s の対角成分に注目すると，それらは式 (3.15) より，それぞれホイー

トストーンブリッジ 1 の出力電圧と荷重の X 成分，ホイートストーンブリッジ 2 と荷重の Y 成分を関連付ける成分であることがわかる．これらを各ホイートストーンブリッジが主に検出する荷重成分と考えると，その検出感度を符号は互いに反対に，すなわちそれぞれ引張ひずみと圧縮ひずみに対応させ，その絶対値を等しくする必要があるのであることがわかる．そして，その他の荷重成分に関しては，両方のホイートストーンブリッジの検出感度を等しくする必要があるのであることがわかる．

3.5 結言

本研究では，トポロジー最適化法を用い，ひずみゲージを用いた，単軸荷重変換器及び多軸荷重変換器の最適設計法を構築するとともに，簡単な数値例により本研究で提案する方法の妥当性を検証した．結果を以下に示す．

1. 連続的材料分布の節点補間によるトポロジー最適化手法に基づき，構造最適化手法を構築した．
2. 単軸荷重変換器の起歪構造に要求される二つの性能である，荷重負荷時のホイートストーンブリッジの出力電圧変化と荷重に抗することができる剛性について定式化を行った．
3. 多軸荷重変換器の起歪構造に要求される二つの性能である，荷重作用時の変換器構造の荷重検出感度及び，荷重成分検出の精度に影響する特異値を用いた評価法と荷重に抗する剛性について定式化を行った．
4. 目標関数の設計変数に関する感度を導出し，さらに，この感度に基づき，逐次線形計画法を用いた最適化アルゴリズムを構築した．
5. 簡単な数値例により，本研究で提唱する方法論の検証を行った．即ち，単軸荷重変換器構造の最適化に関しては，単一の荷重に対して，ひずみゲージの枚数と重み係数を変更し最適化を行うことで，それらの最適解に与える影響について明確化した．また，互いに直交する複数の荷重に対して同時に最適化を行うことにより，それらを単一の荷重として作用させた場合に比べ，それぞれの荷重に対して高感度な起歪構造が得られることがわかった．また，多軸荷重変換器構造の最適化においても，本手法により物理的に意味のある最適解が得られ，最適化により，荷重検出感度及び，荷重成分検出の精度に関して優れた解が得られることがわかった．またそれらの結果について，力学的な考察を行い，各ホイートストーンブリッジが主に検出する荷重成分に対する検出感度が互いに等しく，かつそれぞれ引張ひずみと圧縮ひずみに対応するように設計し，また，それ以外の荷重に対する検出感度をそれぞれ等しくする必要があるのであることがわかった．

今後の展開としては，本手法の三次元問題への拡張が考えられる．しかし，設計対象の次元が増えると，最適化の対象として扱う特異値も増加し，最適化過程での入れ替わりが生じる可能性があるため，この点の解決が必要であると考えられる．さらに，本研究では，ひずみゲージの設置枚数及び設置位置は設計パラメータとして扱い，最適化の対象としなかったが，より高機能な荷重変換器構造を導出するため，今後それらも含めた最適化を行うことが考えられる．

4 離散構造要素を用いた構造最適化

4.1 導入

本章では、構造最適化法を用いた設計支援方法の研究として、機械製品開発における構想設計段階での設計支援を目的とした、離散構造要素を用いた構造最適化手法を提案する。

4.1.1 構想設計

一般的な機械製品開発のフローは、図 4.1 に示すように、企画、構想設計、詳細設計、CAE での評価、試作機での評価、生産によって構成され、本章で扱う構想設計段階は企画段階の次に位置する。ここで、CAE (Computer Aided Engineering) とは、設計案に対して剛性、振動、熱、流体等の解析を行うツールを意味するものとする。開発対象や、開発を行う組織によって独自の的方法論が存在するため、このように明確に段階が明確化されていないことがあるが、本質的にはこの図に類似する場合が多い。最初に行われる企画段階では、顧客のニーズに応じて設計対象と機能が定義され、次の構想設計段階において、それを実現するための具体的な仕様が決まる。この構想設計段階において初めて、開発対象の機械製品としての形状が決まることになる。そして詳細設計段階において、製造のための詳細な設計図が完成させられる。CAE による評価はその詳細な設計図に対して行われ、その結果を元に設計変更が行われる。最終的には試作機を用いた評価が行われ、評価結果に問題がなければ量産機の製造が行われる。設計における根本的な検討は、企画、構想設計段階によって成され、機械製品の機能、性能、品質の大部分はこれらの段階で決定されることになる。そのため、製品開発においては、これらの設計初期の段階で、多様かつ確かな検討が成されることが重要である。

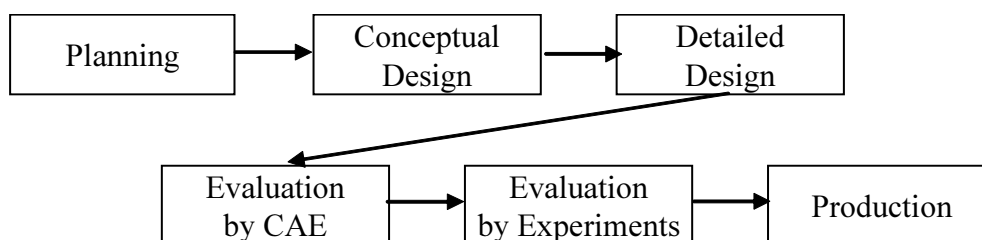


Figure 4.1: Example of design procedure

企画から詳細設計に至るまでの設計初期の段階をさらに詳細に考える。営利を目的とした製品開発は、顧客のニーズを実現化することが重要とされ、企画段階はそのニーズの分析より始まる。そして、問題分析段階では、その顧客ニーズの実現可能性、実現する上での問題点が技術的、経済的な観点から検討され、以下の三つの事項が決定される。一つ目は設計上の課題の具体的な定義、二つ目は設計上の制限、即ち、ユーザーの要求、規格等の理由により、仕様が既に決定されている事柄の確認、三つ目は設計基準、即ち、コストの最小化や信頼性の確保といった設計上の方針である。これらの決定によって、この後の設計の具体的な内容や、それを行う上での基本思想が決定される。しかし、これらの決定の問題点や改善点が後の検討によって見付き、変更が加えられる場合もあるため、必ずしもここでの決定事項が絶対的というわけではない。次の構想設計段階においては、問題分析段階において定義された設計上の問題に対する幅広い解決法が提案される。機械製品自体の基本的なパフォーマンスがここで決定されるため、設計者は、コスト等の経済的な要素、機械工学、設

計現場のノウハウ、製造方法を連携して検討する必要がある。それ故、設計者にかかる負担も大きい。そして、構想設計段階において提案されたいくつかの方法論の中から、最も最適なものが選択され、その方法が設計案として具体化される。無論、この段階の検討結果によっては、構想設計段階での再検討が必要な場合もあり、以上のサイクルを繰り返しながら最善の解法を生み出していくことになる。そしてその案は、詳細設計段階において具体的に図面化される。

企画から詳細設計に至るまでの設計初期の段階を詳細化すると図 4.2 となる [38]。製品開発は、顧客のニーズを実現化するために行われ、企画段階はそのニーズの分析より始まる。そして、問題分析段階では、その顧客ニーズの実現可能性、実現する上での問題点が技術的、経済的な観点から検討され、以下の三つの事項が決定される。一つ目は設計上の課題の具体的な定義、二つ目は設計上の制限、即ち、ユーザーの要求、規格等の理由により、仕様が既に決定されている事柄の確認、三つ目は設計基準、即ち、コストの最小化や信頼性の確保といった設計上の方針である。これらの決定によって、この後の設計の具体的な内容や、それを行う上での基本思想が決定される。しかし、これらの決定の問題点や改善点が後の検討によって見つかり、変更が加えられる場合もあるため、必ずしもここでの決定事項が絶対というわけではない。

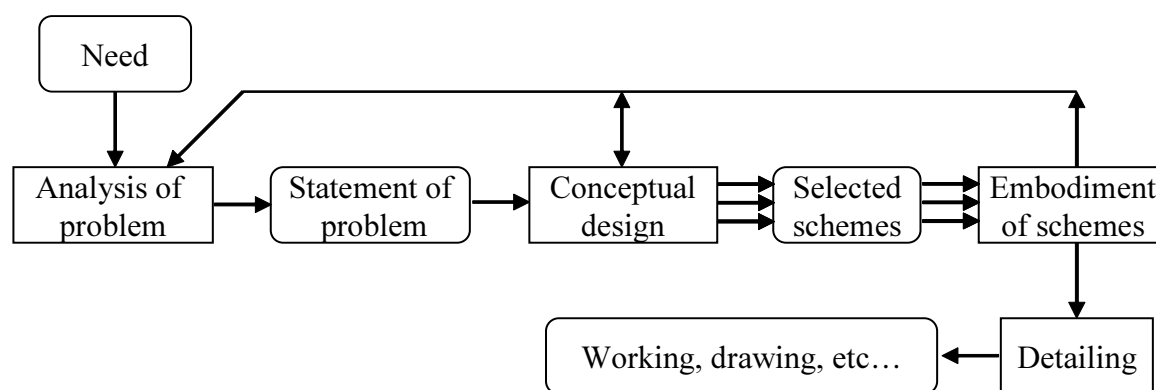


Figure 4.2: Block diagram of design process

次の構想設計段階においては、問題分析段階において定義された設計上の問題に対する幅広い解決法が提案される。機械製品自体の基本的なパフォーマンスがここで決定されるため、設計者は、コスト等の経済的な要素、機械工学、設計現場のノウハウ、製造方法を連携して検討する必要がある。それ故、設計者にかかる負担も大きい。そして、構想設計段階において提案されたいくつかの方法論の中から、最も最適なものが選択され、その方法が設計案として具体化される。無論、この段階の検討結果によっては、構想設計段階での再検討が必要な場合もあり、以上のサイクルを繰り返しながら最善の解法を生み出していくことになる。そしてその案は、詳細設計段階において具体的に図面化される。

上述のように、製品としての具体的な形状は構想設計段階において決定される。即ち、問題分析段階において決定された設計思想に従いながら、要求される機能を満たすように、その機能を決定付ける設計要因を明確化し、それを具体的に形として大まかに図面化していく。自動車ボデーを例にとれば、低コスト、高剛性、低振動の設計案を作成するという思想の下で、骨格構造の配置、骨格の断面、パネル形状の検討を順に行っていくという内容になる。これらの検討には、当然経済的、力学的な観点から設計案を評価することが要求され、設計者は自らの知識に基づいて、多様な設計案を生み出し、それぞれについて評価を行い、その中から最適な案を選択するという作業を繰り返すことになる。ここでは、限られた納期で設計を行うという時間的な制限

と、設計者が持っている機械力学の知識の範囲で性能評価を行わなければならないという制限があるため、その手法も簡易なものに限られてくる。一般的には、設計案に対して、材料力学、構造力学等の初等力学に基づいた簡易な力学モデルが作成され、評価が行われる。

4.1.2 Digital Engineering を用いた構想設計支援

近年のコンピュータの急速な発達には、機械設計の分野にも大きな変革をもたらしている。それは、上述したような、従来からある数値検討の作業性が向上するというレベルに留まらず、機械産業全体に全く新しい方法論をもたらしている。DE (Digital Engineering) と総称されるこの技術は、情報技術を活用し、開発プロセス全体のデジタル化を進め、開発から生産に至る製造活動の質の向上と開発期間の短縮を目的としている。代表的なソフトウェアとしては、コンピュータ上で設計を行い、その設計案をデジタルデータとして管理できる CAD (Computer Aided Design)、設計案の CAD データに対して剛性、振動、熱、流体等の解析を行う CAE (Computer Aided Engineering)、CAD データを用いて部品構成の成立性、組み立て性の検討を行う DMU (Digital Mock Up) 技術、製品情報を一元的に管理するための PDM (Product Data Management)、製品の設計から製造、使用、保守、廃棄に至るまでの製品ライフサイクルを一元的に管理するための PLM (Product Life-cycle Management) 等が挙げられる。

特に 3D-CAD には、部品構成表に基づいた実際の組み立てを再現し、その干渉等をチェックできるアセンブリ機能や、ねじ穴等の形状に関する特徴に基づきながら設計を行うことのできるフィーチャーベースモデリング機能、形状が数値と数式の形式で定義され、パラメータ変更によりその設計変更を容易に行うことのできるパラメトリック機能等、設計者を支援する様々な機能が搭載され、また、用途に応じて幅広い価格帯のソフトウェアが存在すること等から、製造業全体に広く普及している。

また、CAE も試作なしで機械性能を定量的に評価できることから、製品開発の期間の短縮等に大きく貢献している。そのアルゴリズムは、有限差分法や有限要素法、境界要素法、運動解析や機構解析法によって構成され、有限差分法は主に流体解析、電磁波解析に、有限要素法は構造解析、流体解析、電磁気解析に、境界要素法は音場解析に主に用いられる。また、運動解析や機構解析では質点系の力学問題を解くことで解を導出している CAE ソフトウェアの発達によって、部品単位の評価に留まらず、自動車ボデーのような機械構造全体の性能を、多種多様な解析手法と、高自由度のモデルで定量評価することが可能になっている。

ここで、CAE 解析を構想設計支援へ応用することを考える場合、以下の点が障害となる。CAE 解析は、詳細な 3DCAD データを元に解析モデルを作成することより始まり、通常その作業はメッシャーと呼ばれる専任者が数ヶ月かけて行う。そして、その後、解析、CAE エンジニアによるポストプロセッシングが行われる。よって、解析工程の大部分は、プリ・ポストプロセッシングによって占められ、共に専門知識を持つ作業が行わなければならない。このような CAE 解析は、試作機による評価の代替手段としては非常に有効であるが、構想設計に応用することは難しい。前述のように、設計者は、初期の段階では設計案を短時間で定量的に評価することが要求される。CAE 解析には数ヶ月以上の期間が必要であり、通常、設計者にそのような時間は与えられていない。また、解析結果からは変形量、応力値等が評価地として利用されるが、それらの情報から設計者が設計に有効な情報を得ることは難しい。CAE を実際の構想設計支援に応用するにあたり、改善が必要な項目をまとめると、次のようになる。

1. 構想設計で使用される CAE は機械性能に関連する現象や、最適構造を提示するだけでなく、それらの物理的に根拠立てられたメカニズムに関する情報を設計者に提示しなければならない。即ち、最初にも述べたように、設計者は通常、材料力学や構造力学等の初等力学の知識を用いて検討を行うため、そ

これらの思考に則した結果が出力される必要がある。たとえ良い解が導出されても、設計者がそれを、力学的に裏付けることができなければ、設計案としては不十分である。また、仮に結果が定性的なものであっても、設計者がその解に明確な力学的根拠を見出せれば、設計案としては十分である。

2. プリ・ポストプロセッシングが専門知識なしで容易に行われなければならない。
3. 構想設計段階においては、設計対象の詳細な形状は決定されておらず、対象の大まかな形状から検討を始める。即ち、設計形状が詳細に決定されていなくても、解析が可能な CAE である必要がある。

これらの条件をふまえ、構想設計に CAE を普及させる一つの取り組みとして、CAE を 3DCAD の一つのオプションとして内在させたソフトウェアがある。3DCAD は単に図面を作成するだけに留まらず、その設計対象の形状情報を元に、様々な設計上の情報を検討することができる。この 3DCAD に簡易な CAE が導入され、3DCAD モデルから、ボタン一つで FEM モデルを作成し、さらに、解析条件の設定、解析結果の評価まで、グラフィカルなチュートリアルにしたがって簡単に実行できるようになっている。これらのソフトウェアは CAD Embedded CAE と呼ばれている。

4.1.3 Product Oriented Analysis と First Order Analysis

ここで、構想設計支援のための全く新しい CAE である、POA (Product Oriented Analysis) [77] について述べる。この CAE の最も基本的な概念となっているものは、製品対象への特化であり、その解析手法が各設計対象の設計手順に立脚していることから、Product Oriented Analysis と名づけられた。本章の最初でも述べたように、一般に、機械製品には、それに応じて様々な検討方法、項目が存在し、設計者はそれらを順に行っていくことになる。最初は、担当する設計対象について要求される性能とその性能を決定付ける設計要因を明確化し、それをもとに性能に大きく関与する基本要素の構成を決定する。そしてその後、第二、第三と性能に影響を与える部位に関して、段階的に検討を行い、最終的に設計対象の詳細設計に至る。自動車のボデーの部位を設計する場合を例にすると、最も基本性能に影響を与える骨格構造の配置が最初に決定され、その後骨格の断面、そしてパネルの形状というような手順となる。

このような設計手順は、通常の CAE の解析モデルの作成手順と全く異なる。通常の CAE の解析過程では、その設計対象によらず、即ち設計対象の特殊性を無視して、抽象化、一般化されたメッシュモデルを作成し、そして一般化された解析を行う。それに対し、設計過程では、特定化、あるいは特殊化された設計対象の性能を決定づける本質的な部位から設計を組み立てていく。このような設計過程に合致した CAE を実現する方法として、各設計対象に特化したインターフェイスの作成、設計手順に沿った解析モデルの作成、そして解析手順・解析条件をインターフェイスに内在化させる等の機能を有する POA が提案された。

以上の POA の概念をもとに、構造最適化法を利用した新しい設計支援ツールである FOA (First order analysis)[77] が、豊田中央研究所とミシガン大学を中心に展開されている。豊田中央研究所で開発が行われている、FOA ツールの構成要素を次に挙げる。

1. フレーム要素やパネル要素等の機能の明確な離散構造要素を用いた剛性解析と振動解析：これにより、各構造要素の構造的なメカニズムが明確にすることができる。解析モデルは約数百自由度とすることで、解析結果は数分ほどで得ることが可能となる
2. POA の考え方にに基づき設計対象に特化した、Microsoft/Excel を用いたインターフェイス：設計者が、構想設計に用いる簡単な力学モデルでの数値計算を Microsoft/Excel を用いて行うことは多い。本機能は、その延長として現場の設計者が容易に CAE を実行することができるようにする。
3. フレーム要素を用いた構造最適化：これにより、構造の配置の改良や、補強部材の設定等を、構造的な

メカニズムを明確にしながら導くことができる。

4. フレーム構造の断面設計・評価法と接合部位の性能評価法：このような構造設計に特化した解析・評価ツールにより、現行の設計法で得られたノウハウを活用しつつ、新システムを用いた設計が可能となる。

これらは現状で開発されている FOA ソフトウェアの代表的な構成であり、現在もその機能を拡張すべく開発が続けられている。本研究で提案する手法においては、以上の FOA の概念に基づき、機械製品開発における構想設計段階での設計支援を目的として、フレーム要素とパネル要素を用いた構造最適化手法を提案する。

4.1.4 離散構造要素を用いた構造最適化

離散構造要素を用いた方法では、トラスやフレーム、接合部等の機械構造要素が設計要素として扱われる。即ち、この場合は有限個の設計要素を扱うことになる。格子状に配置されたトラス要素の最適化の歴史は古く、Michell によるトラス構造最適配置の十分条件の研究 [70] まで遡る。また、計算機を用いて数値計算で最適構造を求める手法は Dorn ら [33] によって最初に開発された。離散構造要素を用いた最適化手法については、Kirsch[55] や Bendsøe[12]、Rozvany[94] が詳しくまとめている。

Rozvany[94] によると、離散構造要素を用いた手法はさらに二つに分類できる。一つは、格子連続体法であり、もう一つはグラウンドストラクチャ法である。格子連続体法では、設計領域内の無限少の間隔に敷き詰められた、有限個の要素を扱い、解析的に最適解を得る。格子連続体法の考え方は、前述の Michell が提案したトラス構造の最適配置の十分条件の研究に始まる。Michell の初期の研究はその後 Hemp[50]、Prager[86, 87, 88] らによって発展された。さらに、格子の最適化手法は Rozvany ら（例えば [89, 92]）によって発達させられた。Rozvany はまた、境界が固定された状態での格子配置についても包括的にまとめている [91]。

グラウンドストラクチャ法は、Dorn ら [33] によって最初に開発された。1964 年から 1990 年にかけてのこの手法の発達については Kirsch[55] がまとめている。グラウンドストラクチャ法では、設計領域が有限個の節点によって離散化される。最適化の過程で、不要な要素は削除され、必要な要素は最適な寸法で配置される。最終的に最適な寸法を持つトラス要素と、断面積を持たないトラス要素によって構成されるトラス構造が最適解として得られる。この最適化は、断面積を 0 の値も許容する連続的な設計変数として扱い、数値計算法によってその値を更新することで得られる。このことは、トラス構造のレイアウト最適化問題が、一般的な寸法最適化問題とも見なされうることを意味する。また、トラス要素は軸方向のみに剛性を持ち、その定式化が非常に単純なため、最適設計対象をモデル化する際に、連続体要素を用いて行う場合に比べ、単純化できる。ただし、グラウンドストラクチャ法では、節点の位置は設計変数として扱われていないので、効果的な位相を得るには節点数を増やさなければならない。この手法の欠点は、節点数が少ない際には、最適解が節点の位置に大きく影響を受けることであると述べている。それ故、適切な最適解を得るには、節点の配置を慎重に決定しなければならない。

初期のトラス要素を用いた最適化問題では、部材力のみが考慮され、運動学的な適合条件を無視した定式化がされた（例えば [50]）。しかし、このような定式化がされた問題について、線形計画法で解を得た際に、運動学的な適合条件を満たさず、一般的な荷重に対して不安定な構造を導出してしまふ恐れがあった。後に、Rozvany は、応力と変位制限下の連続型の最適性基準法についての基本原則を導入している [93]。それらの原則は、最適なトラス構造導出のための繰り返し計算で使用された。また、Zhou と Rozvany は COC アルゴリズムを用いた格子連続体法に基づく解析解に近い、数値解法解を得た [117]。

近年では、トラス要素を用いた最適化問題を焼きなまし法や [109]、遺伝的アルゴリズムを用いて解く方法 [45] も提案されている。しかし、これらの手法が適用できるのは比較的小規模な問題に限られている。

4.1.5 フレーム要素を用いた構造最適化

前述のように、離散構造要素を用いた構造最適化の分野ではトラス要素が広く用いられてきた。これは、土木工学の分野においては、トラス構造が広く用いられているため、解析における定式化が極めて単純であるため、等の理由が考えられる。しかし、トラス要素は軸方向にしか剛性を持たないため、機械構造物の設計に適用するには困難が伴う。それに対し、フレーム要素を用いた最適化手法が幾つか提案されている。フレーム要素は軸方向と曲げ方向、ねじり方向に剛性を持ち、機械製品設計へのより詳細な適用が可能である。西脇ら [124]、Nishigaki ら [77] は節点を完全固定したフレーム構造の最適化を、Fredricson ら [37] は節点剛性も含めたフレーム構造の最適化を行った。しかし、これらの手法は、要素の断面形状として、最も単純な円断面を想定しているため、最適な断面主軸方向や断面形状等の、通常の機械設計に重要な断面の特性に関する情報を得ることはできない。また、より一般的な構造設計においては、性能を骨組み要素だけで評価することには限界がある。このような問題を解決するために、本研究では、自動車のボデー・サスペンションのようなフレーム構造とパネル構造で構成される機械構造への適用を目指し、より一般的な離散化要素に基づいた最適設計法を構築する。即ち、最適な断面主軸方向と断面形状を決定可能で、最も単純な断面である楕円断面を持つフレーム要素と、パネル要素を用いた構造最適化手法を提案する。

要素の回転角度を設計変数として扱う問題として、均質化法に基づくトポロジー最適化で用いられる、長方形の空孔のあるユニットセルの最適化に関して多くの研究がなされている。Pedersen [82, 83] はエネルギー密度を目標関数とし、感度をひずみの関数として導出する方法を提案した。一方、応力を用いた方法としては、Suzuki と Kikuchi [104] が最適角度を主応力の方向より導出し、Diaz と Bendsoe [31]、Cheng ら [28] は平均コンプライアンスを目標関数とし、その角度に関する感度を応力を用いて導出した。特に Cheng は応力に基づく方法を用いた方が、ひずみに基づく方法を用いた場合よりも良好な解が得られると述べている。また、Luo と Gea [61, 62] は各要素の回転角が要素に生じる応力やひずみに与える影響を考慮した、エネルギー法と呼ばれる手法を提案した。本研究では応力に基づく方法の考え方をより一般化し、目標関数に応力の関数である補ひずみエネルギーを用いて更新手続きを導く。

本章では、機械製品開発における構想設計段階での設計支援を目的として、フレーム要素とパネル要素を用いた構造最適化手法を提案する。フレーム要素の断面形状は断面主軸方向を設計変数として考慮可能で、かつ断面の寸法の比を設計変数とすることで断面の形状の変化を考慮可能な、最も単純な形状である楕円とする。以下、二節では、設計領域と設計変数の設定、フレーム要素とパネル要素の定式化、剛性最大化問題と固有振動数最大化問題の目標関数の定式化を行う。また、それらの定式化に基づき、最適化問題を定式化する。三節では、二節の定式化より、最適化の手続きを導く。すなわち、断面主軸の方向を示す角度と、楕円断面の長軸と短軸の長さの比を、最適性の必要条件 (KKT 条件) から導出する方法を構築する。さらに、最適化計算の収束の安定化を目指し、補ひずみエネルギーを目標関数とした新しい最適化手法を開発する。そして、この方法と逐次凸関数近似法 [36] を用いた構造最適化アルゴリズムを構築する。最後に、四節では剛性最大化問題と固有振動数最大化問題について、簡単な数値例により本報で提唱する方法論の妥当性を検証する。

