数理解析研究所講究録
第1542巻 2007年 145-155

Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space

Tetsuya Yamada
Department of Mathematics, Graduate School of Science,
Hiroshima University, Higashi-Hiroshima, 739-8526, JAPAN
tetsuya-yamada@hiroshima-u.ac.jp

本研究は永井敏隆氏 (広島大学大学院理学研究科) との共同研究である.

1 序

次の非線形偏微分方程式系の初期値問題について考える.

$$(\mathrm{CH})\quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u - \nabla\cdot(u\nabla v) & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ \partial_t v = \Delta v - v + u & x\in\mathbb{R}^n,\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x) & x\in\mathbb{R}^n. \end{cases}$$

この方程式系は走性による細胞性粘菌の集合体形成の数学モデルである ([2]). ここで, $u(x,t)$ を場所 x, 時間 t における粘菌の個体密度とし, また, $v(x,t)$ を場所 x, 時間 t における粘菌を誘引する化学物質の濃度を表すものとする.

本講究録では, (CH) の有界な時間大域解の減衰評価及び漸近形について考えるのが目的である. ここで, (CH) の時間大域解が有界であるとは

$$\sup_{t>0}\left(\|u(t)\|_{L^q}+\|v(t)\|_{L^q}\right)<\infty \quad \text{for} \quad q=1,\infty$$

を満たすことをいう.

上のような (CH) の解の存在については, 空間 1 次元の場合では [1] で, また, 空間 2 次元以上の場合, [3] で $\|u_0\|_{L^\infty}$ の大きさに関わらず, $\|u_0\|_{L^1}$, $\|\nabla v_0\|_{L^1}$, $\|\nabla v_0\|_{L^\infty}$ が十分小さいならば, (CH) の有界な時間大域解が存在することが保障されている.

(CH) の有界な時間大域解の減衰評価と漸近形に関しては空間 2 次元以上の場合に, [3] で, このような (CH) の有界な時間大域解は時間無限大で減衰し, 減衰評価及び漸近形が得られた.

本講究録では, 空間 1 次元の場合の (CH) の有界な時間大域解の減衰評価と漸近形と u_0 が適切な条件を課すと, 減衰評価及び漸近形が改善されることが得られたので, これを報告する.

2 主結果

ここでは得られた主結果を述べる．以下の定理では，(u, v) を (CH) の有界な時間大域解とし，M，α，$\beta(t)$，β，$G(x,t)$ を

$$M=\int_{\mathbb{R}^n} u_0 dy, \quad \alpha=\int_{\mathbb{R}^n} y u_0 dy, \quad \beta(t)=\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla v dy ds,$$
$$\beta=\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla v dy ds, \quad G(x,t)=(4\pi t)^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right)$$

とする．ここで，$G(x,t)$ は熱核と呼ばれるものである．また，

$$u_0, v_0, \partial_j v_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \quad (1 \leq j \leq n)$$

を仮定する．ただし，$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ は $\mathbb{R}^n$ 上有界で，一様連続な関数空間である．

このとき，次の定理が得られた．ただし，以下の定理では v の減衰評価と漸近形は u と同じなので省略する．

定理 2.1. $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ とする．このとき，以下が成り立つ．

$$\sup_{t>0} (1+t)^{n(1-1/p)/2}(\|u(t)\|_{L^p}+\|v(t)\|_{L^p})<\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty} t^{n(1-1/p)/2}\|u(t)-MG(t)\|_{L^p}=0.$$

次に，$|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ と仮定する．また，定理 2.2 を述べるために

$$d(t;p)=\begin{cases} \dfrac{t^{(1-1/p)/2+1/2}}{\log t} & n=1, \\ t^{n(1-1/p)/2+1/2} & n\geq 2 \end{cases}$$

とする．このとき，定理 2.1 は以下のように改善される．

定理 2.2. $1 \leq p \leq \infty$ とする．条件 $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ の下で，以下が成り立つ．

(1) $\sup_{t\geq 2} d(t;p)\|u(t)-MG(t)\|_{L^p}<\infty.$

(2) $n=1$ のとき，$|\beta(t)| \leq Const. \log(1+t) \quad (t>0)$，

$$\lim_{t\to\infty} d(t;p)\|u(t)-\{MG(t)-(\alpha+\beta(t))\partial_x G(t)\}\|_{L^p}=0.$$

(3)　$n \geq 2$ のとき, β は収束し,

$$\lim_{t\to\infty} d(t;p)\|u(t) - \{MG(t) - (\alpha+\beta)\cdot\nabla G(t)\}\|_{L^p} = 0.$$

さらに, $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ に加えて $M = 0$ を仮定すると, 次の定理が得られる.

