数理解析研究所講究録
第 1541 巻 2007 年 166-177


# 無分散可積分系と関数論

お茶の水女子大学・理学部 武部 尚志 (Takashi Takebe)
Department of Mathematics, Ochanomizu University

## §0 Introduction

無分散可積分系とは、KP hierarchy や Toda lattice hierarchy のある種の漸近極限 (Lax 方程式を量子力学の Heisenberg 方程式の類似と見なすならば、古典極限に相当する) として現れる方程式系で、一番低次の方程式はそれぞれ KP 方程式や戸田格子の分散項を 0 にした形をしているので「無分散系」と総称される。(以下、「無分散 KP hierarchy」を dKP hierarchy, 「無分散 Toda hierarchy」を dToda hierarchy と略記する。) dKP 方程式は 1980 年前後に Lebedev, Manin, Zakharov らによって [1] で導入された。分散が無いから「非線形性と分散がつりあって形が崩れずに伝播する」ソリトン解はないが、dKP hierarchy の具体的な解が児玉, Gibbons らによって見出されている [2].

これらの無分散系は 1990 年前後には素粒子の弦模型などに関係して注目された。ある種の弦理論では、その分配関数が KP hierarchy などの可積分系の $\tau$ 関数となり、その種数 0 (tree level) の部分が無分散系になるのである。この無分散系の部分だけが見えることもある。その頃にこの方向の応用を念頭に置きながら、高崎金久氏と共同研究をしたのだが ([3] にまとめてある)、その後 2000 年頃になると全く別の応用が見つかった。

Mineev-Weinstein, Wiegmann, Zabrodin らは [4] で、二次元の流体の界面の動き (正確には、接近して置いた 2 枚のガラス板の間のすき間に水と油を入れた Hele-Shaw cell と呼ばれる装置の中の水と油の境い目の動き) が表面張力 0 の近似で無分散 Toda hierarchy によって表されることを発見した。発端はこのような流体の話なのだが、実は数学としては関数論の Riemann の写像定理の話になる。界面が滑らかな Jordan 閉曲線になっているとすると、その形は harmonic moments と呼ばれるパラメーターでほぼ一意に決まる。そこで、この閉曲線で囲まれた領域の外部を単位円の外部に写す Riemann の写像関数 (normalisation は適当に決める) を harmonic moments の関数と見なすと、それが dToda hierarchy の Lax 方程式を満たすのである。詳しくは [5] やその文献を当って欲しい。

ここで、harmonic moments というのは、閉曲線の内部または外部の領域で $z^k$ のような多項式を $dx\,dy$ という二次元の測度に関して積分したものだから、例えば後で出てくる図 1 の左のような領域 (円板から「ヒゲ」を抜いてある) については、その「ヒゲ」の違いを感知できない。したがって、上の話はこのような slit domain に対しては意味がない。

一方、こうした slit domain の写像関数に対しては Bieberbach 予想に関連して昔から Löwner 方程式と呼ばれる微分方程式が知られていた。実はこの Löwner 方程式から無分

散系の解が作れる、というのがこの講演でお話させて頂いたことである。(講演の時にも述べたが、タイトルの中の「関数論」という言葉はもっと限定的に「単葉関数論」とすべきであったかもしれない。)

## §1 KP hierarchy, Toda lattice hierarchy

無分散系に行く前に、簡単に KP hierarchy や戸田格子 hieachy に関して復習しておこう。詳しくは日本語なら [6], [7], [8] などを参照されたい。

まず、KP hierarchy. これは、無限個の独立変数 $t=(t_1,t_2,t_3,\dots)$ を持つ無限個の未知関数 $u_i(t)$ $(i=2,3,\dots)$ についての偏微分方程式で、次のような擬微分作用素 (micordifferential operator) の方程式として記述するのが簡単である。変数 $t_1$ は $x$ という変数と同一視して $\partial=\partial/\partial x$ とする。Lax 作用素 $L=L(t)$ は、

$$L=\partial+u_2(t)\partial^{-1}+u_3(t)\partial^{-2}+\cdots \tag{1.1}$$

と定義される、謂わば $u_i(t)$ 達の母関数 (母作用素) である。この時間発展は、Lax 方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t_n}=[B_n,L], \qquad n=1,2,\dots \tag{1.2}$$

で定義される。但し、右辺の $B_n$ は微分作用素で、

$$B_n=(L^n)_{\geq 0} \tag{1.3}$$

で定義される。ここで添字の $\geq 0$ は "$\partial$ の非負巾の部分を取り出す" という操作を表す: $P=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n\partial^n \ \to P_{\geq 0}:=\sum_{n\geq 0}a_n\partial^n$.