4.2 定式化

本節では、本研究における最適設計問題の定式化について述べる。

4.2.1 要素の定式化と設計変数の設定

前述のように，本研究では構造物のモデル化に，離散化構造要素としてフレーム要素とパネル要素を用いる．以下その詳細を述べる．

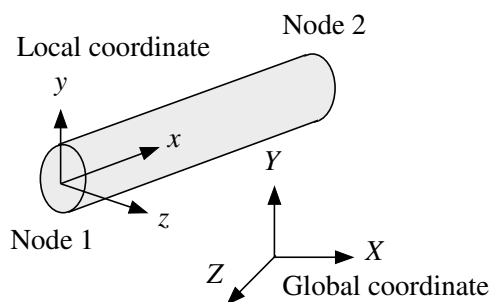


Figure 4.3: Configuration of frame element

フレーム要素の定式化 フレーム要素は線形弾性体を想定し，図 4.3 に示すように，二つの節点によって構成される．要素座標系を (x, y, z) ，全体座標系を (X, Y, Z) とし各節点の座標 (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1, 2)$ 又は (X_i, Y_i, Z_i) , $(i = 1, 2)$ で表される．また，はりの断面にはせん断ひずみが生じないとする，ベルヌーイ・オイラーの仮定とサン・ブナン捻りの仮定を適用する．フレーム要素は軸方向，曲げ方向，ねじり方向に対し剛性を持つものとして定式化する．フレーム要素の断面は，断面主軸が決定可能な最も単純な場合を想定し，図 4.4 に示す中実楕円断面とする．断面における設計変数は，正規化された断面積と，要素座標系において断面主軸の方向，すなわち楕円の長軸の方向を示す角度，さらに，長軸の長さ d_l と短軸の長さ d_s の比とする．そして，実際の断面積 A は，正規化された断面積により，

$$A = \rho_A A_{\max} \quad (0 \leq \rho_A \leq 1) \quad (4.1)$$

として求める．ここで， A_{\max} は最大時の断面積である．また，上述より， d_l , d_s と α_A の関係は，

$$d_s = \alpha_A d_l \quad (0 < \alpha_{\min} \leq \rho_A \leq \alpha_{\max} < 1) \quad (4.2)$$

となるので， α_A を変更することにより断面の形状が変更される．なお， α_A の値が過度に小さい場合には，断面形状は薄板状になり，楕円として評価することが不可能になり，また値が 1 の場合は主軸決定が不可能となるため，0 より大きい下限値 α_{\min} と，1 より小さい上限値 α_{\max} を設定している．

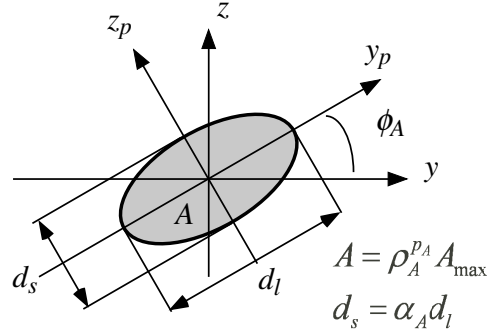


Figure 4.4: Ellipsoidal cross-section of frame element

フレーム要素の剛性マトリクスを作成する際に必要な長軸方向と短軸方向の断面二次モーメント I_{y_p} と I_{z_p} は、

$$I_{y_p} = \frac{\pi d_l}{4} \left(\frac{d_s}{2} \right)^3 = \frac{\alpha_A (\rho_A)^2 A_{\max}^2}{4\pi} \quad (4.3)$$

$$I_{z_p} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d_l}{2} \right)^3 \frac{d_s}{2} = \frac{(\rho_A)^2 A_{\max}^2}{4\alpha_A \pi} \quad (4.4)$$

となり、断面二次極モーメント J_x は、

$$J_x = \frac{(1 + \alpha_A^2) (\rho_A)^2 A_{\max}^2}{4\alpha_A \pi} \quad (4.5)$$

となる。上式の関係を用いて断面主軸方向の要素剛性マトリクス K_{A_p} を作成する。つぎに、次式により、この要素剛性マトリクス K_{A_p} を、要素座標系に基づいた要素剛性マトリクス K_A に変換する。

$$\mathbf{K}_A = \mathbf{R}(\phi_A)^T \mathbf{K}_{A_p} \mathbf{R}(\phi_A) \quad (4.6)$$

ここで、 $\mathbf{R}(\phi_A)$ はフレーム要素の軸方向に関する回転マトリクスである。

また、要素の質量マトリクスは、次式で表される整合質量マトリクス (Consistent mass matrix) とする。

$$\mathbf{m}_e = \int_{V_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \quad (4.7)$$

ここで、 ρ は材料の質量密度、 \mathbf{N} は形状関数、 V_e は要素の体積である。

パネル要素の定式化 機械構造を構成する薄板パネルでは、面内方向の釣合いが支配的で、パネルに求められる剛性は主に面内方向である。これに対して、面外方向の剛性は低く、機械構造の性能としてこの剛性が要求される場合は少ないので、面外方向の剛性は構想設計時の評価においては無視できると考えられる。そこで、本研究ではパネル要素の定式化においては、面内方向の釣り合いのみを考慮する。

パネル要素における設計変数は、次式の正規化されたパネルの厚さとする。

$$t = \rho_t t_{\max} (0 \leq \rho_t \leq 1) \quad (4.8)$$

ここで、 t_{\max} は最大時の板厚である。

次に応力仮定 [122] に基づいて要素剛性マトリクスの定式化を行う。応力仮定では、面内曲げが支配的な場合について、比較的精度の良い結果が得られるうえ、応力 s の補間関数と変位 u の補間関数を独立に定義できるので、パネルの支配的な応力をあらかじめ仮定できる特徴を持つ。

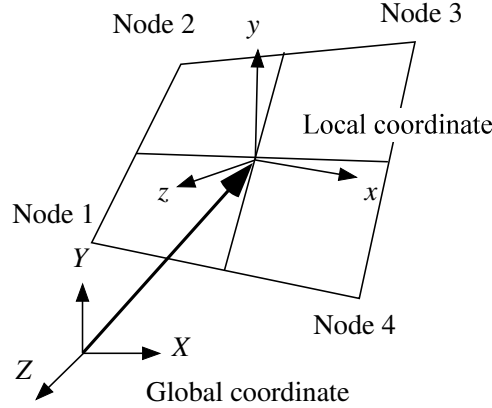


Figure 4.5: Configuration of frame element

図 4.5 に示すように、四つの節点で構成されるパネル要素を考える。最初に、局所座標系 (x, y, z) における各節点の座標 (x_i, y_i, z_i) , $(i = 1, 4)$ と全体座標系 (X, Y, Z) における各節点の座標 (X_i, Y_i, Z_i) , $(i = 1, 4)$ の対応を定式化すれば、次式となる。

$$\mathbf{x}_i = \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_c) \cdot \mathbf{e}_x \\ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_c) \cdot \mathbf{e}_y \\ (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_c) \cdot \mathbf{e}_z \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

ここで、 \mathbf{X}_c は要素中心ベクトルであり、 $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ は局所座標系の単位ベクトルである。上式の局所座標に基づき、要素中の応力分布 s を以下の二つの仮定により定式化する。最初の場合は、真応力とせん断応力を次式で補間する場合である。

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11} + c_{12}y \\ c_{21} + c_{22}x \\ c_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (4.10)$$

この場合は一般のパネルと同様に真応力とせん断応力を支持することができる。また、二番目の場合はせん断応力のみを次式で補間する場合である。

$$\mathbf{s} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ c_{31} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{21} \\ c_{22} \\ c_{23} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_s \mathbf{c} \quad (4.11)$$

なお、ここで二つのパネル要素を定式化した理由は、これら二つの要素を用いて得られた最適解を比較することにより、構造の力学的メカニズムが明確になるからである。すなわち、両者から得た最適構造を力学的見地

から比較すれば，その構造の支配的な応力を判断することができ，その構造の成り立ち，あるいはしくみを理解できるからである．以後，通常パネルと記述したら式 (4.10) で定式化したパネルを示し，せん断パネルと記したら式 (4.11) で定式化したパネルを示す．

また，変位 \mathbf{u} は一般的な双一次の補間関数 N を用いて次式で表す．

$$\mathbf{u}_e = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = N\mathbf{d} \quad (4.12)$$

\mathbf{d} は，四つの節点の変位ベクトルで，これを用いれば微小ひずみ \mathbf{e} は変位ベクトル \mathbf{u} を用いて次のように表される．

$$\mathbf{e} = \partial\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u} = \partial N\mathbf{d} = B\mathbf{d} \quad (4.13)$$

他方，応力-ひずみ関係式は次のように得られる．

$$D^{-1}\mathbf{u} - \mathbf{e} = D^{-1}\mathbf{s} - \partial\mathbf{u} = 0 \quad (4.14)$$

しかし，この要素では応力と変位を独立に仮定しているため，式 (4.13) から得られるひずみと，式 (4.14) から得られるひずみは一致しない．ここでは，

$$\min_{\mathbf{s}} \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} (D^{-1}\mathbf{s} - \partial\mathbf{u}) D (D^{-1}\mathbf{s} - \partial\mathbf{u}) d\Omega_e \quad (4.15)$$

となるように，すなわち，式 (4.14) をエネルギー残差が最小になるように緩和することによって，エネルギーの釣り合いを確保する．ここで， D は弾性マトリクス， Ω_e は要素の領域である．よって式 (4.14)，式 (4.15) より，次式が得られる．

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_e} \delta\mathbf{s}^T (D^{-1}\mathbf{s} - \partial\mathbf{u}) d\Omega &= \delta\mathbf{c} \int_{\Omega_e} N_s^T D^T (N_s\mathbf{c} - B\mathbf{d}) d\Omega \\ &= \delta\mathbf{c} (M_s\mathbf{c} - M_B\mathbf{d}) = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

式 (4.16) を式 (4.13) に代入して，

$$\mathbf{e} = D^{-1}\mathbf{s} = D^{-1}N_s\mathbf{c} = D^{-1}N_sM_s^{-1}M_B\mathbf{d} = \bar{B}\mathbf{d} \quad (4.17)$$

が得られるので，要素剛性マトリクスは次式となる．

$$K_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{e}^T D \mathbf{e} d\Omega = \int_{\Omega_e} \bar{B}^T D \bar{B} d\Omega = M_B^T M_s^{-1} M_B \quad (4.18)$$

なお詳細は文献 [122] を参照されたい．

4.2.2 目標関数の設定

剛性最大化問題 図 4.6 に示すように，フレーム要素あるいはパネル要素で構成される構造物の静的な弾性変形問題について考える．構造物の各節点は並進方向に x, y, z の三自由度，回転方向に $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ の三自由度を持つものとする．そして，弾性構造物の境界 Γ_d を完全固定し，構造物内の節点に荷重ベクトル \mathbf{f} を作用させたときの構造物の変形ベクトルを \mathbf{u} であるとする．この時，次式に示す荷重ベクトル \mathbf{f} と変形ベクトル \mathbf{u} の内積である平均コンプライアンス l [13] が，節点に荷重ベクトル \mathbf{f} を作用させた場合の剛性の尺度となる．

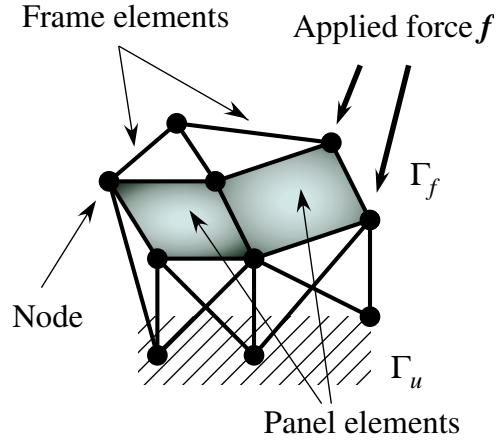


Figure 4.6: An elastic structure subjected to a force

$$l = f \cdot u = f^T u \quad (4.19)$$

すなわち、この l を最小化することにより、剛性を最大化することができる。

固有振動数最大化問題 図 4.6 に示す構造物の自由振動問題について考える。この場合、荷重ベクトル f は作用せず、また必要であれば、構造物の節点に非構造質量を設定してもよいとする。また、構造の減衰効果については、定式化の簡略化のため考慮しないものとする。そして、自由振動している構造物の j 番目の固有振動数を、固有値を $\omega_j (\lambda_j = \omega_j^2)$ であるとする。今、構造物の動的な特性の向上を目的として、最低次の固有値を可能な限り増加させる。このとき、最低次のみを最大化では、最適化の過程で、最低次の固有値と二次以上の固有値が入れ替わる問題が生じる場合がある。ここでは、この問題を回避するため、Ma ら [65] の方法に基づき、次式の Λ の最大化問題として定式化する。

$$\Lambda = \lambda_0 + \sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} \right)^{-1} \quad (4.20)$$

ここで、 m は最適化する固有値の数、 λ_0, λ_{0j} はパラメータ、 w_j は重みである。すなわち、この Λ を最大化することにより、複数の固有値を同時に最大化し、固有値の入れ替わり現象を回避することができる。

4.2.3 最適化問題の定式化

n_A 本のフレーム要素と n_t 枚のパネル要素で構成される固定設計領域 D の境界 Γ_d を完全固定し、フレーム要素、パネル要素それぞれの双体積の制約条件のもと、指定した位置に荷重ベクトル f を作用させた場合に、合成の最大化を図る問題、もしくは指定した位置に非構造質量を付加した場合に、最低次から m 次までも固有振動数を最大化する。この時最適化問題は、以下のように定式化される。

$$\underset{\rho_{A,i_A}, \phi_{A,i_A}, \alpha_{A,i_A}, \rho_{t,i_t}}{\text{minimize}} \quad l \quad (4.21)$$

又は

$$\underset{\rho_{A,i_A}, \phi_{A,i_A}, \alpha_{A,i_A}, \rho_{t,i_t}}{\text{maximize}} \quad \Lambda \quad (4.22)$$

制約条件

$$V_F = \sum_{i=1}^{n_A} \rho_{A,i_A} A_{\max} L_{i_A} \leq V_F^U, \quad V_P = \sum_{i_t=1}^{n_t} \rho_{t,i_t} t_{\max} A_{i_t} \leq V_P^U \quad (4.23)$$

又は

$$V = V_F + V_P = \sum_{i=1}^{n_A} \rho_{A,i_A} A_{\max} L_{i_A} + \sum_{i_t=1}^{n_t} \rho_{t,i_t} t_{\max} A_{i_t} \leq V^U \quad (4.24)$$

$$0 \leq \rho_{A,i_A} \leq 1 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.25)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi_{A,i_A} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.26)$$

$$\alpha_{\min} \leq \alpha_{A,i_A} \leq \alpha_{\max} \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.27)$$

$$0 \leq \rho_{t,i_t} \leq 1 \quad \text{for } i_t = 1, \dots, n_t \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (4.29)$$

又は

$$[\mathbf{K} - \lambda_j \mathbf{M}] \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{for } j = 1, \dots, m \quad (4.30)$$

ここで ρ_{i_A} , ϕ_{A,i_A} , α_{A,i_A} , L_{i_A} はそれぞれ i_A 番目のフレーム要素の正規化された断面積, 断面主軸の方向を示す角度, 長軸と短軸の長さの比, 要素の長さである. ρ_{i_t} , A_{i_t} は i_t 番目のパネル要素の正規化された板圧, 面積. V_F はフレーム要素の体積の総和, V_F^U はフレーム要素の体積制約の上限値, V_P はパネル要素の体積の総和, V_P^U はパネル要素の体積制約の上限値, V^U はフレーム要素, パネル要素の体積の総和を制限する体積制約の上限値, \mathbf{K} , \mathbf{M} はそれぞれ設計領域全体の剛性マトリクス, 質量マトリクスである.

4.3 最適化の手順

4.3.1 最適化アルゴリズム

最適化のフローチャートを以下に示す.

1. 初期形状を決定する.
2. 目標関数が収束するまで以下のループを繰り返す.
 - (a) 剛性マトリクス \mathbf{K} と質量マトリクス \mathbf{M} を導出する.
 - (b) 有限要素法により平衡方程式または振動方程式を解く.
 - (c) 目標関数と制約条件を導出する.
 - (d) 目標関数と制約条件の感度を導出する.
 - (e) 求めた感度に基づき, 設計変数設計変数 ρ_{A,i_A} , ρ_{t,i_t} を逐次凸関数近似法 (CONLIN) により更新する.
 - (f) KKT 条件に基づき, 設計変数 ϕ_{A,i_A} , α_{A,i_A} を更新する.

また, 振動問題の構造最適化では, 最適化過程において, 断面積が極端に細くなり, そのために物理的に意味を持たない局所モード (Localized mode) を生じることがある. この問題を解決する方法は幾つか提案 [81, 108]

されているが，ここでは，Tcherniak[108]の方法により，質量マトリクスを

$$\mathbf{m}_e = \begin{cases} \mathbf{m}_e & \text{if } \rho_{A,i_A} > \rho_{\text{thr}} \\ 0 & \text{if } \rho_{A,i_A} \leq \rho_{\text{thr}} \end{cases} \quad (4.31)$$

とすることにより，局所モードを回避する．ここで， ρ_{thr} は， ρ_{A,i_A} に関して，十分小さい値に設定する閾値で，本研究では $\rho_{\text{thr}} = 0.01$ とした．

4.3.2 要素の回転角度及び断面の長軸と短軸の比の更新方法

フレーム要素の主軸方向を決定する設計変数 ϕ_{A,i_A} 及びフレーム要素の断面形状を決定する設計変数 α_{A,i_A} は，KKT 条件に基づいた方法により更新する．以下剛性最大化問題と固有振動数最大化問題の場合について詳細を述べる．

最初に，式 (4.21) ~ 式 (4.30) の剛性最大化問題に関する，次式で表されるラグランジアン L を考える．

$$\begin{aligned} L = & -\Lambda + s_V (V - V^U) \\ & + \sum_{i_A=1}^{n_A} \{ \mu_{A,0,i_A} (-\rho_{A,i_A}) + \mu_{A,1,i_A} (\rho_{A,i_A} - 1) \} \\ & + \sum_{i_A=1}^{n_A} \{ \nu_{A,-\frac{\pi}{2},i_A} (-\phi_{A,i_A} - \frac{\pi}{2}) + \nu_{A,\frac{\pi}{2},i_A} (\phi_{A,i_A} - \frac{\pi}{2}) \} \\ & + \sum_{i_A=1}^{n_A} \{ \xi_{A,\text{min},i_A} (-\alpha_{A,i_A} + \alpha_{\text{min}}) + \xi_{A,\text{max},i_A} (\alpha_{A,i_A} - \alpha_{\text{max}}) \} \\ & + \sum_{i_t=1}^{n_t} \{ \mu_{t,0,i_t} (-\rho_{t,i_t}) + \mu_{t,1,i_t} (\rho_{t,i_t} - 1) \} \end{aligned} \quad (4.32)$$

ここで， Λ ， s_V ， $\mu_{A,0,i_A}$ ， $\mu_{A,1,i_A}$ ， $\nu_{A,-\frac{\pi}{2},i_A}$ ， $\nu_{A,\frac{\pi}{2},i_A}$ ， ξ_{A,min,i_A} ， ξ_{A,max,i_A} ， $\mu_{t,0,i_t}$ ， $\mu_{t,1,i_t}$ はラグランジェ乗数である．これから設計変数 ϕ_{A,i_A} に関する KKT 条件を導くと次式となる．

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial l}{\partial \phi_{A,i_A}} - \nu_{A,i_A,-\frac{\pi}{2}} + \nu_{A,i_A,\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.33)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \phi_{A,i_A} \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.34)$$

$$\nu_{A,i_A,-\frac{\pi}{2}} \left(-\phi_{A,i_A} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.35)$$

$$\nu_{A,i_A,\frac{\pi}{2}} \left(\phi_{A,i_A} - \frac{\pi}{2} \right) = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.36)$$

$$\nu_{A,i_A,-\frac{\pi}{2}} \quad \text{for } \geq 0 \quad i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.37)$$

$$\nu_{A,i_A,\frac{\pi}{2}} \quad \text{for } \geq 0 \quad i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.38)$$

今，両側制約が不活性であるとすると，式 (4.33) は

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial l}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial (\mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u})}{\partial \phi_{A,i_A}} = 0 \quad (4.39)$$

となる．すなわち，上式から必要条件を満たす ϕ_{A,i_A} が得られる．

しかし，上式を用いて最適な角度を得ようとすると，角度の更新に対する目標関数の変化が大きいため，場合によっては安定した収束状況が得られないことがある．他方，トポロジー最適化において，長方形の空洞のあるユニットセルの角度変更について多くの研究がなされているが [28, 31, 61, 62, 82, 83, 104]，この場合にも同様な問題が報告されている [28]．Cheng ら [28] は，この不安定問題に関して，応力を用いて感度を導出する方法 [28, 31, 104] を用いた方が，ひずみを用いて感度を導出する方法 [82, 83] を用いるよりも良好な解が

得られると述べている．本研究では，この考えをより一般化し，目標関数に応力の関数である補ひずみエネルギーを用いて，更新手続きを導く．最初に，補ひずみエネルギーは次式で表される応力の関数で定義される．

$$V = \int V_0 d\Omega \quad (4.40)$$

ただし，

$$V_0 = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} \quad (4.41)$$

ここで， V_0 は補ひずみエネルギー密度関数である．

$$V = \int \frac{(\sigma^{\text{Axial}})^2}{E} d\Omega + \int \frac{(\sigma^{\text{Bending}})^2}{E} d\Omega + \int \frac{(\tau^{\text{Torsional}})^2}{G} d\Omega \quad (4.42)$$

ここで σ^{Axial} ， σ^{Bending} ， $\tau^{\text{Torsional}}$ はそれぞれ，フレーム要素の断面における，圧縮・引張によって生じる応力分布，曲げによって生じる応力分布，ねじりによって生じるせん断応力である．式 (4.42) の設計変数 ϕ_{A,i_A} に関する感度は次式となる．

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial}{\partial \phi_{A,i_A}} \int \frac{(\sigma_i^{\text{Bending}})^2}{E} d\Omega \quad (4.43)$$

ここで， i_A 番目のフレーム要素の断面における曲げによって生じる応力分布 $\sigma_{i_A}^{\text{Bending}}$ は次式となる．

$$\sigma_{i_A}^{\text{Bending}} = \frac{(-M_{y,i_A} I_{yz,i_A} - M_{z,i_A} I_{y,i_A})y + (M_{y,i_A} I_{z,i_A} + M_{z,i_A} I_{yz,i_A})z}{I_{y,i_A} I_{z,i_A} - I_{yz,i_A}^2} \quad (4.44)$$

M_{y,i_A} ， M_{z,i_A} は i_A 番目のフレーム要素の断面に作用する曲げモーメント， I_{y,i_A} ， I_{z,i_A} ， I_{yz,i_A} は i_A 番目のフレーム要素の要素座標系における断面二次モーメント，断面相乗モーメントで次式で表される．

$$I_{y,i_A} = \frac{1}{2}(I_{y_p,i_A} + I_{z_p,i_A}) + \frac{1}{2}(I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A}) \cos(2\phi_{A,i_A}) \quad (4.45)$$

$$I_{z,i_A} = \frac{1}{2}(I_{y_p,i_A} + I_{z_p,i_A}) - \frac{1}{2}(I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A}) \cos(2\phi_{A,i_A}) \quad (4.46)$$

$$I_{yz,i_A} = \frac{1}{2}(I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A}) \cos(2\phi_{A,i_A}) \quad (4.47)$$

I_{y_p,i_A} ， I_{z_p,i_A} は i_A 番目のフレーム要素の，図 (4.4) に (y_p, z_p) で示す主軸座標系に関する断面二次モーメントである． i_A 番目のフレーム要素の断面に生じる y 軸周りの曲げモーメントの分布は

$$M_{y,i_A} = M_{y,i_A}^1 - \frac{M_{y,i_A}^1 - M_{y,i_A}^2}{L_{i_A}} x \quad (4.48)$$

となる．ここで， M_{y,i_A}^1 ， M_{y,i_A}^2 はそれぞれ節点 1，2 に作用する y 軸周りの曲げモーメント， L_{i_A} は要素の長さ， x は節点 1 と断面間の距離である．また，式 (4.48) は z 軸周りの曲げモーメントについても成り立つ．式 (4.44) ~ 式 (4.48) を式 (4.43) に代入すると次式が得られる．

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{L_i(I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A})}{12EI_{y_p,i_A}^2 I_{z_p,i_A}^2} (C_{1,i_A} \cos 2\phi_{A,i_A} + C_{2,i_A} \sin 2\phi_{A,i_A}) \quad (4.49)$$

ここで，

$$C_{1,i_A} = ((M_{y,i_A}^1(2M_{z,i_A}^1 + M_{z,i_A}^2) + M_{y,i_A}^2(M_{z,i_A}^1 + 2M_{y,i_A}^2))) \quad (4.50)$$

$$C_{2,i_A} = (M_{y,i_A}^1{}^2 + M_{y,i_A}^1 M_{y,i_A}^2 + M_{y,i_A}^2{}^2 - M_{z,i_A}^1{}^2 - M_{z,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 - M_{z,i_A}^2{}^2) \quad (4.51)$$

である．線形弾性体の場合には式 (4.19) 平均コンプライアンス l はひずみエネルギー U に等しいので，式 (4.33) は次のように書ける．

$$\frac{\partial L}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial (\mathbf{u}^T \mathbf{k} \mathbf{u})}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\partial U}{\partial \phi_{A,i_A}} = 0 \quad (4.52)$$

線形弾性体においては，さらに，ひずみエネルギー U と補ひずみエネルギー V は等しいので，式 (4.49) を式 (4.52) に代入して，

$$C_{1,i_A} \cos 2\phi_{A,i_A} + C_{2,i_A} \sin 2\phi_{A,i_A} = 0 \quad (4.53)$$

上式を解くことで，必要性を満足する解が得られる．式 (4.53) より得られる解は通常二つあり，角度の物理的性質から一方が最小値，他方が最大値，そして角度差は $\frac{\pi}{2}$ である．したがって，式 (32) より一方の解を求めれば，他の解も求められる．解の十分性については，次式で表される目標関数の二階微分より確認する．

$$\frac{L_i(I_{y_p,i} - I_{z_p,i})}{12EI_{y_p,i}^2 I_{z_p,i}^2} (-2C_{1,i} \sin 2\phi_{A,i} + 2C_{2,i} \cos 2\phi_{A,i}) \geq 0 \quad (4.54)$$