定理 2.3. $n \geq 1$, $1 \leq p \leq \infty$ とする. 条件 $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $M = 0$ の下で, 以下が成り立つ.

(1)　$\sup_{t>0} (1+t)^{n(1-1/p)/2+1/2}\|u(t)\|_{L^p} < \infty.$

(2)　β は収束し, $\lim_{t\to\infty} t^{n(1-1/p)/2+1/2}\|u(t) + (\alpha+\beta)\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0.$

以降の節では (CH) の有界な時間大域解の減衰評価と定理 2.1, 定理 2.2 の証明の概略を説明する. 定理 2.3 の証明は定理 2.2 と似たような議論をすれば得られるので, ここでは証明を省略する. 詳しくは [4] を参照せよ.

3　(CH) の有界な時間大域解の減衰評価

この節では, 主結果を証明するために鍵となる (CH) の有界な時間大域解の減衰評価を紹介し, その証明の概略を与える. 詳しくは [4] を参照せよ.

命題 3.1. $n \geq 1$, $1 < p \leq \infty$ とする. このとき, 以下の減衰評価が成り立つ.

(3.1)
$$\sup_{t\geq 1} (1+t)^{n(1-1/p)/2+1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^p} < \infty,$$

(3.2)
$$\sup_{t>0} (1+t)^{n(1-1/p)/2+1/2}\|\nabla v(t)\|_{L^p} < \infty,$$

(3.3)
$$\sup_{t>0} (1+t)^{n(1-1/p)/2}\|u(t)\|_{L^p} < \infty.$$

証明の概略 空間 2 次元以上の場合, [3] で (3.3) が得られているので, 空間 1 次元の場合の (3.3) と空間 1 次元以上の (3.1) と (3.2) を証明すればよい.

任意に $t \geq 4$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ を固定する. また, β を

$$\beta = 0 \quad \text{if} \quad n \geq 2, \quad \beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{if} \quad n = 1$$

とする. このとき, [3], [4] で以下の減衰評価を得た: $1 < p \leq \infty$ に対して,

(3.4)
$$\sup_{t>0} (1+t)^{n(1-1/p)/2-\beta}(\|u(t)\|_{L^p} + \|\nabla v(t)\|_{L^p}) < \infty.$$

また, [3] の補題 2.3 と解の有界性より,

$$\sup_{t>0}\|\nabla v(t)\|_{L^p}<\infty \quad \text{for} \quad 1\le p\le\infty \tag{3.5}$$

に注意する. この減衰評価を適用して, (3.1) を証明する. この証明は 2 段に分けて行う.

第 1 段. (CH) の有界な時間大域解 u は次のような積分方程式で表すことができる:

$$u(t)=e^{t\Delta}u_0-\int_0^t\nabla\cdot e^{(t-s)\Delta}(u\nabla v)(s)ds \tag{3.6}$$

ここで, $e^{t\Delta}f$ を $e^{t\Delta}f=\int_{\mathbb{R}^n}G(x-y,t)f(y)dy$ とする. (3.6) より, $\nabla u(t)$ を

$$\begin{aligned}\nabla u(t)=\nabla e^{t\Delta}u_0&-\int_0^{(1-\varepsilon)t}\nabla\nabla\cdot e^{(t-s)\Delta}(u\nabla v)(s)ds\\&-\int_{(1-\varepsilon)t}^t\nabla e^{(t-s)\Delta}(\nabla u\cdot\nabla v)(s)ds\\&-\int_{(1-\varepsilon)t}^t\nabla e^{(t-s)\Delta}(u\Delta v)(s)ds=\nabla e^{t\Delta}u_0-I_1^\varepsilon(t)-I_2^\varepsilon(t)-I_3^\varepsilon(t)\end{aligned}$$

