【 48 】

氏　　名	**柏原正樹**（かしわら まさき）
学位の種類	理学博士
学位記番号	論理博第467号
学位授与の日付	昭和49年5月23日
学位授与の要件	学位規則第5条第2項該当
学位論文題目	**On the maximally overdetermined system of linear differential equations** （線型偏微分方程式の極大過剰決定系について）
論文調査委員	（主査）教授 佐藤幹夫　教授 溝畑　茂　教授 松浦重武

論文内容の要旨

本論文は，線型偏微分方程式の理論において重要な意義をもつ所の，極大過剰決定系に関する一般理論の建設を目標とする一連の仕事の一環をなすものであって，任意の極大過剰決定系について，その解空間の次元が有限であるという基本的な事実を，はじめてかつ全く一般的に確立した劃期的なものであり，その内容はおよそ次の通りである。

例えば Newton ポテンシャルや湯川ポテンシャルは，それぞれ Laplace 方程式 $\Delta u=0$ や Helmholtz 方程式 $(\Delta+k^2)u=0$ の他に，回転対称性に対応する3個の方程式 $\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)u=0$，etc. を満たしており，逆にそのことにより然るべき意味で特徴づけられる。同様に，もっと一般の微分方程式に対しても，その Green 函数や Riemann 函数と呼ばれるものは連立した充分多くの微分方程式系を満たすことで特徴づけられる。また，Appell の超幾何函数などの多変数の特殊函数についても事情は同様である。これらの場合に現れる連立微分方程式系は，もはやそれ以上に独立な方程式を付加する時は compatible でなくなる（即ち0以外の解が許されなくなる）という性質をもつ。大雑把に言って，このような方程式系を極大過剰決定系というのであり，それがとくに Riemann 函数などを通じて一般の線型微分方程式の代数解析的研究に対して重要な基本的手段を与えるのである。

極大過剰決定系の正確な定義は，微分方程式系の特性多様体という古典的な幾何学的概念を用いてなされる。特性多様体は，考えている多様体（その次元 n は即ち独立変数の個数）の余接バンドル内の包合的な部分多様体であって，その余次元 r は即ち独立な方程式の個数を意味し，従って又この方程式系の一般解が $n-r$ 変数の任意函数に依存することを意味する。r の値は高々 n であるが，これがきっかり n であるとき，その微分方程式系が極大過剰決定系と定義される。

特性多様体はもちろん部分多様体として如何様にでも複雑な特異点を有し得るが，本論文では，多様体の stratification の手法を援用して明晰な分析を遂行し，どのような場合にも例外なく有限次元性の成立することを証明したのである。

微分方程式及びその解の概念自体も正確には代数解析的に次のように定義される。即ちn次元複素解析的多様体X上で，正則函数を係数とする微分作用素のつくる環の層を$\mathscr{D}$とせよ。このとき，X上の線型微分方程式系とは$\mathscr{D}$上の連接的層のことであり，その（正則函数による）解とは，その連接層から正則函数の層Oへの$\mathscr{D}$準同型のことであると定義される。従って解の総体は$Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$即ちまた$Ext_{\mathbf{D}}^{0}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$と表わせる。又これと同時に方程式の解の障害を表わす$Ext_{\mathbf{D}}^{1}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$，$Ext_{\mathbf{D}}^{2}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$，……，即ち'高次の解空間'も自然的に導入される。考える多様体Xの一般点（generic point）では，1次独立な解の個数，即ち解空間$Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$の次元は有限であり，更に高次の解空間はすべて0次元である。しかしながら，極大過剰決定系$\mathcal{M}$の特異点における（0次および高次の）解のふるまいは複雑であること当然である。その場合の研究が即ち本論文の主題であって，その主要結果は，これら（0次および高次の）解空間が，その特異点においても有限次元にとどまる事実の証明である。

更に精密な結果は次の通りである。

X上の極大過剰決定系$\mathcal{M}$に対して，X上のWhitney stratification で，各 stratum の余法バンドルの合併が$\mathcal{M}$の特性多様体を含むようなものが存在する。そのようなXの stratification に対して，$Ext_{\mathbf{D}}^{j}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$は，各 stratum で局所自明的であり，その芽は有限次元である。

上の定理を用いれば，正則函数の層Oを，実解析函数，Hyperfunction，Microfunction の層におきかえても，同様の有限性定理をみちびくことが出来る。

