数理解析研究所講究録
第 1542 巻 2007 年 102-116

Convergence of Optimal Control for Quasilinear Elliptic-Parabolic Variational Inequalities with Time-Dependent Constraints

Noriaki Yamazaki (山崎教昭)
Department of Mathematical Science, Common Subject Division,
Muroran Institute of Technology, Muroran, Japan
(室蘭工業大学・工学部)

1 序

本稿では，次のような時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題を考察する：

問題 (P) Find a function $u:[0,T]\to H^1(\Omega)$ satisfying the following:

(a) $u\in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ and $b(u)\in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$.

(b) $u(t)\in K(t)$ for a.e. $t\in(0,T)$.

(c) For a.e. $t\in(0,T)$, the following inequality holds:

$$(b(u)_t,u-v)+\int_\Omega a(x,b(u),\nabla u)\cdot\nabla(u-v)dx\leq(f(t),u-v) \tag{1.1}$$

for all $v\in K(t)$.

(d) $b(u(0))=b_0$ in $L^2(\Omega)$.

ここで，T は正定数であり，Ω は $\mathbb{R}^N$ $(N\geq1)$ の有界部分領域である．$b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は与えられた非減少関数である．$a(x,s,p)$ は quasi–linear elliptic vector field であり，特に

$$a(x,s,p)=\partial_pA(x,s,p)$$

となるポテンシャル関数 $A:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ が存在すると仮定する．$(\cdot,\cdot)$ は $L^2(\Omega)$-内積である．時間依存制約 $K(t)$ は $H^1(\Omega)$ の凸部分集合であり，$f(t,x)$ は $(0,T)\times\Omega$ 上の与えられた関数とする．また，b_0 は与えられた初期値である．

変分不等式 (1.1) は，領域 $\{b'(u)=0\}$ において楕円型であり，領域 $\{b'(u)>0\}$ において放物型であるので，(1.1) は楕円–放物型変分不等式という．特に，(1.1) は楕円–放物型方程式

$$b(u)_t-\nabla\cdot a(x,b(u),\nabla u)=f(t,x)\qquad\text{in }(0,T)\times\Omega$$

の弱形式であり，実際，ダムなど porous media 内の水の浸透を記述する数学モデルで利用されている (cf [1, 2]).

本稿では，まず，時間依存制約をもつ楕円–放物型変分問題 (P) に対する最適制御問題を考察する．具体的には，次の問題を考える：

問題 (OP) Find an optimal control $f^* \in F$ such that

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f).$$

ここで，$J(f)$ は

$$J(f) := \frac{1}{2}\int_0^T |b(u) - b_d|^2_{L^2(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|^2_{H^1(\Omega)} dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f_t|^2_{L^2(\Omega)} dt \tag{1.2}$$

と定義されたコスト関数である．b_d は $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ の与えられた目標であり，u は制御項 f に対する状態問題 (P) の一意解である．また，F は

$$F := \{f \in L^2(0,T;H^1(\Omega)) \ ; \ f_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\} \tag{1.3}$$

と定義されたコントロール空間である．

一般的に $b(\cdot)$ の逆関数は多価である為，問題 (P) や (OP) に対する数値実験は難しい．そこで，数値解析の立場から，問題 (P) や (OP) に対する近似問題を考える．まず，(P) に対し，次の近似問題を考える：

問題 $(\mathbf{P})_\varepsilon$ Find a function $u_\varepsilon : [0,T] \to H^1(\Omega)$ satisfying the following:

(a) $u_\varepsilon \in L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$ and $b_\varepsilon(u_\varepsilon) \in W^{1,2}(0,T;L^2(\Omega))$.

(b) $u_\varepsilon(t) \in K(t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(c) For a.e. $t \in (0,T)$, the following inequality holds:

$$(b_\varepsilon(u_\varepsilon)_t, u_\varepsilon - v) + \int_\Omega a(x, b_\varepsilon(u_\varepsilon), \nabla u_\varepsilon) \cdot \nabla(u_\varepsilon - v) dx \le (f(t), u_\varepsilon - v)$$

for all $v \in K(t)$.

(d) $b_\varepsilon(u_\varepsilon(0)) = b_{0,\varepsilon}$ in $L^2(\Omega)$.

