数理解析研究所講究録
第 1544 巻 2007 年 222-231

D.C. 計画問題に対する 2 次近似を用いた逐次近似解法

新潟大学大学院自然科学研究科　山田 修司　(Syuuji YAMADA)
新潟大学大学院自然科学研究科　田中 環　(Tamaki TANAKA)
大阪大学大学院工学研究科　谷野 哲三　(Tetsuzo TANINO)

1 はじめに

大域的最適化の分野において，代表的な問題の一つに D.C. 計画問題がある．この問題は配置問題や経済モデルなどにみられ，凹最小化問題，逆凸計画問題など多くの非線形計画問題が，等価な D.C. 計画問題に変換できることが知られている．一般に，D.C. 計画問題の実行可能集合が凸集合ではないので，降下法等の非線形計画問題の解法により大域的最適解を求めることは困難である．

本研究では，目的関数が線形関数で，制約関数が 2 回連続微分可能な関数で定義された D.C. 計画問題に対し，外部近似法に基づいた逐次近似解法を提案する．従来の外部近似法のアルゴリズムでは得られた近似解の目的関数値と問題の最適値の差を評価することが出来なかった．そこで，本研究で提案するアルゴリズムは切除平面法を導入することにより，必ず有限回の反復で終了し，最適値との差が許容誤差内であるような目的関数値をもつ実行可能解を見つけることができる．また，D.C. 計画問題の実行可能解は容易に見つけることができないため，従来のアルゴリズムでは多くの反復で暫定解が更新されなかった．本研究では，2 次近似を導入し，従来のアルゴリズムより効率的に暫定解を更新するアルゴリズムを提案する．

2 D.C. 計画問題

本研究では次の D.C. 計画問題を対象とする．

$$
(\mathrm{DC})\begin{cases} \text{minimize} & \langle c, x\rangle, \\ \text{subject to} & p(x) \le 0,\ q(x) \ge 0,\ x \in R^n. \end{cases}
$$

ただし，R^n は n 次元ユークリッド空間，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は内積を表し，$c \in R^n (c \neq 0)$ とし，$p, q : R^n \to R$ は 2 回連続微分可能な凸関数とする．問題 (DC) に対して，次の条件を仮定する．

(A1) $\{x \in R^n : p(x) < 0,\ q(x) > 0\} \neq \emptyset$.

(A2) $0 \in \arg\min\{\langle c, x\rangle : p(x) \le 0\} \subset \{x \in R^n : q(x) < 0\}$.

(A3) $\{x \in R^n : q(x) \le 0\}$ はコンパクト集合.

(A4) $\{x \in R^n : p(x) \le 0,\ q(x) \ge 0\} = \mathrm{cl}\,\{x \in R^n : p(x) < 0,\ q(x) > 0\}$, $\{x \in R^n : p(x) \ge 0,\ q(x) \le 0\} = \mathrm{cl}\,\{x \in R^n : p(x) > 0,\ q(x) < 0\}$. ただし，$\mathrm{cl}S$ は集合 S の閉包を表す.

(A5) 任意の $x \in R^n$ に対して，$\nabla^2 p(x)$, $\nabla^2 q(x)$ は正定値行列．ただし，$\nabla^2 p(x)$ は関数 p の x におけるヘッセ行列を表す.

(A6) $M > \max\{\|x - y\| : q(x) \le 0,\ q(y) \le 0\}$ を満たす正の実数 M が既知である．ただし，$\|\cdot\|$ はノルムを表す.

ここで, $Y = \{x \in R^n : p(x) \le 0\}$, $X = \{x \in R^n : q(x) \ge 0\}$ とすると, Y は閉凸集合, 仮定 (A3) より X はコンパクトな凸集合である. また, 関数 p, q の凸性と仮定 (A1), (A2) より, $\mathrm{int}\, Y = \{x \in R^n : p(x) < 0\} \neq \emptyset$, $\mathrm{bd}\, Y = \{x \in R^n : p(x) = 0\} \neq \emptyset$, $\mathrm{int}\, X = \{x \in R^n : q(x) < 0\} \neq \emptyset$, $\mathrm{bd}\, X = \{x \in R^n : q(x) = 0\} \neq \emptyset$ となる. ただし, $\mathrm{int}\, Y$ と $\mathrm{bd}\, Y$ はそれぞれ集合 Y の内部集合と境界を表す. さらに, 問題 (DC) の制約集合は $Y \backslash \mathrm{int}\, X$ と表される. 仮定 (A1) より, $Y \backslash \mathrm{int}\, X \neq \emptyset$ が分かる. 仮定 (A5) より, 関数 p, q は狭義の凸関数である. したがって, 仮定 (A2) より, $\arg\min\{\langle c, x\rangle : x \in Y\} = \{0\}$ が成り立つ. さらに, $\arg\min\{\langle c, x\rangle : x \in Y\} \subset \mathrm{int}\, X$ なので, 任意の $x \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ に対して, $\langle c, x\rangle > 0$ が成立する. ここで, $\min(\mathrm{DC})$ は問題 (DC) の最適値を表すものとする. このとき, $\min(\mathrm{DC}) > 0$ が成り立つ.