この KP hierarchy の解が無限次元 Grassmann 多様体でパラメトライズされること、解のある種の母関数である $\tau$ 関数がこの Grassmann 多様体の Plücker 座標であり、Pücker 関係式が広田の双線形方程式であること、$GL(\infty)$ の対称性 ($gl(\infty)$ の無限小対称性) があること、等については上掲の文献を参照されたい。

戸田格子 hieachy は、Lax 作用素を微分作用素ではなく差分作用素にする。今度は離散的な独立変数 $s\in\mathbb{Z}$ と無限個の連続変数 $t=(t_n)_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}$ の未知関数 $\phi,u_n,\bar{u}_n$ に関する方程式で、

$$\frac{\partial L}{\partial t_n}=[B_n,L], \qquad \frac{\partial \tilde{L}}{\partial t_n}=[B_n,\tilde{L}], \tag{1.4}$$

と定義される。ここで、$L$, $\tilde{L}$, $B_n$ は、

$$L=e^{\phi}e^{\partial_s}+u_1+u_2e^{-\partial_s}+u_3e^{-2\partial_s}+\cdots, \tag{1.5}$$

$$\tilde{L}^{-1}=e^{\phi}e^{-\partial_s}+\bar{u}_1+\bar{u}_2e^{\partial_s}+\bar{u}_3e^{2\partial_s}+\cdots, \tag{1.6}$$

$$B_n=\begin{cases}(L^n)_{>0}+\frac{1}{2}(L^n)_0, & (n>0),\\ (\tilde{L}^{-n})_{<0}+\frac{1}{2}(\tilde{L}^{-n})_0, & (n<0).\end{cases} \tag{1.7}$$

という形の $s$ についての差分作用素である ($e^{n\partial_s}f(s)=f(s+n)$)。$B_n$ の定義に現れる $>0$, $0$, $<0$ という添字は、差分作用素を $A=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{n\partial_s}\mapsto A_S=\sum_{n\in S}a_ne^{n\partial_s}$ ($S=\{n\mid n>0\}$, $\{0\}$, $\{n\mid n<0\}$) のように射影することを意味する。解の記述や $\tau$ 関数、対称性などについては [8] に詳しい。

上野と高崎が最初に Toda lattice hierarchy を導入した [9] では無限サイズの行列を使っているが、後で無分散極限を取るにはこのように差分作用素を使う必要がある。

## §2 無分散可積分系

前節で述べた可積分系の無分散極限を取ろう。KP hierarchy の場合と戸田格子 hierarchy の場合では多少違いがあるが、基本的には量子力学と古典力学の対応原理を思い浮かべて頂けば良い。微分作用素や差分作用素をその (微分方程式論で言うところの) symbol に置き換え、交換子 [,] を Poisson 括弧 {,} に置き換えるだけである。詳しくは [3] を参照。ここでは必要最小限の事項を列挙する。

まず KP hierarchy について。この場合は微分作用素を $\partial\to w$ に置き換え、交換子を $\{w,x\}=1$ で定義される Poisson 括弧に置き換える。具体的には、Lax 作用素は

$$\mathcal{L}=w+u_2(t)w^{-1}+u_3(t)w^{-2}+\cdots \tag{2.8}$$

という $w$ の形式べき級数になり、$B_n$ は

$$\mathcal{B}_n=(\mathcal{L}^n)_{\geq 0} \tag{2.9}$$

という多項式になる。ここで、$\geq 0$ という記号は今度は形式べき級数の多項式部分を取り出すことを表す: $\mathcal{P}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nw^n\ \to\mathcal{P}_{\geq 0}:=\sum_{n\geq 0}a_nw^n$.

無分散 KP hierarchy (dKP hierarchy) は、

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_n}=\{\mathcal{B}_n,\mathcal{L}\},\qquad n=1,2,\dots \tag{2.10}$$

という連立方程式として定義される。

戸田格子の方は差分作用素を symbol に置き換えるので Poisson 括弧の入れ方が少し違う。まず、差分作用素 $e^{n\partial_s}$ は $w^n$ に置き換える。差分作用素 $e^{\partial_s}$ と $s$ の交換関係は $[e^{\partial_s},s]=e^{\partial_s}$ だから、これの準古典極限として Poisson 括弧は $\{w,s\}=w$ で定義される。つまり、$s$ は連続な変数となり、

$$\{f(w,s),g(w,s)\}:=w\left(\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial g}{\partial s}-\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial g}{\partial w}\right) \tag{2.11}$$