ここで，$\varepsilon \in (0,1]$ は近似パラメーターであり，$b_\varepsilon(\cdot)$ は $b(\cdot)$ の近似関数である。$b_\varepsilon(\cdot)$ の典型的な例は

$$b_\varepsilon(r) := b(r) + \varepsilon r \qquad \text{for all } r \in \mathbb{R}$$

である。

次に，(OP) に対する近似最適制御問題を考える：

問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ Find an optimal control $f_\varepsilon^* \in F$ such that

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon^*) = \inf_{f \in F} J_\varepsilon(f).$$

ここで，$J_\varepsilon(f)$ は

$$J_\varepsilon(f) := \frac{1}{2}\int_0^T |b_\varepsilon(u_\varepsilon) - b_d|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|_{H^1(\Omega)}^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f_t|_{L^2(\Omega)}^2 dt \tag{1.4}$$

と定義された近似コスト関数である．b_d は $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ の与えられた目標であり，u_ε は制御項 f に対する近似状態問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の一意解である．また，F は (1.3) で定義されたコントロール空間である．

本稿の最終目的は，問題 (P) と近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の関係，及び，最適制御問題 (OP) とその近似問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の関係を明らかにすることである．

記号

本稿を通じて，$H := L^2(\Omega)$ とし，内積とノルムをそれぞれ $(\cdot,\cdot)$，$|\cdot|_H$ で表す。同様に，$V := H^1(\Omega)$ とし，そのノルムを $|z|_V := (|z|_H^2 + |\nabla z|_H^2)^{\frac{1}{2}}$ とする。

また，

$$u \vee v := \sup\{u, v\}, \quad u \wedge v := \inf\{u, v\}$$

とする．特に，$[u]^+ := u \vee 0$ とする．

2 仮定と主定理

まず，問題 (P) に対する解の定義を与える．

定義 2.1. $f \in L^2(0,T;H)$, $b_0 \in H$ とする．このとき，次の 4 条件 (a)–(d) を満たすとき，関数 $u : [0,T] \to V$ はデータ $\{b_0, f\}$ をもつ問題 (P) の解であるという:

(a) $u \in L^\infty(0,T;V)$ and there exists $u^* \in W^{1,2}(0,T;H)$ such that $b(u(t)) = u^*(t)$ for a.e. $t \in (0,T)$ (cf. Remark 2.2).

(b) $u(t) \in K(t)$ for a.e. $t \in (0,T)$.

(c) For a.e. $t \in (0,T)$ the following inequality holds:

$$(u_t^*, u - v) + \int_\Omega a(x, b(u), \nabla u) \cdot \nabla(u - v)dx \le (f(t), u - v)$$

for all $v \in K(t)$.

(d) $u^*(0) = b_0$ in H.

Remark 2.2. 定義 2.1 の条件 (a) における関数 u^* と $b(u)$ を同一視し，今後，u^* の代わりに $b(u)$ と書くことにする.

近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ に対する解 u_ε の定義は，定義 2.1 において，関数 u (resp. $b(u)$) を u_ε (resp. $b_\varepsilon(u_\varepsilon)$) でおきかえることにより与えられる.

ここで，次を仮定する：

(A1) $a(x,s,p) = \partial_p A(x,s,p)$ for some potential function $A(x,s,p)$. There exist constants $\mu > 0$, $C_1 = C_1(a) > 0$ and $C_2 = C_2(a) > 0$ such that

$$\begin{aligned}
[a(x,s,p) - a(x,s,\hat{p})] \cdot (p - \hat{p}) &\geq \mu |p - \hat{p}|^2, \\
|a(x,s,p)|^2 + |A(x,s,p)| + |\partial_s A(x,s,p)|^2 &\leq C_1(1 + |s|^2 + |p|^2), \\
|a(x,s,p) - a(x,\hat{s},p)| &\leq C_2(1 + |p|)|s - \hat{s}|
\end{aligned}$$

for all $x \in \Omega$, s, $\hat{s} \in \mathbb{R}$, p, $\hat{p} \in \mathbb{R}^N$.

Moreover, $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ and $A(\cdot,\cdot,\cdot)$ satisfy the Carathéodory condition.

(A2) $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is bounded, nondecreasing and Lipschitz continuous.

(A3) $K(t)$ is a non-empty, closed and convex set in V for all $t \in [0,T]$.

(A4) For any $z, \overline{z} \in K(t)$ and $w, \overline{w} \in V$ with $w \leq z$, $\overline{z} \leq \overline{w}$, we have

$$w \vee \overline{z}, \ z \wedge \overline{w} \in K(t).$$

(A5) There is a function $\alpha \in W^{1,2}(0,T)$ satisfying the following property $(\star)$:

$(\star)$: For any $0 \leq s < t \leq T$, $w \in V$ and $z \in K(s)$ there exists $\tilde{z} \in K(t)$ such that

$$|\tilde{z} - z|_H \leq |\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|_V)$$

and

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega A(x, w(x), \nabla \tilde{z}(x))dx - \int_\Omega A(x, w(x), \nabla z(x))dx \\
\leq \quad &|\alpha(t) - \alpha(s)|(1 + |z|_V^2 + |w|_V |z|_V + |w|_V).
\end{aligned}$$

(A6) There is a constant $C_3 = C_3(K) > 0$ such that

$$|z|_V \leq C_3(1 + |\nabla z|_H) \qquad \text{for all } z \in K(t) \text{ and } t \in [0,T].$$

(A7) If z, $\overline{z} \in K(t)$ and $\nabla[z - \overline{z}]^+ \equiv 0$, then $z \leq \overline{z}$.

