数理解析研究所講究録
第 1541 巻 2007 年 84-101

SCATTERING RULE IN SOLITON CELLULAR AUTOMATON ASSOCIATED WITH CRYSTAL BASE OF $U_q(D_4^{(3)})$

東京大学大学院数理科学研究科　山田大輔 (YAMADA DAISUKE)
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO.

1. INTRODUCTION

1990 年に高橋・薩摩により "箱玉系" と呼ばれるソリトン・セルオートマトンが導入された [TS, T]. これは $\{0,1\}$ の無限列からなる離散力学系で, その時間発展は次のアルゴリズムにより与えられる.

1. 左端の "1" と, それより右にある 0 で最も近いものを交換する.
2. 残りの "1" の中で左端にあるにあるものを, それより右にある 0 で最も近いものを交換する.
3. 上の操作を全ての "1" が動くまで続ける.

$t=0:$ 0011111000000000110000000000000000000000
$t=1:$ 0000001111100000001100000000000000000000
$t=2:$ 0000000000111110000011000000000000000000
$t=3:$ 0000000000000011111000110000000000000000
$t=4:$ 0000000000000000001110011100000000000000
$t=5:$ 0000000000000000000001100011111000000000
$t=6:$ 0000000000000000000000011000000111110000
$t=7:$ 0000000000000000000000000110000000111100

"1" の列 $\overbrace{11...11}^{l}$ を, 長さ l のソリトン状態という. 上の例からも分かるように, これは古典ソリトンの性質をあまねく備えている.

(1) ソリトンが単独で存在するとき, その形を変えないで伝播し, 長いものほど速く伝播する.
(2) 速く進むソリトンが遅く進むソリトンを追い越すとき, 散乱中は複雑な状態になるが, 十分時間が経過するともとのソリトンが復元されて, それぞれのソリトンの位相がずれる.

箱玉系は, 離散ソリトン方程式を "超離散化" と呼ばれる操作を施すことにより得られることが発見され [TTMS, TMS], 超離散可積分系の重要な例となった. この系が箱玉系と呼ばれる所以は, "0" を空箱の状態, "1" を空箱に玉が 1 個入った状態と見なすところにある. 拡張された箱玉系として, 例えば "箱の容量を変えた系", "玉の種類を増やした系", "運搬車を導入した系" がある.

90 年代後半, 箱玉系はアフィンクリスタル [Kas, KMN] の視点から研究された. その構成法はどのアフィン Lie 環の場合も共通で, その系の可解性はそれを構成するときに用いる組合せ R が Yang-Baxter 方程式を満たすところにある. これをオリジナルの箱玉系と混同しないように, ここでは可積分セルオートマトンと呼ぶことにする.

以下, ランク n の非例外型アフィン Lie 環を $\mathfrak{g}_n$ とする. アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n$ に付随する可積分セルオートマトンの中に, ソリトンが現れることが発見された [HHIKTT, HKT]. ソリトンセルオートマトンの重要問題の一つに, 次のものがある.

問題 1.1. ソリトン状態とその散乱則を表現論的に記述せよ.

アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n$ に付随するソリトンセルオートマトンについて, 以下の結果が知られている [HHIKTT, FOY, HKOTY].

- ソリトンとその散乱則は, ランクが 1 下がった $U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$-crystals とそれに付随する組合せ R で記述される.
- 特に, ソリトンの 2 体散乱における位相のずれは, $U_q(\mathfrak{g}_{n-1})$-crystals に対する組合せ R に付随する エネルギー関数の 1 倍 で記述される.

他にも系の状態を与える各セルを, 量子アフィン代数 $U_q'(A_n^{(1)})$ の r 次反対称テンソル表現のクリスタルにした可積分セルオートマトンに現れるソリトンと, その散乱則も知られている [Ya1].

本稿では, 例外型アフィン Lie 環 $\mathfrak{g} = D_4^{(3)}$ に付随する可積分セルオートマトンの中に現れるソリトンとその散乱則 [Ya2] について報告する. 結論から先に述べると,

- ソリトンとその散乱則は, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals とそれに付随する組合せ R で記述される.
- 特に, ソリトンの 2 体散乱における位相のずれは, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals に対する組合せ R に付随する エネルギー関数の 3 倍 で記述される.

本稿の構成は以下のようになっている. 第 2 節では, クリスタルと組合せ R について簡単に復習する. 例として, アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ の頂点 1 に対応する $U_q'(A_n^{(1)})$-crystals $\{B_l\}_{l\geq 1}$ と, それに付随する組合せ R のアルゴリズムを解説する. 第 3 節では, アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n = A_n^{(1)}$ に付随する可積分セルオートマトンを構成し, その中に現れるソリトンとその散乱則について, アフィンクリスタルの視点から解説する. これは [HHIKTT, FOY] の結果の復習である. 第 4 節では, まず $U_q'(D_4^{(3)})$-crystals $\{B_l\}_{l\geq 1}$ を復習する. 次に, 組合せ R のアルゴリズムを記述するための道具として, Lecouvey の列挿入算法 (G_2 型) を解説する. 第 5 節では, まず $U_q(D_4^{(3)})$-crystals に対する組合せ R のアルゴリズムについて解説する. 次に, 第 3 節と同様の議論によりアフィン Lie 環 $\mathfrak{g} = D_4^{(3)}$ に付随する可積分セルオートマトンを構成し, その中に現れるソリトンとその散乱則について解説する. 第 6 節では, 本稿のまとめを述べる.

2. クリスタルと組合せ R

2.1. Crystals. I を適当な index set とする. 集合 B がクリスタル (結晶, crystal) であるとは, 写像 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : B \sqcup \{0\} \longrightarrow B \sqcup \{0\}$ $(i \in I)$ が以下の性質を満たすことをいう.

$$(i) \quad \tilde{e}_i 0 = \tilde{f}_i 0 = 0.$$
$$(ii) \quad {}^{\forall} b \in B,\ {}^{\forall} i \in I,\ {}^{\exists} n > 0 \quad \text{s.t.} \quad \tilde{e}_i^n b = \tilde{f}_i^n b = 0.$$
$$(iii) \quad {}^{\forall} b, b' \in B,\ {}^{\forall} i \in I, \quad \tilde{f}_i b = b' \iff b = \tilde{e}_i b'.$$

クリスタル B の元 b のウェイト $\mathrm{wt}(b)$ は, 次式で与えられる.

$$\mathrm{wt}(b) = \sum_{i\in I} \varphi_i(b)\Lambda_i - \sum_{i\in I} \varepsilon_i(b)\Lambda_i, \tag{2.1}$$

$$\varphi_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{f}_i^n b \neq 0\},\ \varepsilon_i(b) = \max\{n \geq 0 \mid \tilde{e}_i^n b \neq 0\} \tag{2.2}$$

クリスタル B の元 b, b' に対し, $\tilde{f}_i b = b'$ が成り立つとき, b から b' へ i で色づけされた矢印を引く.

$$(2.3) \qquad b \xrightarrow{i} b' \iff \tilde{f}_i b = b'$$

この操作をクリスタル B の全ての元に対して施すと, 色付有向グラフが得られる. これを B の結晶グラフという. 任意の $i \in I$ をとって固定し, B_l の結晶グラフから全ての $j(\neq i)$-arrow 除去するとループや分岐を持たないストリング (i-string) を得る.

$$\tilde{e}_i^{\max} b \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} \tilde{e}_i^2 b \xrightarrow{i} \tilde{e}_i b \xrightarrow{i} b \xrightarrow{i} \tilde{f}_i b \xrightarrow{i} \tilde{f}_i^2 b \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} \tilde{f}_i^{\max} b$$

2つのクリスタル B と B' に対し, 写像 $\iota : B \longrightarrow B'$ が作用 $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ と可換なとき, クリスタル B と B' は同型であるといい, $B \simeq B'$ で表す. またこのときの写像 $\iota : B \longrightarrow B'$ をクリスタル同型という. これは B の結晶グラフと B' の結晶グラフの構造が同じであることを意味する.

2つのクリスタル B, B' のテンソル積構造は, 以下で与えられる.

$$(2.4) \qquad B \otimes B' = \{ b \otimes b' \mid b \in B,\ b' \in B' \}$$

$$(2.5) \qquad \tilde{e}_i(b \otimes b') = \begin{cases} \tilde{e}_i b \otimes b' & \text{if } \varphi_i(b) \geq \varepsilon_i(b'), \\ b \otimes \tilde{e}_i b' & \text{if } \varphi_i(b) < \varepsilon_i(b'). \end{cases}$$

$$(2.6) \qquad \tilde{f}_i(b \otimes b') = \begin{cases} \tilde{f}_i b \otimes b' & \text{if } \varphi_i(b) > \varepsilon_i(b'), \\ b \otimes \tilde{f}_i b' & \text{if } \varphi_i(b) \leq \varepsilon_i(b'). \end{cases}$$

ただし, $b \otimes 0$ や $0 \otimes b'$ は 0, すなわち $B \otimes B'$ の元でないと解釈する.