設計変数 α_{A,i_A} も同様の手順で更新する．式 (4.32) のラグランジアンより設計変数 α_{A,i_A} に関する KKT 条件を導くと次式となる．

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_{A,i_A}} = \frac{\partial l}{\partial \alpha_{A,i_A}} - \xi_{A,i_A,-\frac{\pi}{2}} + \xi_{A,i_A,\frac{\pi}{2}} = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.55)$$

$$\xi_{A,i_A,\alpha_{\min}} (-\alpha_{A,i_A} + \alpha_{\min}) = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.56)$$

$$\xi_{A,i_A,\alpha_{\max}} (-\alpha_{A,i_A} + \alpha_{\max}) = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.57)$$

$$\xi_{A,i_A,\alpha_{\min}} \geq 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.58)$$

$$\xi_{A,i_A,\alpha_{\max}} \geq 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.59)$$

以上の条件より，以下の三つの解が考えられる．

$$\text{case1 } \xi_{\min,i_A} > 0, \quad \xi_{\max,i_A} = 0 \quad \text{のとき } \alpha_{A,i_A} = \alpha_{\min}$$

$$\text{case2 } \xi_{\min,i_A} = 0, \quad \xi_{\max,i_A} > 0 \quad \text{のとき } \alpha_{A,i_A} = \alpha_{\max}$$

$$\text{case3 } \xi_{\min,i_A} = 0, \quad \xi_{\max,i_A} = 0 \quad \text{のとき } \frac{\partial l}{\partial \alpha_{A,i_A}} = 0$$

case3 では，設計変数 ϕ_{A,i_A} と同様に，と同様に，補ひずみエネルギーに基づき更新手続きを導く．設計変数 α_{A,i_A} の場合には，角度の場合の式 (4.49) に対応する関係式は，以下の式となる．

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_{A,i_A}} = \frac{\partial V}{\partial \alpha_{A,i_A}} = \frac{1}{3E(\rho_A^{P_A})^2 A_{\max}^2} \left(-\frac{D_1}{\alpha_{A,i_A}^2} + D_2 \right) = 0 \quad (4.60)$$

ここで,

$$\begin{aligned}
D_{1,i_A} = & -M_{y,i_A}^1{}^2 - M_{y,i_A}^1 M_{y,i_A}^2 - M_{y,i_A}^2{}^2 - M_{z,i_A}^1{}^2 - M_{z,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 - M_{z,i_A}^2{}^2 \\
& - (M_{y,i_A}^1{}^2 + M_{y,i_A}^1 M_{y,i_A}^2 + M_{y,i_A}^2{}^2 - M_{z,i_A}^1{}^2 - M_{z,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 - M_{z,i_A}^2{}^2) \cos(2\phi_{A,i_A}) \\
& + (2M_{y,i_A}^1 M_{z,i_A}^1 + M_{y,i_A}^2 M_{z,i_A}^1 + M_{y,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 + 2M_{y,i_A}^2 M_{z,i_A}^2) \sin(2\phi_{A,i_A})
\end{aligned} \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned}
D_{2,i_A} = & M_{y,i_A}^1{}^2 + M_{y,i_A}^1 M_{y,i_A}^2 + M_{y,i_A}^2{}^2 + M_{z,i_A}^1{}^2 + M_{z,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 + M_{z,i_A}^2{}^2 \\
& + (-M_{y,i_A}^1{}^2 - M_{y,i_A}^1 M_{y,i_A}^2 - M_{y,i_A}^2{}^2 + M_{z,i_A}^1{}^2 + M_{z,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 + M_{z,i_A}^2{}^2) \cos(2\phi_{A,i_A}) \\
& + (2M_{y,i_A}^1 M_{z,i_A}^1 + M_{y,i_A}^2 M_{z,i_A}^1 + M_{y,i_A}^1 M_{z,i_A}^2 + 2M_{y,i_A}^2 M_{z,i_A}^2) \sin(2\phi_{A,i_A})
\end{aligned} \quad (4.62)$$

なお、ここでも、曲げによる補ひずみエネルギーの影響が支配的であるという仮定のもとに、式 (4.75) を導出している。この式 (4.75) を整理すると、

$$D_{2,i_A} \alpha_{A,i_A}^2 + D_{1,i_A} = 0 \quad (4.63)$$

となる。case1, case2, case3 のいずれの場合も必要条件を満足する α_{A,i_A} が一つ得られる。この解は十分条件も満足するので、最適解である。

続いて、固有振動数最大化問題の場合について述べる。目標関数以外は剛性最大化問題と等しい条件の最適化問題であるため、上記の方法と全く同様に設計変数 ϕ_{A,i_A} 、 α_{A,i_A} が導出できる。最初に、定式化を最小化問題に変換するため式 (4.20) の目標関数に -1 を乗じ、新たな最小化問題の目標関数としている。設計変数 ϕ_{A,i_A} の更新で、剛性最大化問題における式 (4.39) に相当する式は、

$$-\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{A,i_A}} = 0 \quad \text{for } i_A = 1, \dots, n_A \quad (4.64)$$

となる。ところで、

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \phi_{A,i_A}} = -\sum_{j=1}^m w_j \left(\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} \right)^{-2} \left(-\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{(\lambda_j - \lambda_{0j})^2} \frac{\partial \lambda_j}{\partial \phi_{A,i_A}} \right) \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \lambda_j}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{\mathbf{u}_j^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \phi_{A,i_A}} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \phi_{A,i_A}} \right) \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j} \quad (4.66)$$

であり、かつ質量マトリクスは角度変更に対して一定で、固有モードは質量マトリクスに関して正規化しているとすれば、式 (4.64) は、

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} \mathbf{u}_j^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \phi_{A,i_A}} \mathbf{u}_j = 0 \quad (4.67)$$

となる。ここでも、剛性最大化問題と同様に補ひずみエネルギーを用いて、設計変数 ϕ_{A,i_A} の更新手続きを導く。

最初に、固有振動数の最大化問題をエネルギー最大化問題に置き換えるため、次式の仮想的なひずみエネルギー U_j を考える。

$$\lambda_j = \frac{\mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_j} = \mathbf{u}_j^T \mathbf{K} \mathbf{u}_j = U_j \quad (4.68)$$

このひずみエネルギーを設計変数 ϕ_{A,i_A} に関して最大化すれば、最適角度が得られる。そして、式 (4.64) の条件式を U_j を用いて表せば、次式となる。

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} \left(\frac{\partial U_j}{\partial \phi_{A,i_A}} \right) = 0 \quad (4.69)$$

線形弾性体では $U_j = V_j$ のため、上式に式 (4.42) で表される補ひずみエネルギーを以下の手続きで代入する。固有振動数最大化問題における補ひずみエネルギー V_j の設計変数 ϕ_{A,i_A} に関する感度は次式となる。

$$\frac{\partial V_j}{\partial \phi_{A,i_A}} = \frac{L_{i_A}(I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A})}{12EI_{y_p,i_A}^2 I_{z_p,i_A}^2} (C_{1,j,i_A} \cos 2\phi_{A,i_A} + C_{2,j,i_A} \sin 2\phi_{A,i_A}) \quad (4.70)$$

ここで、

$$C_{1,j,i_A} = ((M_{y,j,i_A}^1 (2M_{z,j,i_A}^1 + M_{z,j,i_A}^2) + M_{y,j,i_A}^2 (M_{z,j,i_A}^1 + 2M_{z,j,i_A}^2)) \quad (4.71)$$

$$C_{2,j,i_A} = (M_{y,j,i_A}^1)^2 + M_{y,j,i_A}^1 M_{y,j,i_A}^2 + M_{y,j,i_A}^2^2 - M_{z,j,i_A}^1)^2 - M_{z,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 - M_{z,j,i_A}^2^2) \quad (4.72)$$

である。 M_{y,j,i_A}^1 , M_{z,j,i_A}^1 , M_{y,j,i_A}^2 , M_{z,j,i_A}^2 は j 次の振動モードによってフレーム要素の各節点に生じる y 軸, z 軸周りの曲げモーメントである。式 (4.70) を式 (4.69) に代入して、

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} (C_{1,j,i_A} \cos 2\phi_{A,i_A} + C_{2,j,i_A} \sin 2\phi_{A,i_A}) = 0 \quad (4.73)$$

上式から必要条件を満たす ϕ_{A,i_A} が二つ得られる。解の十分性は、目標関数の二階微分である次式より判断する。

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j L_{i_A} (I_{y_p,i_A} - I_{z_p,i_A})}{6(\lambda_j - \lambda_{0j}) E I_{y_p,i_A}^2 I_{z_p,i_A}^2} (C_{1,j,i_A} \sin 2\phi_{A,i_A} - C_{2,j,i_A} \cos 2\phi_{A,i_A}) > 0 \quad (4.74)$$

楕円の長軸と短軸の長さの比も、剛性最大化問題の場合と同様に以下の三つの場合について得られる。

$$\text{case1 } \xi_{\min,i_A} > 0, \quad \xi_{\max,i_A} = 0 \quad \text{のとき} \quad \alpha_{A,i_A} = \alpha_{\min}$$

$$\text{case2 } \xi_{\min,i_A} = 0, \quad \xi_{\max,i_A} > 0 \quad \text{のとき} \quad \alpha_{A,i_A} = \alpha_{\max}$$

$$\text{case3 } \xi_{\min,i_A} = 0, \quad \xi_{\max,i_A} = 0 \quad \text{のとき} \quad \frac{\partial l}{\partial \alpha_{A,i_A}} = 0$$

case3 では、以下の式より解を得る。

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{\lambda_j - \lambda_{0j}} (D_{2,j,i_A} \alpha_{A,i_A}^2 + D_{1,j,i_A}) = 0 \quad (4.75)$$

ここで、

$$\begin{aligned} D_{1,j,i_A} = & -M_{y,j,i_A}^1)^2 - M_{y,j,i_A}^1 M_{y,j,i_A}^2 - M_{y,j,i_A}^2)^2 - M_{z,j,i_A}^1)^2 - M_{z,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 - M_{z,j,i_A}^2)^2 \\ & - (M_{y,j,i_A}^1)^2 + M_{y,j,i_A}^1 M_{y,j,i_A}^2 + M_{y,j,i_A}^2)^2 - M_{z,j,i_A}^1)^2 - M_{z,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 - M_{z,j,i_A}^2)^2) \cos(2\phi_{A,j,i_A}) \\ & + (2M_{y,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^1 + M_{y,j,i_A}^2 M_{z,j,i_A}^1 + M_{y,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 + 2M_{y,j,i_A}^2 M_{z,j,i_A}^2) \sin(2\phi_{A,j,i_A}) \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} D_{2,j,i_A} = & M_{y,j,i_A}^1)^2 + M_{y,j,i_A}^1 M_{y,j,i_A}^2 + M_{y,j,i_A}^2)^2 + M_{z,j,i_A}^1)^2 + M_{z,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 + M_{z,j,i_A}^2)^2 \\ & + (-M_{y,j,i_A}^1)^2 - M_{y,j,i_A}^1 M_{y,j,i_A}^2 - M_{y,j,i_A}^2)^2 + M_{z,j,i_A}^1)^2 + M_{z,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 + M_{z,j,i_A}^2)^2) \cos(2\phi_{A,i_A}) \\ & + (2M_{y,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^1 + M_{y,j,i_A}^2 M_{z,j,i_A}^1 + M_{y,j,i_A}^1 M_{z,j,i_A}^2 + 2M_{y,j,i_A}^2 M_{z,j,i_A}^2) \sin(2\phi_{A,i_A}) \end{aligned} \quad (4.77)$$

である。

4.4 数値例

いくつかの数値例により，本研究で提唱する方法論の妥当性を検証する．なお，構造物の材料にはいずれの場合にも鋼を想定し，ヤング率を 209GPa ，ポアソン比を 0.3 とした．

4.4.1 剛性最大化問題

パネル要素の定式化の相違と最適解の関係 最初に，2次元のモデルを用いて，式 (4.10) と式 (4.11) により定式化される異なるパネル要素と，最適解の関係を検討する．図 4.7 に設計領域を示す．設計領域を x 方向， y 方向にそれぞれ四分割し，分割された各領域にはパネル要素を配置する．また，配置された各パネル要素の周上にはフレーム要素を配置する．さらに，固定設計領域 D の左側を完全固定し，右側の境界中心の節点に $-y$ 方向に荷重 10.0N を作用させた場合の最適解を得る．

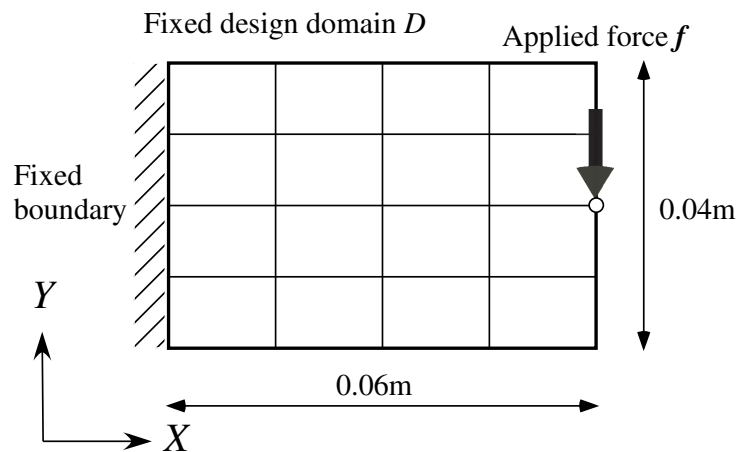


Figure 4.7: Design domain for example 1

なお，ここではパネル要素のみを設計要素とし，フレーム要素は非設計要素とした．フレーム要素の断面形状は真円とし，またその影響を十分小さくするため，すべてのフレーム要素の断面積を $1.26 \times 10^{-11}\text{m}^2$ とした．また，最大時のパネルの厚さは $3.0 \times 10^{-3}\text{m}$ ，体積制約は全設計領域の 30% と設定した．

図 4.8 に最適構造を示す．図中 (a) の場合は式 (4.10) の通常パネルを用い場合で，(b) の場合は式 (4.11) のせん断パネルを用いた場合で，正規化された板厚の分布を示している．なお，図中のカラーバーは各最適構造の板厚の差異を明確にするため， $\rho_{A,iA}$ の最大値と最小値の間で割り当てた．

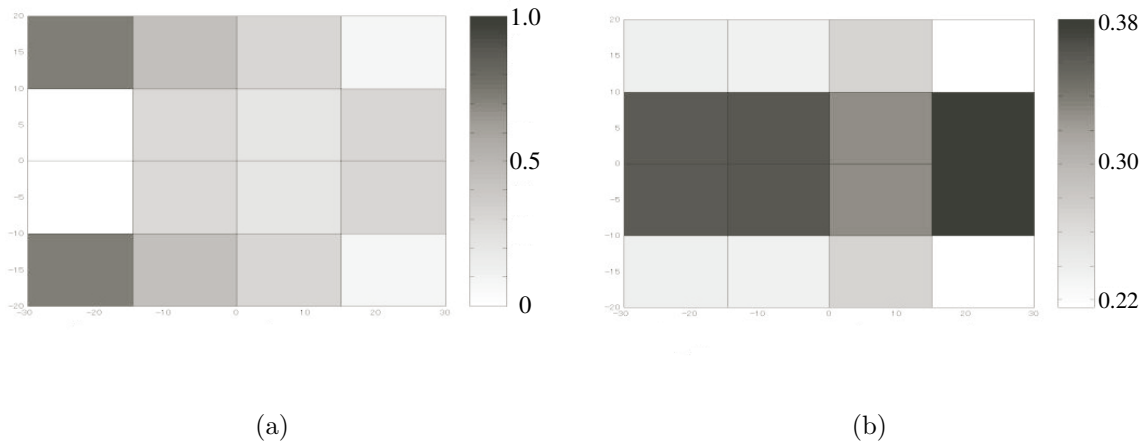
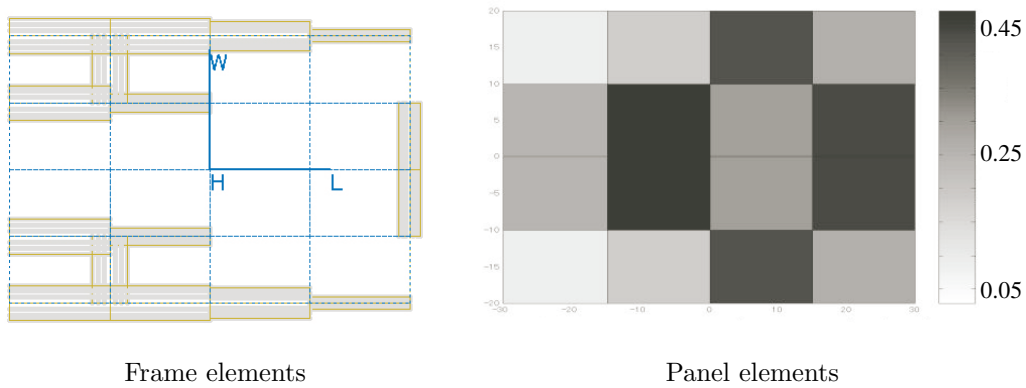


Figure 4.8: Optimal panel configurations of example 1

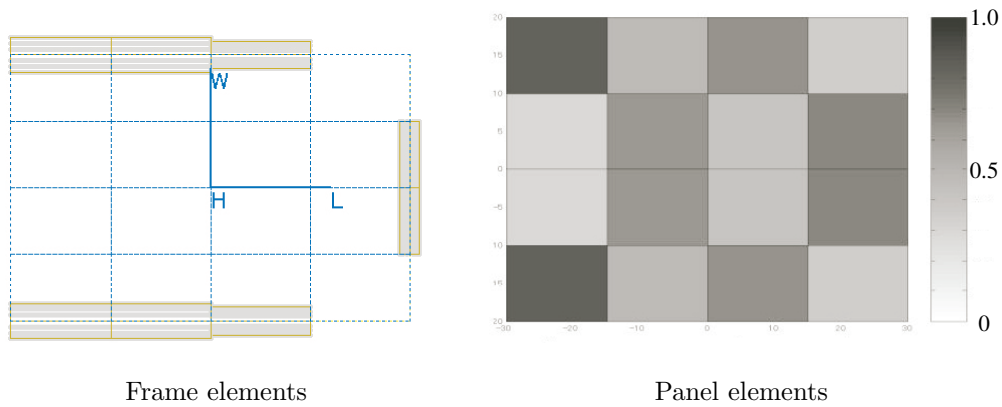
図中 (a) では，設計領域の左側の上部及び下部の板厚が高いことがわかる．これは本荷重設定において生じる， X 方向における真応力が高いために生じた結果と考えられる．これに対して図中 (b) では，設計領域の中段部分のパネルの板厚が高い．これは，せん断パネルはせん断応力しか支持できず，結果として，せん断応力が支配的な中央部分に板が配置されたと考えられる．

制約条件の相違と最適解の関係 次に，フレーム要素とパネル要素を同時に設計要素とし，二つの式 (4.23) と式 (4.24) に示す二つの体積制約の設定法と最適解の関係を検討する．なお，最適化のモデルとしては図 (4.7) の二次元のモデルを使用し，パネル要素は通常パネルを用いた．また，最大時のフレームの断面積は $1.13 \times 10^{-4} m^2$ ，パネルの最大厚さは $3.0 \times 10^{-3} m$ ，体積制約はいずれの場合においても全設計領域の 30% として，最適化した．

図 (4.9) に最適構造を示す．図中 (a) は，式 (4.23) のパネル要素とフレーム要素に別々の体積制約を設定した場合の結果で，図中 (b) は式 (4.24) の両要素に共通の体積制約を設定した場合の結果である．両結果を比較すると共通の体積制約を設けた場合の方が，パネルの総体積が多くなっているのがわかる．これはこの荷重条件では，より多くの余剰体積をパネルに負担させた方が，より高い剛性が得られるということを示している．



(a) Total volume constraint by Eq(4.23) used



(b) Total volume constraint by Eq(4.24) used

Figure 4.9: Optimal frame and panel configurations of example 2

フレーム要素の断面主軸方向と平均コンプライアンスの関係 次に図 (4.10) に示したように、設計領域として、一つのフレーム要素を設定し、そのフレーム要素の左側を完全固定し、右側に図に示した荷重を負荷した場合について、フレーム要素の断面主軸方向と平均コンプライアンスの関係を検討した。なお、この場合には、フレーム要素の正規化された断面積 ρ_{A,i_A} は一定値 1.0 とし、断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} のみの平均コンプライアンスに対する影響を検討した。また、楕円断面の長軸の長さ²と短軸の長さの比 α_{A,i_A} はパラメータとし、値を 0.25, 0.50, 0.75 とした。フレーム要素の最大時の断面積は $3.14 \times 10^{-6} m^2$ として最適化を図った。

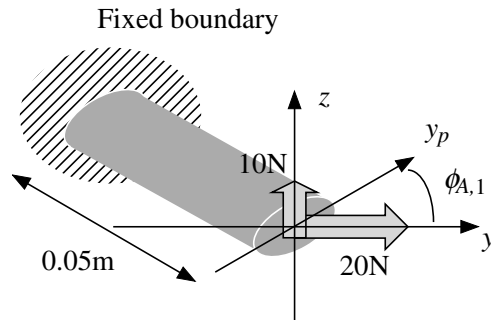


Figure 4.10: Design domain for example 3

図 (4.11) に平均コンプライアンスと断面主軸の方向を示す角度の関係を示す．この図より，平均コンプライアンスは角度に関して最小値と最大値を持つことがわかる．また，楕円断面の長軸の長さ a と短軸の長さ b の比が小さいほど，即ち主軸方向に関する断面二次モーメントの値の比 I_{yy}/I_{zz} が大きいほど，断面主軸の方向の変化に対する平均コンプライアンスの変化の割合が大きいことがわかる．そして，本手法で得られたその最小値たる最適値は，この場合 $0.464rad(26.57^\circ)$ で，負荷した荷重の方向と一致する．また，得られた最適角度は，本例題のような静定な構造では，荷重負荷方向と慣性主軸の方向を一致させれば最大剛性が得られる力学の基本則と相応しており，本手法の妥当性が確認できた．

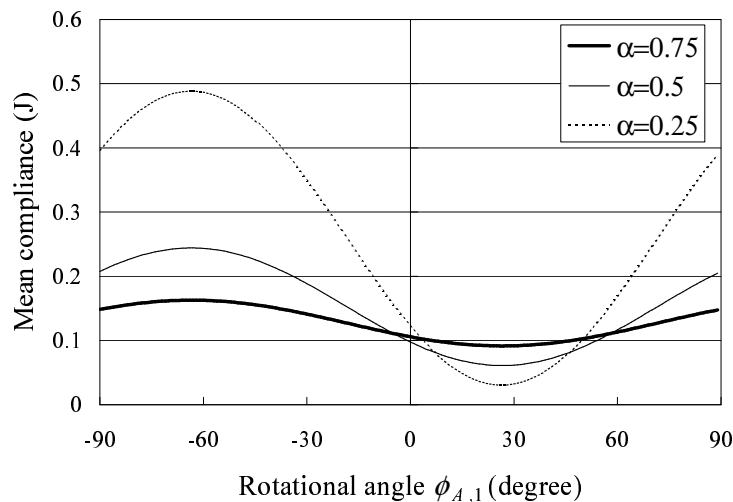


Figure 4.11: Relation between mean compliance and design variable ϕ_{A,i_A}

最適構造の相違とフレーム要素の断面主軸方向の関係 次に，フレーム要素とパネル要素で構成される3次元モデルを用いて最適構造の相違とフレーム要素の断面主軸を検討する．図 (4.12) に設計領域を示す．図に示したように，2次元上の五つの平面状の設計領域を用意し，それにより直方体の各面が固定設計領域 D を構成するように設定する．各平面における設計領域は X 方向， Y 方向にそれぞれ二分割し，分割された各領域にはパネル要素を配置する．また，配置された各パネル要素の周上にはフレーム要素を配置する．さらに，固定設計領域 D の左側を完全固定し，右側の境界面の中心に X 軸周りにモーメント $10.0N \cdot m$ を作用させた

場合の最適解を得る．なお，パネル要素は通常パネル，せん断パネルをそれぞれ用い，フレームの最大時の断面積は $2.83 \times 10^{-5} m^2$ ，パネルの最大時の厚さは $3.0 \times 10^{-3} m$ とし，体積制約には式 (4.23) を用い， V_F^U ， V_P^U を，それぞれ総体積の 50%，10% とした．フレーム要素の楕円断面の長軸の長さと同軸の長さの比 α_{A,i_A} は設計パラメータとし，値を 0.25，0.50，0.75 とした．