次の補題より, 問題 (DC) の大域的最適解の存在性が示される.

補題 2.1 任意の $x \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ に対して, $\langle c, y\rangle \le \langle c, x\rangle$ を満たす $y \in Y \cap \mathrm{bd}\, X$ が存在する.

補題 2.2 問題 (DC) には大域的最適解が存在する.

さらに, $n \ge 2$ のとき, 次の補題が成立する.

補題 2.3 $n \ge 2$ のとき, $\min(\mathrm{DC}) = \min\{\langle c, x\rangle : x \in (\mathrm{bd}\, Y) \cap (\mathrm{bd}\, X)\}$.

注意 2.1 $n = 1$ とし, 次の問題を考える.

$$\begin{cases} \text{minimize} & x, \\ \text{subject to} & x \in Y \backslash \mathrm{int}\, X. \end{cases}$$

ただし, $Y = [0, 3]$, $X = [-1, 1]$ である. ただし, $[a, b] = \{x \in R^n : a \le x \le b\}$ とする. このとき, $Y \backslash \mathrm{int}\, X = [1, 3]$. ここで, $\arg\min\{x : x \in Y \backslash \mathrm{int}\, X\} = \{1\}$ なので, $\arg\min\{x : x \in Y \backslash \mathrm{int}\, X\} \cap \mathrm{bd}\, Y = \emptyset$.

3 逐次近似解法

3.1 アルゴリズム

本節では, $n \ge 2$ の場合において, 問題 (DC) に対する次の外部近似法に基づいたアルゴリズムを提案する.

アルゴリズム OA

ステップ 0. 許容誤差 $\alpha > 0$ を定める. $x^1 = Mc$ とし, $a^1 \in \mathrm{int}(Y \cap X)$ を選ぶ. $L_1 \supset Y \cap X$ を満たす凸多面体 L_1 を生成し, $H_1 = \bar{H}_1 = \{x \in R^n : \langle c, x - x^1\rangle \le 0\}$, $S_1 = \bar{S}_1 = L_1$ とする. S_1 の頂点集合 $V(S_1)$ を計算する. $v^1 = \bar{v}^1 \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(S_1)\}$ を選び, $y^1 \in [a^1, v^1] \cap \mathrm{bd}(Y \cap X)$ を満たす y^1 を求める. $k \leftarrow 1$ とし, ステップ 1 へ.

ステップ 1. 次の三つの条件のうち, 一つでも成立したらアルゴリズムを停止する.

- **(SC1)** $y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $\langle c, y^k\rangle \le \alpha$. (このとき, y^k は $\min(\mathrm{DC}) \le \langle c, y^k\rangle \le \min(\mathrm{DC}) + \alpha$ を満たす問題 (DC) の近似解.)
- **(SC2)** $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $v^k \in X$ (すなわち, $S_k \subset X$). (このとき, x^k は $\min(\mathrm{DC}) \le \langle c, y^k\rangle \le \min(\mathrm{DC}) + \alpha/2$ を満たす問題 (DC) の近似解.)
- **(SC3)** $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $\bar{v}^k \in X$ (すなわち, $\bar{S}_k \subset X$). (このとき, x^k は $\min(\mathrm{DC}) \le \langle c, y^k\rangle \le \min(\mathrm{DC}) + \alpha$ を満たす問題 (DC) の近似解.)

上の条件が一つも成立しない場合にはステップ 2 へ.