このとき，次の定理を得た．

定理 2.3 (Existence of optimal control for (OP)) (cf. [11, Theorem 2.3]).
条件 (A1)–(A7) を仮定し，ある $u_0 \in K(0)$ に対し，$b_0 = b(u_0)$ と定める．また，$b_d \in L^2(0,T;H)$ とする．このとき，最適制御問題 (OP) は少なくとも 1 つ解（*optimal control*）$f^* \in F$ をもつ，つまり，

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f)$$

となる $f^* \in F$ が少なくとも 1 つ存在する．

問題 (P) と $(\mathrm{P})_\varepsilon$，及び，最適制御問題 (OP) と $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の関係を考える為，次を仮定する．

(A8) A family $\{b_\varepsilon\} := \{b_\varepsilon \ ; \ 0 < \varepsilon \le 1\}$ of functions $b_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfies that

(i) $|b_\varepsilon(r) - b(r)| \le \varepsilon(|r| + 1)$ for all $r \in \mathbb{R}$

(ii) $|b_\varepsilon(r_1) - b_\varepsilon(r_2)| \le C_4|r_1 - r_2|$ for all $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$

(iii) $b_\varepsilon(r_1) - b_\varepsilon(r_2) \ge \varepsilon(r_1 - r_2)$ for all $r_1,\ r_2 \in \mathbb{R}$ with $r_1 \ge r_2$.

where $C_4 > 0$ is some constant independent of $\varepsilon \in (0,1]$.

このとき，最適制御問題 (OP) と $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の関係について，次の定理を得た．

定理 2.4 (Relationship between (OP) and $(\mathrm{OP})_\varepsilon$).
条件 (A1)–(A8) を仮定し，$\varepsilon \in (0,1]$，$b_d \in L^2(0,T;H)$ とする．また，ある $u_0 \in K(0)$ に対し，$b_{0,\varepsilon} = b_\varepsilon(u_0)$ と定める．このとき，近似最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ は少なくとも 1 つ解（*optimal control*）$f_\varepsilon^* \in F$ をもつ，つまり，

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon^*) = \inf_{f \in F} J_\varepsilon(f)$$

となる $f_\varepsilon^* \in F$ が少なくとも 1 つ存在する．
更に，

$$\varepsilon_k \to 0 \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

$$f_{\varepsilon_k}^* \longrightarrow f^* \quad \textit{weakly in } L^2(0,T;V) \qquad \textit{as } k \to \infty, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt} f_{\varepsilon_k}^* \longrightarrow \frac{d}{dt} f^* \quad \textit{weakly in } L^2(0,T;H) \qquad \textit{as } k \to \infty, \tag{2.2}$$

$$f^* \text{ は最適制御問題 (OP) の解である} \tag{2.3}$$

となるような部分列 $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$ と関数 $f^* \in F$ が存在する．

3 問題(P)と近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$

この節では，問題(P)とその近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$を考察する．

まず，問題(P)に対する解の存在と一意性について，次の結果を得た．

命題 3.1 (cf. [21, Theorem 2.1]). 条件(A1)-(A7)を仮定する．また，$f \in W^{1,2}(0,T;H)$とし，ある$u_0 \in K(0)$に対し，$b_0 = b(u_0)$と定める．このとき，問題(P)に対する$[0,T]$上の解uが一意に存在し，次の評価が成立する：

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}|u(t)|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]}|b(u)(t)|_V^2 + \int_0^T |b(u)_t(t)|_H^2 dt\\ \leq\ & N_1\left(|u_0|_V^2 + |f|^2_{L^2(0,T;H)} + |f_t|^2_{L^2(0,T;H)} + 1\right)\end{aligned} \tag{3.1}$$

for some constant $N_1 > 0$ independent of u_0.

仮定(A5)は，[21]で仮定した条件と少々異なるが，[21, Theorem 2.1]と同様にして，命題3.1を証明することができる．従って，命題3.1の詳細な証明は省略する．

次に，(P)に対する近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$を考察する．

$(\mathrm{P})_\varepsilon$に対する解の存在と一意性について，以下の結果を得た．

命題 3.2 (cf. [15, 20, 21]). 条件(A1)-(A8)を仮定する．また，$f \in L^2(0,T;H)$，$\varepsilon \in (0,1]$とし，ある$u_0 \in K(0)$に対し，$b_{0,\varepsilon} = b_\varepsilon(u_0)$と定める．このとき，近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$に対する$[0,T]$上の解$u_\varepsilon$が一意に存在し，次の評価が成立する：

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}|u_\varepsilon(t)|_V^2 + \sup_{t\in[0,T]}|b_\varepsilon(u_\varepsilon)(t)|_V^2 + \varepsilon^2\int_0^T |u_\varepsilon'(t)|_H^2 dt + \int_0^T |b_\varepsilon(u_\varepsilon)_t(t)|_H^2 dt\\ \leq\ & N_2\left(|u_0|_V^2 + |f|^2_{L^2(0,T;H)} + 1\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

for some constant $N_2 > 0$ independent of u_0 and ε.

