

周期箱玉系の初期値問題

東京大学・大学院数理科学研究科¹ 間田 潤 (Jun Mada)

島根大学・教育学部数理基礎教育² 泉 誠 (Makoto Idzumi)

東京大学・大学院数理科学研究科¹ 時弘 哲治 (Tetsuji Tokihiro)

¹ Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo

² Department of Mathematics, Faculty of Education, Shimane University

概要

講演は「周期箱玉系の保存量とベータ仮設方程式のストリング型解との対応」というタイトルで行ったが、紙面も限られているので、講究録には講演で扱った中から特に「周期箱玉系の初期値問題」を取り上げ、周期箱玉系の初期値問題が簡単な組み合わせ論の手法により、初等的な方法で解けることを示す [1].

1 はじめに

周期箱玉系とは、1列に並べた有限個の箱に周期境界条件を課して出来る箱の列の中を、ある規則に従って動く有限個の玉がなす力学系である [2, 3]. 周期箱玉系は、非線形離散可積分方程式としてよく知られている離散 KdV 方程式や離散戸田方程式から超離散化と呼ばれる極限操作によって得られる [4, 5]. 超離散化は、元の離散方程式がもつ主な性質や可積分方程式の重要な性質である初期値問題の可解性を保存するので、周期箱玉系の初期値問題もまた解けるはずである. 実際、周期箱玉系に対する初期値問題は、離散戸田方程式の逆散乱法と逆超離散化を組み合わせることで解かれている [6]. 最近では可解格子模型におけるベータ仮説を用いても解かれている [7]. ただし、これら2つの解法には、かなりの数学的な知識が必要となる.

ところが、周期箱玉系の状態を特徴づける重要な性質の一つ、基本周期 (状態が属する軌道の長さ) を考察することで、初期値問題の簡単な解法を見いだすことが出来る. 現時点で基本周期については、その明示公式および統計的分布が分かっており、有名なリーマン予想との関係も明らかになっている [8, 9, 10]. この基本周期公式を証明する際、ある状態 (state) とその状態に '10-elimination' という操作を施すことによって構成される 'reduced states' とを比較するのであるが、その reduced states のいくつかの特徴を用いることで、簡単な組み合わせ論の手法により、周期箱玉系の初期値問題が解けるのである. 以下では、その解法について説明していく. (これから用いる本質的な結果は Ref. [8] ですでに示されている.)

2 周期箱玉系

簡単に周期箱玉系とその保存量について述べておく. まず、容量が玉1つであるような箱を1次元的に並べた箱の列を考える. ここで、最後の箱は最初の箱と隣り合っているとみなして周期境界条件を課す. 以下、箱の数を N 、玉の数を M とし (ただし、 $M < N/2$ の条件を付ける)、 N 個の箱に M 個の玉を入れた1つの配置を '状態 (state)' と呼ぶことにする. このとき、空き箱を 0、玉

のに入った箱を 1 で表すことにすれば, 周期箱玉系の状態を長さ N の 0,1 数列で表すことが出来る. ここで, 時刻 t から $t+1$ への時間発展の規則を次で与える:

- 与えられた状態で, 数列にあるすべての 10 の組を線で結ぶ. このとき出来る線を '1st arc lines' と呼ぶことにする.
- 最初のステップで結ばれた 10 の組を無視することで新たに出来るすべての 10 の組を線で結ぶ. このとき出来る線を '2nd arc lines' と呼ぶことにする.
- 上の操作をすべての 1 が 0 と線で結ばれるまで続ける.
- 線で結ばれたすべての 1 と 0 を交換する. 交換して得られる新たな数列を時刻が 1 つ進んだときの状態とする.