ステップ 2. x^{k+1}, a^{k+1}, H_{k+1}, $\bar{H}_{k+1}$, L_{k+1}, S_{k+1}, $\bar{S}_{k+1}$ を次のように定める.

$$x^{k+1} = \begin{cases} y^k, & \text{if } y^k \in Y \backslash \text{int } X, \\ x^k, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$a^{k+1} = \begin{cases} \dfrac{\langle c, y^k \rangle - \alpha}{2\langle c, a^k \rangle} a^k, & \text{if } \langle c, a^k - y^k \rangle \geq -\alpha \text{ and } y^k \in Y \backslash \text{int } X, \\ a^k, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$H_{k+1} = \begin{cases} \left\{ x \in R^n : \langle c, x - y^k \rangle \leq -\dfrac{\alpha}{2} \right\}, & \text{if } y^k \in Y \backslash \text{int } X, \\ H_k, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$\bar{H}_{k+1} = \begin{cases} \left\{ x \in R^n : \langle c, x - y^k \rangle \leq -\alpha \right\}, & \text{if } y^k \in Y \backslash \text{int } X, \\ \bar{H}_k, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$L_{k+1} = \begin{cases} L_k \cap \left\{ x \in R^n : \langle \nabla p(v^k), x - v^k \rangle + p(v^k) \right\}, & \text{if } p(v^k) > q(v^k), \\ L_k \cap \left\{ x \in R^n : \langle \nabla q(v^k), x - v^k \rangle + q(v^k) \right\}, & \text{otherwise}, \end{cases}$$
$$S_{k+1} = L_{k+1} \cap H_{k+1},$$
$$\bar{S}_{k+1} = L_{k+1} \cap \bar{H}_{k+1}.$$

ただし, $\nabla p(v^k)$ は関数 p の v^k における勾配ベクトルを表す. 頂点集合 $V(S_{k+1})$, $V(\bar{S}_{k+1})$ を計算し, 次を満たす v^{k+1}, $\bar{v}^{k+1}$, y^{k+1} を求める.

$$v^{k+1} \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(S_{k+1})\},$$
$$\bar{v}^{k+1} \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(\bar{S}_{k+1})\},$$
$$y^{k+1} \in [a^{k+1}, v^{k+1}] \cap \text{bd } (Y \cap X).$$

$k \leftarrow k+1$ とし, ステップ 1 へ.

任意の $k \geq 1$ に対し, 次が成立する.

$$a^k \in \text{int } (Y \cap X \cap S_k),$$
$$L_k \supset L_{k+1} \supset Y \cap X,$$
$$H_k \supset H_{k+1},\ \bar{H}_k \supset \bar{H}_{k+1}, H_k \supset \bar{H}_{k+1},$$
$$v^k \in S_k, v^k \notin S_{k+1}, S_k \supset S_{k+1}.$$

また, $\{x^k\}$ は次を満たす.

$$\exists k' \text{ such that } x^k \in Y \backslash \text{int } X \ \forall k \geq k',$$
$$\langle c, x^i \rangle \geq \langle c, x^j \rangle \ \forall i, j \text{ satisfying } i < j \text{ and } x^i \neq x^j.$$

3.2 アルゴリズムの収束性

本節では, 無限点列 $\{v^k\}$, $\{x^k\}$ がアルゴリズム OA により生成された場合, それぞれの集積点について議論する.

定理 3.1 アルゴリズム OA により生成された $\{v^k\}$ が無限点列であるものとする. このとき, $\{v^k\}$ の任意の集積点は $Y \cap X$ に含まれる.

証明. L_1 はコンパクトかつ $\{v^k\} \subset L_1$, $\{v^k\}$ の集積点 $v^* \in L_1$ が存在する. ここで, $g(x) = \max\{p(x), q(x)\}$ とし, 任意の $k \geq 1$ に対して,

$$u^k = \begin{cases} \nabla p(v^k), & \text{if } p(v^k) > q(v^k), \\ \nabla q(v^k), & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする. このとき, $\{u^k\} \subset \cup_{v \in L_1} \partial g(v)$ かつ $\cup_{v \in L_1} \partial g(v)$ はコンパクトなので (R.T.Rockafellar (1970), Theorem 24.7), $\{u^k\}$ の集積点 u^* が存在する. ただし, $\partial g(v)$ は関数 g の v における劣微分を表す. 一般性を失うことなく, $v^k \to v^*$, $u^k \to u^*$ $(k \to \infty)$ と仮定できる. ここで, 矛盾を導くために, $v^* \notin Y \cap X$ を仮定する. 関数 g は連続関数なので, $\lim_{k\to\infty} g(v^k) = g(v^*) > 0$. また, $\lim_{k\to\infty} \langle u^k, v^* - v^k \rangle = \langle u^*, v^* - v^* \rangle = 0$. したがって, $\lim_{k\to\infty} g(v^k) + \langle u^k, v^* - v^k \rangle = g(v^*) > 0$ が成り立つ. よって, ある $k' > 0$ が存在して, $g(v^{k'}) + \langle u^{k'}, v^* - v^{k'} \rangle > 0$ が成立する. また, $L_{k'+1}$ の定義から, $L_{k'+1} \subset \{x \in R^n : g(v^{k'}) + \langle u^{k'}, x - v^{k'} \rangle \leq 0\}$. よって, 任意の $k > k'$ に対して, $v^* \notin L_k$ となる. これは, $\lim_{k\to\infty} v^k = v^*$ に矛盾する. したがって, $v^* \in Y \cap X$ が示された. □