2.2. 組合せ R. $\mathfrak{g}$ をアフィン Lie 環とする. 以下, 我々が考察するクリスタルは, $U'_q(\mathfrak{g})$-crystal と呼ばれるもので, これは量子アフィン代数 $U'_q(\mathfrak{g})$ の既約な有限次元可積分表現の結晶基底と同型なクリスタルである.

$U'_q(\mathfrak{g})$-crystals B, B' に対し, 次の条件を仮定する

(i) $B \otimes B'$ の結晶グラフが連結.

(ii) $\sharp\{ b_\lambda \otimes b_{\lambda'} \mid b_\lambda \in B,\ b_{\lambda'} \in B',\ \mathrm{wt}(b_\lambda \otimes b_{\lambda'}) = \lambda + \lambda' \} = 1.$

(iii) $\sharp\{ b_{\lambda'} \otimes b_\lambda \mid b_{\lambda'} \in B',\ b_\lambda \in B,\ \mathrm{wt}(b_{\lambda'} \otimes b_\lambda) = \lambda' + \lambda \} = 1.$

このとき, クリスタル同型 $\iota : B \otimes B' \longrightarrow B' \otimes B$ が存在することが容易にわかる.

$U'_q(\mathfrak{g})$-crystal B のアフィン化を, 次式で定義する.

$$(2.7) \qquad \mathrm{Aff}(B) = \{ z^d b \mid d \in \mathbb{Z},\ b \in B \}$$

$$(2.8) \qquad \tilde{e}_i(z^d b) = z^{d+\delta_{i0}}(\tilde{e}_i b), \quad \tilde{f}_i(z^d b) = z^{d-\delta_{i0}}(\tilde{f}_i b) \quad (i \in I)$$

ここで z はスペクトルパラメータと呼ばれるもの.

B, B' を $U'_q(\mathfrak{g})$-crystals とする. このとき, $\mathrm{Aff}(B) \otimes \mathrm{Aff}(B')$ から $\mathrm{Aff}(B') \otimes \mathrm{Aff}(B)$ への写像で, 次式で与えられるものが存在する.

$$\begin{array}{rcl} R : \mathrm{Aff}(B) \otimes \mathrm{Aff}(B') & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(B') \otimes \mathrm{Aff}(B) \\ z^d b \otimes z^{d'} b' & \mapsto & z^{d'+H(b\otimes b')} \tilde{b}' \otimes z^{d-H(b\otimes b')} \tilde{b} \end{array}$$

$$\iota(b \otimes b') = \tilde{b}' \otimes \tilde{b} \quad \text{(crystal isomorphism)}$$

$$H(b \otimes b') = H(\tilde{e}_i(b \otimes b')) + \begin{cases} -1 & \text{if } \varphi_0(b) \geq \varepsilon_0(b'),\ \varphi_0(\tilde{b}') \geq \varepsilon_0(\tilde{b}), \\ 1 & \text{if } \varphi_0(b) < \varepsilon_0(b'),\ \varphi_0(\tilde{b}') < \varepsilon_0(\tilde{b}), \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

この写像 R を, 組合せ R 行列 (略して, 組合せ R) という. また, $B \otimes B'$ 上の $\mathbb{Z}$-値関数 $H(b \otimes b')$ は, エネルギー関数と呼ばれ, 付加定数の自由度を除き一意的である.

さらに, 組合せ R は $\mathrm{Aff}(B) \otimes \mathrm{Aff}(B') \otimes \mathrm{Aff}(B'')$ 上で Yang-Baxter 方程式を満たす.

(2.9) $$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$$

2.3. A 型の場合. 量子アフィン代数 $U_q'(A_n^{(1)})$ の l 次対称テンソル表現のクリスタルを, B_l とする. $I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ とおく. このとき, $U_q'(A_n^{(1)})$-crystal B_l は次で与えられる.

(2.10) $$B_l = \left\{ b = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \mid x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \ \sum_{i=1}^{n} x_i = l \right\}$$

$$\begin{aligned} \tilde{e}_i b =& (x_1 - 1, \ldots, x_{n+1} + 1) \quad \text{if } i = 0, \\ \tilde{e}_i b =& (x_1, \ldots, x_i + 1, x_{i+1} - 1, \ldots, x_{n+1}) \quad \text{if } i \neq 0, \\ \tilde{f}_0 b =& (x_1 + 1, \ldots, x_{n+1} - 1) \quad \text{if } i = 0, \\ \tilde{f}_i b =& (x_1, \ldots, x_i - 1, x_{i+1} + 1, \ldots, x_{n+1}) \quad \text{if } i \neq 0 \end{aligned}$$

ここで, $\tilde{e}_i b$(resp. $\tilde{f}_i b$) の座標成分に負の数が現れたら, それは B_l の元でない, すなわち 0 と見なすことにする. このとき,

$$\varphi_i(b) = (1 - \delta_{i0}) x_i + \delta_{i0} x_{n+1}, \quad \varepsilon_i(b) = x_{i+1} \quad (i \in I)$$

B_l の元を, letter $1, 2, \ldots, n+1$ を entry とする型 (l) の標準盤で解釈すると次のようになる.

(2.11) $$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in B_l \iff (\underbrace{11\ldots11}_{x_1}\underbrace{22\ldots22}_{x_2} \ldots \underbrace{n+1\ldots n+1}_{x_{n+1}})$$

ここではタブローのフレームを $(\cdots)$ で代用した.

$U_q'(A_n^{(1)})$-crystal B_l $(l \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ のアフィン化を, 次式で定義する.

$$\mathrm{Aff}(B_l) = \{ z^d b \mid d \in \mathbb{Z}, \ b \in B_l \}$$

$$\tilde{e}_i(z^d b) = z^{d+\delta_{i0}}(\tilde{e}_i b), \quad \tilde{f}_i(z^d b) = z^{d-\delta_{i0}}(\tilde{f}_i b) \quad (i \in I)$$

さらに, $\mathrm{Aff}(B_l) \otimes \mathrm{Aff}(B_{l'})$ 上の組合せ R 行列を次式で定義する.

$$\begin{aligned} R : \mathrm{Aff}(B_l) \otimes \mathrm{Aff}(B_{l'}) \quad &\longrightarrow \quad \mathrm{Aff}(B_{l'}) \otimes \mathrm{Aff}(B_l) \\ z^d b \otimes z^{d'} b' \quad &\mapsto \quad z^{d' + H(b \otimes b')} \tilde{b}' \otimes z^{d - H(b \otimes b')} \tilde{b} \end{aligned}$$

このとき, 組合せ R は Yang-Baxter 方程式を満たす.

命題 2.1. *$\mathit{Aff}(B_l) \otimes \mathit{Aff}(B_{l'}) \otimes \mathit{Aff}(B_{l''})$* 上の写像として, 次の関係式がなりたつ.

(2.12) $$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(1 \otimes R)$$

組合せ R のアルゴリズムは, 幾つかのものが知られている.

[NY]	中屋敷・山田による dot と line によるアルゴリズム
[Sh]	Shented 型 insertion アルゴリズム
[HHIKTT]	区分線形公式

ここでは幾何結晶の視点から得られた組合せ R 行列の区分線形公式を紹介する.

命題 2.2. ([KOTY]). 与えられたデータ

$$b_1 \otimes b_2 = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \otimes (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \in B_l \otimes B_{l'}$$

に対し, $B_l \otimes B_{l'}$ 上の組合せ R の像

$$R: \ z^{d_1} b_1 \otimes z^{d_2} b_2 \ \mapsto \ z^{d_2 + H(b_1 \otimes b_2)} b'_2 \otimes z^{d - H(b_1 \otimes b_2)} b'_1$$

は次で与えられる.

$$b'_2 \otimes b'_1 = (y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n+1}) \otimes (x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}), \in B_{l'} \otimes B_l$$

$$x'_i - x_i = y_i - y'_i = Q_i - Q_{i-1}, \quad H(b_1 \otimes b_2) = -Q_0,$$

$$Q_i = \min_{1 \le k \le n+1} \left\{ \sum_{j=1}^{k-1} x_{i+j} + \sum_{j=k+1}^{n+1} y_{i+j} \right\}.$$

ただし, $Q_0 = Q_{n+1}$. また, x や y の添え字は $mod\, n+1$ で解釈する.

例 2.3. $n = 3$, $l = 4$, $l' = 2$ の場合.

- 座標表示.

$$z^d(2,1,1,0) \otimes z^{d'}(0,1,1,0) \mapsto z^{\gamma'+0}(1,1,0,0) \otimes z^{d'-0}(1,1,2,0),$$
$$z^d(2,1,1,0) \otimes z^{d'}(1,1,0,0) \mapsto z^{d'+1}(1,0,1,0) \otimes z^{d-1}(2,2,0,0),$$
$$z^d(0,1,1,2) \otimes z^{d'}(1,1,0,0) \mapsto z^{d'+2}(0,0,0,2) \otimes z^{d-2}(1,2,1,0).$$

- 標準盤による表示.

$$z^d(1123) \otimes z^{d'}(23) \mapsto z^{d'+1}(12) \otimes z^{d-1}(1233),$$
$$z^d(1123) \otimes z^{d'}(12) \mapsto z^{d'+1}(13) \otimes z^{d-1}(1122),$$
$$z^d(2344) \otimes z^{d'}(12) \mapsto z^{d'+2}(44) \otimes z^{d-2}(1223).$$

3. 可積分セルオートマトンに現れるソリトン

3.1. 構成法. B_l ($l \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$) を $U'_q(A^{(1)}_n)$-crystal とする. $u_l = (l, 0, \ldots, 0) \in B_l$ とおく. 十分大きい正整数 L をとって固定し, 以下の系を考える.

$$\mathcal{P}_L = \{ \, p = b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_L \in B_1^{\otimes L} \mid b_j = u_1 \text{ if } j \gg 1 \, \}. \tag{3.1}$$

これを箱玉系の状態空間と呼ぶことにする.