このとき, j^{th} arc lines の本数を $p_j(t)$ と書くことにすれば, 正整数の非増加数列 $p_j(t)$ ($j = 1, 2, 3, \dots, m$) が得られる. この数列は時間に対して不変, すなわち

$$p_j(t) = p_j(t+1) \equiv p_j \quad (j = 1, 2, 3, \dots, m)$$

が成り立っている. また, 数列 (p_1, p_2, \dots, p_m) は非増加であることから, j 番目の列の長さが p_j であるヤング図形と対応させることが出来る. このヤング図形の行の長さは正整数の狭義減少数列になっているので, 異なる行の長さを $L_1 > L_2 > \dots > L_m$ で表し, 長さ L_j の行の数を n_j で表すことにする. すると, 集合 $\{L_j, n_j\}_{j=1}^m$ は周期箱玉系の保存量のもう 1 つの表現になる.

例えば, $N = 32, M = 14$ の状態

$$(\#) \quad 00111011100100011110001101000000$$

を考える. このとき, 1 と 0 を線で結ぶと 図 1 のようになり, ヤング図形によって保存量を表すと 図 2 のようになる.

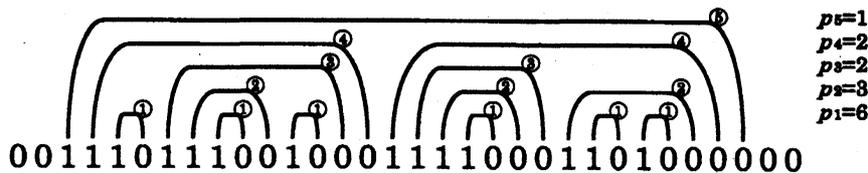


図 1: 状態 (#) に対する j^{th} arc lines と保存量 p_j

3 初期値問題

周期箱玉系の初期値問題を解くために, 『周期箱玉系の状態は, 状態の保存量と '10-elimination' により消去される 10 の組の位置によって決定される』という事実を用いる. 正確な定義は後で述べるが, 10-elimination とは, ある状態において 1st arc lines によって結ばれるすべての 10 の組を消去するというような, 元の数列を小さな数列に変換する操作のことである.

これから, 保存量 (p_1, p_2, \dots, p_m) もしくは $\{L_j, n_j\}_{j=1}^m$ をもつ状態 S について考えることにする. このとき, $s \leq m$ および $L_1 = m$ である. この状態において, すべての $j: 1 \leq j \leq k$ に対する j^{th} arc lines で結ばれるすべての 10 の組を消去して得られる状態を ' k -reduced state' ($k = 1, 2, \dots, m$) と呼

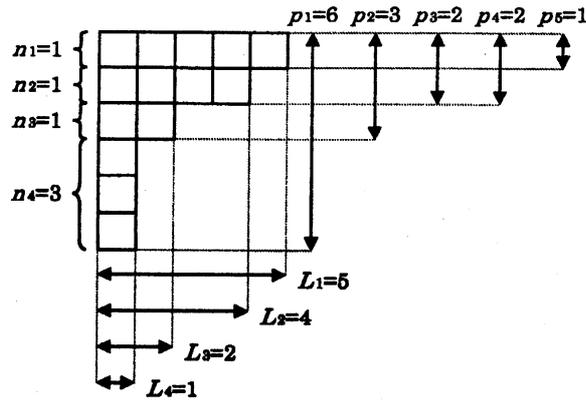


図 2: 状態 (#) の保存量に対応するヤング図形

ぶことにする。よって、 k -reduced state の長さは、 $N - 2 \sum_{j=1}^k p_j$ である。また、最初の状態 S は、 0 -reduced state と呼ぶことにする。そして、 10 -elimination とは、 $(k-1)$ -reduced state を k -reduced state へ変換する操作、つまり、 $(k-1)$ -reduced state で k arc lines で結ばれるすべての 10 の組を消去する操作のことである。明らかに 10 -elimination は不可逆な操作であるが、 10 の組が消去された位置を記録しておけば、平行移動は必要になるかもしれないが、そこに 10 の組を挿入することで元の状態を再現することが出来る。ただし、reduced state の中で隣り合う 1 と 0 の間には 10 の組があったことは明白であるので、それ以外の位置さえ記録しておけば十分である。(このように記録すべき位置のことを Ref. [8] では ' 0 -solitons の位置' と呼んでいた。そこで、ここでも同じ呼び方を用いることにする。)