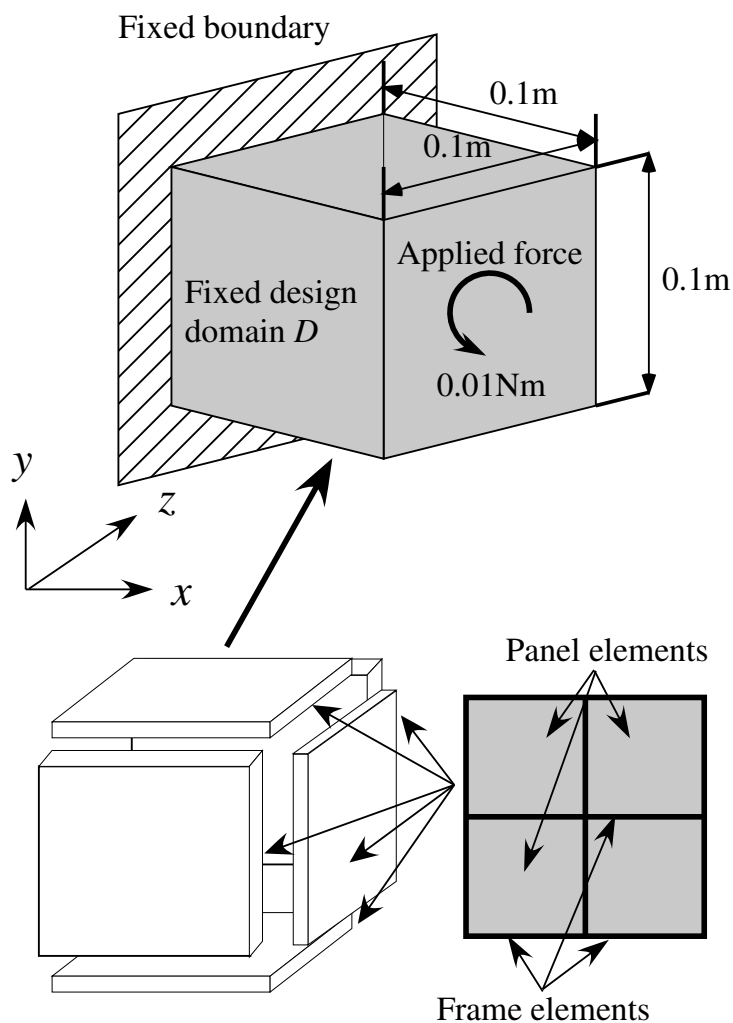
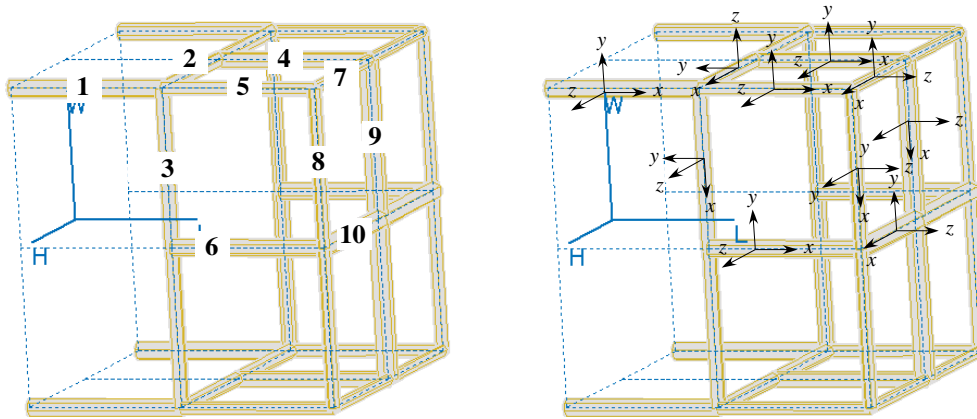
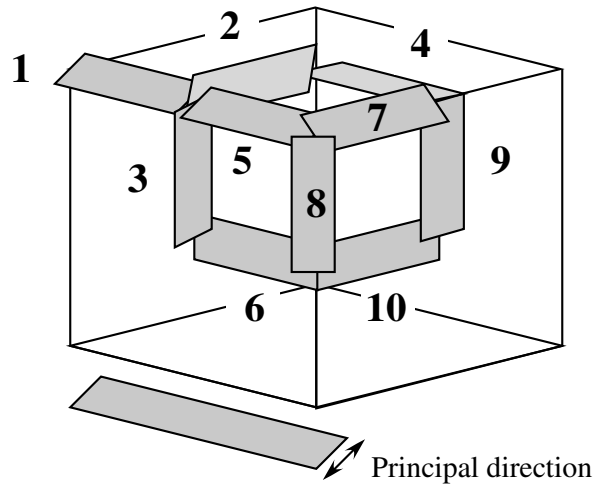


Figure 4.12: Design domain for example 4 ϕ_{A,i_A}

最初に，上記モデルからパネル要素を除き，フレーム要素のみを設計要素として用いた場合の最適構造を図 (4.13) に示す．3通りの α_{A,i_A} についてほぼ同じ最適構造が得られたため，ここでは α_{A,i_A} が 0.50 の場合の解のみ示す．図 (4.13)(a) にフレーム要素の断面積の相違を表し，図 (4.13)(b) に慣性主軸方向を示す．なお図 8 (a) には ρ_{A,i_A} が 0.1 以上の値を持つ要素のみ表示した．さらに，表 (4.1) には正規化された断面積 ρ_{A,i_A} の値と，主軸方向を表す角度 ϕ_{A,i_A} を示す．なお，対称性を考慮して，慣性主軸方向及びこの値は，図 (4.13)(a) で座標系を表記した要素についてのみ示した．



(a) Optimal cross-sectional area



(b) Optimal principal direction

Figure 4.13: Optimal frame configurations of example 4 ($\alpha_{A,i_A} = 0.50$)

Table 4.1: Normalized areas and rotational angle of optimal frame configuration of example 4

Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)	Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)
1	0.897	-43.62	6	0.707	1.62
2	0.478	83.96	7	0.293	44.48
3	0.538	87.15	8	0.375	43.94
4	0.637	89.85	9	1.000	0.37
5	0.396	-43.45	10	1.000	0.37

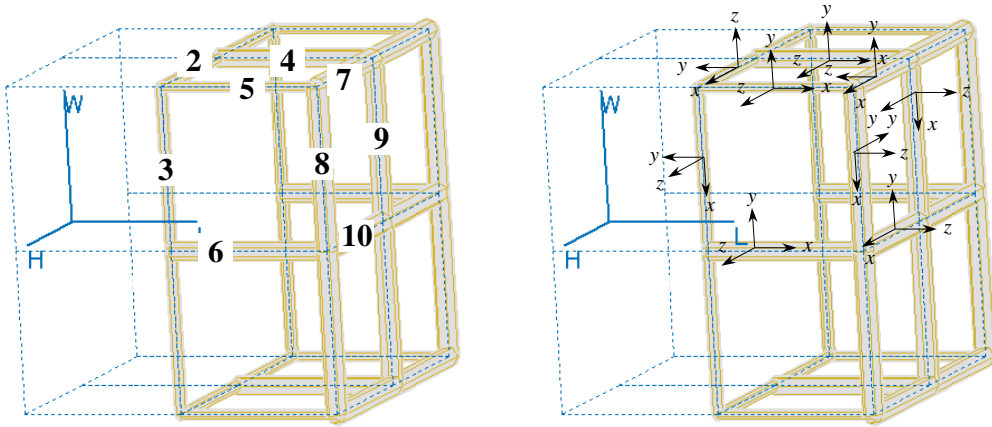
Table 4.2: Comparison of optimal mean compliances

α	Mean compliance (J)
0.75	5.014E-05
0.5	3.531E-05
0.25	2.194E-05

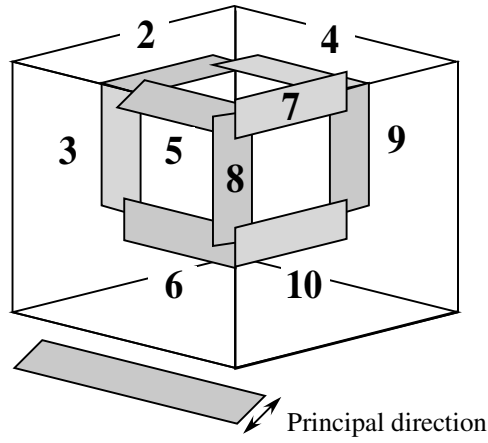
図 4.13(a) より，右側の境界面において荷重点と固定点から階段状にフレームが配置されているのがわかる．また図 4.13(b) と表 (4.1) より，フレーム要素 1 の主軸方向を示す角度の値は要素座標系に関して約 -45° であることがわかる．これは右側境界面におけるねじりを，同要素は -45° 方向の曲げとして支持しているためであると考えられる．そして，フレーム要素 2, 3 については，同要素の回転角はそれぞれ約 -80° であることから，この要素においては全体座標系の YZ 面内における曲げが支配的であることがわかる．

表 4.2 に 3 通りの α_{A,i_A} で得られた最適解の平均コンプライアンスを示す．表からわかるように， α_{A,i_A} の値が小さいほど，平均コンプライアンスの値が小さいことがわかる．即ち，主軸方向に関する断面二次モーメントの値の比が大きいフレーム要素を用いることで，高い剛性を持つ最適解が得られることがわかる．

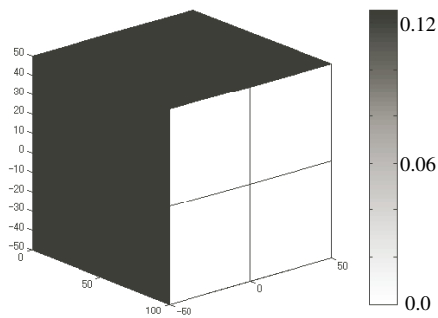
次に図 4.12 のモデルにおいて，フレーム要素とパネル要素を同時に設計要素として用いた場合の最適構造を図 4.14 に示す． α_{A,i_A} が 0.75 と 0.50 の場合でほぼ同じ最適構造が得られたため，ここでは α_{A,i_A} が 0.50 の場合の解のみ示す．前問と同様に，図 4.14(a) にフレーム要素の断面積の相違を表し，図 4.14(b) に慣性主軸方向を示す．なお図 4.14(a) には ρ_{A,i_A} が 0.1 以上の値を持つ要素のみ表示した．さらに，図 4.14(b) に，パネル要素の正規化された板厚の分布をグレースケールで示す．なお，最適化の際には，式 (4.10) の通常パネルを用いた場合と式 (4.11) のせん断パネルを用いた場合の両方の場合について最適構造を求めた．しかし，得られた結果は全く同じ構造であったので，通常パネルの結果のみを示す．両方のパネル要素について，同じ結果が得られたことから，この問題はせん断が支配的であることがわかる．また，表 4.2 に正規化された断面積の値と主軸方向を表す角度の値を示す．図 4.14(a),(c) より，荷重点近傍にはフレーム要素が集中して配置され，側面にはパネル要素がほぼ均等に配置されていることがわかる．これは，側面においてはせん断が支配的であり，その支持にはパネル要素が有効，そして荷重点近傍においては曲げが支配的であり，その支持にはフレーム要素が有効であるためと考えられる．また，図 4.14(b) と表 4.2 から，フレーム要素 2, 3 の主軸方向を示す角度の値は，要素座標系に関してそれぞれ約 4° で，フレーム要素だけを用いた図 4.13 の場合の同位置の要素における最適値，約 -80° と大きく異なるのがわかる．これは，図 4.13 の場合には，これらの要素が全体座標系の YZ 面内における曲げを支持していたのに対し，図 4.14 の場合には，全体座標系の XY 面内におけるせん断を支持しているためであると考えられる．



(a) Optimal cross-sectional area



(b) Optimal principal direction



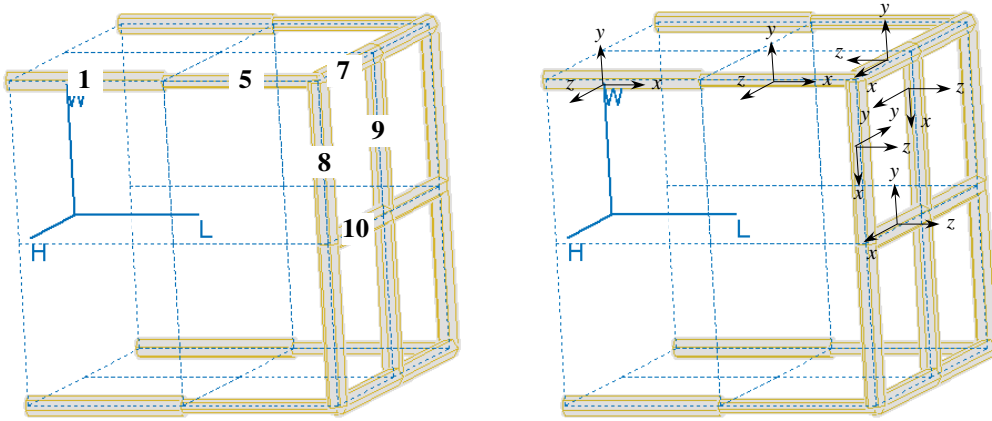
(c) Optimal normalized thickness of panel elements

Figure 4.14: Optimal frame configurations of example 4 ($\alpha_{A,i_A} = 0.50$)

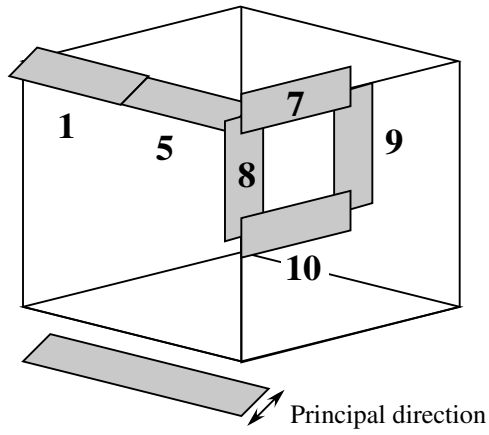
Table 4.3: Normalized areas and rotational angle of optimal frame configuration of example 4

Element Number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)	Element Number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)
2	0.265	4.82	7	1.000	0.59
3	0.279	4.84	8	1.000	0.62
4	0.796	89.89	9	1.000	0.00
5	0.144	-44.73	10	1.000	0.00
6	0.832	-0.19			

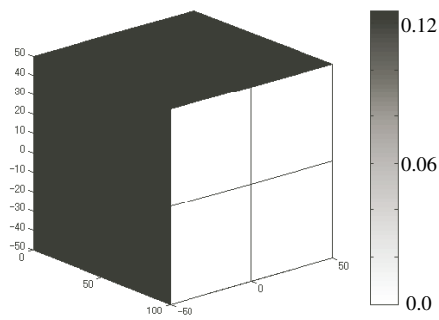
次に α_{A,i_A} が 0.25 の場合の解を示す．図 4.15(a) にフレーム要素の断面積の相違を表し，図 4.15(b) に慣性主軸方向を示す．図 4.15(b) に，パネル要素の正規化された板厚の分布をグレースケールで示す．また，表 4.4 に正規化された断面積の値と主軸方向を表す角度の値を示す．図 4.15(a) より， α_{A,i_A} が 0.50, 0.75 の場合と異なり，支持点に最も太いフレーム要素が配置されていることがわかる．これは α_{A,i_A} の値が小さくなり，フレーム要素の主軸方向の曲げ剛性が向上した結果，曲げモーメントが支配的な支持点近傍に同要素が配置されたと考えられる．



(a) Optimal cross-sectional area



(b) Optimal principal direction



(c) Optimal normalized thickness of panel elements

Figure 4.15: Optimal frame configurations of example 4 ($\alpha_{A,i_A} = 0.25$)

Table 4.4: Normalized areas and rotational angle of optimal frame configuration of example 4

Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)	Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)
1	1.000	-45.00	8	1.000	-0.02
5	0.422	-44.94	9	1.000	0.00
7	1.000	-0.02	10	1.000	0.00

表 4.5 に 3 通りの α_{A,i_A} で得られた最適解の平均コンプライアンスを示す．ここでも， α_{A,i_A} の値が小さいほど高い剛性を持つ最適解が得られていることがわかる．

Table 4.5: Comparison of optimal mean compliances

α	Mean compliance (J)
0.75	2.088E-05
0.5	1.428E-05
0.25	7.615E-06

断面の長軸と短軸の比も設計変数とした場合の最適化 次に，正規化された断面積 ρ_{A,i_A} ，要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} ，断面の長軸と短軸の長さの比 α_{A,i_A} を設計変数とした場合の最適構造を求める．図 fig15 に設計領域を示す．図に示したように，設計領域は XYZ 方向にそれぞれ 2 分割し，すべての節点をフレーム要素で結合する．そして，直方体形状の設計領域の左端上部を固定し，右端下部中央に垂直荷重 $10N$ を負荷した場合の最適形状を求めた．なお， α_{\min} は 0.25， α_{\max} は 0.95，フレーム要素の最大断面積は $3.14 \times 10^{-4} m^2$ ，体積制約の上限値は総体積の 2% とした．

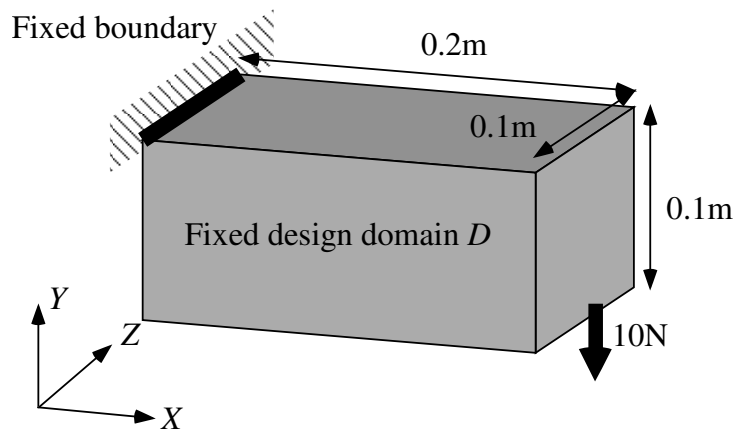
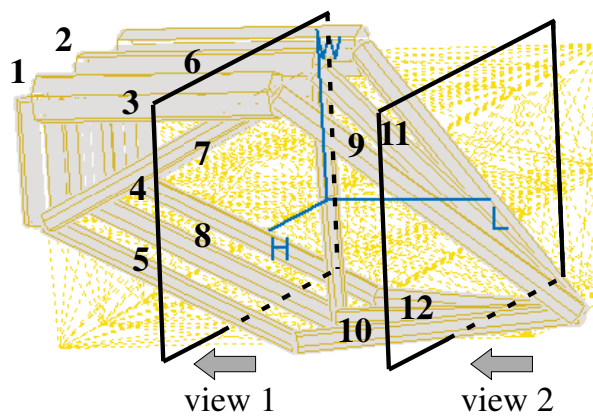


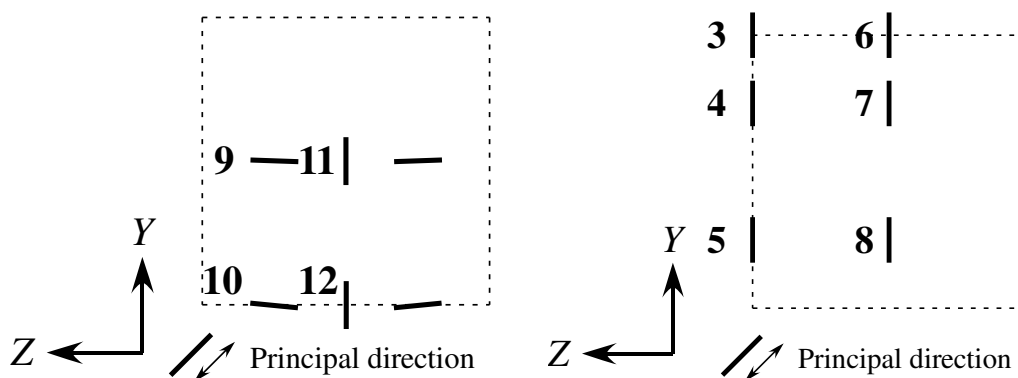
Figure 4.16: Design domain for example 4 ϕ_{A,i_A}

図 fig16(a) に最適構造を示す．また，図 fig16(a) には，特記すべき要素の主軸方向を示すために，その要素の番号と座標系を示す．図 fig16(b) には，図 fig16(a) に示した視点からの，それらの要素の最適主軸方向を示し，表 4.6 には最適時における各要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} と断面の長軸と短軸の長さの比 α_{A,i_A} を示した．

表 4.6 より，すべてのフレーム要素の α_{A,i_A} の値が下限値 0.25 に等しくなっていることがわかる．このことより，ある特定の方向に主軸方向を向け，その方向の断面二次モーメントを大きくすることで，構造全体の剛性が向上することがわかる．



(a) Optimal cross-sectional area



(i) View 1

(ii) View 2

(b) Optimal principal direction

Figure 4.17: Optimal frame configurations of example 5

Table 4.6: Optimal rotational angles and the ratios of the lengths of the major and minor axes of example 5

Element number	ϕ_{A,i_A} (°)	α_{A,i_A}	Element number	ϕ_{A,i_A} (°)	α_{A,i_A}
1	0.0	0.25	7	0.0	0.25
2	0.0	0.25	8	0.0	0.25
3	0.0	0.25	9	0.0	0.25
4	0.0	0.25	10	0.0	0.25
5	0.0	0.25	11	88.5	0.25
6	0.0	0.25	12	-86.1	0.25

4.4.2 固有振動数最大化問題

固有振動数最大化問題について、式 (4.20) の目標関数では一次 (最低次) から三次までの固有値を扱うものとし、各パラメータの値は $w_j = 0$, $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{0j} = 0$ とした。

固有モードと慣性主軸方向の関係 最初に、図 4.18(a) に示す単純な設計領域を設定し、固有モードと最適な慣性主軸方向の関係を検討する。設計領域は図 4.18(b) に示す要素番号と要素座標系を持つ八本のフレーム要素によって構成され、その左端を完全固定する。右端中央には、振動モードを固定するために、 X 軸周りの運動にのみ慣性モーメントを持つ仮想的な非構造質量を配置する。なお、設計変数はフレーム要素の正規化された断面積 ρ_{A,i_A} 、要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} とし、断面の長軸と短軸の比 α_{A,i_A} は定数 0.5 とした。また、体積制約は設計領域全体の 10%、フレーム要素の最大断面積 A_{\max} は $2.83 \times 10^{-5} m^2$ として最適解を得た。

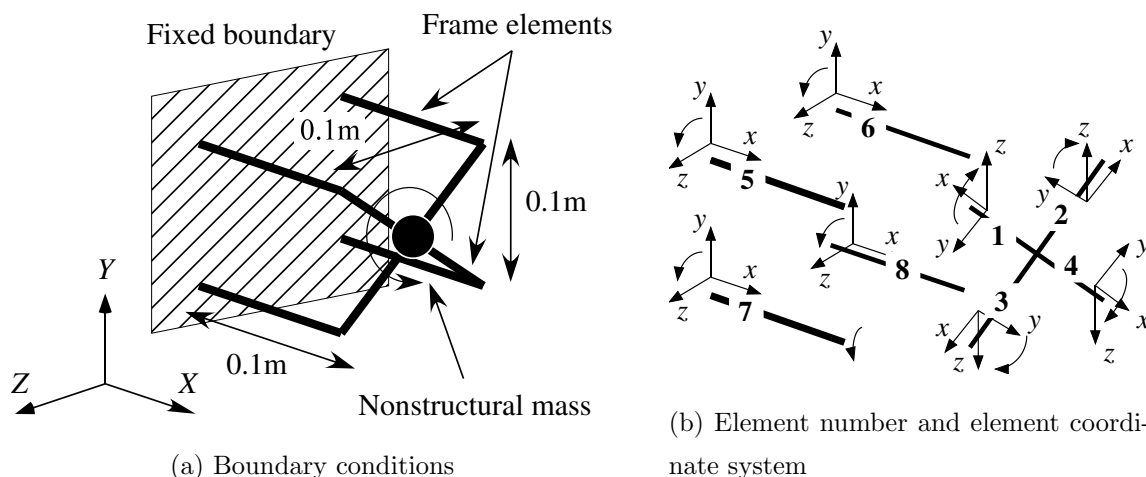


Figure 4.18: Design domain for example 1

図 4.19(a) に最適構造を、図 4.19(b) に一次 (最低次) の固有モードを 10 倍にして示した。さらに、表 4.7 にはフレーム要素の正規化された断面積 ρ_{A,i_A} 、要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} と、図 4.20 には最適な慣性主軸方向を示した。

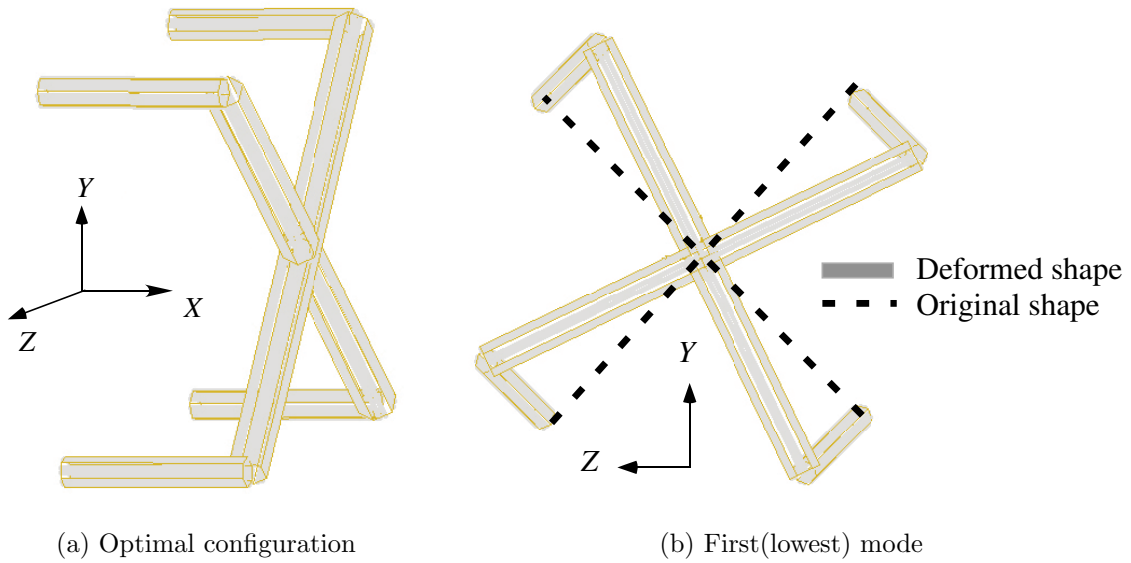


Figure 4.19: Optimal configuration and eigen mode of example 1

Table 4.7: Normalized areas and rotational angle of optimal frame configuration of example 1

Element Number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)	Element Number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)
1	0.12	0.0	5	0.07	-45.0
2	0.12	0.0	6	0.07	45.0
3	0.12	0.0	7	0.07	45.0
4	0.12	0.0	8	0.07	-45.0