与えられたデータ $b^{(0)} \otimes b_1 \otimes b_2 \otimes \cdots \otimes b_L \in B_l \otimes B_1^{\otimes L}$ に対し, 前節で与えた組合せ R のアルゴリズムを $l' = 1$ の場合で繰り返し実行することにより, 次式を得る.

$$\begin{aligned}
& z^0 b^{(0)} \otimes z^0 b_1 \otimes z^0 b_2 \otimes \cdots \otimes z^0 b_L \\
& \quad \mapsto z^{H_1} \tilde{b}_1 \otimes z^{-H_1} b^{(1)} \otimes z^0 b_2 \otimes \cdots \otimes z^0 b_L \\
& \quad \mapsto z^{H_1} \tilde{b}_1 \otimes z^{H_2} \tilde{b}_2 \otimes z^{-H_1 - H_2} b^{(2)} \otimes z^0 b_3 \otimes \cdots \otimes z^0 b_L \\
& \quad \mapsto \cdots \quad \cdots \\
& \quad \mapsto z^{H_1} \tilde{b}_1 \otimes z^{H_2} \tilde{b}_2 \otimes \cdots \otimes z^{H_L} \tilde{b}_L \otimes z^{E_l(p)} b^{(L)},
\end{aligned}$$

$$E_l(p) = -\sum_{j=1}^{L} H_j, \quad H_j = H(b^{(j-1)} \otimes b_j).$$

命題 3.1. 上式で, $b^{(0)}=u_l$ とおき, $b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_L$ が箱玉系の状態であると仮定する. このとき, 次が成り立つ.

$$b^{(L)}=u_l,\quad \tilde{b}_1\otimes\tilde{b}_2\cdots\otimes\tilde{b}_L\in\mathcal{P}_L$$

よって, 写像 $T_l:\mathcal{P}_L\longrightarrow\mathcal{P}_L$ を次式で定義する.

$$T_l(b_1\otimes b_2\otimes\cdots\otimes b_L)=\tilde{b}_1\otimes\tilde{b}_2\otimes\cdots\otimes\tilde{b}_L. \tag{3.2}$$

これを箱玉系の時間発展という.

命題 3.2. 任意の箱玉系の状態 $p\in\mathcal{P}_L$ に対してある $N>0$ が存在し,

$$T_r(p)=\lim_{l\to\infty}T_l(p)\quad \textit{for all } r>N.$$

後で述べる $\mathfrak{g}=D_4^{(3)}$ の場合と比較するため, 離散力学系

$$\left\{\lim_{l\to\infty}T_l^t(p)\in\mathcal{P}_L\mid t\geq 0\right\} \tag{3.3}$$

を, $A_n^{(1)}$-*automaton* と呼ぶことにする.

この系が可積分系である所以は, 組合せ R 行列が Yang-Baxter 方程式を満たすところにある. これにより, 次が成り立つ.

命題 3.3. ([FOY]). 任意の $p\in\mathcal{P}_L$ と正整数 l,l' に対し,

$$T_lT_{l'}(p)=T_{l'}T_l(p):\text{時間発展の可換性} \tag{3.4}$$

$$E_l(T_{l'}(p))=E_l(p):\text{エネルギー保存則} \tag{3.5}$$

3.2. **ソリトン.** $\tilde{B}_l$ $(l\in\mathbb{Z}_{\geq 1})$ を $U_q'(A_{n-1}^{(1)})$-crystal とする.

$$\tilde{B}_l=\left\{b=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\mid\sum_{i=1}^{l}x_i=l,\ x_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0}\right\}$$

写像 $\iota_l:\tilde{B}_l\sqcup\{0\}\longrightarrow B_1^{\otimes l}\sqcup\{0\}$ を次式で定義する.

$$\iota_l(b)=\begin{cases}(n+1)^{\otimes x_n}\otimes\cdots\otimes(3)^{\otimes x_2}\otimes(2)^{\otimes x_1} & \text{if } b\neq 0,\\ 0 & \text{if } b=0.\end{cases} \tag{3.6}$$

このとき, 次の主張が直ちに従う.

命題 3.4. 任意の $i\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ と $b\in\tilde{B}_l\sqcup\{0\}$ に対し,

$$\iota_l(\tilde{e}_i(b))=\tilde{e}_{i+1}(\iota_l(b)),\quad \iota_l(\tilde{f}_i(b))=\tilde{f}_{i+1}(\iota_l(b)).$$

長さ $(l_1,l_2,\ldots,l_m)$ の m-ソリトン状態は次で与えられる.

$$\ldots[l_1]\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots\cdots\ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \tag{3.7}$$

ここで $\ldots[l]\ldots$ は十分多くの "1" で挟まれた以下のような局所状態である.

$$\cdots\otimes(1)\otimes(1)\otimes\iota_l(b)\otimes(1)\otimes(1)\otimes\cdots \tag{3.8}$$

注 3.5. 長さ l の 1-ソリトン状態 p_{1s} は, 表現論的には条件 $E_1(p_{1s})=1$ を満たす状態で定義される.

長さ l の 1-ソリトン状態は, 時間発展 T_r の下で右側へ $\min(r,l)$ ステップシフトする. 時間発展 T_r のもとで, 時刻 t における局所状態 "$\ldots[l]\ldots$" の位相を次で与える.

(3.9) $$\gamma = \min(r,l)t + (\text{“}\ldots[l]\ldots\text{” の右端からの位置})$$

命題 3.4 より, 長さ l の局所状態 $\ldots[l]\ldots$ は, アフィン化された $U_q'(A_{n-1}^{(1)})$-crystal $\tilde{B}_l$, すなわち $\mathrm{Aff}(\tilde{B}_l)$ でラベル付けされる.

$$\cdots\otimes(1)\otimes(1)\otimes\iota_l(b)\otimes(1)\otimes(1)\otimes\cdots\in\mathcal{P}_L \iff z^{\gamma}b\in\mathrm{Aff}(\tilde{B}_l)$$

さらに, 長さ $(l_1,l_2,\ldots,l_m)$ の m-ソリトン状態を, テンソル積

(3.10) $$z^{\gamma_1}b_1\otimes z^{\gamma_2}b_2\otimes\cdots\otimes z^{\gamma_m}b_m\in\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1})\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m}).$$

と同一視する.

3.3. 散乱則. いま長さ $(l_1,l_2,\ldots,l_m)$ の m-ソリトン状態

(3.11) $$\ldots[l_1]\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots\cdots\ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

に対し, 条件 $l_1>l_2>\cdots>l_m$ を仮定する. u_r の r が十分大きければ長いソリトンほど速く伝播するので, 十分時間が経つと以下の状態になると期待される.

(3.12) $$\ldots\ldots\ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots\cdots\ldots\ldots\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots\ldots\ldots[l_1]\ldots\ldots\ldots\ldots$$

この散乱前後の状態変化を次で表す.

$$\begin{array}{rccc} S_m: & \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1})\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m}) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2})\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1}) \\ & z^{\gamma_1}b_1\otimes z^{\gamma_2}b_2\otimes\cdots\otimes z^{\gamma_m}b_m & \mapsto & z^{\gamma_m'}b_m'\otimes\cdots\otimes z^{\gamma_2'}b_2'\otimes z^{\gamma_1'}b_1'. \end{array}$$

散乱行列 S_m の規則は, 次の定理で記述される.

定理 3.6. ([HHIKTT, FOY]).

散乱行列 S_2 は, *$U_q(A_{n-1}^{(1)})$-crystals* に付随する組合せ R で記述される. 特に,

$$\gamma_1-\gamma_1'=\gamma_2'-\gamma_2=2l_2+H(b_1\otimes b_2)$$

$m>2$ のとき, S_m は S_2 の積に分解する.

注 3.7. この組合せ R 行列には付加項 $2l_2$ がついているが, エネルギー関数は付加定数の自由度をもつので, Yang-Baxter 方程式を満たす.

特に 3 体散乱について,

$$S_3=(S_2\otimes1)(1\otimes S_2)(S_2\otimes1)\quad\text{or}\quad(1\otimes S_2)(S_2\otimes1)(1\otimes S_2)$$

で与えられる. 組合せ R が Yang-Baxter 方程式を満たすことから, 散乱後の状態は散乱の順序に依存しない.

4. 準備

4.1. $U_q'(D_4^{(3)})$-crystals. アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}=D_4^{(3)}$ の頂点 1 に対応する $U_q'(D_4^{(3)})$-crystal B_l $(l\in\mathbb{Z}_{\geq1})$ は, 集合として次式で与えられる.