更に興味深い結果として，X上の極大過剰決定系はその解によって決定されることが知られる。即ち，$\mathcal{M}$は，$F^{\cdot}=R\,Hom_{\mathbf{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})$によって，逆に，$\mathcal{M}=R\,Hom_{\mathbf{C}}(F^{\cdot}, \mathcal{O})$とあらわされる。

又，Xの各点xにおける$\mathcal{M}$の指数 $\sum(-1)^{j} dim\, Ext^{j}_{\mathbf{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_{x}$ を$\mathcal{M}$の特性多様体から算出する重要な公式も発見せられている（参考論文[10]）。その結果は，この指数が各 stratum Y_j の余法バンドル上の一般点における方程式$\mathcal{M}$の重複度 m_j だけによる1次式として $\sum(-1)^{d_j}c_x(Y_j)m_j$ と表わされるという著しい事実を示しており，しかもその表式に現れる係数が方程式$\mathcal{M}$とは直接関係なく，stratum Y_j 自体の点xにぉる芽だけに依存する幾何学的不変量 $Cx\ (Y_j)$ と，Y_j の余次元 d_j による符号 ± 1 とで与えられるというものであり，極めて強力であると共に甚だ示唆に富むものである。

上述の主要定理の証明は，Xを$2n$次元実解析的多様体とみなし，$\mathcal{M}$にX上の Cauchy-Riemann 方程式を付加してX上の楕円型微分方程式となし，それについて河合隆裕氏による楕円型微分方程式系に対する有限性定理を適用することにより，遂行される。

これらの研究は在来の線型微分方程式論の枠をはみ出た radical なものであり，将来の解析学の研究方向に大きな impact を与えずにはおかぬであろう。

申請者のこのような研究方向は既に早く，1969年修士課程（東京大学）入学の前后に始まる。即ち佐藤幹夫の1960年の講演ノートに述べられた考えに刺戟を受け，独創的な考え方によって線型微分方程式の一般理論の基礎づけを実行し，その詳細を修士論文「偏微分方程式系の代数的研究」(数学振興会セミナー報告集（1970），pp. 1-148）において発表している。この中には，代数解析的見地からする線型偏微分方程式の諸概念の構成の詳細とともに，微分作用素の環$\mathscr{D}$の大局的次元が多様体の次元に一致するという基本的定理が確立されたのを初め，一般化された Cauchy-Kowalewski 定理，諸種の構造定理など，多くの

基礎的な結果が体系的に美しく展開されている。このような野心的な研究は，ごく最近に独立にソ連邦の若い俊秀 Bernstein が部分的に再現して見せるまで何人も企てなかったところである。申請主論文もこの修士論文の自然なる延長上に続くものである。また，これに先立ち数学振興会セミナー報告集（1969）pp.3.1-3.29の中で，代数解析学的な理論の記述に頻用される Hartshorne の Derived category の理論を紹介している。

参考論文[2]では，Microfunction 理論の基本的結果から，実半単純リー群のユニタリ表現の指標がその極大コンパクト部分群上へ制限可能であるという事実が容易に導かれる事を指摘している。また，参考論文[9]は，1972年パリにおける国際会議における講演であって，擬微分方程式系の解のコホモロジーの消滅定理について述べたものである。

河合隆裕氏との共著論文のうち[1]は，microfunction に作用すべき擬微分作用素の概念を導入し，その算法を定め，基本的な定理を与えている。また[4]，[7]では超局所的（Microlocal）な立場から境界値問題の本質の深い掘り下げが行なわれている（続刊中）。更に[11]では，双曲型方程式の理論を超局所的に深め，一般化することによってミクロ双曲型擬微分方程式の一般理論を展開している。これは Andersson らの局所双曲型（定数係数）微分作用素の理論をも遙かに超える強力な理論であって，その重要性は今後ますます明らかになるであろう。

佐藤幹夫・河合隆裕両名との共著論文[3]，[5]，[8]は，いずれも Microfunction と擬微分方程式の一般理論，即ち超局所解析学を体系的に展開したものである。即ち，[5]において一般理論を詳しく述べ，その上に立って更に量子化接触変換（Hörmander 氏の Fourier 積分作用素に相当する）を援用して，一般な擬微分方程式の構造を決定している。また[8]では，接触多様体と skew 多様体の理論としてこれらの擬微分方程式をとらえなおし，新しい視点から照明を当てて再構成を行っている。[3]は，[5]，[8]に与えてある構造定理の一つの拡張を証明したものである。