とする. $e^{t\Delta}f$ に関する L^p–L^q 評価と (3.4), (3.5) より, $\|I_1^\varepsilon(t)\|_{L^p}$, $\|I_2^\varepsilon(t)\|_{L^p}$, $\|I_3^\varepsilon(t)\|_{L^p}$ の評価はそれぞれ

$$\begin{aligned}\|I_1^\varepsilon(t)\|_{L^p}&\le C\int_0^{(1-\varepsilon)t}(t-s)^{-n(1-1/p)/2-1}\|u(s)\|_{L^\infty}\|\nabla v(s)\|_{L^1}ds\\&\le C\int_0^{(1-\varepsilon)t}(t-s)^{-n(1-1/p)/2-1}(1+s)^{-n/2+\beta}ds\\&\le C\varepsilon^{-n(1-1/p)/2-1}t^{-n(1-1/p)/2-1}\times\begin{cases}t^{1/2+\beta}&\text{if } n=1,\\\log t&\text{if } n=2,\\1&\text{if } n\ge3,\end{cases}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|I_2^\varepsilon(t)\|_{L^p}&\le C\int_{(1-\varepsilon)t}^t(t-s)^{-1/2}\|\nabla u(s)\|_{L^p}\|\nabla v(s)\|_{L^\infty}ds\\&\le C\int_{(1-\varepsilon)t}^t(t-s)^{-1/2}s^{-n/2+\beta}\|\nabla u(s)\|_{L^p}ds,\end{aligned}$$

$$\|I_3^\varepsilon(t)\|_{L^p}\le C\int_{(1-\varepsilon)t}^t(t-s)^{-1/2}s^{-n/2+\beta}\|\Delta v(s)\|_{L^p}ds$$

となる.

次に, $\|\Delta v(s)\|_{L^p}$ を評価する. 任意に $s \geq 2$ を固定する. (CH) の有界な時間大域解 v を積分方程式にし, $\Delta v(s)$ を

$$\begin{aligned}\Delta v(s) &= e^{-s}\nabla\cdot e^{s\Delta}\nabla v_0 + \int_0^{(1-\varepsilon)s} e^{-(s-\xi)}\Delta e^{(s-\xi)\Delta}u(\xi)d\xi \\ &\quad + \int_{(1-\varepsilon)s}^{s} e^{-(s-\xi)}\nabla\cdot e^{(s-\xi)\Delta}\nabla u(\xi)d\xi \\ &= e^{-s}\nabla\cdot e^{s\Delta}\nabla v_0 + J_1^\varepsilon(s) + J_2^\varepsilon(s).\end{aligned}$$

とする.

ここで, 関数 $F(t)$ を

$$F(t) = \sup_{1\leq s\leq t} s^{n(1-1/p)/2+1/2}\|\nabla u(s)\|_{L^p}.$$

とおく. $e^{t\Delta}f$ に関する L^p–L^q 評価と解の有界性より, $\|J_1^\varepsilon(s)\|_{L^p}$, $\|J_2^\varepsilon(s)\|_{L^p}$ の評価はそれぞれ

$$\begin{aligned}\|J_1^\varepsilon(s)\|_{L^p} &\leq C\int_0^{(1-\varepsilon)s} e^{-(s-\xi)}(s-\xi)^{-n(1-1/p)/2-1}\|u(\xi)\|_{L^1}d\xi \\ &\leq C\varepsilon^{-n(1-1/p)/2-3/2}s^{-n(1-1/p)/2-1/2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|J_2^\varepsilon(s)\|_{L^p} &\leq C\int_{(1-\varepsilon)s}^{s} e^{-(s-\xi)}(s-\xi)^{-1/2}\|\nabla u(\xi)\|_{L^p}d\xi \\ &\leq F(s)\int_{(1-\varepsilon)s}^{s} e^{-(s-\xi)}(s-\xi)^{-1/2}\xi^{-n(1-1/p)/2-1/2}d\xi \\ &\leq Cs^{-n(1-1/p)/2-1/2}F(s)\end{aligned}$$

となる. 従って, 今まで得られた評価をすべて合わせると $t^{n(1-1/p)/2+1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^p}$ の評価は

$$\begin{aligned}t^{n(1-1/p)/2+1/2}\|\nabla u(t)\|_{L^p} &\leq C + C\varepsilon^{-n(1-1/p)/2-1}t^{\beta} \\ &\quad + C\varepsilon^{1/2}t^{\beta} + C\varepsilon^{1/2}t^{\beta}F(t)\end{aligned} \tag{3.7}$$

となる. ここで, 正の定数 C を $C > 1$ となるようにとる.