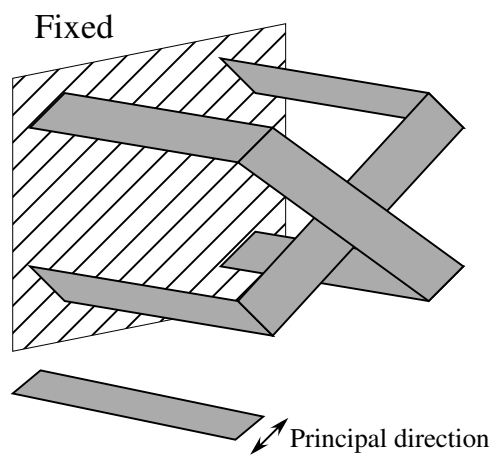


Figure 4.20: Optimal principal direction of example 1

図 4.19(b) より，最低次の固有モードは非構造質量を中心とする X 軸周りの回転振動であり，表 4.7 及び

図 4.20 より要素 5~8 の回転角はそれぞれ -45° , 45° であることがわかる。即ち、得られた最適解は各要素が、断面が最も高い剛性を持つ方向に曲げ振動する構造であることがわかる。

断面の長軸と短軸の長さの比と最適解の関係 次に、全てのフレーム要素の断面の長軸と短軸の長さの比 α_{A,i_A} を設計パラメータとし、幾つかの α_{A,i_A} の設定に対して最適構造を求め、 α_{A,i_A} が最適解に与える影響について検討する。図 4.21 に設計領域を示す。図に示したように、直方体形状の設計領域について、 XYZ 方向にそれぞれ二分割し、すべての節点をフレーム要素で結合する。そして、設計領域の左端上部を固定し、右端下部中央に $1kg$ の非構造質量を配置した場合の最適構造を求める。なお、非構造質量は質点とし、 XYZ 方向の並進運動にのみ影響するものとする。 α_{A,i_A} の値は 0.25 , 0.50 の場合に加えて、断面形状が真円の場合についても最適構造を求め、比較を行った。また、いずれの場合についても、最大時の断面積 A_{\max} は $3.14 \times 10^{-4} m^2$ 、体積制約の上限値は総体積の 1% とした。

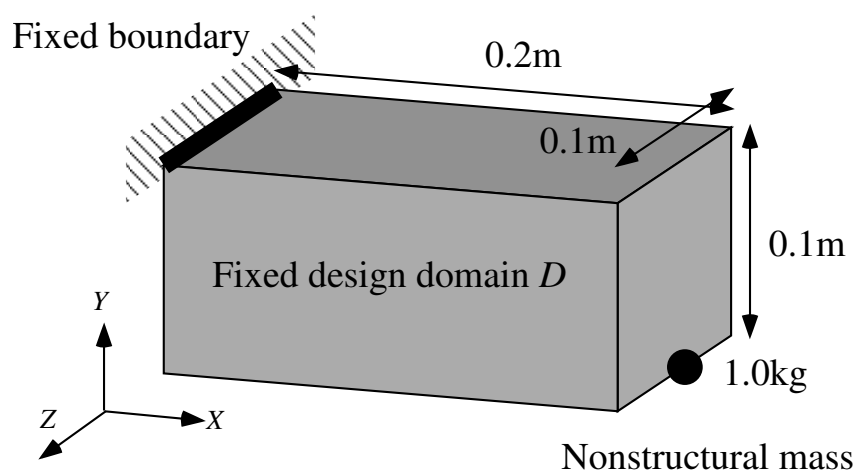


Figure 4.21: Design domain for example 2

図 4.22 に最適構造を、図 4.23 に、 α_{A,i_A} が 0.50 の場合の一次 (最低次) から三次までの固有モードを示す。なお、いずれの場合についても、ほぼ同一の固有モードが得られたため、ここでは α_{A,i_A} が 0.50 の場合の結果のみを示した。さらに、図 4.24 には、 α_{A,i_A} の違いにより角度の相違が見られる要素の主軸方向を示すために、その要素の番号と座標系を示し、表 4.8 にはその角度を示す。図 8 には α_{A,i_A} が 0.50 の場合について、図 4.24(a) で示した視点からの各要素の最適主軸方向を示す。

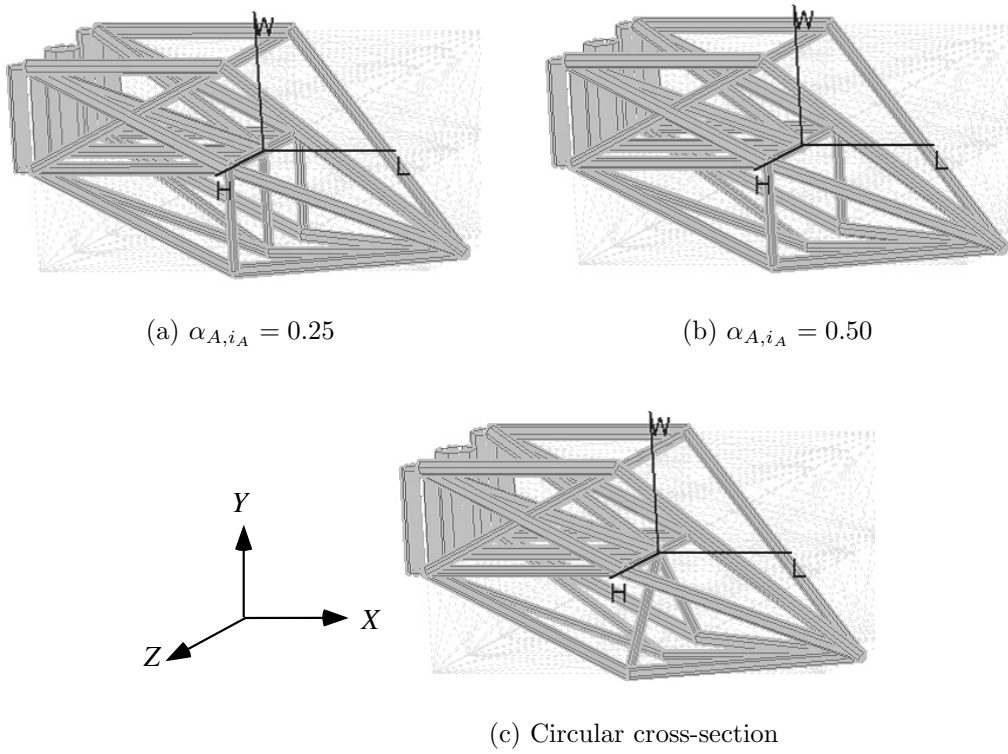


Figure 4.22: Optimal configuration and eigen mode of example 2

Table 4.8: Eigen-frequencies of optimal configurations of example 2 (Hz)

Case	1st freq.	2nd freq.	3rd freq.
(a) $\alpha_{A,i}=0.25$	10.87	17.69	42.44
(b) $\alpha_{A,i}=0.50$	9.21	17.00	39.51
(c) Circle	8.19	15.66	33.97

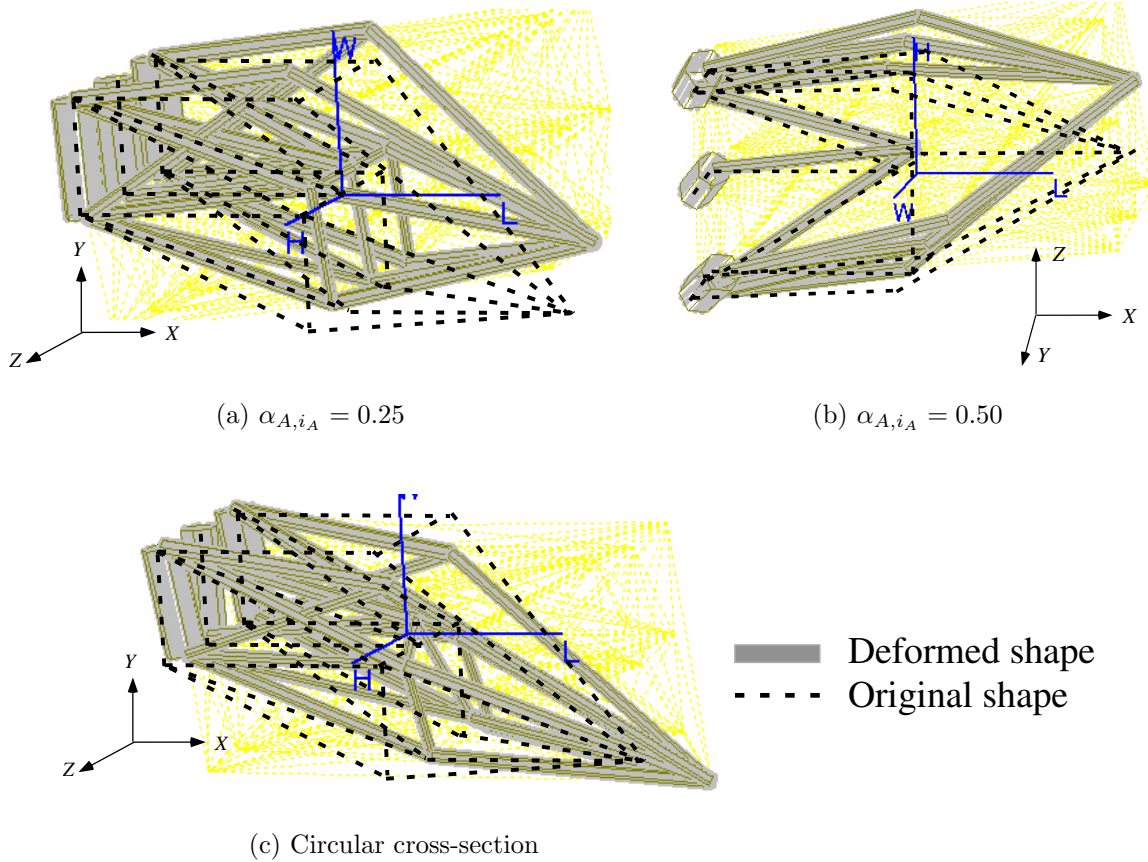


Figure 4.23: Eigen mode shapes of example 2 ($\alpha_{A,i_A} = 0.5$)

図 4.22 より，細部に違いは見られるが，三つの場合について，ほぼ等しい最適構造が得られていることがわかる．また，表 4.8 より， α_{A,i_A} の値が小さいほど，最適構造の固有振動数は高いことがわかる．これは， α_{A,i_A} の値が小さいほど主軸方向の曲げ剛性は向上し，質量を変えずに高剛性の最適構造が得られたためであると考えられる．他方，図 4.23 より，一次，二次，三次の固有モードはそれぞれ質点の Y 方向， Z 方向， X 方向の並進運動であることがわかる．すなわち，一次の固有モードにおいては Z 軸まわりの曲げモードが，二次の固有モードにおいては Y 軸まわりの曲げモードが，三次の固有モードにおいては X 方向の並進モードが支配的である．図 4.25 に示す最適主軸方向は，式 (4.20) において，一次の固有振動数の項が大きく反映されているため， Y 方向を向いている要素が多い．また，表 4.8 において， α_{A,i_A} の値の相違によって最適角度に違いが見られる．これは，断面形状が変わると要素の曲げ剛性も変化するためであると考えられる．以上のように， α_{A,i_A} の値の設定により最適構造が変化し， α_{A,i_A} の値が小さいほど，最適値は改善されることがわかった．

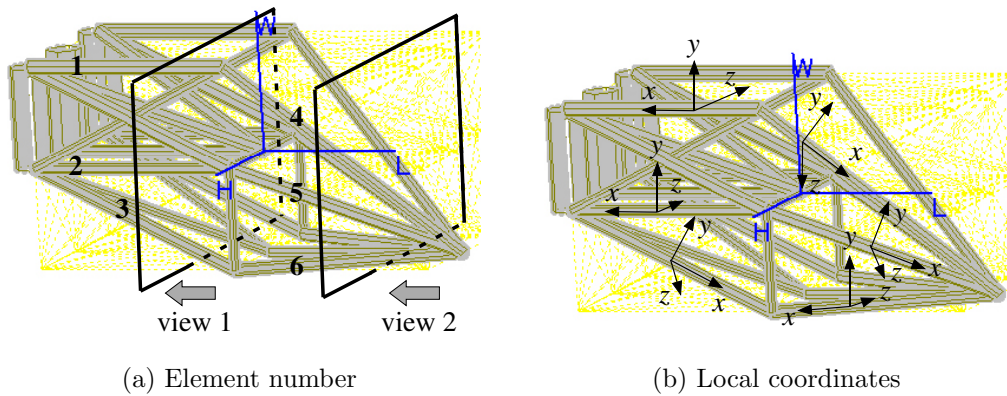


Figure 4.24: Element number and eigen mode of example 2

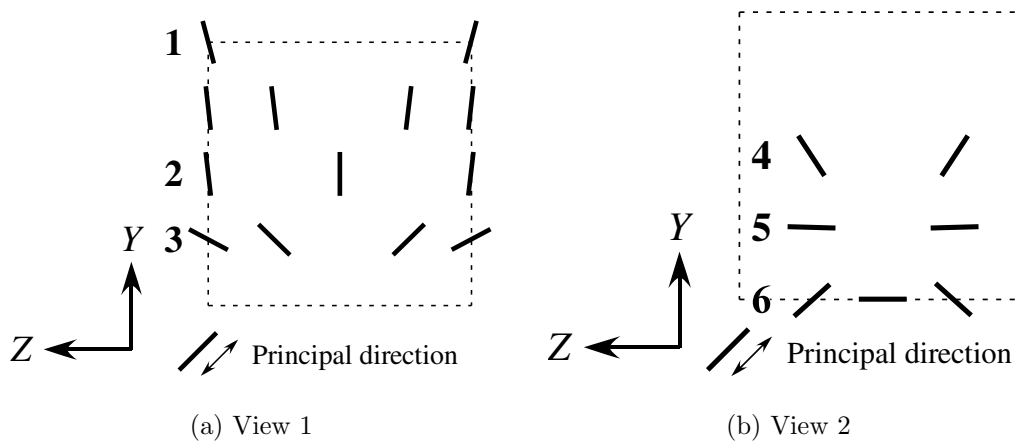


Figure 4.25: Optimal principal direction of each frame element in example 2 ($\alpha_{A,i_A} = 0.5$)

Table 4.9: Optimal rotational angles of example 2

Element No.	$\phi_{A,i} (\alpha_A=0.25)$	$\phi_{A,i} (\alpha_A=0.50)$
No.1	-11.7	-14.8
No.2	-28.9	-40.9
No.3	8.7	55.3
No.4	31.4	33.2
No.5	75.9	88.4
No.6	0.4	48.1

断面の長軸と短軸の長さの比も設計変数にした場合の最適化 次に、正規化された断面積 ρ_{A,i_A} 、要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} 、断面の長軸と短軸の長さの比 α_{A,i_A} を設計変数とした場合の最適構造を求める。図 4.26 に設計領域を示す。図に示したように、立方体の各面に、四つの格子を構成するようフレーム要素を配置し、設計領域の左側を完全固定する。さらに、右側の境界面の中央下部に厚さ $1mm$ 、直径 $10mm$ 、

質量 $1kg$ の円盤状の非構造質量を，円盤面が YZ 平面に一致するように配置し，最適化を図った．なお，最大時の断面積 A_{\max} は $2.83 \times 10^{-5}m^2$ ， α_{\min} は 0.25 ， α_{\max} は 0.95 ，体積制約の上限値は総体積の 40% とした．

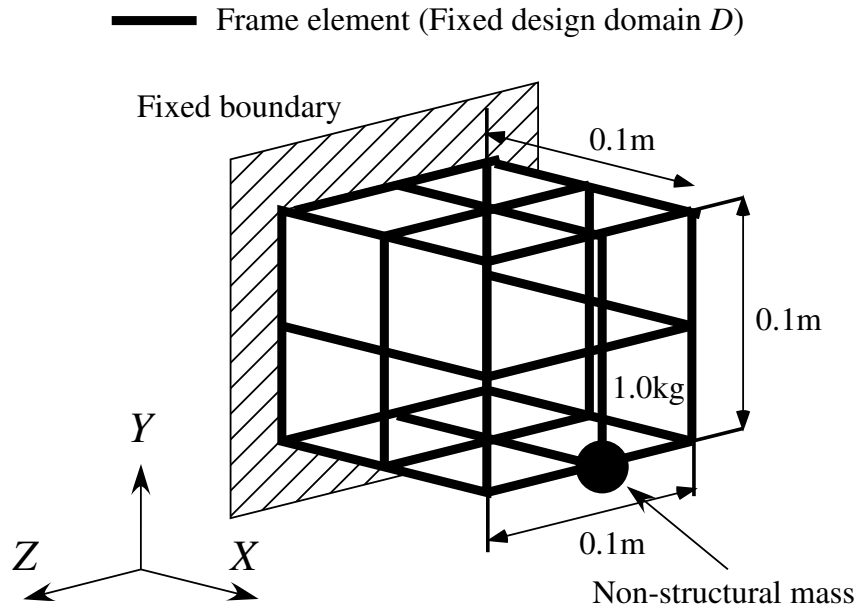


Figure 4.26: Design domain for example 3

図 4.27 に最適構造と，一次 (最低次) から三次までの固有モードを示す．また，図 4.28 には，特記すべき要素の主軸方向を示すために，その要素の番号と座標系を示す．図 4.29 にはその要素の最適主軸方向を示し，表 4.10 には最適時における各要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} ，断面の長軸と短軸の長さの比 α_{A,i_A} を示した．

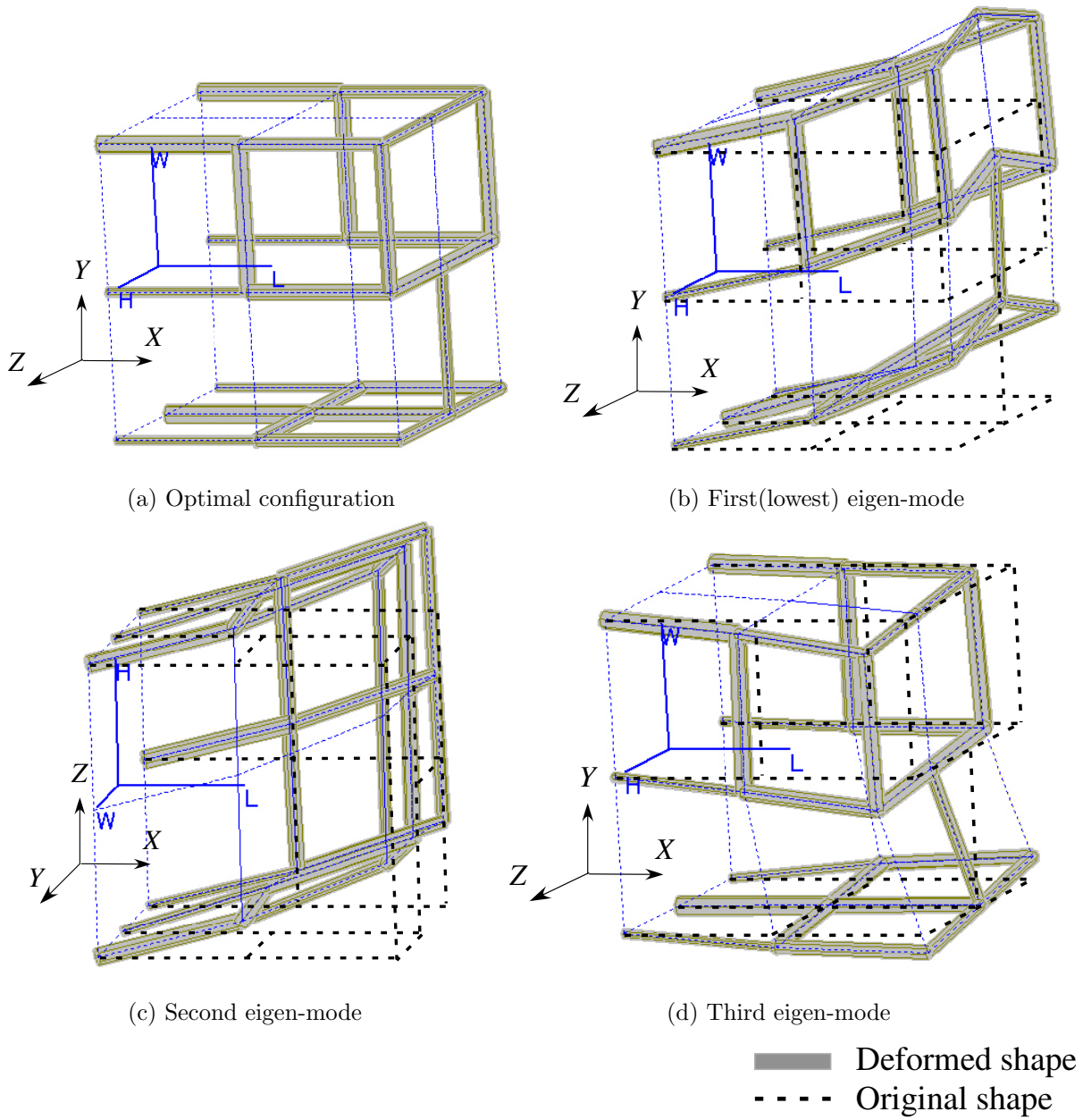


Figure 4.27: Optimal configuration and eigen-mode shapes of example 3

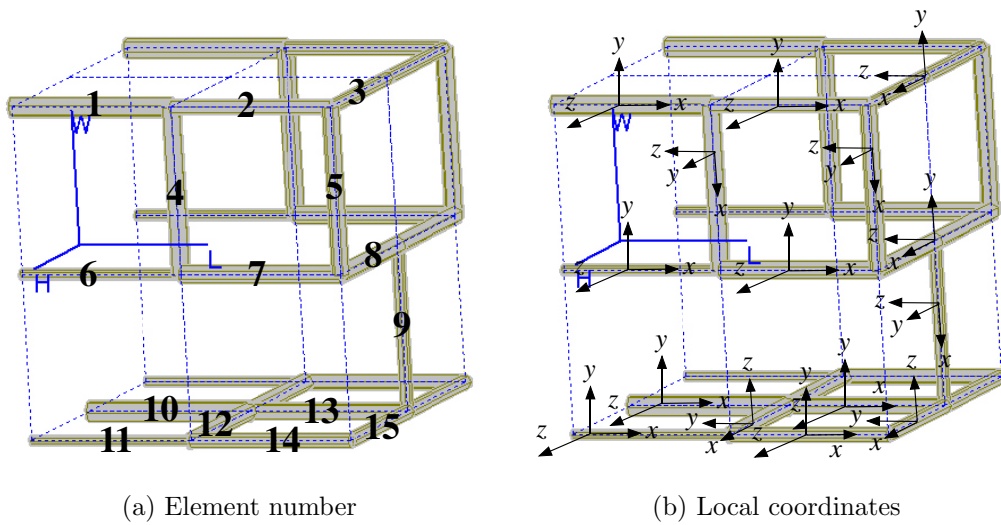


Figure 4.28: Element number and local coordinates of example 3

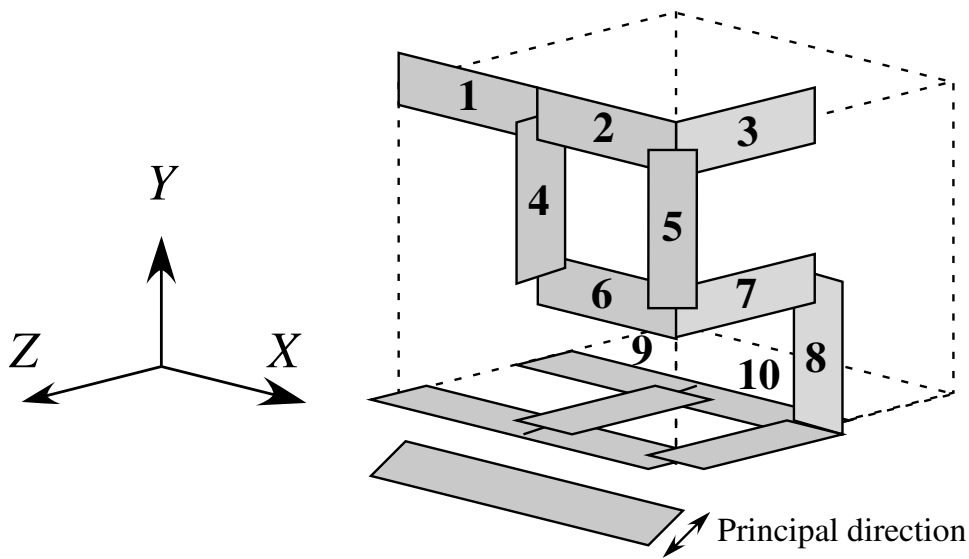


Figure 4.29: Optimal principal direction of each frame element in example 3

図 4.27 より，一次，二次の固有モードはそれぞれ質点の Y ， Z 方向の並進運動，三次の固有モードは X 軸周りの円盤の回転運動に対応することわかる．図 4.29 より，最適な主軸方向は，側面においては多くの要素が Y 方向を向き，底面においては全ての要素が Z 方向を向いていることがわかる．これは，それぞれ一次，二次の固有モードに対する剛性を高めるためであると考えられる．他方，表 4.10 より全ての要素においての最適値が下限値である 0.25 となっていることがわかる．このことより，式 (4.20) による異なる固有モード変位をもつ複数の固有振動数の最大化の場合でも，ある特定の方向に主軸方向を向け，その方向の断面二次モーメントを大きくした方が，全ての固有振動数は最大化されることがわかる．以上の結果から，要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} ，断面の長軸と短軸の比 α_{A,i_A} も設計変数とした場合にも最適構造が得られ，さらに

その最適構造は，二つの主軸の断面二次モーメントの比が大きい断面をもつフレーム要素で構成されることがわかった．

Table 4.10: Optimal rotational angles and ratios of the lengths of the major and minor axes of example 3

Element number	ϕ_{A,i_A} (°)	α_{A,i_A}	Element number	ϕ_{A,i_A} (°)	α_{A,i_A}
1	1.2	0.25	6	0.8	0.25
2	-1.3	0.25	7	0.9	0.25
3	0.2	0.25	8	0.0	0.25
4	88.4	0.25	9	-90.0	0.25
5	51.1	0.25	10	90.0	0.25