である。

dKP hierarchy との違いは基本的にはこれだけで、後は同じ処方箋で方程式(1.4) を書き直せば良い。Lax 作用素と $B_n$ は $w$ の形式べき級数や多項式で、係数は $s$ と $t=(t_n)_{n\in\mathbf{Z},n\neq 0}$ に依存する。

$$\mathcal{L}=e^{\phi}w+u_1+u_2w^{-1}+u_3w^{-2}+\cdots, \tag{2.12}$$

$$\tilde{\mathcal{L}}^{-1}=e^{\phi}w^{-1}+\bar{u}_1+\bar{u}_2w+\bar{u}_3w^2+\cdots, \tag{2.13}$$

$$\mathcal{B}_n=\begin{cases}(\mathcal{L}^n)_{>0}+\frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_0, & (n>0),\\ (\tilde{\mathcal{L}}^{-n})_{<0}+\frac{1}{2}(\tilde{\mathcal{L}}^{-n})_0, & (n<0).\end{cases} \tag{2.14}$$

のように (1.5), (1.6), (1.7) を書き直したものになる。$\mathcal{B}_n$ の定義に現れる $>0$, $0$, $<0$ という添字は、今度は $w$ の対応する巾を取り出す操作になる: $A=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nw^n\to A_S:=\sum_{n\in S}a_nw^n$ ($S=\{n\mid n>0\}$, $\{0\}$, $\{n\mid n<0\}$).

無分散 Toda lattice hierarchy (dToda hierarchy) の Lax 方程式は、(1.4) を書き直した

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t_n}=\{\mathcal{B}_n,\mathcal{L}\},\qquad \frac{\partial\tilde{\mathcal{L}}}{\partial t_n}=\{\mathcal{B}_n,\tilde{\mathcal{L}}\}, \tag{2.15}$$

となる。

このような方程式について KP hieararchy の佐藤理論や DJKM [10] のような理論を展開することができる [3]. 例えば無限小対称性はKP/Toda hierarchy の $W_{1+\infty}$-対称性から $w_{1+\infty}$-対称性に変わる ($gl(\infty)$ 対称性は、無分散極限では Cartan 部分代数が連続無限次元になったりするので少々扱いにくい)。またどのような KP/Toda hierarchy の解ならば無分散極限を取れるか、$\tau$ 関数の fermion 表示のレベルでも分かっている。

## §3 無分散広田方程式

上で述べた無分散系の $\tau$ 関数 $\log\tau$ (正確には元の KP/Toda hierarchy の $\tau$ 関数の log の極限に相当するのでこう書く) は、KP/Toda hierarchy の広田方程式に対応する無分散広田方程式を満たす。これは、最初は [3] で differential Fay identities と呼ばれる広田方程式の一部 (Grassmann 多様体の Plücker 関係式としてはごく一部分を取り出したものになるが、実は微分方程式としては KP hierarchy の広田方程式全体と同値になることが証明できる; [3] Appendix B) の極限を取って得られた。ここでは Teo [11] によって単葉関数論の用語を使って定式化されたバージョンを紹介する (後で出てくる Löwner 方程式と無分散系の関係は、この定式化を使って証明するのが一番すっきりしている)。ここではdKP についてしか述べないが、dToda に対しても同様のものがある (cf. [5], [11], [12]).

まず、(2.8) の形の Lax 関数 $\mathcal{L}(t;w)$ に対して、その $w$ についての逆関数を $k(t;z)$ と書くことにする。つまり、$\mathcal{L}(t;k(t;z))=z$, $k(t;\mathcal{L}(t;w))=w$ となるような $z$ の形式べき級数である。この $k(t;z)$ について、Grunsky 係数 $b_{m,n}$ $(m,n\geqq 1)$ を次の母関数表示で定義する:

$$-\sum_{m,n=1}^{\infty}b_{m,n}(t)z_1^{-m}z_2^{-n}=\log\frac{k(t;z_1)-k(t;z_2)}{z_1-z_2}. \tag{3.16}$$

これは次節で触れる Bieberbach 予想を解くために 1940 年頃に (もちろん可積分系とは無関係に) 導入されたものである (cf. [13] Chapter 4)。この定義を少しいじると、$b_{n,m}(t)$ は、

$$\left(\mathcal{L}(t;w)\right)^n + \sum_{m=1}^{\infty} n\, b_{n,m}(t) \left(\mathcal{L}(t;w)\right)^{-m}$$

が $w$ の多項式になるように決められるものである、とも言い替えられる。特に $n=1$ の場合は上の式は $w$ の monic な一次式で定数項がないもの、つまり $w$ そのものであるから、これは $k(t;z)$ を表している:

$$k(t;z) = z + \sum_{m=1}^{\infty} b_{1,m}(t) z^{-m}. \tag{3.17}$$

これを使うと、dKP hierarchy の解は次のように特徴づけられる: (2.8) の形をした $\mathcal{L}(t;w)$ が dKP hierarchy の解であるための必要十分条件は、ある $t$ の関数 $\log\tau_{\mathrm{dKP}}(t)$ が存在して、$\mathcal{L}(t;w)$ から定義される Grunsky 係数 $b_{m,n}(t)$ が

$$\frac{\partial^2}{\partial t_m\, \partial t_n} \log\tau_{\mathrm{dKP}}(t) = -mn\, b_{m,n}(t) \tag{3.18}$$