固定していた ε を $\varepsilon = t^{-2\beta}/4C^2$ ととる. この ε は $\varepsilon \in (0, 1/2)$ を満たしているので, この ε を (3.7) に代入すると任意の $t \geq 4$ に対して,

$$\begin{aligned}\|\nabla u(t)\|_{L^p} &\leq Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2} \\ &\quad + Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2+(n+2-n/p)\beta}\end{aligned} \tag{3.8}$$

となる.

$n=1$ の場合は $(3-1/p)\beta\in(0,1/2]$ となるように β の範囲を決める. それから $(3-1/p)\beta\in(0,1/2]$ を再び β とおくと, (3.8) より $\beta\in(0,1/2]$ に対して,

$$\|\partial_x u(t)\|_{L^p}\le Ct^{-(1-1/p)/2-1/2+\beta}\quad\text{for}\quad t\ge 4$$

となる. また, 上の評価と [3] の補題 2.3 より,

$$\|\partial_x v(t)\|_{L^p}\le C(1+t)^{-(1-1/p)/2-1/2+\beta}\quad\text{for}\quad t>0 \tag{3.9}$$

となる.

$n\ge 2$ の場合は $\beta=0$ なので, (3.8) から (3.1) と (3.2) は示される.

第 2 段. この段では $n=1$, $1<p\le\infty$ とし, (3.3) を証明する. 任意に $t\ge 2$ を固定する. また, $I(t)$ を

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^t\partial_x e^{(t-s)\Delta}(u\partial_x v)(s)ds\\&=\int_0^{t/2}\partial_x e^{(t-s)\Delta}(u\partial_x v)(s)ds+\int_{t/2}^t\partial_x e^{(t-s)\Delta}(u\partial_x v)(s)ds\\&=I_1(t)+I_2(t)\end{aligned}$$

とする. $e^{t\Delta}f$ に関する L^p-L^q 評価と (3.4), (3.9) より, $\|I_1(t)\|_{L^p}$ の評価は

$$\begin{aligned}\|I_1(t)\|_{L^p}&\le C\int_0^{t/2}(t-s)^{-(1-1/p)/2-1/2}\|u(s)\|_{L^2}\|\partial_x v(s)\|_{L^2}ds\\&\le Ct^{-(1-1/p)/2-1/2+2\beta}\end{aligned}$$

となり, また r を $1<r<p$, $1/2-(1/r-1/p)/2>0$ とすると, $\|I_2(t)\|_{L^p}$ の評価は

$$\begin{aligned}\|I_2(t)\|_{L^p}&\le C\int_{t/2}^t(t-s)^{-(1/r-1/p)/2-1/2}\|u(s)\|_{L^\infty}\|\partial_x v(s)\|_{L^r}ds\\&\le Ct^{-(1-1/p)/2-1/2+2\beta}\end{aligned}$$

となる. 従って, これらの評価を合わせると,

$$\|I(t)\|_{L^p}\le Ct^{-(1-1/p)/2-1/2+2\beta}$$

となる. 故に, $\beta\in(0,1/4]$ とすると, (3.6) から, (3.3) は示される.

次に (3.1), (3.2) を示す. (3.3) と [3] の補題 2.3 より,

$$\|\partial_x v(t)\|_{L^p}\le C(1+t)^{-(1-1/p)}\quad\text{for}\quad t>0 \tag{3.10}$$

となる. 従って, $\beta=0$ として第 1 段の議論を繰り返すと, (3.1) がいえる. また, (3.1) と [4] の補題 3.4 より, (3.2) が示される.