仮定(A8)より，近似関数$b_\varepsilon(\cdot)$はbi-Lipschitzであることがわかる．従って，[15, Section 2.8]と[20, 21]での議論を組み合わせることにより，命題3.2を簡単に証明することができる．従って，命題3.2の詳細な証明は省略する．

Remark 3.3. 近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$では，$b_\varepsilon(\cdot)$がbi-Lipschitz関数であるので，$f \in L^2(0,T;H)$であれば$(\mathrm{P})_\varepsilon$の解を構成することができる．しかし，問題(P)では，$b(\cdot)$が一般的にbi-Lipschitz関数でないので，(P)の解を構成するには，$f \in W^{1,2}(0,T;H)$が必要である．

評価式(3.2)を用いると，問題(P)とその近似問題$(\mathrm{P})_\varepsilon$の関係について，以下の結果を得ることができた．

命題 3.4. 条件 (A1)-(A8) を仮定し，$\varepsilon \in (0,1]$，$u_0 \in K(0)$ とする．また，$\{f_\varepsilon\} \subset W^{1,2}(0,T;H)$，$f \in W^{1,2}(0,T;H)$ とし，

$$\{f_\varepsilon\} \textit{ is bounded in } W^{1,2}(0,T;H),$$

$$f_\varepsilon \to f \textit{ strongly in } L^2(0,T;H) \quad \textit{as } \varepsilon \to 0$$

と仮定する．更に，データ $\{b_\varepsilon(u_0), f_\varepsilon\}$ をもつ近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の $[0,T]$ 上の解を u_ε とする．このとき，

$$\varepsilon_k \to 0 \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

$$u_{\varepsilon_k} \rightharpoonup u \qquad \textit{weakly-* in } L^\infty(0,T;V) \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

$$b_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) \to b(u) \qquad \textit{strongly in } C([0,T];H) \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

u はデータ $\{b(u_0), f\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の一意解である

となるような部分列 $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$ と関数 $u \in L^\infty(0,T;V)$ が存在する．

近似解 u_ε の評価 (3.2) と仮定 (A8) の (i) に注意し，[17, Section 4] や [30, Lemma 3] の議論を参考にすれば，簡単に命題 3.4 を証明することができる．従って，命題 3.4 の詳細な証明は省略する．

4 定理 2.3 の証明

この節で，定理 2.3 を証明する．実際，次の収束性質を用いて，定理 2.3 を証明する．

命題 4.1 (cf. [11, Proposition 3.5]). $\{f_n\} \subset W^{1,2}(0,T;H)$，$f \in W^{1,2}(0,T;H)$，$\{u_{0,n}\} \subset K(0)$，$u_0 \in K(0)$ とし，

$$\{f_n\} \textit{ is bounded in } W^{1,2}(0,T;H), \qquad \{u_{0,n}\} \textit{ is bounded in } V,$$

$$f_n \to f \textit{ strongly in } L^2(0,T;H), \quad b(u_{0,n}) \longrightarrow b(u_0) \textit{ in } H \quad \textit{as } n \to \infty$$

と仮定する．更に，データ $\{b(u_{0,n}), f_n\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の解を u_n とする．このとき，

$$n_k \to \infty \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \qquad \textit{weakly-* in } L^\infty(0,T;V) \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

$$b(u_{n_k}) \to b(u) \qquad \textit{strongly in } C([0,T];H) \qquad \textit{as } k \to \infty,$$

u はデータ $\{b(u_0), f\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の一意解である

となるような部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ と関数 $u \in L^\infty(0,T;V)$ が存在する．

仮定 (A5) は，[11] で仮定した条件と少々異なるが，[11, Proposition 3.5] と同様にして，命題 4.1 を証明することができる．よって，詳細な証明は省略する．

さて，定理 2.3 を証明する．

定理 2.3 の証明． 命題 4.1 を用いることにより，定理 2.3 を証明することができる．実際，

$$\lim_{n\to\infty} J(f_n) = \inf_{f\in F} J(f)$$

となるような minimizing sequence $\{f_n\} \subset F$ をとる．このとき，コスト関数 $J(f_n)$ の定義 (1.2) から

$$\{f_n\} \text{ is bounded in } F$$

であることがわかる．従って，ある部分列 $\{n_k\} \subset \{n\}$ とある関数 $f^* \in F$ が存在して

$$n_k \to \infty \qquad \text{as } k \to \infty,$$

$$f_{n_k} \rightharpoonup f^* \quad \text{weakly in } L^2(0,T;V) \qquad \text{as } k \to \infty, \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dt} f_{n_k} \rightharpoonup \frac{d}{dt} f^* \quad \text{weakly in } L^2(0,T;H) \qquad \text{as } k \to \infty \tag{4.2}$$

となる． このとき，Aubin のコンパクト性の定理 (cf. [22, Chapter1, Section 5]) を適用すると

$$f_{n_k} \longrightarrow f^* \quad \text{strongly in } L^2(0,T;H) \qquad \text{as } k \to \infty \tag{4.3}$$