論文審査の結果の要旨

申請論文（主論文1編，参考論文11編）の主題は線型偏微分方程式の一般理論に関する。偏微分方程式の研究は解析学の歴史と共に古く，Lagrange, Charpit, Hamilton, Jacobi, Cauchy, Kowalewski 等の基本的な業績の上に徐々に開拓されて来たのであるが，今世紀中頃 Leray, Gårding らに始まる研究を契機として，線型偏微分方程式の一般理論の体系的研究が急速に進んで来た。そこで用いられた主な方法は今世紀に発達したいわゆる函数解析学的方法であった。即ち，考える問題に応じて函数又は一般化された函数の適当な族，即ち函数空間を設定し，未知函数に関して何等かのアプリオリ評価を導くという方法である。今日なおこのような方法による数多くの研究が続けられている状況である。

申請者の一連の研究はこうした従来の方法とは全く異る方法論に基いている。1966年ころより，小松彦三郎，R.Harvey，G.Bengel らによって Hyperfunction の特有性質（脆弱性）を利用した偏微分方程式の研究が行われ始めたのであるが，1969年に至って申請者と佐藤幹夫の協力によって Microfunction の理論が形成され，これにより線型偏微分方程式に関する新しい強力な解析方法である超局所解析（Microlocal Analysis）の方法が整えられた。これにより一般の線型（擬）微分方程式系の構造論的研究が急速に進み

はじめ，従来の函数解析的方法では及ばなかった多くの重要な結果を体系的に導くことが可能になったのである。申請者はこの理論形成における初期の段階からの中心的存在であって，無数の鋭い観察によってその形成に決定的役割を果たし，天才的な着想によって研究を推進して来た。申請論文12編はこのようにして得られた目覚しい成果である。申請者の研究内容の豊富さを知る者にとっては，その発表するところがむしろ極めて少きに過ぎるという感をさえ抱かしめるのである。

主論文は，修士論文‘線型微分方程式系の代数的研究’に展開された独創的な思想を推し進め，代数解析的立場からする線型偏微分方程式の研究において極大過剰決定系が基本的手段を与えるという方法論的認識に立って，それの一般論を展開し，とくに解の有限次元性を確立したものであり，参考論文[10]に述べられた美しい指数定理とともに，その平明さと，内容の新しさ・重要さによって読む者に深い印象を与える。申請者の天稟を証明するに足るものであろう。申請者の修士論文と類似の目標をもつものとして，漸く最近に Bernstein の研究が現れたが，この点でも申請者のそれはかれに先行するだけでなく，はるかに徹底的であり，また，ここに与えられているような一般的でしかも深い含蓄をもつ結果は前人未到のものである。他の参考論文についても，論文内容要旨に述べた如く，その内容は革新的なもので，今日のみならず将来に亘って重要な意義をもつものである。

申請者の仕事は，ふかい洞察力によって驚くべき簡明な形で本質をとり出して見せる性質のものであり，その論文は内容の深さにも拘らず自然な考え方が流露しており，明晰で渋滞がない。

既にふれたように，申請者は Microfunction 理論の形成に決定的な役割を演じた（例えば，microfunction の層が脆弱層であるという決定的定理は申請者により得られた）ばかりでなく，この理論を整理体系化していちはやくノートの形で発表した（数学の歩み15巻1号（1970年）pp. 9–72，超函数の構造について)。これは現在 Microfunction 理論の標準的テキストとして国外でも読まれている。また，Microlocal な見地から，線型微分方程式の解の特異性が陪特性帯のみによって伝播することを，いちはやく発見したのも，申請者と河合隆裕氏とである。

申請者は日常の談話・討論を通じ，その豊富なアイデアと示唆によって周囲に大きな影響を与えており，未発表の幾多の研究結果のうちのいくつかは研究協力者たちの論文中に反映している。しかし，重要な結果で未発表のものも数多い。これらがなるべく速かに発表されることを学界のために希望しておきたい。

要約するに，この申請論文は申請者らによって建設された新しい方法論の有効性を完全に証明するものである。

申請者は若年に拘らずこれらの斬新かつ卓越した業績により，既に Gårding, Hörmander, Malgrange, Spencer らこの分野の指導的研究者に深甚の影響を与えており，その活動は内外の注目するところである。

よって，本論文は理学博士の学位論文として価値あるものと認める。