(4.1) $$B_l=\bigoplus_{j=0}^{l}B^{G_2}(j\Lambda_1)$$

ここで $B^{G_2}(j\Lambda_1)$ は, Kang-Misra の有限次元既約 $U_q(G_2)$-加群 $V^{G_2}(j\Lambda_1)$ のクリスタル [KM] である. その任意の元は, 全順序つきの letter

(4.2) $$1\prec2\prec3\prec0\prec\bar{3}\prec\bar{2}\prec\bar{1}$$

からなる１行の半単純盤で与えられる．

(4.3)
$$\underbrace{\boxed{1\cdots1}}_{w_1}\underbrace{\boxed{2\cdots2}}_{w_2}\underbrace{\boxed{3\cdots3}}_{w_3}\underbrace{\boxed{0}}_{w_0}\underbrace{\boxed{\bar{3}\cdots\bar{3}}}_{\bar{w}_3}\underbrace{\boxed{\bar{2}\cdots\bar{2}}}_{\bar{w}_2}\underbrace{\boxed{\bar{1}\cdots\bar{1}}}_{\bar{w}_1}$$

(4.4)
$$w_0 \in \{0,1\}, \ \sum_{i=1,2,3}(w_i+\bar{w}_i)+w_0=j$$

いま変数変換

(4.5)
$$(x_1,x_2,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1)=(w_1,w_2,2w_3+w_0,2\bar{w}_3+w_0,\bar{w}_2,\bar{w}_1)$$

により，$B^{G_2}(j\Lambda_1)$ の元を座標表示で与える．

(4.6)
$$B^{G_2}(j\Lambda_1)=\left\{ b=(x_1,x_2,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_i,\ \bar{x}_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad (i=1,2,3), \\ x_3 \equiv \bar{x}_3 \ (\mathrm{mod}\ 2), \\ s(b)=j \end{array} \right\}$$

ただし，

(4.7)
$$s(b)=x_1+x_2+\frac{x_3+\bar{x}_3}{2}+\bar{x}_2+\bar{x}_1.$$

例 4.1. $l=1$ の場合．

$\boxed{1}=(1,0,0,0,0,0)$, $\boxed{2}=(0,1,0,0,0,0)$, $\boxed{3}=(0,0,2,0,0,0)$,
$\boxed{0}=(0,0,1,1,0,0)$, $\boxed{\bar{3}}=(0,0,0,2,0,0)$, $\boxed{\bar{2}}=(0,0,0,0,1,0)$,
$\boxed{\bar{1}}=(0,0,0,0,0,1)$, $\phi=(0,0,0,0,0,0)$.

例 4.2. $B^{G_2}(7\Lambda_1)$ の元として，

$$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{0}\boxed{\bar{1}}\boxed{\bar{1}} \iff (1,2,3,1,0,2).$$

表示の簡略化のため，新しい変数を次で与える．

(4.8)
$$(z_1,z_2,z_3,2z_4)=(\bar{x}_1-x_1,\bar{x}_2-\bar{x}_3,x_3-x_2,\bar{x}_3-x_3)$$

(4.9)
$$(x)_+=\max(x,0), \quad (x)_-=\min(x,0)$$

このとき，B_l の結晶構造は次式で与えられる．

(4.10)
$$\tilde{f}_0 b=\begin{cases} (x_1+1,x_2,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } (F_1), \\ (x_1,x_2,x_3+1,\bar{x}_3+1,\bar{x}_2,\bar{x}_1-1) & \text{if } (F_2), \\ (\ldots,x_3+2,\ldots,\bar{x}_2-1,\ldots) & \text{if } (F_3), \\ (x_1,x_2+1,x_3,\bar{x}_3-2,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } (F_4), \\ (x_1+1,x_2,x_3-1,\bar{x}_3-1,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } (F_5), \\ (x_1,x_2,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1-1) & \text{if } (F_6) \end{cases}$$

(4.11)
$$\tilde{f}_1 b=\begin{cases} (x_1-1,x_2+1,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } (z_2)_+ \leq -z_3, \\ (x_1,x_2,x_3-1,\bar{x}_3+1,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } z_2 \leq 0 < z_3, \\ (x_1,x_2,x_3,\bar{x}_3,\bar{x}_2-1,\bar{x}_1+1) & \text{if } z_2 > (-z_3)_+. \end{cases}$$

(4.12)
$$\tilde{f}_2 b=\begin{cases} (x_1,x_2-1,x_3+2,\bar{x}_3,\bar{x}_2,\bar{x}_1) & \text{if } z_4 \leq 0, \\ (x_1,x_2,x_3,\bar{x}_3-2,\bar{x}_2+1,\bar{x}_1) & \text{if } z_4 > 0. \end{cases}$$

$$
\begin{array}{ll}
(F_1) & z_1 + (z_2 + (3z_4 + (z_3)_-)_-)_- \le 0 \\
(F_2) & z_2 + (3z_4 + (z_1 + z_3)_-)_- \le 0 < z_1 \\
(F_3) & 3z_4 + (z_3 + (z_1)_-)_- \le 0 < z_2 + (z_1)_+ \\
(F_4) & 3z_4 + (z_2 + (z_1)_+)_+ \ge 0 > z_3 + (z_1)_- \\
(F_5) & z_3 + (3z_4 + (z_1 + z_2)_+)_+ > 0 \ge z_1 \\
(F_6) & z_1 + (z_3 + (3z_4 + (z_2)_+)_+)_+ > 0
\end{array}
$$

ただし, $\tilde{f}_i b \notin B^{G_2}(j\Lambda_1)$ のとき $\tilde{f}_i b = 0$ とみなす.

また, $e_i b$ は $\tilde{f}_i b$ を以下で読み替えたもので与えられる.

$$x_i + a \to x_i - a \quad (\text{resp. } \bar{x}_i), \quad (<,>,\le,\ge) \to (\le,\ge,<,>)$$

さらに, $\varepsilon_i(b)$ 及び $\varphi_i(b)$ は次式で与えられる.

$$\varepsilon_0(b) = l - s(b) + \max A - (2z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4), \tag{4.13}$$

$$\varepsilon_1(b) = \bar{x}_1 + (\bar{x}_3 - \bar{x}_2 + (x_2 - x_3)_+)_+, \tag{4.14}$$

$$\varepsilon_2(b) = \bar{x}_2 + (x_3 - \bar{x}_3)_+/2, \tag{4.15}$$

$$\varphi_0(b) = l - s(b) + \max A, \tag{4.16}$$

$$\varphi_1(b) = x_1 + (x_3 - x_2 + (\bar{x}_2 - \bar{x}_3)_+)_+, \tag{4.17}$$

$$\varphi_2(b) = x_2 + (\bar{x}_3 - x_3)_+/2 \tag{4.18}$$

ただし,

$$A = (0, z_1, z_1 + z_2, z_1 + z_2 + 3z_4, z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4, 2z_1 + z_2 + z_3 + 3z_4). \tag{4.19}$$

4.2. 組合せ R. $U_q(D_4^{(3)})$-crystals のテンソル積 $\mathrm{Aff}(B_l) \otimes \mathrm{Aff}(B_{l'})$ 上の組合せ R を次式で与える.

$$
\begin{array}{rcl}
R : \mathrm{Aff}(B_l) \otimes \mathrm{Aff}(B_{l'}) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(B_{l'}) \otimes \mathrm{Aff}(B_l) \\
z^d b \otimes z^{d'} b' & \mapsto & z^{d'+H(b\otimes b')} \tilde{b}' \otimes z^{d-H(b\otimes b')} \tilde{b}
\end{array}
$$

$$H((l,0,0,0,0,0) \otimes (l',0,0,0,0,0)) = 0 \tag{4.20}$$

ただし, $b \otimes b' \mapsto \tilde{b}' \otimes \tilde{b}$ は結晶同型, $H(b \otimes b')$ はそれに付随するエネルギー関数.

命題 4.3. *(Yang-Baxter 方程式). $\mathit{Aff}(B_l) \otimes \mathit{Aff}(B_{l'}) \otimes \mathit{Aff}(B_{l''})$, 上の写像として, 次の関係式が成り立つ.*

$$(R \otimes 1)(1 \otimes R)(R \otimes 1) = (1 \otimes R)(R \otimes 1)(R \otimes 1). \tag{4.21}$$

前節から分かるように, 結晶基底の視点から箱玉系を構成するには, $B_l \otimes B_1$ 上の組合せ R の表が必要となる. 結晶構造が既知ならば, 組合せ R の定義にしたがって, その対応表を作ることができるが, それを構成する元の個数は l が大きくなるにしたがって膨大な数になる.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
l & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 10 & 15 \\
\sharp(B_l \otimes B_1) & : & 64 & 280 & 896 & 2352 & 5376 & 104104 & 744192
\end{array} \tag{4.22}
$$

系の状態の時間発展は組合せ $R : B_l \otimes B_1 \to B_1 \otimes B_l$ をシステムサイズの回数分 (これは十分大きい！) だけ繰り返すことにより定義されるため, 系の時間発展を計算するのに非常に時間を要する.