と考えてもよい（必要があれば部分列をとりなおせばよい）．

さて，データ $\{b_0, f_{n_k}\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の解を u_{n_k} とする．このとき，命題 4.1 を適用すると，データ $\{b_0, f^*\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の解 u^* が存在して

$$u_{n_k} \rightharpoonup u^* \qquad \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(0,T;V) \qquad \text{as } k \to \infty,$$

$$b(u_{n_k}) \to b(u^*) \qquad \text{strongly in } C([0,T];H) \qquad \text{as } k \to \infty \tag{4.4}$$

となる．

さて，性質 (4.1)–(4.4) とノルムの弱下半連続性を用いると

$$J(f^*) \le \lim_{k\to\infty} J(f_{n_k}) = \inf_{f\in F} J(f)$$

を得る．よって， $J(f^*) = \inf_{f\in F} J(f)$ となるので，$f^* \in F$ は最適制御問題 (OP) の解 (optimal control) であることがわかる．以上より，定理 2.3 が証明された． □

5　定理 2.4 の証明

この節では，命題 3.4 を用いて，定理 2.4 を証明する．

定理 2.4 の証明. まず，近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ に対しても，命題 4.1 と類似した解の収束性質が成立することに注意する．実際，関数 $b(\cdot)$ を $b_\varepsilon(\cdot)$ と置き換えて，[11, Proposition 3.5] のように証明すれば，近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ に対する解の収束性質を示すことができる．従って，定理 2.3 の証明と同様の議論により，近似最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ は少なくとも 1 つ解（optimal control）$f_\varepsilon^* \in F$ をもつ，つまり，

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon^*) = \inf_{f \in F} J_\varepsilon(f)$$

となる $f_\varepsilon^* \in F$ が少なくとも 1 つ存在することがわかる．

次に，(2.3)–(2.2) を示す．その為，任意の制御関数 $f \in F$ に対し，u_ε をデータ $\{b_\varepsilon(u_0), f\}$ をもつ近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の $[0,T]$ 上の解とする．また，u をデータ $\{b(u_0), f\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の解とする．このとき，命題 3.4 により，ある部分列 $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$ が存在し，次の収束が成立する：

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_k} &\rightharpoonup u && \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(0,T;V) && \text{as } k \to \infty, \\ b_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}) &\to b(u) && \text{strongly in } C([0,T];H) && \text{as } k \to \infty. \end{aligned} \tag{5.1}$$

さて，$f_\varepsilon^* \in F$ は近似最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の解なので，

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon^*) \le J_\varepsilon(f) = \frac{1}{2}\int_0^T |b_\varepsilon(u_\varepsilon) - b_d|_H^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|_V^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f_t|_H^2 dt \tag{5.2}$$

が成り立つ．このとき，(5.1)–(5.2) より，明らかに，$\{f_\varepsilon^* \in F\ ;\ \varepsilon \in (0,1]\}$ は F で有界である．従って，

$$\varepsilon_k \to 0 \qquad \text{as } k \to \infty,$$

$$f_{\varepsilon_k}^* \rightharpoonup f^* \quad \text{weakly in } L^2(0,T;V) \qquad \text{as } k \to \infty, \tag{5.3}$$

$$\frac{d}{dt} f_{\varepsilon_k}^* \rightharpoonup \frac{d}{dt} f^* \quad \text{weakly in } L^2(0,T;H) \qquad \text{as } k \to \infty \tag{5.4}$$

となるような部分列 $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$ と関数 $f^* \in F$ が存在する．このとき，Aubin のコンパクト性の定理 (cf. [22, Chapter1, Section 5]) を適用すると

$$f_{\varepsilon_k}^* \longrightarrow f^* \quad \text{strongly in } L^2(0,T;H) \qquad \text{as } k \to \infty \tag{5.5}$$

と考えてもよい（必要があれば部分列をとりなおせばよい）．

さて，データ $\{b_{\varepsilon_k}(u_0), f_{\varepsilon_k}^*\}$ をもつ近似問題 $(\mathrm{P})_{\varepsilon_k}$ の $[0,T]$ 上の解を $u_{\varepsilon_k}^*$ とする．このとき，命題 3.4 を適用すると，データ $\{b(u_0), f^*\}$ をもつ問題 (P) の $[0,T]$ 上の u^* が存在して

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon_k}^* &\rightharpoonup u^* && \text{weakly-}* \text{ in } L^\infty(0,T;V) && \text{as } k \to \infty, \\ b_{\varepsilon_k}(u_{\varepsilon_k}^*) &\to b(u^*) && \text{strongly in } C([0,T];H) && \text{as } k \to \infty \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる.