定理 3.2 アルゴリズム OA により生成された $\{x^k\}$ が無限点列であるものとする. このとき, $\{x^k\}$ の任意の集積点は問題 (DC) の大域的最適解である.

定理 3.2 より, 次が成立する.

$$\lim_{k\to\infty} \langle c, x^k \rangle = \min\,(\mathrm{DC}).$$

3.3 停止条件の妥当性

本節では, アルゴリズム OA の停止条件の妥当性について検証する. すなわち, 許容誤差 α を非零とした場合, アルゴリズム OA は必ず有限回の反復で終了し, 得られる近似解の目的関数値は問題 (DC) の最適値との差が許容誤差内であること示す.

定理 3.3 $\alpha > 0$ とする. このとき, アルゴリズム OA は必ず有限回の反復で終了する.

定理 3.4 アルゴリズム OA の反復 k において停止条件 (SC1) が成立したものとする. このとき, y^k は次を満たす問題 (DC) の近似解である.

(i) $y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$,

(ii) $\min\,(\mathrm{DC}) \leq \langle c, y^k \rangle \leq \min\,(\mathrm{DC}) + \alpha$.

定理 3.5 アルゴリズム OA の反復 k において停止条件 (SC2) が成立したものとする. このとき, x^k は次を満たす問題 (DC) の近似解である.

(i) $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$,

(ii) $\min\,(\mathrm{DC}) \leq \langle c, x^k \rangle \leq \min\,(\mathrm{DC}) + \dfrac{\alpha}{2}$.

定理 3.6 アルゴリズム OA の反復 k において停止条件 (SC3) が成立したものとする. このとき, x^k は次を満たす問題 (DC) の近似解である.

(i) $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$,

(ii) $\min\,(\mathrm{DC}) \leq \langle c, x^k \rangle \leq \min\,(\mathrm{DC}) + \alpha$.

4 2 次近似の導入

3 章では, 切除平面法を導入した外部近似法のアルゴリズムを提案した. しかし, 多くの反復において, 実行可能解が見つけられないため, 暫定解が更新されない. そこで, 本章では, 3 で提案したアルゴリズムに 2 次近似を導入した新たなアルゴリズムを提案する.

4.1 節では, 目的関数と制約関数が 2 次関数で定義された最適化問題に対する解法について説明する. 4.2 節では実行可能解を見つけるための最適化問題について考え, その 2 次近似問題を示す. 4.3 節では, 反復毎にできる限り異なった方向に実行可能解を探索するために, ペナルティ関数の導入を提案する. 4.4 節では, 2 次近似を導入したアルゴリズムを示す.

4.1 2 次計画問題の解法

本節では次の 2 次計画問題について考える.

$$\begin{cases} \text{minimize} & (x-b)^\top A(x-b), \\ \text{subject to} & x^\top x = \beta. \end{cases} \tag{1}$$

ただし, $b \in R^n$, $\beta \in R$ $(\beta > 0)$, A は次のような $n \times n$ 行列である.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_n \geq \lambda_{n-1} \geq \cdots \geq \lambda_2 \geq \lambda_1 > 0.$$

$b^\top b = \beta$ の場合, 明らかに b が問題 (1) の解である.

次に, $b^\top b > \beta$ の場合, 問題 (1) の制約条件を $x^\top x \leq \beta$ に置き換えても問題の最適値, 最適解は変わらないことが分かる. したがって, この場合, 問題 (1) は等価な凸計画問題に変換できる. このとき, $\bar{x}$ が問題 (1) の最適解である必要十分条件は

- $\bar{x}^\top \bar{x} = \beta$,
- $\exists \mu' > 0$ such that $\mu' A(\bar{x} - b) = -\bar{x}$.