フレームと補強パネルで構成される T 字型接合部の最適構造の導出 次に本手法を，フレームと補強パネルで構成される，自動車ボデーの T 字型接合部の最適構造の導出に適用する．パネル要素としては式 (4.10) の通常パネル要素と式 (4.11) のせん断パネル要素を用いたが，いずれの場合も同じ解が得られた．即ち，この問題はパネル要素においてはせん断応力が支配的である．以下，通常パネルによって得られた解のみを示す．図 4.30(a), (b) に設計領域と非設計領域を示し，図 4.30(c) に境界条件を示す．設計領域の下部に作用する荷重 $40N$ に対する剛性の最大化を目的として，最適解を得る．なお， α_{A,i_A} の値は 0.25，最大時の断面積 A_{\max} は $2.83 \times 10^{-5} m^2$ ，最大時の板厚 t_{\max} は $3.0 \times 10^{-3} m$ ，フレーム要素の体積制約の上限値 V_F^U はフレーム要素の総体積の 30%，パネル要素の体積制約の上限値 V_P^U はフレーム要素の総体積の 10% とした．

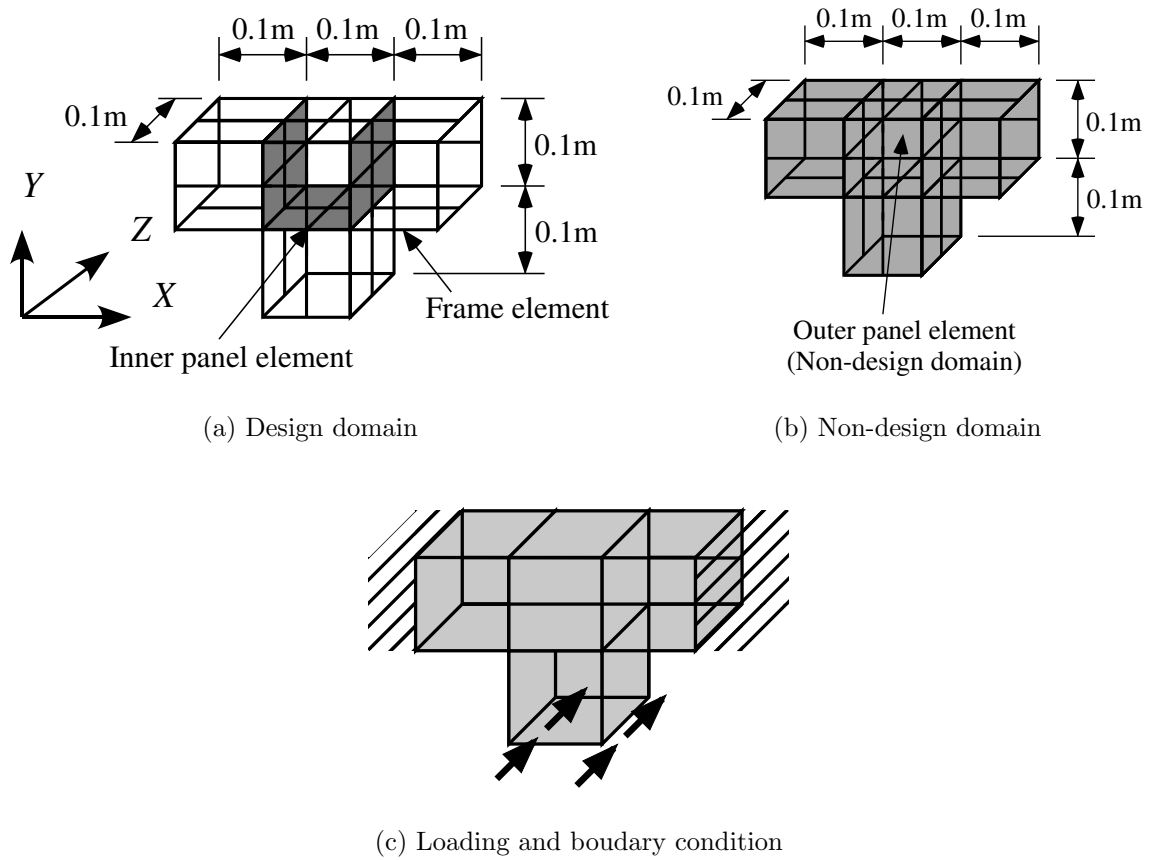
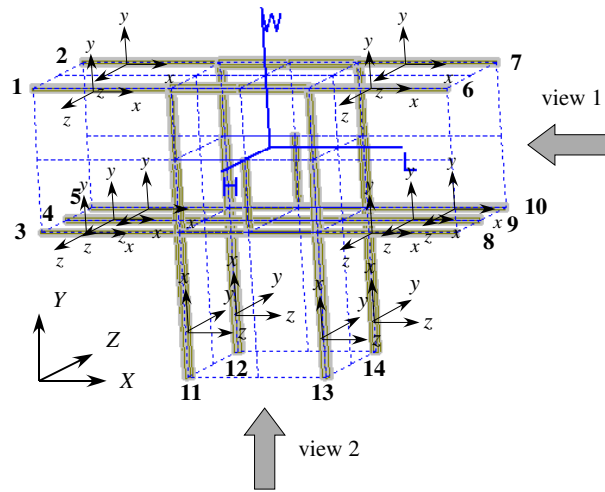


Figure 4.30: Initial optimization settings for frame and panel reinforcement in T-shaped automotive body part

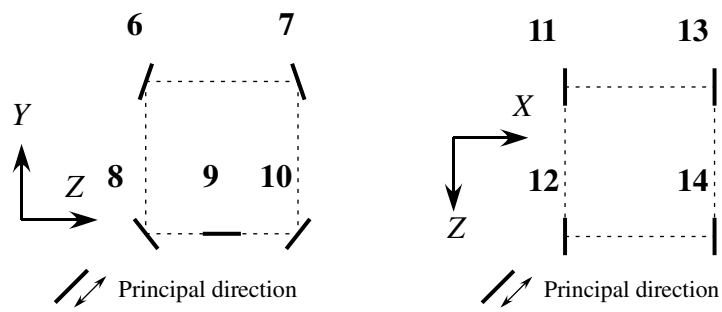
図 4.31 に最適構造を示す．図 4.31(a) は特筆すべき要素の要素番号と要素座標系を示し，図 4.31(b) は図 4.31(a) で示した視点から見た要素の最適主軸方向を示す．図 4.31(c) は正規化されたパネルの板厚 ρ_{t,i_t} の分布を示す．表 4.11 には図 4.31(a) に示した要素の正規化された断面積 ρ_{A,i_A} ，要素の断面主軸の方向を示す角度 ϕ_{A,i_A} を示した．図 4.31(a) より，荷重点のフレーム要素 11~14，支持点におけるフレーム要素 3~5，8~10 の断面積が大きいことがわかる．また，図 4.31(b) に示す各要素の最適主軸方向より，この構造は支持点近傍では曲げではなくねじりを受けていることがわかる．さらに，図 4.31(c) に見られる垂直な厚いパネル要素はねじりによるせん断を補強していると考えられる．

Table 4.11: Normalized areas and rotational angle of optimal frame configuration of T-shaped body parts

Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)	Element number	ρ_{A,i_A}	ϕ_{A,i_A} (°)
1	0.419	-19.16	8	0.280	37.51
2	0.418	19.18	9	0.563	90.00
3	0.270	38.24	10	0.270	-38.20
4	0.562	90.00	11	1.000	0.49
5	0.269	-38.27	12	1.000	-0.50
6	0.412	-19.35	13	1.000	-0.28
7	0.413	19.25	14	1.000	0.49



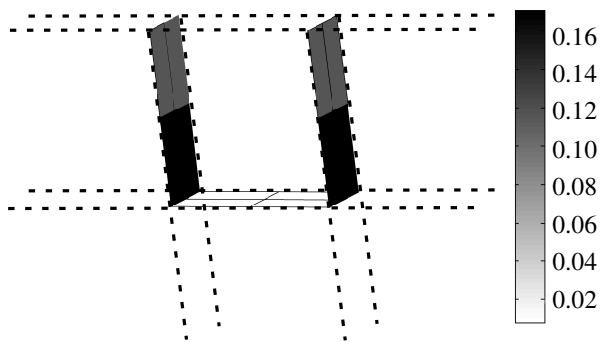
(a) Optimal cross-sectional area



(i) View 1

(ii) View 2

(b) Optimal principal direction



(c) Optimal normalized thickness of panel elements

Figure 4.31: T-shaped body parts optimal reinforcements. ($\alpha_{A,i_A} = 0.25$)

4.5 結言

本研究では、機械製品開発における構想設計段階での設計支援を目的として、フレーム要素とパネル要素を用いた構造最適化手法を提案した。そして、簡単な数値例により本研究で提案する方法の妥当性を検証した。結果を以下に示す。

1. フレーム要素とパネル要素の定式化を行った。フレーム要素の断面形状は断面主軸方向を設計変数として考慮可能で、かつ断面の寸法の比を設計変数とすることで断面の形状の変化を考慮可能な、最も単純な形状である楕円とした。パネル要素に関しては、異なる性質のパネル要素によって得られた最適構造を比較することにより、構造の力学的メカニズムを明確化できると考え、真応力とせん断応力を支持できる通常のパネルと、せん断応力のみを支持するせん断パネルの二種類のパネルを定義した。
2. 構想設計段階における基本的な問題である剛性最大化問題と固有振動数最大化問題について、目標関数の定式化を行うとともに、フレーム要素の正規化された断面積、断面主軸方向を示す角度、断面の長軸と短軸の長さの比、パネル要素の板厚を設定した最適化問題を定式化した。
3. フレーム要素の断面主軸方向を示す角度と断面の長軸と短軸との長さ比の更新方法として、KKT条件と補ひずみエネルギーに基づく新しい方法を開発した。さらに、この方法と逐次凸関数近似法を用いた最適化アルゴリズムを構築した。
4. 真応力とせん断応力を支持できる通常のパネルと、せん断応力のみを支持するせん断パネルから得られる最適構造を比較することにより、構造の力学的メカニズムを明確化できることを、簡単な数値例を用いて検証した。
5. フレーム要素とパネル要素を同時に設計要素として最適化することにより、体積制約の相違と最適解の関係、並びに設計要素の機能と最適解の関係を明確化した。
6. 平均コンプライアンスとフレーム要素の慣性主軸方向の関係を検討し、本手法で得られた最適な主軸方向が、力学的に妥当であることを検証した。
7. フレーム要素のみを用いた構造と、フレーム要素とパネル要素を組み合わせた構造の最適解とを比較することによって、最適構造の相違とフレーム要素の断面主軸方向との関係を明確化した。
8. フレーム要素の断面の長軸と短軸の長さの比を設計パラメータとして変更した場合の結果から、この比の設定の相違により、最適構造が異なることがわかった。
9. 長軸と短軸の長さの比を設計変数として最適化することにより、剛性を最大化する場合と複数の固有振動数を最大化する場合で共に、断面の長軸と短軸との比が大きい、すなわち、二つの主軸の断面二次モーメントの比が大きい断面を持つフレーム要素で構成される構造が、最適構造となることがわかった。
10. 自動車ボデーのT字型接合部を模した設計モデルにより、最適な補強形状が得られることが確認できた。

5 離散構造要素を用いたバンドギャップ構造の最適化

5.1 導入

本章では、第四章で提案した離散構造要素を用いた構造最適化法の応用研究として、バンドギャップ構造の創生を目的とした構造最適化法を提案する。バンドギャップ効果とは、対象の構造において固有モードが存在し得ない周波数帯を設けることにより、特定の周波数の波を空間的に減衰させ遮断する現象である。すなわち、指定した周波数帯の波がバンドギャップ構造内に入射した際には、その振幅が空間的に減衰して波は媒質内で消滅し、指定外の周波数帯の波は透過する効果である [20]。この効果は、電子波や光波、電波、音波、弾性波のそれぞれについて確認され、様々な工学的応用が期待されている。例えば、光波においては、複合電磁材料の結晶にバンドギャップ効果を持たせた、フォトニック結晶 [123] が開発されている。この結晶は、特定の周波数帯の光波を遮断あるいは選択可能という性質を持ち、光回路や光ファイバー、ビームスプリッター、レーザー等への適用が検討され、実用化の初期段階にある。一方、音波、弾性波においても、同様の性質を用いて、防音・防振装置や音響レーザー、音響ミラー、周波数フィルタ、弾性波ガイド等への適用が期待されている。

弾性波を対象としたバンドギャップ構造に関する理論的評価 [57, 80, 97]、あるいは実験的評価 [51, 68, 71] について多くの研究が成されている。さらに、バンドギャップ構造の最適設計に関しても、いくつかの研究が報告されている。Sigmund と Jensen [98]、Jensen と Pedersen [52] は、連続体力学に基づくトポロジー最適化手法を用いて最適化を行っている。また、Diaz ら [32] は非構造質量と梁要素で構成される格子状の周期構造において、Bloch-Floquet 理論に基づく最適設計法を提案している。さらに、最近では、Halkjær ら [46] が Mindlin 板要素を用いて厚板の曲げ振動におけるバンドギャップ構造を導出している。これらの方法はバンドギャップ構造の最適設計法に関して大きな成果をもたらしているが、最適設計において構造の実現性は重視されておらず、工業製品として実現が容易な解は未だに得られていない。また、これらの最適設計に関する研究では、単一の周波数に対するバンドギャップ効果を得ることが最適化の目標とされているのみで、多機能化を目指した複数の周波数におけるバンドギャップ効果を持つ構造の最適化には至っていない。

他方、著者らは、前章で述べたように、構想設計支援を目的とした構造最適化手法の一つとして、離散構造要素を用いた構造最適化手法 [105] を提案している。離散構造要素は、フレーム要素やパネル要素に代表されるように、定式化が材料力学や構造力学等に基づいており、その力学的性質が明確であるという特徴を持ち、さらに、それらの要素を用いて得られた最適解は、各要素の配置位置と寸法諸元により表現されるため、最適解を元にも実際の設計案を得ることが可能である。従って、この手法を用いて、最適なバンドギャップ構造を創出すれば、得られた構造の力学的背景を明確化できる上、最適構造を設計案として実現することも可能となる。そこで本研究では、多機能化を目指した複数の周波数におけるバンドギャップ効果を持つ構造を対象として、離散構造要素を用いた新しい最適設計法を提案する。以下、二節では、トポロジー最適化の基本的な考え方とバンドギャップ効果について説明するとともに、複数の周波数においてバンドギャップ効果を得るための目標関数を設定する。さらに、設計要素の定式化と設計変数の設定を行い、それにより最適設計問題の定式化を行う。三節では、最適化問題の定式化と逐次凸関数近似法に基づく最適化アルゴリズムを構築する。四節では、簡単な数値例により、提案する方法論の妥当性を検証する。

5.2 定式化

本研究では，バンドギャップ効果を作用させる対象として，縦波の進行波を対象とする．いま，図 5.1 に示すように，固定設計領域 D の境界 Γ_{in} に特定の角周波数 ω を持つ縦波の弾性波を入射させ，設計領域内を弾性波が伝搬する進行波について考える．図中の Ω_{ND} は非設計領域を示し， Ω_{PML} は PML (Perfectly Matched Layer) 境界条件 [16] を設定した領域を示す．PML 領域は，進行波問題を扱う際に，境界からの反射波の影響を避けるために必要な仮想的な吸収境界である．なお，最適化の際に設計領域と PML 領域を隣接させてしまうと，最適化過程において設計領域内の質量と剛性の値が変化するために，その境界において後述のインピーダンスマッチングが成り立たなくなり，波の反射が生じてしまう．ここでは，この反射を極力回避するために，固定設計領域 D と PML 領域 Ω_{PML} との間に非設計領域 Ω_{ND} を設定する．そして，波が境界面に垂直に入射する場合を考え，PML 領域内部と外部間でインピーダンスマッチングを行う．PML 領域内の質量密度 ρ_{PML} とヤング率 E_{PML} は減衰項を複素形式で表現すれば，次式となる．

$$\rho_{\text{PML}} = \rho - j \frac{\alpha_\rho}{\omega} = \rho \left(1 - j \frac{\alpha_\rho}{\rho\omega} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{E_{\text{PML}}} = \frac{1}{E} - j \frac{\alpha_E}{\omega} = \frac{1}{E} \left(1 - j \frac{E\alpha_E}{\omega} \right) \quad (5.2)$$

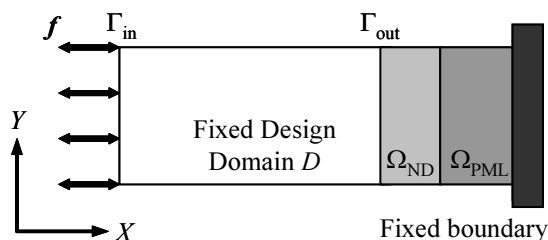


Figure 5.1: An elastic structure subjected to periodic force

ここで， α_ρ は質量比例型減衰係数， α_E は剛性型減衰係数で，この二つの係数を，次式が成り立つように設定すれば，弾性波におけるインピーダンスマッチングが行われる [121]．

$$\frac{\alpha_\rho}{\rho} = E\alpha_E \quad (5.3)$$

すなわち，式 (5.3) を満たせば周波数とは無関係に反射係数が 0 となり，弾性波は反射せず PML 領域へ吸収される．さらに，三次元のインピーダンスマッチングは，PML 領域内の波をそれぞれ X, Y, Z 方向に分解し，境界に垂直な成分に同じ条件を適用すればよい．

今，各離散構造要素における荷重ベクトルを $f_e = F_e e^{j\omega t}$ ，変位ベクトルを $u_e = U_e e^{j\omega t}$ とすると，PML 領域外の要素における振動方程式は次式となる．

$$(\mathbf{K}_e + j\omega \mathbf{C}_{e,\text{str}} - \omega^2 \mathbf{M}_e) U_e = F_e \quad (5.4)$$

ここで， F_e と U_e はそれぞれ要素における荷重ベクトル，変位ベクトルの振幅， \mathbf{K}_e と \mathbf{M}_e は要素剛性マトリクスおよび要素質量マトリクスである． $\mathbf{C}_{e,\text{str}}$ は構造に起因する要素減衰マトリクスであり，次式のレイリー

減衰と仮定する．

$$C_{e,\text{str}} = \alpha_1 K_e + \alpha_2 M_e \quad (5.5)$$

α_1, α_2 は比例係数である．他方，PML 領域内の要素における振動方程式は，式 (5.1) ~ (5.3) の関係より，次式で表される．

$$(K_e' + j\omega(C_{e,\text{str}} + C_{e,\text{abs}}) - \omega^2 M_e) U_e = F_e \quad (5.6)$$

ただし，

$$C_{e,\text{abs}} = \frac{1}{\omega} K_e'' - \omega M_e'' \quad (5.7)$$

とする．ここで， K_e'' および M_e'' はそれぞれ，PML 領域内における剛性マトリクスの虚部と質量マトリクスの虚部を成分とするマトリクスである．ゆえに，領域全体における荷重ベクトルを $f = F_e e^{j\omega t}$ ，変位ベクトルを $u = U_e e^{j\omega t}$ とすると，式 (5.4) と式 (5.6) により領域全体の振動方程式は次式となる．

$$(K + j\omega C - \omega^2 M) U = F \quad (5.8)$$

ここで， F と U はそれぞれ荷重ベクトル，振幅ベクトル， K, C, M は領域全体の剛性マトリクス，減衰マトリクス，および質量マトリクスである．

次に，バンドギャップ構造を得るための目標関数を定式化する．今，図 4.1 に示すように，固定設計領域 D の境界 Γ_{in} に特定の角周波数 ω の弾性波を入射させた場合について，境界 Γ_{out} における振動または出力波の振幅を最小化する場合を考える．この出力波の振幅を最小化する目標関数として，振幅ベクトル U を用いた次式が提案されている [98]．

$$f = |U|^T L_{\Gamma_{\text{out}}} |U| = \bar{U}^T L_{\Gamma_{\text{out}}} U \quad (5.9)$$

ここで， $L_{\Gamma_{\text{out}}}$ は減衰させる境界上に存在する節点の特定の自由度に対応する対角成分のみが 1 で他の成分が 0 のマトリクスで， $|U|$ は U の各成分の絶対値で構成されるベクトルで， \bar{U} は U の共役複素数を表す．しかし，二次元以上の設計問題では，多くの振動モード，波の伝搬方向が存在することによる波の拡散や，境界での反射の影響により，出力境界の応答のみを最小化する式 (5.9) の目標関数では，収束性が悪く，物理的意味のある最適構造が得られない場合がある．本研究では，この問題を解決するため，バンドギャップ構造においては，特定の周波数を持つ弾性波が空間的に減衰するという性質に基づき，固定設計領域全体において波の振幅減衰を考慮した次式の目標関数を提案する．

$$f = |U|^T L_D |U| = \bar{U}^T L_D U \quad (5.10)$$

ここで， L_D は固定設計領域 D に存在する全節点の特定の自由度に対応する対角成分が 1 で他の成分が 0 のマトリクスである．この目標関数の最小化を行えば，固定設計領域全体において振幅を最小化することになるから，明瞭で物理的に意味のある最適構造を得ることができる．

5.2.1 設計要素の定式化

本研究では設計要素として，四章と同様に，フレーム要素とパネル要素を用いる．フレーム要素の断面形状は真円とし，設計変数は正規化された断面積 ρ_A とする．このとき，実際の断面積 A は，正規化された断面積により，

$$A = \rho_A A_{\text{max}} \quad (0 \leq \rho_A \leq 1) \quad (5.11)$$

として求める．本研究では縦波の弾性波について，バンドギャップ効果をもつ構造を創出することを目的としているので，本来はフレーム要素の軸方向のみの剛性を考慮すればよいと考えられる．しかし，実際の数値計

算においては、計算上の特異性などによる不安定性を回避するため、さらに、実用的な離散構造要素を対象とした最適設計法の構築という観点から、六自由度に対して物理的に妥当な剛性をもつフレーム要素を用いて構造の創成を図った。

また、パネル要素における設計変数は、次式の正規化されたパネルの厚さ ρ_t とする。

$$t = \rho_t t_{\max} \quad (0 \leq \rho_t \leq 1) \quad (5.12)$$

ここで、 t は実際の板厚、 t_{\max} は最大時の板厚である。また、パネル要素の定式化においては、面内方向のつりあいと支配的な縦波の弾性波を対象としているため、面外方向のつりあいは無視し、面内方向については応力の補間関数と変位の補間関数を独立に定義する応力仮定法 [122] により要素剛性マトリクスを定式化する。また、パネル要素の要素質量マトリクスは、簡単のため集中質量マトリクス (Lumped mass matrix) として求める。

5.2.2 最適化問題の定式化

今、 n_A 個のフレーム要素と n_t 個のパネル要素で構成される固定設計領域 D の境界 Γ_{in} に、 n_w 個の弾性波に対して、バンドギャップ効果をもつ構造の創成を考える。すなわち、 n_w 個の角周波数 $\omega_k (k = 1, \dots, n_w)$ の弾性波を入射させた場合について、境界 Γ_{out} における出力波の振幅を最小化することにより、角周波数 $\omega_k (k = 1, \dots, n_w)$ においてバンドギャップ効果をもつ構造を創出する。

このとき、最適化問題は以下のように定式化される。

$$\underset{\rho_{A,i}, \rho_{t,i}}{\text{minimize}} f_k = \bar{U}^T L_D U \quad (5.13)$$

制約条件

$$0 \leq \rho_A^L \leq \rho_{A,i} \leq \rho_A^U \leq 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, n_A \quad (5.14)$$

$$0 \leq \rho_t^L \leq \rho_{t,i} \leq \rho_t^U \leq 1 \quad \text{for } i = 1, \dots, n_t \quad (5.15)$$

$$(\mathbf{K} + j\omega_k \mathbf{C} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{U}_k = \mathbf{F} \quad \text{for } k = 1, \dots, n_w \quad (5.16)$$

ここで、 $\mathbf{U}_k (k = 1, \dots, n_w)$ は角周波数 ω_k の弾性波に対応する設計領域全体の振幅ベクトル、 $\rho_A^L, \rho_A^U, \rho_t^L, \rho_t^U$ はそれぞれ $\rho_{A,i}, \rho_{t,i}$ の下限値と上限値である。上式のように本最適化問題は、 n_w 個の目標関数をもつ多目的最適化問題となる。本研究においては重み付き総和法により、目標関数を次式のように定式化する。

$$\underset{\rho_{A,i}, \rho_{t,i}}{\text{minimize}} F = \sum_{k=1}^{n_w} w_k f_k = \sum_{k=1}^{n_w} w_k \bar{U}_k^T L_D U_k \quad (5.17)$$

ここで、 w_k は k 番目の角周波数における目標関数の重み係数である。

5.3 最適化の手続き

5.3.1 最適化アルゴリズム

最適化のフローチャートを以下に示す。

1. 初期形状を決定する。
2. 目標関数が収束するまで以下のループを繰り返す。
 - (a) 剛性マトリクス \mathbf{K} と減衰マトリクス \mathbf{C} 、質量マトリクス \mathbf{M} を導出する。

- (b) 有限要素法により振動方程式を解く．
- (c) 目標関数を導出する．
- (d) 目標関数の感度を導出する．
- (e) 求めた感度に基づき，設計変数を逐次凸関数近似法 (CONLIN)[36] により更新する．

5.3.2 感度解析

本研究では，設計変数の更新に逐次凸関数近似法を用いるため，目標関数 f の設計変数 ρ に関する感度を導出する必要がある．感度は随伴変数法を用いて以下のように導出する．まず，目標関数 f を設計変数 r で微分すると，

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{d\bar{U}^T}{d\rho} \mathbf{L}_D \mathbf{U} + \bar{U}^T \mathbf{L}_D \frac{d\mathbf{U}}{d\rho} = 2\text{Re} \left(\bar{U}^T \mathbf{L}_D \frac{d\mathbf{U}}{d\rho} \right) \quad (5.18)$$