4　定理 2.1 の証明

この節では, 定理 2.1 の証明の鍵となる命題の証明の概略を与える. このとき, 次の命題が成り立つ. この命題より定理 2.1 は証明される. 詳しくは [4] を参照せよ.

命題 4.1. $1 \le p \le \infty$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

$$\sup_{t\geq 2} d(t;p)\|I(t)\|_{L^p} < \infty \tag{4.1}$$

ここで, $I(t) = \int_0^t \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}(u\nabla v)(s)ds$ とする.

証明の概略 任意に $t \geq 2$ を固定する. $I(t)$ を以下のように分ける.

$$I(t) = \left(\int_0^{t/2} + \int_{t/2}^{t}\right) \nabla \cdot e^{(t-s)\Delta}(u\nabla v)(s)ds := I_1(t) + I_2(t)$$

$e^{t\Delta}f$ に関する $L^p - L^q$ 評価と命題 3.1 から, $\|I_1(t)\|_{L^p}$, $\|I_2(t)\|_{L^p}$ の評価は

$$\|I_1(t)\|_{L^p} \leq Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2} \times \begin{cases} \log t & n = 1, \\ 1 & n \geq 2. \end{cases} \quad \|I_2(t)\|_{L^p} \leq Ct^{-n(1-1/p)/2-n/2}$$

となる. よって, 命題 4.1 は示される.

5　定理 2.2 の証明

定理 2.2 を証明するためには, 次の命題が必要である.

命題 5.1. $n \geq 1$, $1 \le p \le \infty$ とする. このとき,

$$\lim_{t\to\infty} d(t;p)\|I(t) - \beta(t)\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0 \tag{5.1}$$

が成り立つ.

この命題を認めて, 定理 2.2 を証明する. 命題 5.1 は後で示す.

定理 2.2 の証明の概略. $|x|u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ より,

$$\|e^{t\Delta}u_0 - MG(t)\|_{L^p} \leq Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2}$$

が成り立つ. よって, 命題 4.1 より, 定理 2.2 の (1) を得る.

次に, $u(t)$ の漸近形は命題 5.1 と

$$\lim_{t\to\infty} t^{n(1-1/p)/2+1/2}\|e^{t\Delta}u_0 - MG(t) + \alpha\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0 \tag{5.2}$$

から

$$\lim_{t\to\infty} d(t;p)\|u(t) - \{MG(t) - (\alpha+\beta(t))\cdot\nabla G(t)\}\|_{L^p} = 0 \tag{5.3}$$

を得る.

ここで, (3.2), (3.3) から $t>0$ に対して,

$$|\beta(t)| \le C \times \begin{cases} \log(1+t) & n=1, \\ 1 & n\ge 2. \end{cases}$$

であり, また, $\|\nabla G(t)\|_{L^p} \le Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2}$ から, 空間 2 次元以上の場合, (5.3) において $\beta(t)$ を β に書き換えることができる.

最後に, $v(t)$ の漸近形を考える. $v(t)$ は以下のように書ける:

$$\begin{aligned} &v(t) - \{MG(t) - (\alpha+\beta(t))\cdot\nabla G(t)\} \\ &= e^{-t}\{e^{t\Delta}v_0 - MG(t) + \alpha\cdot\nabla G(t)\} + P(t)\cdot\nabla G(t) + Q(t) \end{aligned} \tag{5.4}$$

ここで, $P(t)$, $Q(t)$ を

$$P(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} e^{-(t-s)}u\nabla v dyds,$$

$$Q(t) = \int_0^t e^{-(t-s)}e^{(t-s)\Delta}\{u(s) - MG(s) + (\alpha+\beta(s))\cdot\nabla G(s)\}ds$$

とする.

まず,

$$\lim_{t\to\infty} t^{n(1-1/p)/2+1/2}\|P(t)\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} = 0, \quad \lim_{t\to\infty} d(t;p)\|Q(t)\|_{L^p} = 0 \tag{5.5}$$

が得られる. 証明は [4] を参照せよ. 故に, (5.4), (5.5) より,

$$\lim_{t\to\infty} d(t;p)\|v(t) - \{MG(t) - (\alpha+\beta(t))\cdot\nabla G(t)\}\|_{L^p} = 0$$

を得る. 空間 2 次元以上の場合, $u(t)$ のときと同様に $\beta(t)$ を β に書き換えることができる.