最後に, $b^\top b < \beta$ の場合, 問題 (1) の制約条件を $x^\top x \geq \beta$ に置き換えても問題の最適値, 最適解は変わらないことが分かる. したがって, この場合, 問題 (1) は等価な D.C. 計画問題に変換できる. このとき, $\bar{x}$ が問題 (1) の最適解である必要十分条件は

- $\bar{x}^\top \bar{x} = \beta$,
- $\exists \mu' \geq \dfrac{1}{\lambda_1}$ such that $\mu' A(\bar{x} - b) = \bar{x}$.

問題 (1) に対する解法は次のとおりである.

アルゴリズム A

1. $b^\top b = \beta$ の場合, b が問題 (1) の解である.

2. $b^\top b > \beta$ の場合, $r_1(\mu) = \mu^2 b^\top A((\mu A + I)^{-1})^2 Ab = \beta$ を満たす $\mu > 0$ を求め, $x_\mu = \mu(\mu A + I)^{-1}Ab$ を計算する. ただし, I は単位行列を表す. このとき, x_μ は問題 (1) の解である.

3. $b^\top b < \beta$ の場合:

3-1. $b=0$ の場合, $\sqrt{\beta}e^1$ は問題 (1) の解である. ただし, e^1 は第1成分が1でその他のすべての成分が0の n 次元ベクトルである.

3-2. $b \neq 0$ の場合:

3-3. $\lambda_1 = \lambda_n$ の場合, $\dfrac{\sqrt{\beta}}{\|b\|}$ は問題 (1) の解である.

3-4. $\lambda_1 < \lambda_n$ の場合:

3-4-1. $\lambda_i > \lambda_1$ を満たす任意の i に対して $b_i = 0$ の場合, $\dfrac{\sqrt{\beta}}{\|b\|}$ は問題 (1) の解である.

3-4-2. $\lambda_i = \lambda_1$ かつ $b_i \neq 0$ を満たす i と $\lambda_j > \lambda_1$ かつ $b_j \neq 0$ を満たす j が共に存在する場合, $r_2(\mu) = \mu^2 b^\top A((\mu A - I)^{-1})^2 Ab = \beta$ を満たす $\mu > \dfrac{1}{\lambda_1}$ を求め, $x_\mu = \mu(\mu A - I)^{-1}Ab$ を計算する. このとき, x_μ は問題 (1) の解である.

3-4-3. $\lambda_i = \lambda_1$ を満たす任意の i に対して $b_i = 0$ の場合:

3-4-3-1. $\hat{x}^\top \hat{x} \leq \beta$ の場合, $\hat{x} + \left(\sqrt{\beta - \hat{x}^\top \hat{x}}\right) e^1$ は問題 (1) の解である. ただし, $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)^\top$ は次で与えられるものとする.

$$\hat{x}_i = \begin{cases} 0, & \text{if } \lambda_i = \lambda_1, \\ \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_1}, & \text{if } \lambda_i > \lambda_i, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

3-4-3-2. $\hat{x}^\top \hat{x} > \beta$ の場合, $r_2(\mu) = \beta$ を満たす $\mu > \dfrac{1}{\lambda_1}$ を求め, $x_\mu = \mu(\mu A - I)^{-1}Ab$ を計算する. このとき, x_μ は問題 (1) の解である.

ここで, アルゴリズム A の 3, 3-4-2, 3-4-3-2 は非線形関数の解の計算であり, 一般には容易に解を求めることは困難である. しかし, $r_1'(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{2\mu\lambda_i^2 b_i^2}{(\mu\lambda_i + 1)^3} > 0 \ \forall \mu > 0$, $r_2'(\mu) = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{-2\mu\lambda_i^2 b_i^2}{(\mu\lambda_i + -)^3} < 0 \ \forall \mu > \dfrac{1}{\lambda_1}$ となり, $r_1(\mu)$ は $\mu > 0$ で単調増加関数, $r_2(\mu)$ は $\mu > \dfrac{1}{\lambda_1}$ で単調減少関数であるので, アルゴリズム A の 3, 3-4-2, 3-4-3-2 の非線形関数の解の近似解は容易に求めることができる.