それでは、 10 の組の位置を明確に指定するために、状態の j 番目と $j+1$ 番目にある数字の間を j により番号付けする。ただし、周期境界条件があるので、 k -reduced state において、与える番号は $0 \equiv N - 2 \sum_{j=1}^k p_j$ として扱う。以降、この番号 j を ' j ' と書くことにより、 $0, 1$ 数列の中で表す。例えば、状態 (#) では次のようになる：

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ |0|0|1|1|1|1|0|1|1|1|0|0|1|0|0|0|1|1|1|1|0|0|0|1|1|0|1|0|1|0|0|0|0|0|0| \end{array}$$

ここで、 10 -elimination を \hat{E} によって表すことにすると、上の状態 (#) に対する k -reduced state は $\hat{E}^k(\#)$ と書くことが出来て、具体的には次のように書ける：

$$\begin{aligned} \hat{E}(\#) &= \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ |0|0|1|1|1|1|0|0|0|1|1|1|0|0|1|0|0|0|0|0| \end{array}, \\ \hat{E}^2(\#) &= \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ |0|0|1|1|1|0|0|1|1|0|0|0|0|0| \end{array}, \\ \hat{E}^3(\#) &= \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ |0|0|1|1|0|1|0|0|0|0| \end{array}, \\ \hat{E}^4(\#) &= \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ |0|0|1|0|0|0| \end{array}, \\ \hat{E}^5(\#) &= \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ |0|0|0|0| \end{array}. \end{aligned}$$

このとき、 $\hat{E}(\#)$ での 0 -soliton の位置は $4, 7, 15$ 、 $\hat{E}^2(\#)$ での 0 -soliton の位置は 10 、 $\hat{E}^3(\#)$ に 0 -soliton は存在しない... となる。ここで、reduced state から元の状態を構成する場合、不定性があることに注意しなくてはならない；例えば、 0110001 と 1100010 はともに 10 -elimination によって同じ位置に 0 -solitons をもつ同じ reduced state に変換される。つまり、reduced state の中にある 0 -solitons の位置だけでは、元の状態の中にある 10 の組の正確な位置を特定できない。

それでは、元の状態を再現するためにはどのようにすればよいのかを考えることにする。まず、 k -reduced states $\hat{E}^k(S)$ の中に、0-solitons の位置は $p_k - p_{k+1}$ ($p_{m+1} := 0$) 箇所ある。よって、reduced states の中には合計で $\sum_{j=1}^s n_j = p_1$ 個の 0-solitons が出てくる。また、0-solitons は L_j -reduced states $\hat{E}^{L_j}(S)$ ($j = 1, 2, \dots, s$) にのみ現れ (この他の reduced states に 0-soliton は現れない), $\hat{E}^{L_j}(S)$ に現れる 0-solitons は n_j 個である。そこで、 $x_j^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n_j$) によって、 L_j -reduced state に現れる k 番目の 0-soliton の位置を表すことにする。よって、前で述べたように、 $N - 2M$ 個の 0 だけから成る $\hat{E}^{L_1}(S)$ と $\{\alpha_k^{(j)}\}_{j=1, k=1}^{s, n_j}$ から、平行移動で最初の状態と重なる状態を構成することが出来る。あとは、10 の組を挿入し続けることによって得られる状態を最初の状態と一致するように平行移動できればよく、そのためには、 L_1 -reduced state に現れる 0-solitons の 0-reduced state における位置さえ分かればよい。

そこで、次のような集合 $\{\alpha_k^{(j)}\}_{j=1, k=1}^{s, n_j}$ と X_{s+1} を導入する; まず、基準にする位置として、 X_j ($j = 1, 2, \dots, s+1$) を $x_1^{(1)}$ から次のように順次決めていく:

- $\bar{X}_{L_1} = x_1^{(1)}$.
- \bar{X}_{L_1-1} によって、 L_1 -reduced state の \bar{X}_{L_1} で 0-soliton となる $(L_1 - 1)$ -reduced state の中にある 10 の組の 1 と 0 の間の位置を表す。
- 同様に、 \bar{X}_{L_1-2} によって、 $(L_1 - 1)$ -reduced state の \bar{X}_{L_1-1} で消去される $(L_1 - 2)$ -reduced state の中にある 10 の組の 1 と 0 の間の位置を表す。ただし、そのような 10 の組が複数存在するのであれば、 \bar{X}_{L_1-2} はその中の最も左の位置を表すとする。
- 上の操作を繰り返し、 \bar{X}_k ($k = 0, 1, \dots, L_1$) を定める。
- $X_j := \bar{X}_{L_j}$ ($j = 1, 2, \dots, s+1$, ただし、 $L_{s+1} := 0$)。

前に出した (#) を例にとれば、 $\bar{X}_{L_1} = \bar{X}_5 = 2$, $\bar{X}_4 = 3$, $\bar{X}_3 = 4$, $\bar{X}_2 = 5$, $\bar{X}_1 = 6$, $\bar{X}_0 = 9$ であり、 $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, $X_3 = 5$, $X_4 = 6$, $X_5 = 9$ を得る。Ref. [8] で用いた言葉を借りれば、 X_j は、 L_j -reduced state にある '最大ソリトン (largest soliton)' の内 1 つの位置を示している。すなわち、 X_{s+1} が、位置 $x_1^{(1)}$ にある 0-soliton の 0-reduced state における正しい位置を示す。

ここで、 $\alpha_k^{(j)}$ ($1 \leq \alpha_k^{(j)} \leq N_j$) を

$$\alpha_k^{(j)} = X_j - x_k^{(j)} \pmod{N_j} \quad (j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, n_j) \quad (1)$$

によって定める。ただし、

$$N_j := N - 2M + \sum_{i=1}^j 2n_i(L_i - L_j) \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

として、 L_j -reduced state の長さを表す。このとき、 $\alpha_1^{(1)} = N_1$ であり、 $\alpha_k^{(j)}$ は L_j -reduced state で基準としている最大ソリトンの位置から k 番目に離れた 0-soliton の位置までの距離を示している。したがって、状態 S は $\{\alpha_k^{(j)}\}_{j=1, k=1+\delta_{1,j}}^{s, n_j}$ と X_{s+1} を用いることで一意的に決定される。形式的には、

$$\{\alpha_k^{(j)}\}_{k=1}^{n_j} \in S^{n_j}(\mathbf{Z}_{N_j}) := \underbrace{\mathbf{Z}_{N_j} \times \mathbf{Z}_{N_j} \times \dots \times \mathbf{Z}_{N_j}}_{n_j} / S^{n_j} \quad (j = 2, 3, \dots, s)$$

と書ける. このとき, \mathbb{Z}_{N_j} は N_j 次の巡回群, S^{n_j} は n_j 次の対称群を表す. そして, L_1 -reduced state の中にある $n_1 - 1$ 個の 0-solitons に対して, $N_1 + 1$ 箇所の異なる位置が存在するので¹,

$$\{\alpha_k^{(1)}\}_{k=2}^{n_1} \in S^{n_1-1}(\mathbb{Z}_{N_1+1})$$

である. また, $X_{s+1} \in \mathbb{Z}_N$ であるので,

$$\tilde{V}_Y := S^{n_1-1}(\mathbb{Z}_{N_1+1}) \times S^{n_2}(\mathbb{Z}_{N_2}) \times \cdots \times S^{n_s}(\mathbb{Z}_{N_s}) \times \mathbb{Z}_N$$

と定義すれば, \tilde{V}_Y の要素は周期箱玉系の状態と対応する. ただし, 基準とする 0-soliton の選び方は n_1 通りあるので, 周期箱玉系の一つの状態に対応する \tilde{V}_Y の要素は n_1 個存在する. そこで, 同じ周期箱玉系の状態に対応する \tilde{V}_Y の要素は同一視することにする. この同値関係による \tilde{V}_Y の商集合を V_Y によって表すことで, 次の定理が得られる:

Theorem 1

M 個の玉と N 個の箱から構成される周期箱玉系で, ヤング図形 Y によって特徴づけられる保存量 $\{L_j, n_j\}_{j=1}^s$ をもつ状態全体の集合を Ω_Y で表すことにする. このとき, 2つの集合 Ω_Y と V_Y には一対一の対応が存在し, 10-eliminations と X_{s+1} , $\{\alpha_k^{(j)}\}_{j=1, k=1+\delta_{1,j}}^{s, n_j}$ を用いた平行移動をとともなう 10-eliminations の逆操作によって全単射が与えられる.

V_Y の要素から周期箱玉系の状態を構成する方法は, 後で挙げる具体例を参照していただきたい.

それでは, 本題である初期値問題の解法について考えていく. ここで, $S(t)$ は, 状態 S から時刻 t だけ進めたときの状態であるとする. Theorem 1 により, 周期箱玉系の動きは V_Y の要素として記述できるので, 状態 $S(t)$ を決定するには, 初期値 $(\{\alpha_k^{(j)}(0)\}_{j=1, k=1+\delta_{1,j}}^{s, n_j}, X_{s+1}(0)) \in V_Y$ から $(\{\alpha_k^{(j)}(t)\}_{j=1, k=1+\delta_{1,j}}^{s, n_j}, X_{s+1}(t)) \in V_Y$ が得られればよい. そして, これらの値の時間依存性については, すでに Ref. [8] の中で求められている:

Proposition 1 ([8] Theorem 3.1, Lemma 4.2 and Lemma 4.3)

$i = 1, 2, \dots, s+1$ に対して, $\gamma_i(t)$ を $\gamma_1(t) := 0$, $\gamma_2(t) := (L_1 - L_2)t$ および

$$\gamma_i(t) := (L_1 - L_i)t + 2 \sum_{j=2}^{i-1} (L_j - L_i) \sum_{k=1}^{n_j} \beta_k^{(j)}(t) \quad (i = 3, 4, \dots, s+1)$$

で定義する. ただし

$$\beta_k^{(j)}(t) := \left\lfloor \frac{\gamma_j(t) + \alpha_k^{(j)}(0) - 1}{N_j} \right\rfloor \quad (j = 2, 3, \dots, s, k = 1, 2, \dots, n_j).$$

すると

$$\alpha_k^{(j)}(t) = \alpha_k^{(j)}(0) + \gamma_j(t) \quad \text{mod } N_j$$

および

$$X_{s+1}(t) = X_{s+1}(0) + \gamma_{s+1}(t) \quad \text{mod } N$$

が成り立つ.

¹位置 X_1 に基準としている 0-soliton 以外の 0-soliton が存在するとき, その 0-soliton は基準としている 0-soliton の左側か右側のどちらかに位置することになる.

Remark 1

$\gamma_i(t)$ と $\alpha_k^{(j)}(t)$ は順次決定される。後で扱う具体例では、次の関係式を用いて決定していく：

$$\alpha_k^{(j)}(0) + \gamma_j(t) = N_j \beta_k^{(j)}(t) + \alpha_k^{(j)}(t).$$

まとめると、次に述べるようにして周期箱玉系の初期値問題が解かれたことになる：

Theorem 2

周期箱玉系の初期値問題は空間 V_Y の中で解かれる。任意時刻の状態は、*Proposition 1* にあるようにして明確に与えられる。

4 具体例

以下では具体例を用い、いかにして初期値問題を解くかについて説明する。それでは、前に用いた

$$(\#) \quad 00111011100100011110001101000000$$

を時刻 $t = 0$ での状態として扱うことにする。まず、図 2 と $\hat{E}^k(\#)$ から、 $s = 4$, $N_1 = 4$, $N_2 = 6$, $N_3 = 14$, $N_4 = 20$ および

$$x_1^{(1)}(0) = 2; \quad x_1^{(2)}(0) = 3; \quad x_1^{(3)}(0) = 10; \quad x_1^{(4)}(0) = 4, \quad x_2^{(4)}(0) = 7, \quad x_3^{(4)}(0) = 15$$