問題 4.4. 組合せ R のアルゴリズムを高速化せよ.

$U_q'(D_4^{(3)})$ 結晶 B_l の元は, 有限次元既約 $U_q(G_2)$ 加群のクリスタルの直和からなるので, 組合せ R のアルゴリズムは, Kang-Misra の G_2 型タブローに対する Lecouvey の列挿入算法 [Lec] で記述できると期待される.

4.3. Lecouvey の列挿入算法. このパラグラフでは, Kang-Misra の G_2 型タブローに対する Lecouvey の列挿入算法について解説する. 我々は, letter $\{1,2,3,0,\bar{3},\bar{2},\bar{1}\}$ を entry とする word の集合 $B(1)$, $B(10)$, $B(12)$, $B(11)$, $B(112)$, $B(121)$ を以下で定義する.

$$B(1)=\{1,\ 2,\ 3,\ 0,\ \bar{3},\ \bar{2},\ \bar{1}\},\quad B(10)=\{10,\ 1\bar{3},\ 1\bar{2},\ 2\bar{2},\ 2\bar{1},\ 3\bar{1},\ 0\bar{1}\},$$

$$B(12)=\{12,\ 13,\ 23,\ 20,\ 2\bar{3},\ 30,\ 3\bar{3},\ 3\bar{2},\ 00,\ 0\bar{3},\ 0\bar{2},\ \bar{3}\bar{2},\ \bar{3}\bar{1},\ \bar{2}\bar{1}\},$$

$$B(11)=\left\{\begin{array}{l} 11,\ 21,\ 22,\ 31,\ 32,\ 33,\ 01,\ 02,\ 03,\ \bar{3}1,\ \bar{3}2,\ \bar{3}3,\ \bar{3}0,\ \bar{3}\bar{3},\\ \bar{2}1,\ \bar{2}2,\ \bar{2}3,\ \bar{2}0,\ \bar{2}\bar{3},\ \bar{2}\bar{2},\ \bar{1}1,\ \bar{1}2,\ \bar{1}3,\ \bar{1}0,\ \bar{1}\bar{3},\ \bar{1}\bar{2},\ \bar{1}\bar{1} \end{array}\right\}$$

$$B(112)=\left\{\begin{array}{l} 112,\ 113,\ 212,\ 213,\ 223,\ 220,\ 22\bar{3},\ 312,\ 313,\ 323,\ 320,\\ 32\bar{3},\ 330,\ 33\bar{3},\ 33\bar{2},\ 012,\ 013,\ 023,\ 020,\ 02\bar{3},\ 030,\ 03\bar{3},\\ 03\bar{2},\ \bar{3}12,\ \bar{3}13,\ \bar{3}23,\ \bar{3}20,\ \bar{3}2\bar{3},\ \bar{3}30,\ \bar{3}3\bar{3},\ \bar{3}3\bar{2},\ \bar{3}00,\ \bar{3}0\bar{3},\\ \bar{3}0\bar{2},\ \bar{3}\bar{3}\bar{2},\ \bar{3}\bar{3}\bar{1},\ \bar{2}12,\ \bar{2}13,\ \bar{2}23,\ \bar{2}20,\ \bar{2}2\bar{3},\ \bar{2}30,\ \bar{2}3\bar{3},\ \bar{2}3\bar{2},\\ \bar{2}00,\ \bar{2}0\bar{3},\ \bar{2}0\bar{2},\ \bar{2}\bar{3}\bar{2},\ \bar{2}\bar{3}\bar{1},\ \bar{2}\bar{2}\bar{1},\ \bar{1}12,\ \bar{1}13,\ \bar{1}23,\ \bar{1}20,\ \bar{1}2\bar{3},\\ \bar{1}30,\ \bar{1}3\bar{3},\ \bar{1}3\bar{2},\ \bar{1}00,\ \bar{1}0\bar{3},\ \bar{1}0\bar{2},\ \bar{1}\bar{3}\bar{2},\ \bar{1}\bar{3}\bar{1},\ \bar{1}\bar{2}\bar{1} \end{array}\right\}$$

$$B(121)=\left\{\begin{array}{l} 121,\ 131,\ 122,\ 231,\ 201,\ 2\bar{3}1,\ 2\bar{3}2,\ 132,\ 133,\ 301,\ 3\bar{3}1,\\ 3\bar{3}2,\ 3\bar{2}1,\ 3\bar{2}2,\ 3\bar{2}3,\ 232,\ 233,\ 001,\ 0\bar{3}1,\ 0\bar{3}2,\ 0\bar{2}1,\ 0\bar{2}2,\\ 0\bar{2}3,\ 202,\ 203,\ 2\bar{3}3,\ 2\bar{3}0,\ 2\bar{3}\bar{3},\ \bar{3}\bar{2}1,\ \bar{3}\bar{2}2,\ \bar{3}\bar{2}3,\ \bar{3}\bar{1}1,\ \bar{3}\bar{1}2,\\ \bar{3}\bar{1}3,\ \bar{3}\bar{1}0,\ \bar{3}\bar{1}\bar{3},\ 302,\ 303,\ 3\bar{3}3,\ 3\bar{3}0,\ 3\bar{3}\bar{3},\ 3\bar{2}0,\ 3\bar{2}\bar{3},\ 3\bar{2}\bar{2},\\ \bar{2}\bar{1}1,\ \bar{2}\bar{1}2,\ \bar{2}\bar{1}3,\ \bar{2}\bar{1}0,\ \bar{2}\bar{1}\bar{3},\ \bar{2}\bar{1}\bar{2},\ 002,\ 003,\ 0\bar{3}3,\ 0\bar{3}0,\ 0\bar{3}\bar{3},\\ 0\bar{2}0,\ 0\bar{2}\bar{3},\ 0\bar{2}\bar{2},\ \bar{3}\bar{2}0,\ \bar{3}\bar{2}\bar{3},\ \bar{3}\bar{2}\bar{2},\ \bar{3}\bar{1}\bar{2},\ \bar{3}\bar{1}\bar{1},\ \bar{2}\bar{1}\bar{1} \end{array}\right\}$$

さらに, 全単射 $\xi: B(10)\to B(1)$, $\eta: B(121)\to B(112)$ はそれぞれ $B(10)$, $B(121)$ の第 j 成分から $B(1)$, $B(112)$ の第 j 成分への写像として定義する.

$$\text{e.g. } \xi(2\bar{2})=0,\ \xi^{-1}(3)=1\bar{2},\ \eta(0\bar{2}1)=030,\ \eta^{-1}(\bar{1}00)=\bar{3}\bar{2}0.$$

与えられた letter $\alpha\in\{1,2,3,0,\bar{3},\bar{2},\bar{1},\phi\}$ の高々 2 行のタブロー T への列挿入算法 $(\alpha\to T)$ を以下で定義する.

case 0 $\quad(\alpha\to\emptyset)=\alpha$

case 1 $\quad(\beta\to\alpha)=\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}$ if $\alpha\beta\in B(12)$

case 2 $\quad(\beta\to\alpha)=(\beta\quad\alpha\to)$ if $\alpha\beta\in B(11)$

case 3 $\quad$ if $\alpha\beta\gamma\in B(121)$,

$$\left(\begin{array}{cc} & \alpha\\ \gamma\to & \beta\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc}\alpha' & \\ \beta' & \gamma'\to\end{array}\right);\ \gamma'\alpha'\beta'=\eta(\alpha\beta\gamma).$$

case 4 $\quad$ if $\alpha\beta\in B(10)$, $(\beta\to\alpha)=(\xi(\alpha\beta)\to)$.

case 5 $\quad(\beta\to\alpha)=\begin{cases}\beta & \text{if } \alpha=\phi,\\ \alpha & \text{if } \beta=\phi,\\ \emptyset & \text{if } (\alpha,\beta)=(\phi,\phi) \text{ or } (1,\bar{1}).\end{cases}$

注 4.5. これらは2行タブローの全てをカバーしていないが, 結晶同型 $B_l \otimes B_1 \simeq B_1 \otimes B_l$ のアルゴリズムを構成する目的ではこれで十分.

例 4.6. 列挿入 $(\beta \to T_n)$; $T_n = \alpha_1\ \alpha_2\ \ldots \alpha_n$ は次で計算される.
$\alpha_1\beta \in B(11)$ の場合.

$$\begin{aligned}(\beta \to T_n) =&(\beta \to \alpha_1)\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\\ =&\beta\ \alpha_1\ \ldots\ (\alpha_i \to \alpha_{i+1})\ \ldots\ \alpha_n \quad \text{for } 1 \le i \le n-1,\\ =&\beta\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_{n-1}\ (\alpha_n \to \emptyset) = \beta\ \alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ \alpha_n\end{aligned}$$

$\alpha_1\beta \in B(12)$ の場合.

$$(\beta \to T_n) = (\beta \to \alpha_1)\ \alpha_2\ \alpha_3\ \cdots\ \alpha_n = \begin{matrix}\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n\\ \beta\qquad\qquad\quad\end{matrix}$$

$\alpha_1\beta \in B(10)$ の場合.

$$\begin{aligned}(\beta \to T_n) =&(\beta \to \alpha_1)\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n = (\gamma \to)\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n\ (\gamma := \xi(\alpha_1\beta))\\ =&\gamma\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n \text{ if } \alpha_2\gamma \in B(11);\ = \begin{matrix}\alpha_2\ \alpha_4\ \cdots\ \alpha_n\\ \gamma\qquad\qquad\end{matrix} \text{ if } \alpha_2\gamma \in B(12).\end{aligned}$$

$(\alpha_1, \beta) = (1, \bar{1})$ の場合.

$$(\beta\ \to\ T_n) = (\bar{1} \to 1)\ \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n = \alpha_2\ \alpha_3\ \ldots\ \alpha_n$$

また, 逆行挿入算法を case 0-case 3 の右辺から左辺で定義する.