4.2 2 次近似の導入

問題 (DC) の実行可能解を求めるために、次の問題を考える.

$$\begin{cases} \text{minimize} & p(x), \\ \text{subject to} & q(x) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

明らかに, 問題 (2) の最適解は問題 (DC) の実行可能解である. しかし, 問題 (2) の最適解は容易に見つけることはできない. そこで, ある $y \in \text{bd}\, X = \{x \in R^n : q(x) = 0\}$ において問題 (2) を 2 次近似した次の問題を考える.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \dfrac{1}{2}(x-y)^\top \nabla^2 p(y)(x-y) + \nabla p(y)^\top (x-y), \\ \text{subject to} & \dfrac{1}{2}(x-y)^\top \nabla^2 q(y)(x-y) + \nabla q(y)^\top (x-y) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

仮定 (A5) より, $\nabla^2 q(y)$ は正定値対称行列である. したがって, $Q_y^\top Q_y = \nabla^2 q(y)$ を満たす上三角行列 $Q_y \in R^{n\times n}$ が存在する. また, Q_y は正則であり, $(Q_y^{-1})^\top \nabla^2 p(y) Q_y^{-1}$ は正定値対称行列になる. よって, 次を満たす直交行列 $P_y \in R^{n\times n}$ が存在する.

$$P_y^\top (Q_y^{-1})^\top \nabla^2 p(y) Q_y^{-1} P_y = \begin{pmatrix} \lambda(y)_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda(y)_n \end{pmatrix}.$$

ただし, $\lambda(y)_1, \ldots, \lambda(y)_n$ は $(Q_y^{-1})^\top \nabla^2 p(y) Q_y^{-1}$ の固有値を表す. $(Q_y^{-1})^\top \nabla^2 p(y) Q_y^{-1}$ は正定値行列なので, 任意の i に対して $\lambda(y)_i > 0$ が成り立つ. ここで, $z = P_y^\top Q_y(x - y + \nabla^2 q(y)^{-1} \nabla q(y))$ とすると, 問題 (3) は次のように表される.

$$\begin{cases} \text{minimize} & (z - b(y))^\top A(y)(z - b(y)), \\ \text{subject to} & z^\top z = \beta(y). \end{cases} \tag{4}$$

ただし,

$$\begin{aligned} A(y) &= \frac{1}{2} P_y^\top (Q_y^{-1})^\top \nabla^2 p(y) Q_y^{-1} P_y, \\ b(y) &= P_y^\top Q_y(\nabla^2 p(y)^{-1} \nabla p(y) - \nabla^2 q(y)^{-1} \nabla q(y)), \\ \beta(y) &= \nabla q(y)^\top \nabla^2 q(y)^{-1} \nabla q(y). \end{aligned}$$

問題 (4) は 4.1 節の議論より, アルゴリズム A で近似解を求めることができる. そこで, 問題 (4) の近似解を $z(y)$ とすると, $x(y) = Q_y^{-1} P_y z(y) + y - \nabla^2 q(y)^{-1} \nabla q(y)$ は問題 (3) の近似解である. そこで, $x(y)$ を用いて次のように問題 (DC) の実行可能解を探索する.

- $x(y) \neq 0$ の場合: $x' \in \{x^i n R^n : x = \eta x(y), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X$ を満たす x' を求め, x' の実行可能性を検証する.
- $x(y) = 0$ の場合: $x' \in \{x^i n R^n : x = -\eta t(y), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X$ を満たす x' を求め, x' の実行可能性を検証する. ただし, $t(y) = y - \nabla^2 q(y)^{-1} \nabla q(y)$.

4.3 ペナルティ関数の導入

アルゴリズム OA の反復 k において生成される y^{k+1} は必ずしも問題 (DC) の実行可能解であるとは限らない. そこで, $y^{k+1} \notin Y \backslash \mathrm{int}\, X$ の場合, 問題 (3) の解を用いて実行可能解を探索する。しかし, 多くの場合, 問題 (3) の解を利用するだけでは同じような方向を探索してしまうことが考えられる. 本節では, そのような不都合を解消するために, ペナルティ関数の導入を提案する.