さて，性質 (5.1)–(5.6) とノルムの弱下半連続性を用いると

$$J(f^*) \leq \liminf_{k\to\infty} J_{\varepsilon_k}(f^*_{\varepsilon_k}) \leq J(f)$$

を得る．ここで，$f \in F$ は任意の制御関数なので，上記の不等式より，f^* は最適制御問題 (OP) の解 (optimal control) であることがわかる．以上より，定理 2.4 が証明された．□

Remark 5.1. (P) に対する最適制御問題 (OP) とその近似最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ の関係を調べる為に，同じ形のコスト関数 (cf. (1.2), (1.4)) を考えた．しかし，近似問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の解の存在と一意性を示すには，$f \in L^2(0,T;H)$ であればよい (cf. Remark 3.3)．また，近似関数 $b_\varepsilon(\cdot)$ が bi-Lipschitz であることに注意すると，

$$f_n \rightharpoonup f \text{ weakly in } L^2(0,T;H) \qquad \text{as } n \to \infty$$

であれば，$(\mathrm{P})_\varepsilon$ に対する解の収束性質を得ることができる．従って，$(\mathrm{P})_\varepsilon$ の最適制御問題 $(\mathrm{OP})_\varepsilon$ のみ考える場合，コスト関数としては

$$J_1(f) := \frac{1}{2}\int_0^T |b_\varepsilon(u_\varepsilon) - b_d|_H^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^T |f|_H^2 dt$$

を考えれば十分である．ここで，u_ε は制御項 f に対する状態問題 $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の一意解である．このとき，定理 2.3 と同様な議論により，

$$J_1(f^*) = \inf_{f \in L^2(0,T;H)} J_1(f)$$

となる $(\mathrm{P})_\varepsilon$ の最適制御問題の解 $f^* \in L^2(0,T;H)$ の存在を示すことができる．

6 応用例

この節では，定理 2.3–2.4 の応用例を紹介する．

6.1 混合境界問題

次の Signorini–Dirichlet–Neumann type の混合境界問題を考える:

(P1)

$$\begin{aligned}
& b(u)_t - \nabla\cdot a(x,b(u),\nabla u) = f(t,x) && \text{in } (0,T)\times\Omega,\\
& u \leq g(t), \qquad \nu\cdot a(x,b(u),\nabla u) \leq 0 && \\
\text{and}\quad & (u-g(t))\nu\cdot a(x,b(u),\nabla u) = 0 && \text{on } (0,T)\times\Gamma_S,\\
& u = g(t) && \text{on } (0,T)\times\Gamma_D,\\
& \nu\cdot a(x,b(u),\nabla u) = 0 && \text{on } (0,T)\times\Gamma_N,\\
& b(u)(0,\cdot) = b_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned}$$

ここで，ν は境界上で定義された単位外法線ベクトルである．$g(t,x)$ は与えられた関数であり，条件

$$g \in W^{1,2}(0,T;V)$$

を満たすとする．また，領域 Ω の境界 $\Gamma := \partial\Omega$ は滑らかで，

$$\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_S \quad \text{and} \quad \text{meas}_\Gamma(\Gamma_D) > 0$$

を満たす互いに素な3つの部分 Γ_ν $(\nu = D, N, S)$ で構成されているとする．更に，ベクトル場 $a(\cdot,\cdot,\cdot)$ と関数 $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は仮定 (A1) と (A2) をそれぞれ満たすとする．

問題 (P1) は，部分的に水がしみ込んだ porous media の数理モデルを表している．特に，$\Gamma_S, \Gamma_D, \Gamma_N$ は，それぞれ，外気と接する部分，溜め池と接する部分，不浸透層と接する部分を表し，関数 $g(t)$ は圧力を表している．

さて，任意の時間 $t \in [0,T]$ に対し，時間依存凸集合 $K_1(t)$ を

$$K_1(t) := \{z \in V \ ; \ z \le g(t) \text{ on } \Gamma_S \text{ and } z = g(t) \text{ on } \Gamma_D\} \tag{6.1}$$

と定義する．このとき，簡単な計算により，(P) は混合境界問題 (P1) の弱形式になることがわかる (cf. [1], [16], [18], [25])．

ここで，時間依存凸集合 $K_1(t)$ の定義 (6.1) から，明らかに，$K_1(t)$ は条件 (A3)–(A7) を満たすことに注意する．実際，$z \in K_1(s)$ に対し

$$\tilde{z} = z - g(s) + g(t)$$

と定義すれば，仮定 (A5) が成り立つことがわかる (cf. [21, Section 5.1])．

以上より，仮定 (A1)–(A7) が成り立つので，定理 2.3 を問題 (P1) へ適用することができる．つまり，定理 2.3 を適用することにより，(P1) に対する最適制御問題

$$J(f^*) = \inf_{f \in F} J(f) \tag{6.2}$$

は少なくとも1つ解 $f^* \in F$ を持つことがわかる．ここで，J や F は (1.2) や (1.3) で定義されたものである．

次に，$\varepsilon \in (0,1]$ に対し，関数 $b(\cdot)$ の近似を

$$b_\varepsilon(r) := b(r) + \varepsilon r \qquad \text{for all } r \in \mathbb{R}$$