が得られる。基準にする位置 $X_j(0)$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) は

$$X_1(0) = 2, \quad X_2(0) = 3, \quad X_3(0) = 5, \quad X_4(0) = 6, \quad X_5(0) = 9$$

であるので、 $\alpha_k^{(j)}(0)$ が

$$\alpha_1^{(1)}(0) = 4; \quad \alpha_1^{(2)}(0) = 6; \quad \alpha_1^{(3)}(0) = 9; \quad \alpha_1^{(4)}(0) = 2, \quad \alpha_2^{(4)}(0) = 19, \quad \alpha_3^{(4)}(0) = 11$$

と求まる。

それでは、 $t = 10000$ での状態を考えることにする。*Proposition 1* を適用すれば、 $\alpha_k^{(j)}(t)$ と $\gamma_i(t)$ が次のようにして順次定まる：

$$(1) \quad N_2 = 6, \quad \gamma_2(t) = (L_1 - L_2)t = 10000$$

$$\Rightarrow \alpha_1^{(2)}(0) + \gamma_2(t) = 6 + 10000 = 1667 \cdot 6 + 4$$

$$\Rightarrow \alpha_1^{(2)}(t) = 4;$$

$$(2) \quad N_3 = 14, \quad \gamma_3(t) = (L_1 - L_3) \cdot t + 2(L_2 - L_3) \cdot 1667 = 36668$$

$$\Rightarrow \alpha_1^{(3)}(0) + \gamma_3(t) = 9 + 36668 = 2619 \cdot 14 + 11$$

$$\Rightarrow \alpha_1^{(3)}(t) = 11;$$

$$(3) \quad N_4 = 20,$$

$$\gamma_4(t) = (L_1 - L_4) \cdot t + 2(L_2 - L_4) \cdot 1667 + 2(L_3 - L_4) \cdot 2619 = 55240$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(4)}(0) + \gamma_4(t) = 2 + 55240 = 2762 \cdot 20 + 2 \\ \alpha_2^{(4)}(0) + \gamma_4(t) = 19 + 55240 = 2762 \cdot 20 + 19 \\ \alpha_3^{(4)}(0) + \gamma_4(t) = 11 + 55240 = 2762 \cdot 20 + 11 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1^{(4)}(t) = 2, \\ \alpha_2^{(4)}(t) = 19, \\ \alpha_3^{(4)}(t) = 11; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad N &= 32, \\
\gamma_5(t) &= (L_1 - L_5) \cdot t + 2(L_2 - L_5) \cdot 1667 + 2(L_3 - L_5) \cdot 2619 \\
&\quad + 2(L_4 - L_5) \cdot (2762 + 2762 + 2762) = 90384 \\
\Rightarrow X_5(t) &= X_5(0) + \gamma_5(t) \pmod{N = 9 + 90384} \pmod{32} \\
&= 25.
\end{aligned}$$

これらの情報から, $t = 10000$ の状態は 10 の組の挿入と平行移動により次のように構成される; まず, 10 の組を挿入していくと

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3^{\circ} & 4 \\ |0|0|0|0|, \end{array} \\
\rightarrow & \begin{array}{cccccc} 0^{\circ} & 1 & 2 & 3 & 4^{\circ} & 5 & 6 \\ |0|0|0|1|0|0|, \end{array} \\
\rightarrow & \begin{array}{cccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7^{\circ} & 8 & 9 & 10 \\ |1|0|0|0|0|1|1|0|0|0|, \end{array} \\
\rightarrow & \begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10^{\circ} & 11 & 12 & 13^{\circ} & 14 \\ |1|1|0|0|0|0|0|1|1|1|0|0|0|0|, \end{array} \\
\rightarrow & \begin{array}{cccccccccccccccc} 0 & 1 & 2^{\circ} & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11^{\circ} & 12 & 13^{\circ} & 14^{\circ} & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ |1|1|1|0|0|0|0|0|0|1|1|1|1|0|0|0|0|1|0|0|, \end{array} \\
\rightarrow & \begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20^{\circ} & 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ |1|1|1|0|1|1|0|0|0|0|0|0|0|1|1|1|0|1|1|1|0|0|1|0|0|0|0|0|, \end{array}
\end{aligned}$$