命題 5.1 の証明の概略. 任意に $\varepsilon \in (0,1)$ を固定する. $I(t) - \beta(t) \cdot \nabla G(t)$ を以下のようにわける.

$$\begin{aligned} I(t) - V(t) \cdot \nabla G(t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G(x-y, t-s) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds \\ &\quad - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G(x,t) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds \\ &= K_1^\varepsilon(t) + K_2^\varepsilon(t) + K_3^\varepsilon(t) + K_4^\varepsilon(t) + K_5^\varepsilon(t), \end{aligned}$$

ここで,

$$K_1^\varepsilon(t) = \int_{\varepsilon t/2}^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G(x-y, t-s) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds,$$

$$K_2^\varepsilon(t) = -\int_{\varepsilon t/2}^t \int_{\mathbb{R}^n} \nabla G(x,t) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds,$$

$$K_3^\varepsilon(t) = \int_0^{\varepsilon t/2} \int_{|y| \geq \varepsilon\sqrt{t}} \nabla G(x-y, t-s) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds,$$

$$K_4^\varepsilon(t) = -\int_0^{\varepsilon t/2} \int_{|y| \geq \varepsilon\sqrt{t}} \nabla G(x,t) \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds,$$

$$K_5^\varepsilon(t) = \int_0^{\varepsilon t/2} \int_{|y| \leq \varepsilon\sqrt{t}} \{\nabla G(x-y, t-s) - \nabla G(x,t)\} \cdot u(y,s) \nabla v(y,s) dyds.$$

とする.

(3.2), (3.3) と $e^{t\Delta} f$ に対する L^p–L^q 評価より, $\|K_1^\varepsilon(t)\|_{L^p}$ は

$$\begin{aligned} \|K_1^\varepsilon(t)\|_{L^p} &\leq C \int_{\varepsilon t/2}^t (t-s)^{-1/2} \|u(s)\|_{L^p} \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds \\ &\leq C\varepsilon^{-n(1-1/p)/2 - n/2 - 1/2} t^{-n(1-1/p)/2 - n/2} \end{aligned}$$

となる.

次に, $\|K_2^\varepsilon(t)\|_{L^p}$, $\|K_4^\varepsilon(t)\|_{L^p}$ は

$$\begin{aligned} \|K_2^\varepsilon(t)\|_{L^p} &\leq \int_{\varepsilon t/2}^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(y,s)| |\nabla v(y,s)| dyds \, \|\nabla G(t)\|_{L^p} \\ &\leq Ct^{-n(1-1/p)/2 - 1/2} \int_{\varepsilon t/2}^t \|u(s)\|_{L^2} \|\nabla v(s)\|_{L^2} ds \\ &\leq C\varepsilon^{-n/2 - 1/2} t^{-n(1-1/p)/2 - n/2}, \end{aligned}$$

$$\|K_4^\varepsilon(t)\|_{L^p} \leq Ct^{-n(1-1/p)/2 - 1/2} \int_0^{\varepsilon t/2} \int_{|y| \geq \varepsilon\sqrt{t}} |u(y,s)| |\nabla v(y,s)| dyds$$

となる.

最後に, Minkowski の不等式より, $\|K_3^\varepsilon(t)\|_{L^p}$, $\|K_5^\varepsilon(t)\|_{L^p}$ は

$$\begin{aligned}\|K_3^\varepsilon(t)\|_{L^p} &\leq \int_0^{\varepsilon t/2}\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}} \|\nabla G(\cdot-y,t-s)\|_{L^p}|u(y,s)||\nabla(y,s)|dyds\\ &\leq Ct^{-n(1-1/p)/2-1/2}\int_0^{\varepsilon t/2}\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}}|u(y,s)||\nabla v(y,s)|dyds.\end{aligned}$$

$$\|K_5^\varepsilon(t)\|_{L^p} \leq \int_0^{\varepsilon t/2}\int_{|y|\leq\varepsilon\sqrt{t}} \|\nabla G(\cdot-y,t-s)-\nabla G(\cdot,t)\|_{L^p}|u(y,s)||\nabla v(y,s)|dyds$$

となる.