と定義し，問題 (P1) における関数 $b(\cdot)$ を $b_\varepsilon(\cdot)$ で置き換えた問題を $(\text{P1})_\varepsilon$ とする．このとき，明らかに，関数 $b_\varepsilon(\cdot)$ は仮定 (A8) を満たしているので，$(\text{P1})_\varepsilon$ は (P1) に対する近似問題になっている．従って，命題 3.4 を適用することにより，$(\text{P1})_\varepsilon$ の解は問題 (P1) の解に収束することがわかる．更に，定理 2.4 を適用することにより，$(\text{P1})_\varepsilon$ に対する近似最適制御問題

$$J_\varepsilon(f_\varepsilon^*) = \inf_{f \in F} J_\varepsilon(f)$$

は少なくとも1つ解 $f_\varepsilon^* \in F$ を持ち，それらは (2.1)–(2.2) の意味で最適制御問題 (6.2) の解に収束することがわかる．ここで，$J_\varepsilon(f)$ は (1.4) で定義されたものである．

6.2 Time-dependent water levels of reservoirs

次に，Alt–Luckhaus–Visintin [2] により提唱された問題を考察する．つまり，溜め池の水位が時間と共に変化し，ベクトル場として $a(x, b(u), \nabla u) = a(x)[\nabla u + k(b(u))]$ の特別な形をもつ次の問題を考察する：

(P2)
$$b(u)_t - \nabla \cdot a(x)[\nabla u + k(b(u))] = f(t,x) \qquad \text{in } (0,T) \times \Omega,$$
$$u \le g(t), \qquad \nu \cdot a(x)[\nabla u + k(b(u))] \le 0$$
$$\text{and} \qquad (u - g(t))\nu \cdot a(x)[\nabla u + k(b(u))] = 0 \qquad \text{on } (0,T) \times \Gamma_S(t),$$
$$u = g(t) \qquad \text{on } (0,T) \times \Gamma_D(t),$$
$$\nu \cdot a(x)[\nabla u + k(b(u))] = 0 \qquad \text{on } (0,T) \times \Gamma_N,$$
$$b(u)(0,\cdot) = b_0 \qquad \text{in } \Omega.$$

ここで，$b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は仮定 (A2) を満たす関数である．
　さて，次を仮定する：

(K1) $a(x) = (a_{i,j}(x))$ is a symmetric and positive definite matrix with $a_{i,j} \in C^1(\overline{\Omega})$, and $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ is bounded and Lipschitz continuous. There exists a constant $\mu > 0$ such that
$$a(x)[p - \hat{p}] \cdot (p - \hat{p}) \ge \mu |p - \hat{p}|^2$$
for all $x \in \Omega$ and $p,\ \hat{p} \in \mathbb{R}^N$.

(K2) For each $t \in [0,T]$, the boundary Γ of the domain Ω admits a mutually disjoint decomposition such as
$$\Gamma = \Gamma_S(t) \cup \Gamma_D(t) \cup \Gamma_N,$$
where $\Gamma_S(t), \Gamma_D(t)$ and Γ_N are measurable subsets of Γ, and $\cap_{t\in[0,T]}\Gamma_D(t)$ has a positive surface measure. Moreover, $\Gamma_j(t)$ depends on t smoothly in the sense of [15, Proposition 3.2.2 (ii)] $(j = S, D)$.

(K3) $g \in W^{1,2}(0,T;V) \cap L^\infty(0,T;H^2(\Omega))$.

さて，
$$A(x,s,p) := a(x)[\frac{1}{2}p + k(s)] \cdot p \qquad \text{for } (x,s,p) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$$
と定義すると，明らかに
$$\partial_p A(x,s,p) = a(x)[p + k(s)]$$

となり，仮定 (A1) が $a(x,s,p)=a(x)[p+k(s)]$ として成り立つことがわかる．
また，任意の時間 $t\in[0,T]$ に対し，時間依存凸集合 $K_2(t)$ を

$$K_2(t):=\{z\in V\ ;\ z\le g(t)\text{ on }\Gamma_S(t)\text{ and }z=g(t)\text{ on }\Gamma_D(t)\}$$

と定義すると，(P) は混合境界問題 (P2) の弱形式となる (cf. [2], [16], [18], [25])．このとき，[21, Section 5.2] により，$K_2(t)$ は仮定 (A3)-(A7) を満たすことがわかる．従って，定理 2.3 を問題 (P2) に適用することができるので，(P2) に対する最適制御問題の解を得ることができる．

更に，関数 $b(\cdot)$ の近似として

$$b_\varepsilon(r):=b(r)+\varepsilon r\quad\text{for all }r\in\mathbb{R}\qquad(\varepsilon\in(0,1])$$

を考えれば，前節 6.1 と同様，命題 3.4 や定理 2.3–2.4 を適用することにより，問題 (P2) とその近似問題との関係，及び，(P2) に対する最適制御問題とその近似最適制御問題の関係を得ることができる．

参考文献

[1] H. W. Alt and S. Luckhaus, *Quasilinear elliptic-parabolic differential equations*, Math. Z., **183**(1983), 311–341.