が得られる. ここで, ' $|$ ' は最大ソリトンの位置 (基準としている位置) を表し, ' $^{\circ}$ ' は 0-soliton の位置を表す. また, 位置 $x_1^{(1)}(t)$ は任意に選べるので, この例では $x_1^{(1)}(t) = 3$ とした. さらに, 上で得られた状態の最大ソリトンの位置が $X_{s+1}(t)$ となるように平行移動を行うと

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 & 25^{\circ} & 26 & 27 & 28 & 29 & 30 & 31 & 32 \\ |1|1|0|0|0|1|1|1|0|1|1|0|0|0|0|0|0|0|1|1|1|0|1|1|1|0|0|1|0|0|0|0|
\end{array}$$

が得られる. これが $t = 10000$ での状態である.

5 まとめ

周期箱玉系の初期値問題を初等的な方法を用いることで解いた. ここで用いた方法は, Ref. [13] で扱っている容量 ℓ の運搬車を導入して拡張された周期箱玉系に対しても同様に適用できる. (具体的には, Proposition 1 の中で $L_j \rightarrow \min[L_j, \ell]$ という置き換えを行うだけで, 後は同じである.) そして, 今回の方法とこれまでの代数曲線や表現論に基づく結果との間にある関係を明確にすることは, 今後の重要な課題の一つである.

参考文献

- [1] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, "On the initial value problem of a periodic box-ball system," J. Phys. A: Math. Gen. **39**, L617–L623 (2006).
- [2] D. Takahashi and J. Satsuma, "A soliton cellular automaton," J. Phys. Soc. Jpn. **59**, 3514–3519 (1990).
- [3] F. Yura and T. Tokihiro, "On a periodic soliton cellular automaton," J. Phys. A: Math. Gen. **35**, 3787–3801 (2002).

- [4] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, "From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure," *Phys. Rev. Lett.* **76**, 3247–3250 (1996).
- [5] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, "Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution," *Phys. Lett. A* **255**, 287–295 (1997).
- [6] T. Kimijima and T. Tokihiro, "Initial-value problem of the discrete periodic Toda equation and its ultradiscretization," *Inverse Problems* **18**, 1705–1732 (2002).
- [7] A. Kuniba, T. Takagi and A. Takenouchi, "Bethe ansatz and inverse scattering transform in a periodic box-ball system," *Nuclear Physics B* **747** [PM], 354–397 (2006).
- [8] D. Yoshihara, F. Yura and T. Tokihiro, "Fundamental cycle of a periodic box-ball system," *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 99–121 (2003).
- [9] J. Mada and T. Tokihiro, "Asymptotic behaviour of fundamental cycle of periodic box-ball system," *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 7251–7268 (2003).
- [10] T. Tokihiro and J. Mada, "Fundamental cycle of a periodic box-ball system: a number theoretical aspect," *Glasgow Math. J.* **47A**, 199–204 (2005).
- [11] M. Torii, D. Takahashi and J. Satsuma, "Combinatorial representation of invariants of a soliton cellular automaton," *Physica D* **92**, 209–220 (1996).
- [12] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, "Fundamental cycle of a periodic box-ball system and solvable lattice models," *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 4985–4997 (2006).
- [13] J. Mada, M. Idzumi and T. Tokihiro, "The exact correspondence between conserved quantities of a periodic box-ball system and string solutions of the Bethe ansatz equations," *J. Math. Phys.* **47**, 053507 (2006).