となることである。これが Teo による無分散広田方程式の定式化である。つまり、$\log\tau_{\mathrm{dKP}}(t)$ という関数は (3.18) によって $b_{m,n}$ を表すわけなので、これを (3.17) に代入すれば $k(t;z)$ が $\log\tau_{\mathrm{dKP}}(t)$ によって表され、さらにこれを (3.16) に代入すれば $\log\tau_{\mathrm{dKP}}(t)$ の満たすべき方程式 (これが無分散広田方程式) を表している、という訳である。

## §4 Löwner equations

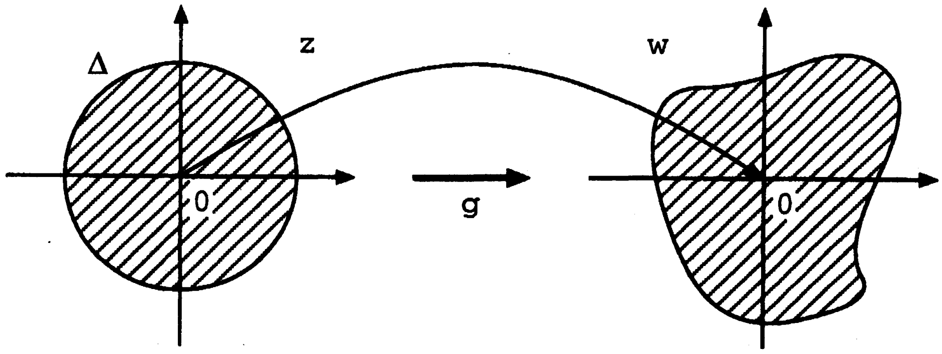
ここで一旦可積分系から離れて、単葉関数論の Bieberbach 予想について説明する。これが後半の主題、Löwner 方程式の由来になっているし、前節で述べた Grunsky 係数の出自とも関係している。

Bieberbach 予想とは、Riemann の写像関数の係数の評価に関する予想で、次のように述べられる: もし

$$g(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \tag{4.19}$$

という正則関数が単位円板 $\Delta = \{z \mid |z| < 1\}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ のある領域への共形写像を与えているならば (つまり単葉=univalent ならば)、係数 $a_n$ の絶対値は $n$ 以下である。

写像関数としてはもっと一般に $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ という形のものを考えることもできるが、定数項 $a_0$ は行き先の領域をシフトすれば0にでき、一次の係数 $a_1$ も領域を拡大・回転すれば 1 にできるので、(4.19) の形と仮定しても十分一般的である。




Bieberbach は 1916 年に $n=2$ の場合を証明し、この予想を述べた。$n=3$ の場合はそれから 7 年たった 1923 年に K. Löwner[1] が、これから述べる Löwner 方程式を使った parametric method という方法で解いた [14]。その後 $n=4$: Garabedian-Schiffer (1955), $n=6$: Ozawa, Pederson (1968–69), $n=5$: Pederson-Schiffer (1972),... と続くが、$n$ が大きくなると計算が極めて大きくなってすべての $n$ について証明するのは絶望的とも思われた。(尚、$n=6$, $n=5$ の結果には Grunsky 係数とその一般化の満たす不等式が使われた。)

この予想は de Branges [15] によって 1984 年に Löwner 方程式と超幾何級数についての Askey-Gasper の不等式を使って解かれた。当時の数学セミナーに簡単な解説がある [16].

このように Bieberbach 予想の解決に活躍した Löwner 方程式は、写像関数に関する次のような常微分方程式である。$\gamma(t)$ を円周上の一点から出発して ($|\gamma(0)|=1$) 円板の内部に延びて行く ($t>0$ ならば $|\gamma(t)|<1$) Jordan 曲線で、原点を通らない ($\gamma(t)\neq 0$) ものとし、$K_t := \gamma([0,t])$ とおく。$\Delta \setminus K_t \xrightarrow{\sim} \Delta$ という Riemann の写像関数を $g_t(z)$ とすると、

$$g_t(z) = e^{-\phi(t)}z + O(z^2), \quad \phi(t) \in \mathbb{R}, \quad g_0(z) = z. \tag{4.20}$$

と規格化できる。

この時ある関数 $\kappa(t)$ ($|\kappa(t)|=1$) が存在して、

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = g_t \frac{\kappa(t)+g_t}{\kappa(t)-g_t}\frac{d\phi}{dt} \tag{4.21}$$