例 4.7. 2行のタブロー

$$T_n = \begin{matrix}p_n\ r_n\ r_{n-1}\ \cdots\ r_1\\ q_n\qquad\qquad\qquad\end{matrix} \qquad (r_0 = \emptyset)$$

から全ての letter を引き抜く操作は以下で計算される.

$$\begin{aligned}T_n =& \begin{matrix}p_n\ r_n\ r_{n-1} \cdots r_2\ (r_1 \to \emptyset)\\ q_n\qquad\qquad\qquad\qquad\end{matrix}\\ =& \begin{matrix}p_n\ r_n\ r_{n-1} \cdots (r_{i+1} \to r_i) \cdots r_1\\ q_n\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\end{matrix} \quad \text{for } 1 \le i \le n-1\\ =& \begin{pmatrix}p_n & \\ q_n & \gamma_n \to\end{pmatrix} r_{n-1} \cdots r_1 = \begin{pmatrix} & p_{n-1}\\ \gamma'_n \to & q_{n-1}\end{pmatrix} r_{n-1} \cdots r_1\\ =&(r'_n \to T_{n-1}) = (r'_n \to (r'_{n-1} \to T_{n-2})) = \cdots\\ =&(r'_n \to (r'_{n-1} \to (\cdots (r'_1 \to T_0) \cdots)))\\ =&(r'_n \to (r'_{n-1} \to (\cdots (r'_1 \to (q_0 \to (p_0 \to \emptyset))) \cdots))).\end{aligned}$$

ただし, $p_{i-1}q_{i-1}r'_i = \eta^{-1}(r_iq_ip_i)$ for $n \ge i \ge 1$.

5. 主結果

この節では特にことわらない限り, 任意の $l \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し, $U'_q(D_4^{(3)})$-crystal を B_l, $U'_q(A_1^{(1)})$-crystal を $\tilde{B}_l$ で表すことにする.

5.1. **組合せ R 行列のアルゴリズム.** $U_q'(D_4^{(3)})$-crystal の与えられたデータ $b_1 \otimes b_2 \in B_l \otimes B_1$ に対し, クリスタル同型 $\iota : B_l \otimes B_1 \to B_1 \otimes B_l$ の像とそれに付随するエネルギー関数 $H(b_1 \otimes b_2)$ を与えるアルゴリズムについて解説する.

定義 5.1. 与えられた $b_1 \otimes b_2 \in B_l \otimes B_1$ に対し, $B_1 \otimes B_l$ の元 $b_2' \otimes b_1'$ 及び, $B_l \otimes B_1$ 上の $\mathbb{Z}$-値関数 $\tilde{H}(b_1 \otimes b_2)$ を, 以下のプロセスにしたがって与える.

Step 1. $b_1 \otimes b_2 \in B_l \otimes B_1$ をタブロー表示する.

Step 2. 行挿入 $(b_2 \to b_1)$ を行う. このとき得られたタブローとその *shape* をそれぞれ $b_1 * b_2$, $(p+q, q)$ とする. $B_l \otimes B_1$ 上の $\mathbb{Z}$-値関数 $\tilde{H}$ を次で与える.

$$\tilde{H}(b_1 \otimes b_2) = \begin{cases} -2 & \text{if } \alpha_1\beta \in B(10),\ \alpha_2\gamma \in B(11), \\ \max(-2,\ (b_1 * b_2)_1 - l - 1) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.1}$$

ただし, $(b_1 * b_2)_1 = p + q$.

Step 3. タブロー $b_1 * b_2$ から全ての *letter* を逆行挿入算法によりはじき出す. その過程を次で表す.

$$b_1 * b_2 = (t_1 \to (t_2 \to (\ldots (t_{p+2q} \to \emptyset) \ldots))); \ t_0 = \emptyset. \tag{5.2}$$

Step 4. $(\mathcal{T}_r) = (t_1\ t_2\ \ldots t_r)$; $0 \le r \le p + 2q$ とおく. $B_l \otimes B_1$ のタブロー表示の元 $b_1 \otimes b_2$ に対し, $b_2' \otimes b_1' \in B_1 \otimes B_l$ を次で与える.

$$b_2' \otimes b_1' = \begin{cases} (t_{p+2q}) \otimes (\mathcal{T}_{p+2q-1}) & \text{for case I}, \\ (t'_{p+2q}) \otimes (\mathcal{T}_{p+2q-1} t''_{p+2q}) & \text{for case II}, \\ (1) \otimes (\mathcal{T}_{p+2q}\bar{1}) & \text{for case III}, \\ (\mathcal{T}_{p+2q}) \otimes (\phi) & \text{for case IV}, \\ (\phi) \otimes (\mathcal{T}_{p+2q}) & \text{for case V}, \\ (\phi) \otimes (\phi) & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{5.3}$$

ただし,

$$\begin{array}{rl}
III. & \alpha_1\beta \in B(11),\ n < l - 1, \\
V. & \alpha_1\beta \in B(11),\ n = l - 1, \\
I. & \alpha_1\beta \in B(11),\ n = l, \\
II. & \alpha_1\beta \in B(12),\ n < l;\ t'_{p+2q}t''_{p+2q} = \xi^{-1}(t_{p+2q}), \\
I. & \alpha_1\beta \in B(12),\ n = l, \\
I. & \alpha_1\beta \in B(10), \\
III. & (\alpha_1, \beta) = (1, \bar{1}),\ n = 1, \\
IV. & (\alpha_1, \beta) = (1, \bar{1}),\ n = 2, \\
I. & (\alpha_1, \beta) = (1, \bar{1}),\ n > 2, \\
IV. & b_1 \ne (\phi),\ b_2 = (\phi),\ l = 1, \\
V. & b_1 \ne (\phi),\ b_2 = (\phi),\ l \ne 1,\ n < l, \\
I. & b_1 \ne (\phi),\ b_2 = (\phi),\ l \ne 1,\ n = l, \\
V. & b_1 = (\phi),\ b_2 \ne (\phi),\ l = 1, \\
III. & b_1 = (\phi),\ b_2 \ne (\phi),\ l \ne 1.
\end{array}$$

定理 5.2. $\{B_l\}_{l \ge 1}$ を $U_q'(D_4^{(3)})$-*crystals* とする. 与えられたデータ $b_1 \otimes b_2 \in B_l \otimes B_1$ に対し, $b_2' \otimes b_1'$ を上の規則により与える. 写像 $\iota : B_l \otimes B_1 \longrightarrow B_1 \otimes B_l$ を結晶同型, $H(b_1 \otimes b_2)$ をそれに付随するエネルギー関数で *(4.20)* 式により規格化されたものと

する．このとき，次式が成り立つ．

$$\iota(b_1 \otimes b_2) = b_2' \otimes b_1', \quad H(b_1 \otimes b_2) = \tilde{H}(b_1 \otimes b_2) \tag{5.4}$$

例 5.3. $l = 3$ の場合．

$$R : z^{\gamma_1}(2\bar{2}\bar{1}) \otimes z^{\gamma_2}(\bar{2}) \mapsto z^{\gamma_2+(-2)}(\bar{1}) \otimes z^{\gamma_1-(-2)}(0\bar{2}).$$

∵) 行挿入算法および逆行挿入算法より，

$$(2\bar{2}\bar{1}) * (\bar{2}) = (\bar{2} \to 2\bar{2}\bar{1}) = 0\bar{2}\bar{1}, \quad H((2\bar{2}\bar{1}) \otimes (\bar{2})) = -2,$$
$$0\bar{2}\bar{1} = (0 \to \bar{2}\bar{1}) = (0 \to (\bar{2} \to \bar{1})).$$

例 5.4. $l = 4$ の場合．

$$R : \ z^{\gamma_1}(30\bar{1}) \otimes z^{\gamma_2}(\bar{3}) \mapsto z^{\gamma_2+(-2)}(2) \otimes z^{\gamma_1-(-2)}(2\bar{2}\bar{2}\bar{1})$$

∵) 行挿入算法より，

$$(30\bar{1}) * (\bar{3}) = \begin{matrix} 3 & 0 & \bar{1} \\ \bar{3} & & \end{matrix}, \ H((30\bar{1}) \otimes (\bar{3})) = \max(-2, ((30\bar{1}) * (\bar{3}))_1 - 4 - 1) = -2.$$