ここで， κ を解とする次の随伴方程式を考える．

$$\kappa^T (\mathbf{K} + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = -\bar{U}^T \mathbf{L}_D \quad (5.19)$$

式 (5.19) を式 (5.18) に代入すると，次式が得られる．

$$\frac{df}{d\rho} = 2\text{Re} \left(-\kappa^T (\mathbf{K} + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} \frac{d\mathbf{U}}{d\rho} \right) \quad (5.20)$$

一方，振動方程式である式 (5.8) を設計変数 ρ で微分すると，

$$\left(\frac{d\mathbf{K}}{d\rho} + j\omega \frac{d\mathbf{C}}{d\rho} - \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{d\rho} \right) \mathbf{U} = -(\mathbf{K} + j\omega \mathbf{C} - \omega^2 \mathbf{M}) \frac{d\mathbf{U}}{d\rho} \quad (5.21)$$

となり，これを式 (5.20) に代入すると，求める感度が次式により得られる．

$$\frac{df}{d\rho} = 2\text{Re} \left\{ -\kappa^T \left(\frac{d\mathbf{K}}{d\rho} + j\omega \frac{d\mathbf{C}}{d\rho} - \omega^2 \frac{d\mathbf{M}}{d\rho} \right) \mathbf{U} \right\} \quad (5.22)$$

5.4 数値例

いくつかの数値例により，本研究で提案する方法論の妥当性について検証を行った．なお，構造物の材料には鋼を想定し，ヤング率を 206GPa，ポアソン比を 0.3，質量密度を 7784kg/m³ とした．また，フレーム要素の最大直径は 1.0×10^2 m，すなわち，最大断面積は 7.85×10^{-5} m² とし，パネル要素の最大厚さは 1.0×10^{-3} m とした．さらに，設計変数 $\rho_{A,i}, \rho_{t,i}$ の初期値はそれぞれ 0.5 とし，最小値はそれぞれ 0.1, 1.0×10^{-3} とした．また，バンドギャップ効果が得られる周波数帯と構造の固有振動数には密接な関係があるため，各例題で扱う弾性波の周波数は，初期構造における固有振動数の上限値と下限値の間で決定した．

5.4.1 単一の周波数帯においてバンドギャップ効果を持つ構造の最適化

最初に，フレーム要素のみで構成される一次元のバンドギャップ効果を持つ構造の創成を目的とし，最適化を行った．図 5.2 に設計領域を示す．図に示すように，境界 Γ_{in} に，図の矢印方向に振幅 1N，周波数 45.2kHz の縦波の弾性波を入射させた場合について，設計領域全体における応答の振幅を最小化した．また，設計領域は，長さ L を 0.15m, 0.30m, 0.45m とし，それぞれ十五本，三十本，四十五本のフレーム要素で構成される三つの場合について最適構造を求めた．

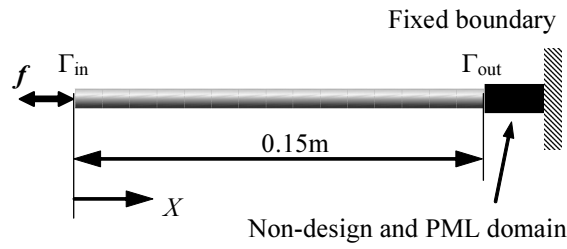


Figure 5.2: 1D design domain

図 5.3 に最適構造，図 5.4 にこれらの構造の境界 Γ_{in} の X 方向に振幅 1N，周波数 0.0 ~ 100.0kHz の縦波の進行波が入射した場合の，境界 Γ_{out} における応答振幅を示す．この図には，比較のため，L が 0.15m の場合の初期構造の結果も示した．これらの図からわかるように，最適構造では，設計領域の長さによらず，最大断面積と最小断面積のフレーム要素が周期的に配置され，いずれの構造においても指定した周波数 45.2kHz 付近でバンドギャップ効果が現れている．一般的に，バンドギャップ効果は，質点系の波動伝播においては，異なる質量の質点が交互に配置された場合，もしくは同じ質量の質点が異なる強さのバネで交互に連結された場合について，音響モードに対応する固有振動数と，光学モードに対応する固有振動数との間の周波数帯において，波動ベクトルに虚部を有する局在モードが発生することにより生じる．本最適解は，等しい質量を持つ各節点が異なる断面積のフレーム要素，即ち異なる強さのバネで交互に連結された構造と考えることができるため，この理論に合致する．このことから，本手法の有効性が確認できる．また，構造の全長 L が長いほど大きな減衰効果が得られていることがわかる．

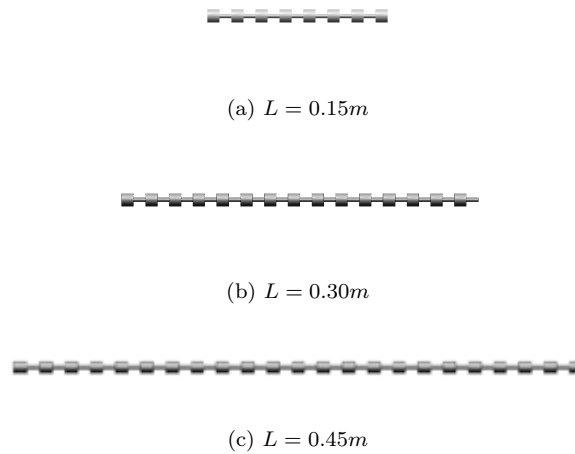


Figure 5.3: Optimal frame configurations

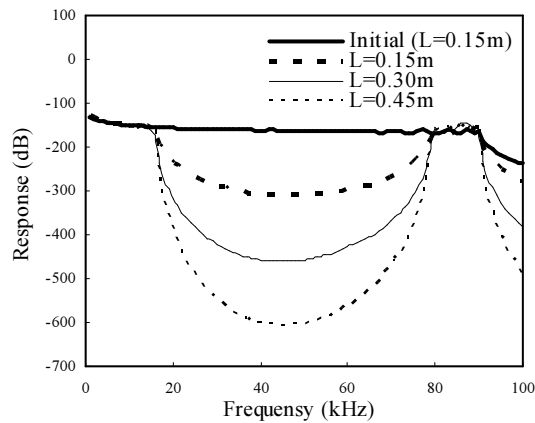


Figure 5.4: Frequency response in the optimal structures

図 5.5 に、 L が 0.45m の場合について、周波数 45.2kHz の進行波が入射した際の、各節点における応答振幅を示す。なお、本図および以降の応答振幅の図においては、バンドギャップ効果をより明確に図示するため、要素の減衰効果を省略している。これより、要素自体には減衰効果がないにもかかわらず、入力部からの節点の距離に比例して振幅が減衰していることがわかる。すなわち、バンドギャップ構造においては、入力部からの距離が遠い節点ほど、結果として高い減衰効果が得られることがわかり、これは図 5.4 の結果と合致する。以上より、設計領域の長さによらず、指定した周波数に対して等しい周期構造が得られ、また、構造の全長が長いほど、大きなバンドギャップ効果が得られることがわかった。

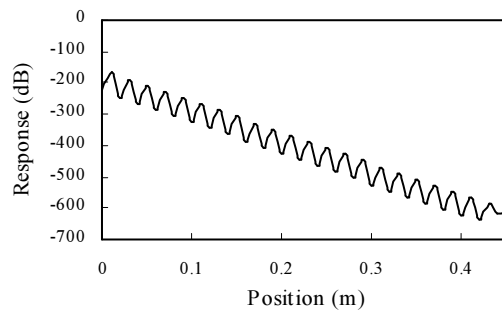


Figure 5.5: Response at each node in the optimal structure

次に、フレーム要素とパネル要素で構成される二次元の固定設計領域について、上下に十分な長さを持つ板状の、単一の周波数帯に対し、バンドギャップ効果を持つ構造の創成を目的とし、最適化を行った。図 5.6 に設計領域を示す。初期構造として、九個の正方形のパネル要素を配置し、さらにその外周にフレーム要素を配置した。設計領域の上下の境界に周期境界条件を設定し、境界 Γ_{in} に、図の矢印方向に振幅 1N、周波数 5.4kHz の縦波の弾性波を入射させた場合について、設計領域全体における応答の振幅を最小化した。

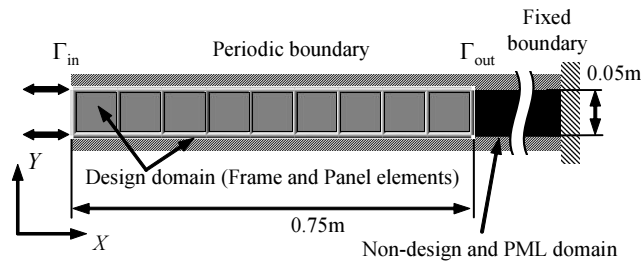


Figure 5.6: 2D design domain

図 5.7 に最適構造，図 5.8 に最適構造の境界 Γ_{in} の X 方向に振幅 1N，周波数 0.0 ~ 12.0kHz の縦波の進行波が入射した場合の，境界 Γ_{out} における応答振幅を示す．これらの図からわかるように，最適構造においてはパネル要素とフレーム要素の配置に，完全な周期性が見られる．また，指定した周波数 6.7kHz 付近で完全なバンドギャップ効果が確認できる．



(a) Frame elements



(b) Panel elements

Figure 5.7: Optimal frame and panel configurations

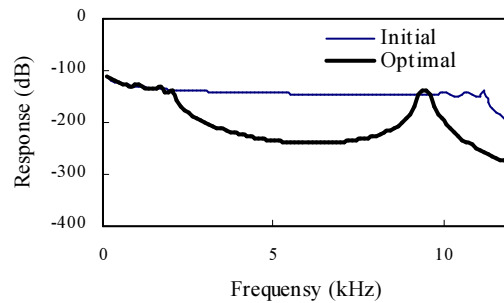


Figure 5.8: Frequency response in the optimal structure

次に，図 5.9 に示すように，設計領域を進行波に対して垂直方向に拡大し，二十七個の正方形のパネル要

素と、その外周のフレーム要素によって構成される設計領域について最適構造を求める。これにより、進行波に対して垂直方向の波の干渉が最適構造に与える影響を検討する。さらに、前数値例と同様に、設計領域の上下の境界に周期境界条件を設定し、境界 Γ_{in} に、図の矢印方向に振幅 1N、周波数 6.7kHz の縦波の弾性波を入射させた場合について、境界 Γ_{out} における応答の振幅を最小化した。

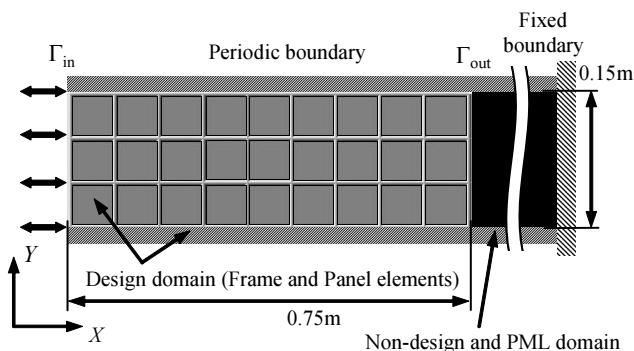
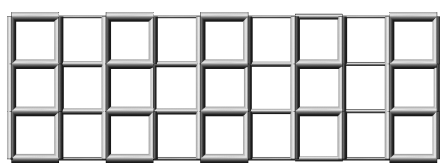
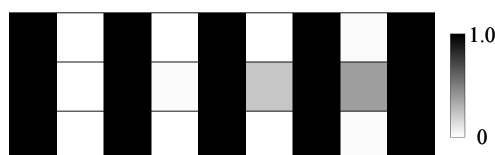


Figure 5.9: 2D design domain

図 5.10 に最適構造、図 5.11 に最適構造の境界 Γ_{in} の X 方向に振幅 1N、周波数 0.0~12.0kHz の縦波の進行波が入射した場合の、境界 Γ_{out} における応答振幅を示す。図 5.10 からわかるように、最適構造ではフレーム要素とパネル要素の配置の周期性が不完全である。これは、構造物に X 方向にのみ波を入射させても Y 方向の進行波が現れ、この X、Y 方向の進行波が複雑に影響し合うことから、X 方向に対して完全な周期性をもつ構造が最適とはならなかったためと考えられる。また、図 5.11 より、指定した周波数 4.1kHz 付近ではバンドギャップ効果が現れているが、5.5kHz 付近では効果がなく、前数値例のような完全なバンドギャップ効果は得られていないことがわかる。しかし、指定した周波数におけるバンドギャップ効果は得られているため、本手法が有効であることがわかる。



(a) Frame elements



(b) Panel elements

Figure 5.10: Optimal frame and panel configurations

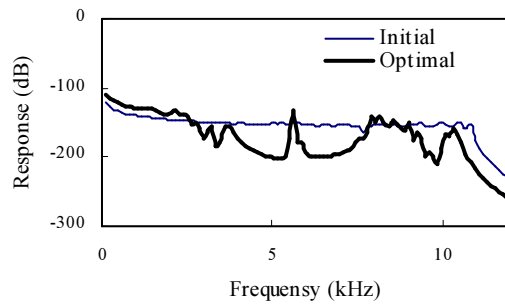


Figure 5.11: Frequency response in the optimal structure

5.4.2 複数の周波数帯においてバンドギャップ効果を持つ構造の最適化

次に、複数の周波数帯においてバンドギャップ効果を持つ構造の最適化を行う。最初に、図 3 に示す、フレーム要素のみで構成される、全長 L が 0.15m の一次元の構造について検討する。周波数が 30.0kHz 、 47.0kHz 、 62.0kHz の弾性波を遮断する構造の創成を目的とし、それらの周波数を持つ、三種類の振幅 1N の弾性波を境界 Γ_{in} に矢印方向に入射させた場合について、設計領域全体における応答の振幅を最小化した。また、式 (5.17) の目標関数において、各周波数の重み係数 w はそれぞれ 0.5 、 1.0 、 0.5 とした。

図 5.11 に最適構造、図 5.12 に最適構造の境界 Γ_{in} の X 方向に振幅 1N 、周波数 $0.0 \sim 100.0\text{kHz}$ の縦波の進行波が入射した場合の、境界 Γ_{out} における応答振幅を示す。周波数応答結果では、指定した周波数において、波が遮断されていることがわかる。また、周波数 35kHz 及び 56kHz 近傍においてのみ、波が透過できることがわかる。これにより、この構造を、 $15.0\text{kHz} \sim 82.0\text{kHz}$ の周波数帯の波が入射した際に、 35kHz 及び 56kHz 近傍の波のみを取り出す構造として使用できることもわかる。このような効果は、フォトニック結晶においても見られ、それは周期構造内に欠陥が配置された場合に、その欠陥を中心にして対称となる領域に局在モードが生じることが原因である (2)。本数値例の最適解においても、左右対称の構造が得られたことから、この理論に合致した結果といえる。



Figure 5.12: Optimal frame configuration

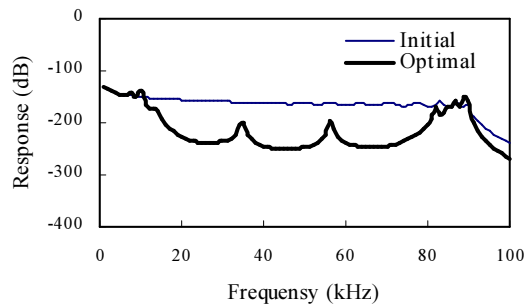


Figure 5.13: Frequency response in the optimal structure

次に、上下に十分な長さを持つ、二次元の板状の構造を想定し、初期構造を図 7 に示すように設定した。周波数が 3.4kHz, 5.3kHz, 7.2kHz の弾性波の遮断及びその間の周波数を持つ弾性波を透過させる構造の創成を目的とし、それらの周波数を持つ、振幅 1N の、三種類の弾性波を境界 Γ_{in} に入射させた場合について、設計領域全体における応答の振幅を最小化した。また、式 (5.17) の目標関数において、各周波数の重み係数 w はそれぞれ 1.0 とした。図 5.14 に最適構造、図 5.15 に最適構造の境界 Γ_{in} の X 方向に振幅 1N, 周波数 0.0 ~ 12.0kHz の縦波の進行波が入射した場合の、境界 Γ_{out} における応答振幅を示す。図 5.15 より、指定した周波数において、波が遮断されていることがわかる。また、前数値例と同様に、この構造を、2.0kHz ~ 10.0kHz の周波数帯の波が入射した際に、6.0kHz ~ 6.5kHz の波のみを取り出す構造として使用できることもわかる。以上より、一次元構造、二次元構造において、本手法で複数の周波数を指定して最適化することにより、指定した周波数の波を遮断し、また、結果的にその間の特定の周波数を持つ波のみを透過させる構造が得られることがわかった。



(a) Frame elements



(b) Panel elements

Figure 5.14: Optimal frame and panel configurations

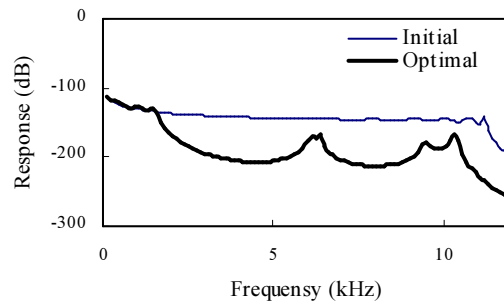


Figure 5.15: Frequency response in the optimal structure

5.5 結言

本研究では，離散構造要素を用いたトポロジー最適化手法を用いて，機械構造の設計案としての実現性が高い，弾性波におけるバンドギャップ構造の新しい最適設計法を開発するとともに，簡単な数値例により本研究で提案する方法の妥当性を検証した．結果を以下に示す．

1. 進行波問題を扱う際に必要な，仮想的な吸収境界である PML 境界条件を設定し，弾性波における進行波問題を定式化した．
2. 複数の周波数におけるバンドギャップ効果を持つ構造の創生を目標として，目標関数の定式化を行った．すなわち，バンドギャップ構造内では弾性波の振幅が空間的に減衰するという性質から，設計領域全体における振幅を考慮した，新しい目標関数を提案し，さらに，重み付き総和法を用いた多目的問題の目標関数を提案した．
3. 最適化に用いる離散構造要素として，フレーム要素とパネル要素を定式化し，設計変数の更新に逐次凸関数近似法を用いた最適化アルゴリズムを構築した．
4. 簡単な数値例により，本研究で提唱する方法論の検証を行った．即ち，フレーム要素とパネル要素で構成される板状の構造において，バンドギャップ効果を有する周期構造が得られた．また，フレーム要素を用いたバンドギャップ構造において，設計領域の全長とバンドギャップ効果の関係を検討した．さらに，複数の周波数を目標関数に含め，最適化を行うことにより，それらの周波数を持つ弾性波を遮断することが可能な構造が得られることがわかった．

今後の展開としては，本研究によりバンドギャップ効果と周期構造の間隔に密接な関係があることがわかったため，様々な目的に対応可能な柔軟な最適化を行うために，設計領域を連続体で考えることが必要であると考える．

6 結論

本論文では、様々な機能を有する構造物の最適設計に適用することを目的とした構造最適化に関する研究を行った。即ち、構造の表現方法に関する基礎研究及び、特定の機能の最適化を目標とした構造最適化法の構築の応用研究を行った。以下、各章について結論をまとめる。

序章では、構造最適化の分類について述べ、パラメトリック形状最適化とジオメトリック形状最適化、トポロジー最適化の定式化について述べた。さらに、ジオメトリック形状最適化の一種である、レベルセット法に基づく形状最適化の定式化について述べた。

第二章では、形状最適化の基礎研究として、フェーズフィールド法を用い、オイラー型メッシュで数値計算可能な形状最適化法を提案し、簡単な数値例により提案する方法の妥当性を検証した。即ち、最初に、最適化の対象とする領域をフェーズフィールド関数により表現した。次に、感度解析の結果に基づき極小値が決定される二重井戸型ポテンシャルを定式化し、仮想的な時間発展とともに設計変数が目標関数を減少させる方向に変化する発展方程式を構築した。さらに、最適化問題として、剛性最大化問題とコンプライアントメカニズム創生問題、固有振動数最大化問題を考え、それぞれについて目標関数を定式化した。また、それぞれの目標関数の、フェーズフィールド関数に対する感度を導出した。以上の定式化に基づき、有限体積法を用いた最適化アルゴリズムを構築した。最後に、簡単な数値例により、本研究で提唱する方法論の検証を行った。剛性最大化問題とコンプライアントメカニズム創生問題、固有振動数最大化問題のいずれにおいても妥当な解が得られ、本手法の妥当性が確認できた。

第三章では、トポロジー最適化の応用研究として、単軸荷重変換器及び多軸荷重変換器の最適設計法を構築した。最初に連続的材料分布の節点補間によるトポロジー最適化手法に基づき、構造最適化手法を構築した。そして、単軸荷重変換器の起歪構造に要求される二つの性能である、荷重負荷時のホイートストーンブリッジの出力電圧変化と荷重に抗することができる剛性について定式化を行った。また、多軸荷重変換器の起歪構造に要求される二つの性能である、荷重作用時の変換器構造の荷重検出感度及び、荷重成分検出の精度に影響する特異値を用いた評価法と荷重に抗する剛性について定式化を行った。さらに、目標関数の設計変数に関する感度を導出し、さらに、この感度に基づき、逐次線形計画法を用いた最適化アルゴリズムを構築した。最後に、簡単な数値例により、本研究で提唱する方法論の検証を行った。即ち、単軸荷重変換器構造の最適化に関しては、単一の荷重に対して、ひずみゲージの枚数と重み係数を変更し最適化を行うことで、それらの最適解に与える影響について明確化した。また、互いに直交する複数の荷重に対して同時に最適化を行うことにより、それらを単一の荷重として作用させた場合に比べ、それぞれの荷重に対して高感度な起歪構造が得られることがわかった。また、多軸荷重変換器構造の最適化においても、本手法により物理的に意味のある最適解が得られ、最適化により、荷重検出感度及び、荷重成分検出の精度に関して優れた解が得られることがわかった。

第四章では、構造最適化法を用いた設計支援の基礎研究として、構造最適化の構想設計支援に対する有効性について述べ、それを実現するために、機械製品開発における構想設計段階での設計支援を目的とした、フレーム要素とパネル要素を用いた構造最適化手法を提案した。最初に、フレーム要素とパネル要素の定式化を行った。フレーム要素の断面形状は断面主軸方向を設計変数として考慮可能で、かつ断面の寸法の比を設計変数とすることで断面の形状の変化を考慮可能な、最も単純な形状である楕円とした。パネル要素に関しては、異なる性質のパネル要素によって得られた最適構造を比較することにより、構造の力学的メカニズムを明確化できると考え、真応力とせん断応力を支持できる通常のパネルと、せん断応力のみを支持するせん断パネルの二種類のパネルを定義した。そして、構想設計段階における基本的な問題である剛性最大化問題と固有振動数

最大化問題について、目標関数の定式化を行うとともに、フレーム要素の正規化された断面積、断面主軸方向を示す角度、断面の長軸と短軸の長さの比、パネル要素の板厚を設定した最適化問題を定式化した。さらに、フレーム要素の断面主軸方向を示す角度と断面の長軸と短軸との長さ比の更新方法として、KKT 条件と補ひずみエネルギーに基づく新しい方法を開発した。さらに、この方法と逐次凸関数近似法とを用いた最適化アルゴリズムを構築した。最後に、この方法を用いることで、設計対象の構造の力学的検討が可能なることを、以下の数値例により示した。即ち、真応力とせん断応力を支持できる通常のパネルと、せん断応力のみを支持するせん断パネルから得られる最適構造を比較することにより、構造の力学的メカニズムを明確化できることを、簡単な数値例を用いて検証した。さらに、フレーム要素とパネル要素を同時に設計要素として最適化することにより、体積制約の相違と最適解の関係、並びに設計要素の機能と最適解の関係を明確化した。平均コンプライアンスとフレーム要素の慣性主軸方向の関係を検討し、本手法で得られた最適な主軸方向が、力学的に妥当であることを検証した。フレーム要素のみを用いた構造と、フレーム要素とパネル要素を組み合わせた構造の最適解とを比較することによって、最適構造の相違とフレーム要素の断面主軸方向との関係を明確化した。また、自動車ボデーの T 字型接合部を模した設計モデルにより、実際の機械設計を想定した問題においても、最適な補強形状が得られることが確認できた。

第五章では、第四章で提案した離散構造要素を用いた構造最適化法の応用研究として、特定の周波数帯の弾性波を透過させないバンドギャップ構造の創生を目的とした、構造最適化法を提案した。最初に、進行波問題を扱う際に必要な、仮想的な吸収境界である PML 境界条件を設定し、弾性波における進行波問題を定式化した。さらに、複数の周波数におけるバンドギャップ効果を持つ構造の創生を目標として、目標関数の定式化を行った。すなわち、バンドギャップ構造内では弾性波の振幅が空間的に減衰するという性質から、設計領域全体における振幅を考慮した、新しい目標関数を提案し、さらに、重み付き総和法を用いた多目的問題の目標関数を提案した。また、最適化に用いる離散構造要素として、フレーム要素とパネル要素を定式化し、設計変数の更新に逐次凸関数近似法を用いた最適化アルゴリズムを構築した。最後に、簡単な数値例により、本研究で提唱する方法論の検証を行った。即ち、フレーム要素とパネル要素で構成される板状の構造において、バンドギャップ効果を有する周期構造が得られた。また、フレーム要素を用いたバンドギャップ構造において、設計領域の全長とバンドギャップ効果の関係を検討した。さらに、複数の周波数を目標関数に含め、最適化を行うことにより、それらの周波数を持つ弾性波を遮断することが可能な構造が得られることがわかった。

参考文献

- [1] G. Allaire. *Shape Optimization by the Homogenization Method*. Springer, 2001.
- [2] G. Allaire. *Conception Optimale De Structures*. Springer-Verlag, 2007.
- [3] G. Allaire. *Numerical Analysis and Optimization: An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*. Oxford University Press, 2007.
- [4] G. Allaire, F. de Gournay, F. Jouve, and A. Toader. Structural optimization using topological and shape sensitivity via a level set method. *Contr. Cybern.*, Vol. 34, No. 1, pp. 59–80, 2005.
- [5] G. Allaire, F. Jouve, and A. M. Toader. A level-set method for shape optimization. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, Vol. 334, No. 12, pp. 1125–1130, 2002.
- [6] G. Allaire, F. Jouve, and A.M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *J. Comput. Phys.*, Vol. 194, No. 1, pp. 363–393, 2004.
- [7] S. M. Allen and J. W. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta Metallurgica*, Vol. 27, pp. 1085–1095, 1979.
- [8] L. Ambrosio and G. Buttazzo. An optimal design problem with perimeter penalization. *Calc. Var.*, Vol. 1, pp. 55–69, 1993.
- [9] G. Barles, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 31, pp. 439–469, 1993.
- [10] E. Bayo and J. R. Stubbe. Six-axis force sensor evaluation and a new type of optimal frame truss design for robotic applications. *J. Robot. Syst.*, Vol. 6, No. 2, pp. 191–208, 1989.
- [11] M. P. Bendsøe. Optimal shape design as a material distribution problem. *Struct. Optim.*, Vol. 1, No. 4, pp. 193–202, 1989.
- [12] M. P. Bendsøe, A. Ben-Tal, and J. Zowe. Optimization methods for truss geometry and topology design. *Struct. Optim.*, Vol. 7, No. 3, pp. 141–159, 1994.
- [13] M. P. Bendsøe and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 71, No. 2, pp. 197–224, 1988.
- [14] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. Material interpolation schemes in topology optimization. *Arch. Appl. Mech.*, Vol. 69, No. 9, pp. 635–654, 1999.
- [15] M. P. Bendsøe and O. Sigmund. *Topology Optimization: Theory, Methods, and Applications*. Springer, 2003.
- [16] J. P. Berenger. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Comput. Phys.*, Vol. 114, No. 2, pp. 185–200, 1994.
- [17] W. J. Boettinger, J. A. Warren, C. Beckermann, and A. Karma. Phase-field simulation of solidification. *Annu. Rev. Mater. Res.*, Vol. 32, pp. 163–94, 2002.
- [18] B. Bourdin and A. Chambolle. Design-dependent loads in topology optimization. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, Vol. 9, pp. 19–48, 2003.
- [19] A. Braides. *Gamma-convergence for beginners*. 2002.
- [20] L. Brillouin. *Wave Propagation in Periodic Structures*. Dover Publications, 1958.
- [21] M. Burfer and S.J. Osher. A survey on level set methods for inverse problems and optimal design.