が成り立つ、というのが Löwner によって証明された。この (4.21) が Löwner 方程式である。これが Bieberbach 予想のような係数の問題にどのように使われるか、については [13] Chapter 3 を参照。

この $w=g_t(z)$ は、(4.20) のように $z=0$ を $w=0$ に、つまり $\Delta \setminus K_t$ のある固定された内点を $\Delta$ の指定された内点に写す、という形に規格化されている。これを「ある固定された境界上の点が指定された境界点に写される」という規格化に変更したものも考えられ、若干違った形になる。この方程式は上半平面 $H := \{z \mid \mathrm{Im}\, z > 0\}$ 上の方程式として書かれるのが普通で、Gibbons-Tsarev が可積分系の立場から 1996 年に [17] で (Löwner

[1]チェコ人で、プラハがナチスに占領された時に捕らえられたが、後に逃れてアメリカに渡り、その後は C. Loewner という綴りで論文を書いている。ちなみに Bieberbach はナチス党員だった。

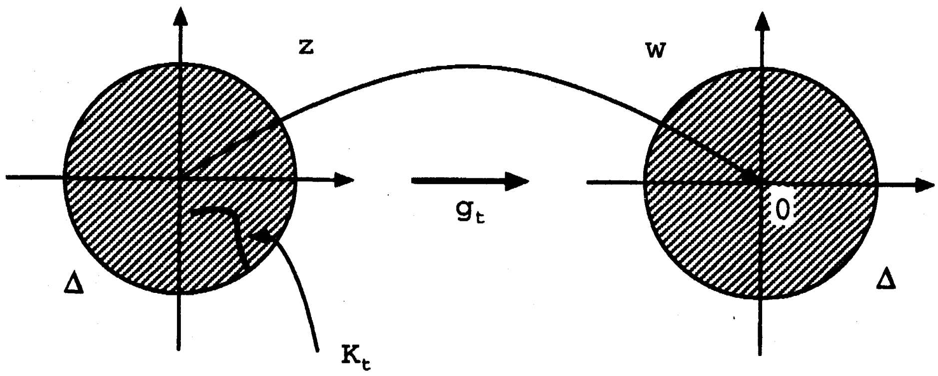
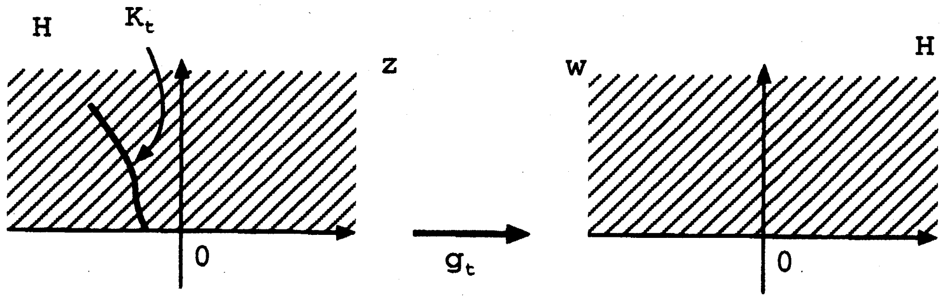



図 1:

方程式との関係は1999 年に [18] で指摘した)、共形場理論の立場から 2000 年に Schramm が [19] で導入している。今度は $H$ の境界から生えてきて $t$ が大きくなると延びていく曲線族 $K_t$ を考え、$H \setminus K_t \xrightarrow{\sim} H$ という共形写像 $g_t(z)$ を次のように規格化する。

$$g_t(z) = z + a_1(t)z^{-1} + O(z^{-2}) \quad (z \to \infty), \tag{4.22}$$
$$g_0(z) = z.$$




この時、ある関数 $U(t)$ $(U(t) \in \mathbb{R})$ が存在して、$g_t(z)$ は

$$\frac{\partial g_t}{\partial t} = \frac{1}{g_t - U(t)} \frac{da_1}{dt} \tag{4.23}$$

を満たす事が示される (証明は [20] )。この方程式は chordal Löwner 方程式と呼ばれ、これと区別するために (4.21) は radial Löwner 方程式と呼ばれることもある。Schramm はこの $U(t)$ に Brown 運動を入れて確率微分方程式 (Stochastic Löwner Evolution または Schramm Löwner Evolution, 略して SLE) にして、共形場理論の相関関数やある種の指数などが簡単に計算できることを示した。(この理論が Werner の 2006 年のフィールズ賞受賞につながっている。)