$k \geq 2$ において, 次の問題を考える.

$$\begin{cases} \text{minimize} & \frac{1}{2}(x - y^{k+1})^\top \nabla^2 p(y^{k+1})(x - y^{k+1}) \\ & \quad + \nabla p(y^{k+1})^\top (x - y^{k+1}) + \sum_{i=2}^{k} \Phi_i(x) + \sum_{i=2}^{k} \Psi_i(x), \\ \text{subject to} & \frac{1}{2}(x - y^{k+1})^\top \nabla^2 q(y^{k+1})(x - y^{k+1}) + \nabla q(y^{k+1})^\top (x - y^{k+1}) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

ただし, 任意の $i = 2, \ldots, k$ に対して,

$$\Phi_i(x) = \frac{1}{2}\left(x - \tilde{y}^i + \frac{M \nabla q(\tilde{y}^i)}{2\|\nabla q(\tilde{y}^i)\|}\right)^\top \nabla q(\tilde{y}^i) \nabla q(\tilde{y}^i)^\top \left(x - \tilde{y}^i + \frac{M \nabla q(\tilde{y}^i)}{2\|\nabla q(\tilde{y}^i)\|}\right),$$

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(x - \frac{c^\top \tilde{y}^i}{2} c\right)^\top cc^\top \left(x - \frac{c^\top \tilde{y}^i}{2} c\right), & \text{if } \tilde{y}^i \in Y, \\ 0, & \text{if } \tilde{y}^i \notin Y. \end{cases}$$

また, 任意の $i = 2, \ldots, k$ に対して, $\tilde{y}^i$ は次を満たすものとする.

- $y^i \in Y$ の場合, $\tilde{y}^i = y^i$.
- $y^i \notin Y$ かつ $x'(y^i) \neq 0$ の場合, $\tilde{y}^i \in \{x \in R^n : x = \eta x'(y^i), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X$,
- $y^i \notin Y$ かつ $x'(y^i) = 0$ の場合, $\tilde{y}^i \in \{x \in R^n : x = -\eta t(y^i), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X$.

ただし, $t(y^i) = y^i - \nabla^2 q(y^i)^{-1} \nabla q(y^i)$ であり,

- $i \geq 3$ の場合, $x'(y^i)$ は問題 (5) の近似解,
- $i = 2$ の場合, $x'(y^i)$ は問題 (3) の近似解.

問題 (5) は問題 (3) と同様に問題 (1) へ変換できるため, アルゴリズム A を用いて近似解を求めることができる.

4.4 アルゴリズム

2 次近似を導入した外部近似法に基づくアルゴリズムは次のとおりである.

アルゴリズム OAQP

ステップ 0. 許容誤差 $\alpha > 0$ を定める. $x^1 = Mc$ とし, $a^1 \in \mathrm{int}(Y \cap X)$ を選ぶ. $L_1 \supset Y \cap X$ を満たす凸多面体 L_1 を生成し, $H_1 = \bar{H}_1 = \{x \in R^n : \langle c, x - x^1 \rangle \leq 0\}$, $S_1 = \bar{S}_1 = L_1$ とする. S_1 の頂点集合 $V(S_1)$ を計算する. $v^1 = \bar{v}^1 \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(S_1)\}$ を選び, $y^1 \in [a^1, v^1] \cap \mathrm{bd}(Y \cap X)$ を満たす $\tilde{y}^1$ を求める. $k \leftarrow 1$ とし, ステップ 1 へ.

ステップ 1. 次の三つの条件のうち, 一つでも成立したらアルゴリズムを停止する.

(SC1) $\tilde{y}^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $\langle c, \tilde{y}^k \rangle \leq \alpha$. (このとき, $\tilde{y}^k$ は $\min(\mathrm{DC}) \leq \langle c, \tilde{y}^k \rangle \leq \min(\mathrm{DC}) + \alpha$ を満たす問題 (DC) の近似解.)

(SC2) $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $v^k \in X$ (すなわち, $S_k \subset X$). (このとき, x^k は $\min(\mathrm{DC}) \leq \langle c, y^k \rangle \leq \min(\mathrm{DC}) + \alpha/2$ を満たす問題 (DC) の近似解.)

(SC3) $x^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X$ かつ $\bar{v}^k \in X$ (すなわち, $\bar{S}_k \subset X$). (このとき, x^k は $\min(\mathrm{DC}) \leq \langle c, y^k \rangle \leq \min(\mathrm{DC}) + \alpha$ を満たす問題 (DC) の近似解.)

上の条件が一つも成立しない場合にはステップ 2 へ.

ステップ 2. $x^{k+1}, a^{k+1}, H_{k+1}, \bar{H}_{k+1}, L_{k+1}, S_{k+1}, \bar{S}_{k+1}$ を次のように定める.