- Eur. J. Appl. Math.*, Vol. 16, No. 2, pp. 263–301, 2005.
- [22] M. Burger. A framework for the construction of level set methods for shape optimization and reconstruction. *Interf. Free Boundaries*, Vol. 5, No. 3, pp. 301–330, 2003.
- [23] M. Burger and R. Stainko. Phase-field relaxation of topology optimization with local stress constraints. *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 45, No. 4, pp. 1447–1466, 2006.
- [24] G. Caginalp. An analysis of a phase field model of a free boundary. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, Vol. 92, No. 3, pp. 205–245, 1986.
- [25] J. W. Cahn and J. E. Hilliard. Free energy of a nonuniform system. i. interfacial free energy. *J. Chem. Phys.*, Vol. 28, pp. 258–267, 1958.
- [26] L. Q. Chen. Phase-field models for microstructure evolution. *Annu. Rev. Mater. Res.*, Vol. 32, pp. 113–140, 2002.
- [27] G. Cheng and N. Olhoff. An investigation concerning optimal design of solid elastic plates. *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 16, pp. 305–323, 1981.
- [28] H. C. Cheng, N. Kikuchi, and Z. D. Ma. An improved approach for determining the optimal orientation of orthotropic material. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 8, No. 2, pp. 101–112, 1994.
- [29] J. B. Collins and H. Levine. Diffuse interface model of diffusion-limited crystal growth. *Phys. Rev. B*, Vol. 31, No. 9, pp. 6119–6122, 1985.
- [30] E. De Giorgi and S. Spagnolo. Sulla convergenza degli integrali dell’energia per operatori ellittiche del secondo ordine. *Boll. Un. Mat. It.*, Vol. 8, pp. 391–411, 1973.
- [31] A. R. Diaz and M. P. Bendsøe. Shape optimization of structures for multiple loading conditions using a homogenization method. *Struct. Optim.*, Vol. 4, No. 1, pp. 17–22, 1992.
- [32] A. R. Diaz, A. G. Haddow, and L. Ma. Design of band-gap grid structures. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 29, No. 6, pp. 418–431, 2005.
- [33] W. S. Dorn, R. E. Gomory, and H. J. Greenberg. Automatic design of optimal structures. *Journal de Mecanique*, Vol. 3, No. 6, p. 2552, 1964.
- [34] H. A. Eschenauer, V. V. Kobelev, and A. Schumacher. Bubble method for topology and shape optimization of structures. *Struct. Optim.*, Vol. 8, No. 1, pp. 42–51, 1994.
- [35] P. Fife. *Dynamics of Internal Layers and Diffusive Interfaces*. Soc for Industrial & Applied Math, 1988.
- [36] C. Fleury and V. Braibant. Structural optimization: A new dual method using mixed variables. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 23, pp. 409–428, 1986.
- [37] H. Fredricson, T. Johansen, A. Klarbring, and J. Petersson. Topology optimization of frame structures with flexible joints. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 25, No. 3, pp. 199–214, 2003.
- [38] M. J. French. *Conceptual Design for Engineers*. Springer, 1999.
- [39] S. Garreau, P. Guillaume, and M. Masmoudi. The topological asymptotic for pde systems: The elasticity case. *SIAM J. Contr. Optim.*, Vol. 39, No. 6, pp. 1756–1778, 2001.
- [40] L. Gibiansky and A. Cherkaev. Design of composite plates of extremal rigidity. *Ioffe Physicotechnical Institute preprint, in russian*, 1987.
- [41] G.H. Golub and C.F. Van Loan. *Matrix Computations (3rd Edition)*. The Johns Hopkins University

- Press, 1996.
- [42] J. Goodman, R. V. Kohn, and L. Reyna. Numerical study of a relaxed variational problem from optimal design. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 57, No. 1, pp. 107–127, 1986.
 - [43] R. B. Haber, C. S. Jog, and M. P. Bendsøe. A new approach to variable-topology shape design using a constraint on perimeter. *Struct. Optim.*, Vol. 11, No. 1, pp. 1–12, 1996.
 - [44] J. Hadamard. Mémoire sur le problème d’analyse relatif à l’équilibre des plaques élastiques encastrées. 1908.
 - [45] P. Hajela and E. Lee. Genetic algorithms in truss topological optimization. *Int. J. Solid. Struct.*, Vol. 32, No. 22, pp. 3341–3357, 1995.
 - [46] S. Halkjær, O. Sigmund, and J. S. Jensen. Maximizing band gaps in plate structures. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 32, No. 4, pp. 263–275, 2006.
 - [47] Z. Hashin and S. Shtrikman. A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 11, No. 2, pp. 127–140, 1963.
 - [48] J. Haslinger and R. A. E. Mäkinen. Introduction to shape optimization: Theory, approximation, and computation. 2003.
 - [49] E. J. Haug, K. K. Choi, and V. Komkov. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*. Academic Press, Orlando, FL, 1986.
 - [50] W. S. Hemp. *Optimum structures*. Clarendon Press, 1973.
 - [51] J. S. Jensen. Phononic band gaps and vibrations in one- and two-dimensional mass–spring structures. *J. Sound. Vib.*, Vol. 266, No. 5, pp. 1053–1078, 2003.
 - [52] J. S. Jensen and N. L. Pedersen. On maximal eigenfrequency separation in two-material structures: the 1d and 2d scalar cases. *J. Sound. Vib.*, Vol. 289, No. 4-5, pp. 967–986, 2006.
 - [53] J. A. Kim, E. W. Bae, S. H. Kim, and Y. K. Kwak. Design methods for six-degree-of-freedom displacement measurement systems using cooperative targets. *Precis. Eng.*, Vol. 26, pp. 99–104, 2002.
 - [54] U. Kirsch. *Optimum Structural Design*. McGraw-Hill Education, 1981.
 - [55] U. Kirsch. Optimal topologies of structures. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 42, No. 8, pp. 223–239, 1989.
 - [56] R. Kohn and G. Strang. Optimal design and relaxation of variational problems i, ii, iii. *Comm. Pure Appl. Math.*, Vol. 39, pp. 113–137, 139–182, 353–377, 1986.
 - [57] M. S. Kushwaha, P. Halevi, L. Dobrzynski, and B. Djafari-Rouhani. Acoustic band structure of periodic elastic composites. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 71, No. 13, pp. 2022–2025, 1993.
 - [58] N. Lavrov, K. Lurie, and A. Cherkaev. Non-uniform rod of extremal torsional stiffness. *Mech. Solids.*, Vol. 15, No. 5, pp. 74–80, 1980.
 - [59] J. L. Lions. *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1971.
 - [60] S. A. Liu and H. L. Tzo. A novel six-component force sensor of good measurement isotropy and sensitivities. *Sensor. Actuator. Phys.*, Vol. 100, No. 2-3, pp. 223–230, 2002.
 - [61] J. H. Luo and H. C. Gea. Optimal orientation of orthotropic materials using an energy based method. *Struct. Optim.*, Vol. 15, No. 3, pp. 230–236, 1998.
 - [62] J. H. Luo and H. C. Gea. A systematic topology optimization approach for optimal stiffener design.

- Struct. Optim.*, Vol. 16, No. 4, pp. 280–288, 1998.
- [63] K. Lurie and A. Cherkaev. The effective characteristics of composite materials and optimal design of construction. *Uspekhi Mekhaniki*, Vol. 9, No. 2, pp. 3–81, 1986.
- [64] K. Lurie, A. Cherkaev, and A. Fedorov. Regularization of optimal design problems for bars and plates, part 1 and part 2. *J. Optim. Theor. Appl.*, Vol. 37, No. 4, pp. 499–522, 523–543, 1982.
- [65] Z. D. Ma, N. Kikuchi, and H. C. Cheng. Topological design for vibrating structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 121, No. 1-4, pp. 259–280, 1995.
- [66] G. B. Macfadden. Phase-field models of solidification. *Contemp. Math.*, Vol. 306, pp. 107–145, 2002.
- [67] Y. Maeda, S. Nishiwaki, K. Izui, M. Yoshimura, K. Matsui, and K. Terada. Structural topology optimization of vibrating structures with specified eigenfrequencies and eigenmode shapes. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 67, pp. 597–628, 2006.
- [68] P. G. Martinsson and A. B. Movchan. Vibrations of lattice structures and phononic band gaps. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol. 56, No. 1, pp. 45–64, 2003.
- [69] K. Matsui and K. Terada. Continuous approximation of material distribution for topology optimization. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 59, pp. 1925–1944, 2004.
- [70] A. G. M. Michell. The limits of economy of material in frame structures. *Phil. Mag.*, Vol. 8, No. 47, pp. 589–597, 1904.
- [71] T. Miyashita. Sonic crystals and sonic wave-guides. *Meas. Sci. Technol.*, Vol. 16, pp. 47–63, 2005.
- [72] L. Modica. The gradient theory of phase transitions and the minimal interface criterion. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, Vol. 98, No. 2, pp. 123–142, 1987.
- [73] F. Murat. Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients. *Annali. Mat. Pura. Appl.*, Vol. 112, pp. 49–68, 1977.
- [74] F. Murat and J. Simon. Etude de problèmes d’optimum design. *Lect. Notes Comput. Sci.*, Vol. 41, pp. 54–62, 1976.
- [75] F. Murat and L. Tartar. H-convergence. *Séminaire d’Analyse Fonctionnelle et Numérique de l’Université d’Alger, mimeographed notes*, 1978.
- [76] F. Murat and L. Tartar. Calcul des variations et homogénéisation. *Les Méthodes de l’Homogénéisation: Théorie et Applications en Physique, Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF*, Vol. 57, pp. 319–370, 1985.
- [77] H. Nishigaki, S. Nishiwaki, T. Amago, Y. Kojima, and N. Kikuchi. First order analysis-new cae tools for automotive body designers. *SAE paper*, No. 2001-01-0768, pp. 1–11, 2001.
- [78] S. Nishiwaki, M.I. Frecker, S. Min, and N. Kikuchi. Topology optimization of compliant mechanisms using the homogenization method. *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol. 42, pp. 535–559, 1998.
- [79] S. Osher and J. A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys*, Vol. 79, pp. 12–49, 1988.
- [80] S. Parmley, T. Zobrist, T. Clough, A. Perez-Miller, M. Makela, and R. Yu. Phononic band structure in a mass chain. *Appl. Phys. Lett.*, Vol. 67, p. 777, 1995.
- [81] N. L. Pedersen. Maximization of eigenvalues using topology optimization. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, Vol. 20, No. 1, pp. 2–11, 2000.

- [82] P. Pedersen. On optimal orientation of orthotropic materials. *Struct. Optim.*, Vol. 1, No. 2, pp. 101–106, 1989.
- [83] P. Pedersen. Bounds on elastic energy in solids of orthotropic materials. *Struct. Optim.*, Vol. 2, No. 1, pp. 55–63, 1990.
- [84] P. Pedersen. Some convergence results in perimeter-controlled topology optimization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 171, pp. 123–140, 1999.
- [85] O. Pironneau. *Optimal Shape Design for Elliptic Systems*. Springer, 1984.
- [86] W. Prager. A note on discretized michell structures. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 3, pp. 349–355, 1974.
- [87] W. Prager. Optimal layout of cantilever trusses. *J. Optim. Theor. Appl.*, Vol. 23, No. 1, pp. 111–117, 1977.
- [88] W. Prager. Nearly optimal design of trusses. *Comput. Struct.*, Vol. 8, pp. 451–454, 1978.
- [89] W. Prager and G. I. N. Rozvany. Optimal layout of grillages. *Mech. Base. Des. Struct. Mach.*, Vol. 5, No. 1, pp. 1–18, 1977.
- [90] M. P. Rossow and J. E. Taylor. A finite element method for the optimal design of variable thickness sheets. *AIAA Journal*, Vol. 11, pp. 1566–1568, 1973.
- [91] G. I. N. Rozvany. Optimal force transmission by flexure-clamped boundaries. *Mech. Base. Des. Struct. Mach.*, Vol. 2, No. 1, pp. 57–82, 1973.
- [92] G. I. N. Rozvany. *Optimal design of flexural systems*. Pergamon Press New York, 1976.
- [93] G. I. N. Rozvany. *Structural design via optimality criteria*. Kluwer Academic Publishers, 1989.
- [94] G. I. N. Rozvany, M. P. Bendsoe, and U. Kirsch. Layout optimization of structures. *Appl. Mech. Rev.*, Vol. 48, No. 2, pp. 41–119, 1995.
- [95] J. Rubinstein, P. Sternberg, and J. B. Keller. Fast reaction, slow diffusion, and curve shortening. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 49, pp. 116–133, 1989.
- [96] W. M. Rubio, E. C. N. Silva, and S. Nishiwaki. Piezoresistive sensor design using topology optimization. *Struct. Multidisciplinary Optim.*, in press.
- [97] M. M. Sigalas and E. N. Economou. Elastic and acoustic wave band structure. *J. Sound. Vib.*, Vol. 158, No. 2, 1992.
- [98] O. Sigmund and J. S. Jensen. Systematic design of phononic band-gap materials and structures by topology optimization. *Phil. Trans. Math. Phys. Eng. Sci.*, Vol. 361, No. 1806, pp. 1001–1019, 2003.
- [99] E. C. N. Silva, S. Nishiwaki, and N. Kikuchi. Topology optimization design of flextensional actuators. *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectrics. Freq. Contr.*, Vol. 47, No. 3, pp. 657–671, 2000.
- [100] J. Simon. Differentiation with respect to the domain in boundary value problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, Vol. 2, No. 7-8, pp. 649–687, 1980.
- [101] J. Sokolowski and A. Zochowski. On topological derivative in shape optimization. *SIAM J. Control. Optim.*, Vol. 37, No. 4, pp. 1251–1272, 1999.
- [102] J. Sokolowski and J. P. Zolesio. *Introduction to Shape Optimization: Shape Sensitivity Analysis*. Springer, 1992.
- [103] S. Spagnolo. Sulla convergenza di soluzioni di equazione paraboliche ed ellittiche. *Ann. Sc. Norm.*

- Sup. Pisa 22*, Vol. 22, pp. 577–597, 1968.
- [104] K. Suzuki and N. Kikuchi. A homogenization method for shape and topology optimization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 93, No. 3, pp. 291–318, 1991.
- [105] A. Takezawa, S. Nishiwaki, K. Izui, and M. Yoshimura. Structural optimization using function-oriented elements to support conceptual designs. *J. Mech. Des.*, Vol. 128, pp. 689–700, 2006.
- [106] L. Tartar. Estimation de coefficients homogénéisés. *Computing methods in applied sciences and engineering (Proc. Third Internat. Sympos., Versailles, 1977)*, I, Vol. 704, pp. 364–373, 1979.
- [107] L. Tartar. *Remarks on optimal design problems, in Calculus of variations; homogenization and continuum mechanics, Series on Adv. in Math. for Appl. Sci, 18*. World Scientific, 1994.
- [108] D. Tcherniak. Topology optimization of resonating structures using simp method. *Int. J. Numer. Methods. Eng.*, Vol. 54, No. 11, pp. 1605–1622, 2002.
- [109] B. H. V. Topping, A. I. Khan, and J. P. De Barros Leite. Topological design of truss structures using simulated annealing. *Struct. Eng. Rev.*, Vol. 8, No. 2-3, pp. 301–314, 1996.
- [110] Y. H. R. Tsai and S. Osher. Total variation and level set methods in image science. *Acta Numerica*, Vol. 14, pp. 509–573, 2005.
- [111] M. Uchiyama, E. Bayo, and E. Palma-Villalon. A systematic design procedure to minimize a performance index for robot force sensors. *J. Dyn. Syst. Meas. Contr.*, Vol. 113, p. 388, 1991.
- [112] M. Uchiyama, Y. Nakamura, and K. Hakomori. Evaluation of the robot force sensor structure using singular value decomposition. *Adv. Robot.*, Vol. 5, No. 1, pp. 39–52, 1991.
- [113] M. Y. Wang, X. Wang, and D. Guo. A level set method for structural topology optimization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 192, No. 1-2, pp. 227–246, 2003.
- [114] M. Y. Wang and S. Zhou. Phase field: A variational method for structural topology optimization. *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 6, No. 6, pp. 547–566, 2004.
- [115] M. Y. Wang and S. Zhou. Synthesis of shape and topology of multi-material structures with a phase-field method. *J. Comput. Aided. Mater. Des.*, Vol. 11, No. 2, pp. 117–138, 2004.
- [116] W. Weiblen and T. Hofmann. Evaluation of different designs of wheel force transducers. *SAE paper*, No. 980262, pp. 1–10, 1998.
- [117] M. Zhou and G. I. N. Rozvany. The coc algorithm. ii: Topological, geometrical and generalized shape optimization. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 89, No. 1-3, pp. 309–336, 1991.
- [118] S. Zhou and M.Y. Wang. Multimaterial structural topology optimization with a generalized cahn–hilliard model of multiphase transition. *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 33, No. 2, pp. 89–111, 2007.
- [119] S. Zhou, M.Y. Wang, and C. Source. 3d multi-material structural topology optimization with the generalized cahn-hilliard equations. *Comput. Model. Eng. Sci.*, Vol. 16, No. 2, pp. 83–102, 2006.
- [120] 中村仁彦, 吉川恒夫, 二股一郎. 力覚センサの弾性要素の設計指針と信号処理. 計測自動制御学会論文集, Vol. 23, No. 5, pp. 433–439, 1987.
- [121] 藤井大地, 植月徳仁, 鈴木克幸, 大坪英臣. ボクセル有限要素法と pml 境界を用いた超音波波動伝播解析. 日本計算工学会論文集, Vol. 3, pp. 137–144, 2001.
- [122] 関口美奈子, 菊地昇. 混合法的な有限要素剛性マトリックスの導き方に関する一考察-clough1960年の論文を中心にして. 計算工学講演会論文集, Vol. 4, No. 1, pp. 131–134, 1999.

- [123] 迫田和彰. フォトニック結晶入門. 森北出版, 2004.
- [124] 西脇眞二, 西垣英一, 鶴見康昭, 小島芳生, 菊池昇. はり要素を用いたトポロジー最適化: 第1報 静的な剛性の最大化の場合. 日本機械学会論文集 C 編, Vol. 67, No. 662, pp. 3069–3077, 2001.

7 出版物

関連学術論文

1. 竹澤晃弘, 西脇眞二, 北村充, Silva, E. C. N., 特異値分解に基づく多軸荷重変換器構造のトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 C 編, **74-746**, (2008), 2462-2470.
2. 竹澤晃弘, 西脇眞二, 北村充, トポロジー最適化法を用いたひずみゲージ式変換器構造の最適化, 日本機械学会論文集 A 編, **74-746**, (2008), 1459-1468.
3. 竹澤晃弘, 西脇眞二, 北村充, 離散構造要素を用いたバンドギャップ構造の最適化, 日本機械学会論文集 C 編, **74-740**, (2008), 780-788.
4. Takezawa, A., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., Structural optimization based on topology optimization techniques using frame elements considering cross-sectional properties, Structural and Multi-disciplinary Optimization, **34**(1), (2007), 41-60.
5. Takezawa, A., Nishiwaki, S., Izui, K., Yoshimura, M., Structural Optimization Using Function-Oriented Elements to Support Conceptual Designs, ASME Journal of Mechanical Design, **128**, (2006), 689-700.
6. Takezawa, A., Nishiwaki, S., Izui, K., et. al., Concurrent design and evaluation based on structural optimization using structural and function-oriented elements at the conceptual design phase, Concurrent Engineering: Research and Applications, **13**(1), (2005), 29-42.
7. 竹澤晃弘, 齊藤真大, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, フレーム要素を用いたトポロジー最適化 (固有振動数最大化を目的とした場合), 日本機械学会論文集 C 編, **71-710**, (2005), 3018-3025.
8. 竹澤晃弘, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 離散構造要素を用いたトポロジー最適化 (フレーム要素の断面主軸方向を設計変数として考慮した場合), 日本機械学会論文集 C 編, **71-706**, (2005), 172-179.
9. 竹澤晃弘, 西脇眞二, 泉井一浩, 吉村允孝, 西垣英一, 鶴見康昭, 離散化構造要素を用いたトポロジー最適化, 日本機械学会論文集 C 編, **70-692**, (2004), 1008-1015.

その他の学術論文

1. Hamada, K., Takezawa, A., Kitamura, M., Kanaikari, K., A Multi-step Design Optimization Method for Mid-ship Section, Ship Technology Research, (in press).
2. Karottu K.V., Hamada, K., Takezawa, A., Kitamura, M., Optimization of Block Division Using Nodal Cut Set Method, Ship Technology Research, (in press).
3. 北村充, 上寺哲也, 濱田邦裕, 竹澤晃弘, 部材認識機能を利用した船体構造の形状最適化システムに関する研究 - 船体構造二重底部の形状最適化 -, 日本船舶海洋工学会論文集, 印刷中.
4. 北村充, 濱田邦裕, 竹澤晃弘, 高木貴弘, 金谷勲平, 大槻康明, 独立要素分割と多点拘束を利用した船体構造二重底部の形状および寸法最適設計に関する研究, 日本船舶海洋工学会論文集, **7**, (2008), 89-96.

謝辞

本研究を遂行するにあたり、構造最適化という研究分野と出会う切っ掛けを頂き、かつ懇切丁寧にご指導頂きました京都大学大学院工学研究科の吉村允孝先生に深甚なる感謝の意を表します。また、終始に渡り、懇切丁寧にご指導、有益な御教示、ご支援、叱咤激励を頂き、更には研究の道へ進む切っ掛けを与えて下さりました、同学西脇眞二先生に、深甚なる感謝の意を表します。そして、広島大学大学院工学研究科の北村充先生には、現在の職及び本論文を執筆する機会を頂くと共に、大学教育・研究に関しまして、様々な御教示を頂きました。ここに深甚なる感謝の意を表します。また、本研究を様々な形でご支援頂きました同学濱田邦裕先生に深甚なる感謝の意を表します。

そして、大阪府立大学大学院工学研究科の小木曾望先生、東北大学大学院工学研究科の寺田賢二郎先生、横浜国立大学大学院環境情報学府の松井和己先生、株式会社豊田中央研究所の西垣英一博士、同社鶴見康昭様には本研究に関しまして大変有益なご助言を頂きました。ここに深甚なる感謝の意を表します。また、広島大学大学院工学研究科の岡澤重信先生、同学田中智行先生には構造解析に関しまして、多くの有益なディスカッションをする機会を頂きました。ここに深甚なる感謝の意を表します。

また、京都大学大学院在籍時より現在に至るまで、公私にわたり様々な相談に乗って頂きました、京都大学大学院工学研究科の泉井一浩先生に、深甚なる感謝の意を表します。さらに、京都大学大学院在籍時に研究室での時間を非常に楽しいものにして頂きました、豊田工業大学の小林正和先生を始めとする、京都大学大学院工学研究科精密工学専攻知識情報システム研究室(当時)の先輩、同級生、後輩の皆様へ感謝の意を表します。さらに、私の未熟な指導にも目を瞑り、熱心に研究に取り組んで下さる、広島大学大学院工学研究科社会環境システム専攻設計・生産システム研究室の学生の皆様へ感謝の意を表します。

また、本研究の遂行に際しまして以下の助成を受けました。関係者の皆様へ感謝の意を表します。

- バンドギャップ効果を利用した自動車用制振構造の最適設計法に関する研究、平成 20 年度科学研究助成、財団法人スズキ財団。
- 知能ロボット用力覚センサの構造最適化手法に関する研究、平成 20 年度研究助成金、財団法人日揮・実吉奨学会。

最後に、祖父母、両親、家族に感謝致します。