## §5 Löwner 方程式から無分散系へ

前節では歴史をひもといて複素関数論の話に踏み込んだが、以下ではその文脈は忘れて、Löwner 方程式を単なる微分方程式として考える。

まず、chordal Löwner 方程式と dKP hierarchy の関係を述べよう。Chordal Löwner 方程式 (4.23) を多少一般化して次のようなものを考える。$U_i(\boldsymbol{\lambda})$ を変数 $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ の関数として、$g(\boldsymbol{\lambda}; w)$ が微分方程式

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_i}(\boldsymbol{\lambda}; z) = \frac{1}{g(\boldsymbol{\lambda}; z) - U_i(\boldsymbol{\lambda})} \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_i}, \tag{5.24}$$

を満たすとする。但し、$g$ は $z$ の関数としては

$$g(\boldsymbol{\lambda}; z) = z + a_1(\boldsymbol{\lambda}) z^{-1} + O(z^{-2}) \tag{5.25}$$

という形をしていると仮定する (前節の文脈で言えば、これは上半平面に slit が $N$ 本ある状況に対応する)。また、$f(\boldsymbol{\lambda}; w) = w + O(w^{-1})$ を $g$ の $z$ に関する逆関数とする:

$$f(\boldsymbol{\lambda}; g(\boldsymbol{\lambda}; z)) = z, \qquad g(\boldsymbol{\lambda}; f(\boldsymbol{\lambda}; w)) = w.$$

この時、$f(\boldsymbol{\lambda}; w)$ が

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_i}(\boldsymbol{\lambda}; w) = \frac{-1}{w - U_i(\boldsymbol{\lambda})} \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_i} \frac{\partial f}{\partial w}(\boldsymbol{\lambda}; w). \tag{5.26}$$

を満たすことは (5.24) から直ちに分かる。

これらの方程式 ((5.24) と (5.26)) が成り立つためには、$a_1(\boldsymbol{\lambda})$ と $U_i(\boldsymbol{\lambda})$ の間に

$$\frac{\partial U_j}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{U_j - U_i} \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_i}, \qquad \frac{\partial^2 a_1}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} = \frac{-2}{(U_i - U_j)^2} \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_i} \frac{\partial a_1}{\partial \lambda_j}. \tag{5.27}$$

という両立条件が必要である。(SLE の論文 [20] では、これを写像関数の性質から導いているが、Gibbons-Tsarev は [17] で (5.24) の両立条件として導いた。) 以下ではこの両立条件は使わないが、念のため。

再び単葉関数論の用語だが、$g(w)$ の Faber 多項式 $\Phi_n(w)$ とは $f(w)^n$ の $w$ に関する多項式部分の事を言う (cf. [13] Chapter 4, [11]):

$$\Phi_n(\boldsymbol{\lambda}; w) = (f(\boldsymbol{\lambda}; w)^n)_{\geq 0}. \tag{5.28}$$

これを使って、$t = (t_1, t_2, \dots)$ の関数 $\lambda_i(t)$ $(i = 1, \dots, N)$ についての次のような微分方程式を考える:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial t_n} = v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}(t)) \frac{\partial \lambda_i}{\partial t_1}. \tag{5.29}$$

但し、$v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}) := \dfrac{\partial\Phi_n}{\partial w}(\boldsymbol{\lambda}; U_i(\boldsymbol{\lambda}))$ である。この方程式は Tsarev の一般化 hodograph 関係式と呼ばれる次の陰関数方程式と同値であり、"local" には解ける:

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n\, v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}(t)) = F_i(\boldsymbol{\lambda}(t)). \tag{5.30}$$

ここで $F_i(\boldsymbol{\lambda})$ は (ある両立条件を満たす) 任意関数である。詳しくは [21] 参照。
さて、以上の準備の上で次の定理を述べよう。

**定理**: $\mathcal{L}(t; w) := f(\boldsymbol{\lambda}(t); w)$ は dKP hierarchy の解である。

これは、最初に Gibbons-Tsarev が [17] と [18] で時間変数 $t_1$ と $t_2$ の方程式で見つけた (必要条件と十分条件がごっちゃになっていて読みにくいが)。また、Yu-Gibbons [22] では高次の flow についても (共形写像の形で) 述べられ、Mañas-Martínez Alonso-Medina [23] では一般に証明されている (無分散系の "波動関数"、正確には WKB 解析の相関数に相当する $S$ 関数 (cf. [3]) を使う)。[12] では無分散広田方程式を使った簡明な証明が与えられた。

次に radial Löwner 方程式と dToda hierarchy の関係について。こちらも radial Löwner 方程式 (4.21) を一般化して、

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda_i}(\boldsymbol{\lambda}; z) = g(\boldsymbol{\lambda}; z)\frac{\kappa_i(\boldsymbol{\lambda}) + g(\boldsymbol{\lambda}; z)}{\kappa_i(\boldsymbol{\lambda}) - g(\boldsymbol{\lambda}; z)}\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}, \tag{5.31}$$