逆行挿入算法より，

$$\begin{matrix} 3 & 0 & \bar{1} \\ \bar{3} & & \end{matrix} = \left(2 \to \begin{matrix} 0 & \bar{1} \\ \bar{2} & \end{matrix}\right) = \left(2 \to \left(\bar{2} \to \begin{matrix} \bar{3} \\ \bar{2} \end{matrix}\right)\right) = (2 \to (\bar{2} \to (\bar{2} \to (\bar{3} \to \emptyset)))).$$

いま $l = 4$ だから $(\bar{3} \to \emptyset)$ は $(\bar{1} \to 2)$ に読み替えられる．よって，

$$\begin{matrix} 3 & 0 & \bar{1} \\ \bar{3} & & \end{matrix} = (2 \to (\bar{2} \to (\bar{2} \to (\bar{1} \to 2)))).$$

5.2. **可積分セルオートマトン．** 前節で与えた組合せ R のアルゴリズムを用いて，アフィン Lie 環 $\mathfrak{g} = D_4^{(3)}$ に付随する可積分セルオートマトンを構成する．その構成法は A 型の場合と全く同様なので割愛するが，その中にある幾つかの命題を組合せ R が満たしていることを check する必要がある．表記も A 型の場合と同じものを用いることにする．

例 5.5. 組合せ R を図式 "+" で表す．

$$\begin{matrix} & b_2 & \\ b_1 & + & b_1' \\ & b_2' & \end{matrix} \iff \begin{matrix} B_l \otimes B_1 & \simeq & B_1 \otimes B_l \\ b_1 \otimes b_2 & \mapsto & b_2' \otimes b_1' \end{matrix} \tag{5.5}$$

このとき，系の時間発展は次で与えられる．

$$\begin{matrix} & \bar{2} & & 0 & & \bar{3} & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\ 111 & + & 13 & + & 1\bar{2} & + & 2\bar{1} & + & 12\bar{1} & + & 112 & + & 111 & + & 111 \ \cdots \\ & 1 & & 1 & & 3 & & \phi & & \bar{1} & & 2 & & 1 & \end{matrix}$$

$$\therefore \ T_3 : \bar{2} \otimes 0 \otimes \bar{3} \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \cdots \ \mapsto \ 1 \otimes 1 \otimes 3 \otimes \phi \otimes \bar{1} \otimes 2 \otimes 1 \otimes \cdots.$$

ただし，タブローのフレームは無視して表示した．

5.3. **ソリトンとその散乱則.** $\tilde{B}_l$ $(l \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ を $U_q'(A_1^{(1)})$-crystal とする.

$$\tilde{B}_l = \{b = (x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = l,\ x_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

写像 $\iota_l : \tilde{B}_l \sqcup \{0\} \longrightarrow B_1^{\otimes l} \sqcup \{0\}$ を次式で定義する.

$$\iota_l(b) = \begin{cases} (3)^{\otimes x_2} \otimes (2)^{\otimes x_1} & \text{if } b \neq 0, \\ 0 & \text{if } b = 0. \end{cases} \tag{5.6}$$

このとき, 次の主張が直ちに従う.

命題 5.6. 任意の $b \in \tilde{B}_l \sqcup \{0\}$ に対し,

$$\iota_l(\tilde{e}_1(b)) = \tilde{e}_2(\iota_l(b)), \quad \iota_l(\tilde{f}_1(b)) = \tilde{f}_2(\iota_l(b)).$$

アフィンリー環 $\mathfrak{g} = D_4^{(3)}$ に付随する可積分セルオートマトンにおいて, 1-ソリトン状態 $p_{1s} \in \mathcal{P}_L$ として条件 $E_1(p_{1s}) = 1$ を満たすものを探すと, 内部自由度 (x_1, x_2) を除いて以下の状態として一意的に定まる.

$$\cdots \otimes (1) \otimes (1) \otimes \iota_l(b) \otimes (1) \otimes (1) \otimes \cdots$$

さらに, 長さ $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ の m-ソリトン状態は以下で描写される.

$$\ldots[l_1]\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots \cdots \ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ここで $\ldots[l]\ldots$ は十分多くの “1” で挟まれた以下のような局所状態である.

長さ l の 1-ソリトン状態は, 時間発展 T_r の下で右側へ $\min(r, l)$ ステップシフトするので, 時刻 t における局所状態 “$\ldots[l]\ldots$” の位相を次式で与える.

$$\gamma = \min(r, l)t + (\text{“}\ldots[l]\ldots\text{” の右端からの位置})$$

命題 5.6 より, 長さ l の 1-ソリトン状態 $\ldots[l]\ldots$ を, アフィン化された $U_q'(A_1^{(1)})$-crystal $\tilde{B}_l$ と同一視する.

$$\cdots \otimes (1) \otimes (1) \otimes \iota_l(b) \otimes (1) \otimes (1) \otimes \cdots \in \mathcal{P}_L \iff z^{\gamma} b \in \mathrm{Aff}(\tilde{B}_l)$$

さらに長さ $(l_1, l_2, \ldots, l_m)$ の m-ソリトン状態

$$\ldots\ldots[l_1]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots\ldots \cdots \ldots\ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

を, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals のテンソル積

$$z^{\gamma_1} b_1 \otimes z^{\gamma_2} b_2 \otimes \cdots \otimes z^{\gamma_m} b_m \in \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1}) \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m}).$$

と同一視する.

いま条件 $l_1 > l_2 > \cdots > l_m$ を仮定する. 時間発展 T_r の $r > 0$ が十分大きければ長いソリトンほど速く伝播するので, 十分時間が経つと以下の状態になると期待される.

$$\ldots\ldots\ldots\ldots[l_m]\ldots\ldots\ldots \cdots \ldots\ldots\ldots\ldots[l_2]\ldots\ldots\ldots\ldots[l_1]\ldots\ldots\ldots\ldots$$

この散乱前後の状態変化を次で表す.

$$\begin{array}{rccc} S_m : & \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1}) \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m}) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m}) \otimes \cdots \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2}) \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1}) \\ & z^{\gamma_1} b_1 \otimes z^{\gamma_2} b_2 \otimes \cdots \otimes z^{\gamma_m} b_m & \mapsto & z^{\gamma_m'} b_m' \otimes \cdots \otimes z^{\gamma_2'} b_2' \otimes z^{\gamma_1'} b_1'. \end{array}$$

散乱行列 S_m の規則は次の定理で記述される.

定理 5.7. ([Ya2]).

散乱行列 S_2 は, $U_q(A_1^{(1)})$-*crystals* に付随する組合せ R で記述される. 特に,

$$\gamma_1 - \gamma_1' = \gamma_2' - \gamma_2 = 2l_2 + 3 \times H(b_1 \otimes b_2). \tag{5.7}$$

$m > 2$ のとき, S_m は S_2 の積に分解する.

注 5.8. この組合せ R 行列には付加項 $2l_2$ がついているが, エネルギー関数は付加定数の自由度をもつので, Yang-Baxter 方程式を満たす.

5.4. **ソリトン散乱の比較.** 以下, ソリトンの散乱を時系列で表す. キャリアは u_4 を用いた. 各時刻における系の時間発展 $T_4(p) \in \mathcal{P}_L$ を計算し, 得られた状態のテンソル積を除去して表示する. 長さ l の下線は, 長さ l のソリトンが散乱しない場合にその時刻にあるべき位置を示している. 十分時間が経過したとき, その下線と実際に存在する位置とのずれを, 位相のずれ δ としている.

例 5.9. $\mathfrak{g}$-automaton ($\mathfrak{g} = A_2^{(1)}$, $D_4^{(3)}$) に現れるソリトンの 2 体散乱の比較する. 散乱前後でのソリトンの内部自由度の変化は同じだが, 位相のずれと散乱途中の状態は大きく異なることに注目されたい.

	• $D_4^{(3)}$-automaton	• $A_2^{(1)}$-automaton
$t=0:$	$\underline{22}111\underline{3}11111111111111111111$	$\underline{22}111\underline{3}111111111111111111111$
$t=1:$	$11\underline{22}11\underline{3}1111111111111111111$	$11\underline{22}11\underline{3}11111111111111111111$
$t=2:$	$1111\underline{22}1\underline{3}111111111111111111$	$1111\underline{22}1\underline{3}1111111111111111111$
$t=3:$	$111111\underline{223}11111111111111111$	$111111\underline{223}111111111111111111$
$t=4:$	$111111112\underline{0}1111111111111111$	$11111111\underline{232}1111111111111111$
$t=5:$	$1111111111\underline{3}111111111111111$	$1111111112\underline{13}211111111111111$
$t=6:$	$11111111111\underline{\phi}\underline{21}1111111111111$	$11111111112\underline{113}21111111111111$
$t=7:$	$111111111111\underline{1}0\underline{21}1111111111$	$111111111112\underline{1}1\underline{13}21111111111$
$t=8:$	$1111111111111\underline{1}23\underline{21}11111111$	$1111111111112\underline{1}11\underline{13}211111111$
$t=9:$	$11111111111111\underline{1}213\underline{21}111111$	$11111111111112\underline{1}111\underline{13}2111111$
$t=10:$	$111111111111111\underline{1}2113\underline{21}1111$	$111111111111112\underline{1}1111\underline{13}21111$
$t=11:$	$1111111111111111\underline{1}21113\underline{21}11$	$1111111111111112\underline{1}11111\underline{13}211$