ここで, 簡単な計算より,

$$\sup_{0\leq s\leq\varepsilon t/2, |y|\leq\varepsilon\sqrt{t}} \|\nabla G(\cdot-y,t-s)-\nabla G(\cdot,t)\|_{L^p} \leq C\varepsilon t^{-n(1-1/p)/2-1/2}.$$

が得られ, (3.2), (3.3) から $t\geq 2$ に対して,

$$\begin{aligned}&\int_0^{\varepsilon t/2}\int_{|y|\leq\varepsilon\sqrt{t}}|u(y,s)||\nabla v(y,s)|dyds\\ &\qquad\leq \int_0^t \|u(s)\|_{L^2}\|\nabla v(s)\|_{L^2}ds \leq C\times\begin{cases}\log t & n=1,\\ 1 & n\geq 2.\end{cases}\end{aligned}$$

を得る. 従って,

$$\|K_5^\varepsilon(t)\|_{L^p} \leq \frac{C\varepsilon}{d(t;p)} \quad \text{for} \quad t\geq 2$$

となる.

以上から, $\|K_k^\varepsilon(t)\|_{L^p}$ $(1\leq k\leq 5)$ の評価をまとめると, $t\geq 2$ に対して,

$$d(t;p)\|I(t)-\beta(t)\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} \leq C_\varepsilon C(t)+CD(t)+C\varepsilon \tag{5.6}$$

となる. ここで,

$$C_\varepsilon = C\varepsilon^{-n(1-1/p)/2-n/2-1/2}(1+\varepsilon^{n(1-1/p)/2}),\quad C(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\log t} & n=1,\\ t^{-n/2+1/2} & n\geq 2,\end{cases}$$

$$D(t)=\int_0^{\varepsilon t/2}\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}}|u(y,s)||\nabla v(y,s)|dyds\times\begin{cases}\dfrac{1}{\log t} & n=1,\\ 1 & n\geq 2.\end{cases}$$

となる.

今から, 次のことを示す.

(5.7)
$$\lim_{t\to\infty} D(t) = 0$$

実際, 空間 2 次元以上の場合は (3.2), (3.3) から, (5.7) が成り立つのは明らかである. よって, 空間 1 次元の場合の (5.7) を示せばよい.

[4] の補題 3.3 と命題 4.1 より,

$$\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}} |e^{s\Delta}u_0(y)|dy \leq C\exp\Big(-\frac{\varepsilon^2 t}{32s}\Big) + \int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}/2} |u_0(y)|dy.$$

$$\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}} |I(y,s)|dy \leq \|I(s)\|_{L^1} \leq C(1+s)^{-1/2}\log(2+s)\ (s>0)$$

だから, (3.2) より, $D(t)$ は

$$\begin{aligned} D(t) &\leq \frac{1}{\log t}\int_0^{\varepsilon t/2} \|\partial_y v(s)\|_{L^\infty} ds \int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}} |u(y,s)|dy \\ &\leq \frac{C}{\log t}\int_{\varepsilon/16}^{\infty} \frac{e^{-\xi}}{\xi^2}d\xi + C\int_{|y|\geq\varepsilon\sqrt{t}/2} |u_0(y)|dy + \frac{C}{\log t}, \end{aligned}$$

となる. 故に, (5.7) を得る.

$C(t) \to 0$, $D(t) \to 0$ $(t\to\infty)$ により, (5.6) から,

$$\limsup_{t\to\infty} d(t;p)\|I(t) - \beta(t)\cdot\nabla G(t)\|_{L^p} \leq C\varepsilon$$

がいえる. ε は十分小さいので, 命題 5.1 を得る.

参考文献

[1] S. Childress and J. K. Percus, Nonlinear aspects of chemotaxis, Math. Biosci., **56** (1981), 271–237.

[2] E. F. Keller and L. A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, J. Theoret. Biol., **26** (1970), 399–415.

[3] T. Nagai, R. Syukuinn and M. Umesako, Decay properties and asymptotic profiles of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in R^N, Funkcialaj Ekvacioj, **46** (2003), 383–407.

[4] T. Nagai and T.Yamada, Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space, submitted.