を考える。ここで $g(\boldsymbol{\lambda}; z)$ は

$$g(\boldsymbol{\lambda}; z) = e^{-\phi(\boldsymbol{\lambda})}z + b_0(\boldsymbol{\lambda}) + b_1(\boldsymbol{\lambda})z^{-1} + \cdots.$$

という形をした $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$ の関数であり、$\phi$ と $\kappa_i$ は $\phi(\boldsymbol{\lambda}) \in \mathbb{R}$, $|\kappa_i| = 1$ と chordal の場合の (5.27) に相当する両立条件を満たすとする。この条件の下では簡単な計算で、

$$G(\boldsymbol{\lambda}; z) := \overline{g(\boldsymbol{\lambda}; \bar{z}^{-1})}^{-1} = e^{\phi}z + O(z^2) \tag{5.32}$$

も (5.31) の解になることが分かる。但し、$\overline{(\cdot)}$ は複素共役を表す。$f(\boldsymbol{\lambda}; w) = e^{\phi(\boldsymbol{\lambda})}w + \cdots$ を $g(z)$ の $z$ に関する逆関数:

$$f(\boldsymbol{\lambda}; g(\boldsymbol{\lambda}; z)) = z, \qquad g(\boldsymbol{\lambda}; f(\boldsymbol{\lambda}; w)) = w.$$

とし、同様に $F(\boldsymbol{\lambda}; w)$ は $G(z)$ の逆関数とする。これらは (5.26) に相当する線形偏微分方程式を満たすが、省略する。
今度は Faber 多項式は $g$ と $G$ に対応して二種類定義される:

$$\Phi_n(\boldsymbol{\lambda}; w) = (f(\boldsymbol{\lambda}; w)^n)_{\geq 0}, \qquad \Psi_n(\boldsymbol{\lambda}; w) = (F(\boldsymbol{\lambda}; w)^{-n})_{\leq 0}. \tag{5.33}$$

関数 $\lambda_i(s,t)$ $(i=1,\dots,N)$ を次の微分方程式を満たすものとして定義しよう:

(5.34)
$$\frac{\partial\lambda_i}{\partial t_n} = v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}(s,t))\frac{\partial\lambda_i}{\partial s}.$$

但し、

(5.35)
$$v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}) := \begin{cases} w\dfrac{\partial\Phi_n}{\partial w}(\boldsymbol{\lambda};w)\Big|_{w=\kappa_i(\lambda)} & (n>0), \\ w\dfrac{\partial\Psi_n}{\partial w}(\boldsymbol{\lambda};w)\Big|_{w=\kappa_i(\lambda)} & (n<0), \end{cases}$$

で定義される。(5.29) が (5.30) で解けたように、こちらの $\boldsymbol{\lambda}(t)$ も

(5.36)
$$s + \sum_{n\neq 0, n\in\mathbf{Z}}^{\infty} t_n\, v_{n,i}(\boldsymbol{\lambda}(s,t)) = F_i(\boldsymbol{\lambda}(s,t)),$$

によって陰関数として定まる ($F_i(\boldsymbol{\lambda})$ は両立条件を満たす任意関数)。
以上の記号の下で次の定理が成り立つ:

**定理**: $\left(\mathcal{L}(s,t;w) = f(\boldsymbol{\lambda}(s,t);w), \tilde{\mathcal{L}}(s,t;w)^{-1} = \overline{f\left(\boldsymbol{\lambda}(s,t);\bar{w}^{-1}\right)}\right)$ は dToda hierarchy の Lax 方程式 (2.15) を $\{t \mid t_{-n} = -\bar{t}_n\}$. という部分多様体上で満たす。

これは、$t_n$ $(n>0)$ の方程式としては Mañas が [24] で「d1-Dym hierarchy の解になる」という形で述べている (彼の条件を多少ゆるめる必要があるが)。[25] では、この結果を知らずに、ほぼ同等の事を「dcmKP hierarchy の解になる」という形で述べた。[12] では上の形で定理を述べ無分散広田方程式を使って証明した。

以上の定理の逆のステートメントも少なくとも $N=1$ の場合には証明されている。

**定理** [12]
(i) $\mathcal{L}(w;t)$ が dKP hierarchy の解で、$t=(t_1,t_2,\dots)$ のある関数 $\lambda(t)$ と二変数関数 $f(w,\lambda)$ によって $\mathcal{L}(w;t) = f(w,\lambda(t))$ と表されているとする。この時、$f(w,\lambda)$ は chordal Löwner 方程式の解となり、$\mathcal{L}(w;t)$ は $f(w,\lambda)$ から前節の方法 $(N=1)$ で構成したものになる。
(ii) dToda についても同様の定理が成り立つ (詳細は略)。

$N>1$ の場合は、dKP の場合には Gibbons は [17] や [18] で解決済みだ、と主張しているが、まだ若干不明確な所があるように思われる。

# 参考文献

[1] Lebedev, D. and Manin, Yu., *Conservation Laws and Lax Representation on Benny's Long Wave Equations*, Phys.Lett. **74A** (1979), 154–156; Zakharov, V. E., On the Benney's equations, Physica **3D** (1981), 193–202.