その散乱則はそれぞれ次で記述される.

$$
\begin{array}{rcl}
R : \mathrm{Aff}(\tilde{B}_2) \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_1) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(\tilde{B}_1) \otimes \mathrm{Aff}(\tilde{B}_2) \\
z^{L-2}(2,0) \otimes z^{L-6}(0,1) & \mapsto & z^{(L-6)+\delta}(1,0) \otimes z^{(L-2)-\delta}(1,1).
\end{array}
$$

$$
\delta = 2 \times 1 + H((2,0) \otimes (0,1)) \times \begin{cases} 3 = -1 & \text{if } \mathfrak{g} = D_4^{(3)}, \\ 1 = 1 & \text{if } \mathfrak{g} = A_2^{(1)}. \end{cases}
$$

例 5.10. (3 体散乱)
写像 S_3 は $(S_2 \otimes 1)(1 \otimes S_2)(S_2 \otimes 1)$, または $(S_2 \otimes 1)(1 \otimes S_2)(S_2 \otimes 1)$ で与えられる. $S_2 = R$ および R 行列が Yang-Baxter 方程式を満たすことから, 散乱後の状態は

散乱の順序に依存しない. システムサイズを $L=50$ とする.

$$
\begin{array}{rl}
t=0: & 33211132111311111111111111111111111111111111111111 \\
t=1: & 11133211321131111111111111111111111111111111111111 \\
t=2: & 11111133213213111111111111111111111111111111111111 \\
t=3: & 11111111133232311111111111111111111111111111111111 \\
t=4: & 11111111111133001111111111111111111111111111111111 \\
t=5: & 1111111111111113\bar{1}31111111111111111111111111111111 \\
t=6: & 1111111111111111131\phi031111111111111111111111111111 \\
t=7: & 111111111111111113111\bar{3}33111111111111111111111111 \\
t=8: & 11111111111111111131111203311111111111111111111111 \\
t=9: & 11111111111111111113111112233311111111111111111111 \\
t=10: & 11111111111111111111311111122133311111111111111111 \\
t=11: & 11111111111111111111131111111221133311111111111111 \\
t=12: & 11111111111111111111113111111112211133311111111111
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
S_3: & \mathrm{Aff}(B_3)\otimes\mathrm{Aff}(B_2)\otimes\mathrm{Aff}(B_1) & \longrightarrow & \mathrm{Aff}(B_1)\otimes\mathrm{Aff}(B_2)\otimes\mathrm{Aff}(B_3) \\
& z^{47}(1,2)\otimes z^{42}(1,1)\otimes z^{38}(0,1) & \mapsto & z^{37}(0,1)\otimes z^{41}(2,0)\otimes z^{47}(0,3)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{47}(1,2)\otimes z^{42}(1,1)\otimes z^{38}(0,1) &\xrightarrow{R\otimes 1} z^{42+1}(1,1)\otimes z^{47-1}(1,2)\otimes z^{38}(0,1) \\
&\xrightarrow{1\otimes R} z^{43}(1,1)\otimes z^{38+(-1)}(1,0)\otimes z^{46-(-1)}(0,3) \\
&\xrightarrow{R\otimes 1} z^{37+2}(0,1)\otimes z^{43-2}(2,0)\otimes z^{47}(0,3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z^{47}(1,2)\otimes z^{42}(1,1)\otimes z^{38}(0,1) &\xrightarrow{1\otimes R} z^{47}(1,2)\otimes z^{38+(-1)}(1,0)\otimes z^{42-(-1)}(0,2) \\
&\xrightarrow{R\otimes 1} z^{37+2}(0,1)\otimes z^{47-2}(2,1)\otimes z^{43}(0,2) \\
&\xrightarrow{1\otimes R} z^{39}(0,1)\otimes z^{43+(-2)}(2,0)\otimes z^{45-(-2)}(0,3)
\end{aligned}
$$

6. 結論

$l\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. B_l を $U_q'(D_4^{(3)})$-crystal, $\tilde{B}_l$ を $U_q'(A_1^{(1)})$-crystal とする.

我々は, $U_q'(D_4^{(3)})$-crystal の与えられたデータ $b_1\otimes b_2\in B_l\otimes B_1$ に対し, クリスタル同型 $\iota: B_l\otimes B_1\longrightarrow B_1\otimes B_l$ とそれに付随するエネルギー関数 $H(b_1\otimes b_2)$ を, Kang-Misra の $U_q(G_2)$-crystals に対する Lecouvey の列挿入算法により記述した.

この組合せ R のアルゴリズムを用いて, A 型の場合と同様の方法で可積分セルオートマトンを構成し, そこに現れるソリトンを系のエネルギーに相当する保存量から定義した. このとき, 長さ $(l_1,l_2,\dots,l_m)$ の m-ソリトン状態は $U_q(A_1^{(1)})$-crystals のテンソル積 $\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_1})\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_2})\otimes\cdots\otimes\mathrm{Aff}(\tilde{B}_{l_m})$ と同一視できる.

例外型アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}=D_4^{(3)}$ に付随する可積分セルオートマトンの中に現れるソリトンとその散乱則は, 以下で記述される.

- ソリトンとその散乱則は, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals とそれに付随する組合せ R で記述される.

- 特に, ソリトンの 2 体散乱における位相のずれは, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals に対する組合せ R に付随する <u>エネルギー関数の 3 倍</u> で記述される.

比較のため, アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n = A_2^{(1)}$ に付随するソリトンセルオートマトンの散乱則について述べると,

- ソリトンとその散乱則は, ランクが 1 下がった $U_q(A_1^{(1)})$-crystals とそれに付随する組合せ R で記述される.

- 特に, ソリトンの 2 体散乱における位相のずれは, $U_q(A_1^{(1)})$-crystals に対する組合せ R に付随する エネルギー関数の 1 倍 で記述される.

我々のソリトンセルオートマトンの散乱は, 比較対象が簡単な $A_2^{(1)}$-automaton であるという点で興味深いものである. また, ソリトンの 2 体散乱における位相のずれがエネルギー関数の 3 倍で記述できるという事実は, これまでに知られている非例外型アフィン Lie 環 $\mathfrak{g}_n$ に付随するソリトンセルオートマトンにはなかった新しい発見である.

謝辞

日々の研究活動を支えてくださった時弘哲治先生, この研究において, 貴重なアドバイスを与えてくださった尾角正人先生, およびこの研究集会において発表する機会を与えてくださった竹縄知之先生に深く感謝致します.

References

[FOY] K. Fukuda, M. Okado and Y. Yamada, *Energy functions in box ball systems*, Int. J. Mod. Phys. A **15** (2000), 1379-1392.

[HHIKTT] G. Hatayama, K. Hikami, R. Inoue, A. Kuniba, T. Takagi and T. Tokihiro, *The $A_M^{(1)}$ Automata related to crystals of symmetric tensors*, J. Math. Phys. 42 (2001) 274-308.

[HKOTY] G. Hatayama, A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi and Y. Yamada, *Scattering rules in soliton cellular automata associated with crystal bases*, Contemp. Math. **297** (2002), 151-182.

[HKT] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, *Soliton cellular automata associated with crystal bases*, Nucl. Phys. B577[PM](2000) 619-645.

[Kas] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras*, Duke Math. J. **63**, 465-516 (1991).

[KM] S-J.Kang, K.C.Misra, *Crystal Bases and Tensor Product Decompositions of $U_q(G_2)$-Modules*, J. Algebra **163**, (1994), 675–691

[KMN] S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Int. J. Mod. Phys. A **7** (suppl. 1A), 449-484 (1992).

[KMOY] M. Kashiwara, K. C. Misra, M. Okado, D. Yamada, *Perfect crystals for $U_q(D_4^{(3)})$*, arXiv:math.QA/0610873.

[KOTY] A. Kuniba, M. Okado, T. Takagi, Y. Yamada, *Geometric crystal and tropical R for $D_n^{(1)}$*, Int. Math. Res. Not. 2003, no. 48, 2565–2620.

[Lec] C. Lecouvey, *Shensted type correspondence for type G_2 and computation of the canonical basis of a finite dimensional $U_q(G_2)$-module*, arXiv:math.CO/0211443 v1.

[T] D. Takahashi, *On some soliton systems defined by using boxes and balls*, Proceedings of the International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications (NOLTA '93), (1993) 555–558.

[TNS] T. Tokihiro, A. Nagai and J. Satsuma, *Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization*, inverse Probl. 15(1999) 1639-1662.

[TS] D. Takahashi and J. Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514–3519.

[TTMS] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.

[Y] S. Yamane, *Perfect crystals of $U_q(G_2^{(1)})$*, J. Algebra **210** (1998), 440–486.

[Ya1] D. Yamada, *Box ball system associated with antisymmetric tensor crystals*, J. Phys. A 37 (2004), no. 42, 9975–9987.

[Ya2] D. Yamada, *Scattering rule in Soliton Cellular Automaton associated with Crystal Base of* $U_q(D_4^{(3)})$, arXiv:math.QA/0609073