[2] H. W. Alt, S. Luckhaus and A. Visintin, *On nonstationary flow through porous media,* Ann. Mat. Pura. Appl., **136**(1984), 303–316.

[3] V. Barbu, *Optimal control of variational inequalities,* Research Notes in Mathematics. 100. Pitman. London, 1984.

[4] H. Brézis, *Problèmes unilatéraux*, J. Math. Pures Appl., **51**(1972), 1–168.

[5] J. Carrillo, *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem*, Nonlinear Anal. TMA., **22**(1994), 573–607.

[6] J. Carrillo and P. Wittbold, *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems*, J. Differential Equations, **156**(1999), 93–121.

[7] E. Casas, L. A. Fernández and J. Yong, *Optimal control of quasilinear parabolic equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **125**(1995), 545–565.

[8] Q. Chen and Y. Ye, *Bilateral obstacle optimal control for a quasilinear elliptic variational inequality,* Numer. Funct. Anal. Optim., **26**(2005), 303–320.

[9] A. Friedman, *Optimal control for parabolic variational inequalities*, SIAM J. Control Optim., **25**(1987), 482–497.

[10] J. Haslinger, K.-H. Hoffmann and R. A. E. Mäkinen, *Optimal control/dual approach for the numerical solution of a dam problem*, Adv. Math. Sci. Appl., **2**(1993), 189–213.

[11] K.-H. Hoffmann, M. Kubo and N. Yamazaki, *Optimal control problems for elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints*, Numerical Functional Analysis and Optimization, **27**(2006), 329–356.

[12] S. Hu and N. Ş. Papageorgiou, *Time-dependent subdifferential evolution inclusions and optimal control*, Mem. Amer. Math. Soc., **133**(1998), no. 632, viii+81 pp.

[13] A. V. Ivanov and J.-F. Rodrigues, *Weak solutions to the obstacle problem for quasilinear elliptic-parabolic equations*, St. Petersburg Math. J., **11**(2000), 457–484.

[14] J. Kačur, *On a solution of degenerate elliptic-parabolic systems in Orlicz-Sobolev spaces. I*, Math. Z., **203**(1990), 153–171.

[15] N. Kenmochi, *Solvability of nonlinear evolution equations with time-dependent constraints and applications*, Bull. Fac. Education, Chiba Univ., **30**(1981), 1–87.

[16] N. Kenmochi and M. Kubo, *Periodic stability of flow in partially saturated porous media*, Free Boundary Problems, Int. Series Numer. Math., Vol. 95, Birkhäuser, Basel, 1990, pp. 127–152.

[17] N. Kenmochi and I. Pawłow, *A class of nonlinear elliptic-parabolic equations with time-dependent constraints*, Nonlinear Anal., **10**(1986), 1181–1202.

[18] N. Kenmochi and I. Pawłow, *Parabolic-elliptic free boundary problems with time-dependent obstacles*, Japan J. Appl. Math., **5**(1988), 87–121.

[19] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia, *An introduction to variational inequalities and their applications*, Academic Press, New York, 1980.

[20] M. Kubo and N. Yamazaki, *Quasilinear parabolic variational inequalities with time-dependent constraints*, Adv. Math. Sci. Appl., **15**(2005), 335–354.

[21] M. Kubo and N. Yamazaki, *Elliptic-parabolic variational inequalities with time-dependent constraints*, Discrete and Continuous Dynamical Systems (Submitted).

[22] J.-L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Gouthiers-Villars, Paris, 1969.

[23] J.-L. Lions, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1971.

[24] F. Mignot and J.-P. Puel, *Optimal control in some variational inequalities,* SIAM J. Control Optim., **22**(1984), 466–476.

[25] F. Otto, L^1*-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations,* J. Differential Equations, **131**(1996), 20–38.

[26] F. Otto, L^1*-contraction and uniqueness for unstationary saturated-unsaturated porous media flow,* Adv. Math. Sci. Appl., **7**(1997), 537–553.

[27] I. Pawłow, *Analysis and Control of Evolution Multi-Phase Problems with Free Boundaries,* Polska Akademia Nauk, Instytut Badań Systemowych, 1987.

[28] I. V. Sergienko and V. S. Deineka, *Optimal control of an elliptic-parabolic system with conjugation conditions,* Cybernet. Systems Anal., **39**(2003), 402–418.

[29] N. H. Sweilam, *On the optimal control of parabolic variational inequalities, the evolution dam problem*, Numer. Funct. Anal. Optim., **18**(1997), 843–855.

[30] N. Yamazaki, *Doubly nonlinear evolution equation associated with elliptic-parabolic free boundary problems*, pp. 920–929, in *Proceedings of the 5th international conference on dynamical systems and differential equations*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, A Supplement Volume, 2005.