[2] Kodama, Y., *A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions*, Phys. Lett. **129A** (1988), 223–226; Kodama, Y., and Gibbons, J., *A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions* II, Phys. Lett. **135A** (1989), 167–170; Kodama, Y., *Solutions of the dispersionless Toda equation*, Phys. Lett. **147A** (1990), 477–482.

[3] Takasaki, T. and Takebe, T., *Integrable hierarchies and dispersionless limit*, Rev. Math. Phys. **7** (1995), no. 5, 743–808.

[4] M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, and A. Zabrodin, *Integrable sructure of interface dynamics*, Phys. Rev. Lett. **84** (2000), 5106–5109.

[5] Wiegmann, P. B. and Zabrodin, A., *Conformal maps and integrable hierarchies*, Comm. Math. Phys. **213** (2000), 523–538; Zabrodin, A. V., *The dispersionless limit of the Hirota equations in some problems of complex analysis*, Teoret. Mat. Fiz. **129** (2001), 239–257.

[6] 佐藤幹夫述・野海正俊記、ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体、上智大学数学講究録 **18** (1984).

[7] 三輪哲二、神保道夫、伊達悦朗、ソリトンの数理、岩波講座 応用数学 (1993).

[8] 高崎金久, 可積分系の世界 — 戸田格子とその仲間 —, 共立出版 (2001).

[9] Ueno, K. and Takasaki, K., *Toda lattice hierarchy*, in *Group Representations and Systems of Differential Equations*, K. Okamoto ed., Advanced Studies in Pure Math. **4** (North-Holland/Kinokuniya 1984), 1–95.

[10] Date, E., Kashiwara, M., Jimbo, M. and Miwa, T., *Transformation groups for soliton equations*, in: Nonlinear Integrable Systems — Classical Theory and Quantum Theory (World Scientific, Singapore, 1983), 39–119.

[11] Teo, L.-P., *Analytic functions and integrable hierarchies—characterization of tau functions*, Lett. Math. Phys. **64** (2003), 75–92.

[12] Takebe, T., Teo, L.-P. and Zabrodin, A., *Löwner equations and dispersionless hierarchies*, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) 11479-11501.

[13] P. L. Duren, *Univalent functions*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **259**, Springer-Verlag, New York, (1983).

[14] K. Löwner, *Untersuchungen uber schlichte konforme Abbildungen des Einheitskreises* i, Math. Ann. **89** (1923), 103–121.

[15] L. De Branges, *A proof of the Bieberbach conjecture*, Acta Math. **154** (1985), 137–152.

[16] 小沢満, ビーベルバッハ予想の解決、数学セミナー 1984 年 11 月号, 6-9.

[17] Gibbons, J. and Tsarev, S. P., *Reductions of the Benney equations*, Phys. Lett. **A211** (1996), 19–24.

[18] Gibbons, J. and Tsarev, S. P., *Conformal maps and reductions of the Benney equations*, Phys. Lett. **A258** (1999), 263–271.

[19] Schramm, O. *Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees*, Israel J. Math. **118** (2000), 221–288.

[20] Lawler, G. F., Schramm, O. and Werner, W., *Values of Brownian intersection exponents. I. Half-plane exponents*, Acta Math. **187** (2001), 237–273.

[21] Tsarëv, S. P., *The geometry of Hamiltonian systems of hydrodynamic type. The generalized hodograph method*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **54** (1990), 1048–1068.

[22] Yu, L. and Gibbons, J., *The initial value problem for reductions of the Benney equations*, Inverse Problems **16** (2000), 605–618.

[23] Mañas, M., Martínez Alonso, L. and Medina, E., *Reductions and hodograph solutions of the dispersionless KP hierarchy*, J. Phys. **A35** (2002), 401–417.

[24] Mañas, M., *S-functions, reductions and hodograph solutions of the $r$ th dispersionless modified KP and Dym hierarchies*, J. Phys. **A37** (2004), 11191–11221.

[25] Takasaki, K. and Takebe, T., *Radial Löwner equation and dispersionless cmKP hierarchy*, `arXiv:nlin.SI/0601063` (2006).