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= \begin{cases} \tilde{y}^k, & \text{if } y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X, \\ x^k, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
a^{k+1} &= \begin{cases} \dfrac{\langle c, y^k \rangle - \alpha}{2\langle c, a^k \rangle} a^k, & \text{if } \langle c, a^k - y^k \rangle \geq -\alpha \text{ and } y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X, \\ a^k, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
H_{k+1} &= \begin{cases} \left\{ x \in R^n : \langle c, x - y^k \rangle \leq -\dfrac{\alpha}{2} \right\}, & \text{if } y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X, \\ H_k, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
\bar{H}_{k+1} &= \begin{cases} \left\{ x \in R^n : \langle c, x - y^k \rangle \leq -\alpha \right\}, & \text{if } y^k \in Y \backslash \mathrm{int}\, X, \\ \bar{H}_k, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
L_{k+1} &= \begin{cases} L_k \cap \left\{ x \in R^n : \langle \nabla p(v^k), x - v^k \rangle + \max\{p(v^k), q(v^k)\} \right\}, & \text{if } p(v^k) > q(v^k), \\ L_k \cap \left\{ x \in R^n : \langle \nabla q(v^k), x - v^k \rangle + \max\{p(v^k), q(v^k)\} \right\}, & \text{otherwise}, \end{cases} \\
S_{k+1} &= L_{k+1} \cap H_{k+1}, \\
\bar{S}_{k+1} &= L_{k+1} \cap \bar{H}_{k+1}.
\end{aligned}
$$

頂点集合 $V(S_{k+1}), V(\bar{S}_{k+1})$ を計算し, 次を満たす $v^{k+1}, \bar{v}^{k+1}, y^{k+1}$ を求める.

$$
\begin{aligned}
& v^{k+1} \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(S_{k+1})\}, \\
& \bar{v}^{k+1} \in \arg\max\{p(v), q(v) : v \in V(\bar{S}_{k+1})\}, \\
& y^{k+1} \in [a^{k+1}, v^{k+1}] \cap \mathrm{bd}\, (Y \cap X).
\end{aligned}
$$

ステップ 3 へ.

ステップ 3.

- $y^{k+1} \in Y$ の場合, $\tilde{y}^{k+1} = y^{k+1}$ とする.
- $y^{k+1} \notin Y$ の場合, 次を満たす $\tilde{y}^{k+1}$ を求める.

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}^{k+1} &\in \{x \in R^n : x = \eta x'(y^{k+1}), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X, \quad \text{if } x'(y^{k+1}) \neq 0, \\
\tilde{y}^{k+1} &\in \{x \in R^n : x = -\eta t(y^{k+1}), \eta > 0\} \cap \mathrm{bd}\, X, \quad \text{if } x'(y^{k+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

ただし, $t(y^{k+1}) = y^{k+1} - \nabla^2 q(y^{k+1})^{-1} \nabla q(y^{k+1})$ であり, $x'(y^{k+1})$ は

- $k = 1$ の場合, 問題 (3) の近似解,
- $k \geq 2$ の場合, 問題 (5) の近似解.

$k \leftarrow k+1$ とし, ステップ 1 へ.

アルゴリズム OAQP の大域的収束性は, アルゴリズム OA と同様に証明できる.

5 おわりに

本研究では, 制約関数が 2 回連続微分可能な凸関数で定義された D.C. 計画問題に対して, 外部近似法に基づいた新たな逐次近似解法を提案した. 各反復において, アフィン関数である目的関数を定義しているベクトルを法線とする超平面を 2 つ生成することにより, 必ず有限回の反復で終了し, 主問題の最適値と目的関数値の差が許容誤差内である近似解を求めることが可能になった. また, D.C. 計画問題の実行可能解を見つけることの困難さから, 従来のアルゴリズムは多くの反復で暫定解が更新されなかった. そこで, 本研究では 2 次近似を導入することにより, 効率的に暫定解を更新できるようになった.

参考文献

[1] Bazaraa, M.S., H.D.Sherali and C.M.Shetty, *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, 2nd ed., John Wiley, New York, (1993).

[2] Cheney, E.W. and A.A.Goldstein, "Newton's Method of Convex Programming and Tchebycheff Approximation," Numer. Math., 1 (1959), pp.253–268.

[3] Falk, J.E. and K.R.Hoffman, "A Successive Underestimation Method for Concave Minimization Problems," *Mathematics of Operations Research*, 1 (1976), pp.251–259.

[4] Horst, R., N.V.Thiau and J.De Vries, "On Finding New Vertices and Redundant Constraints in Cutting Plane Algorithms for Global Optimization," *Operations Research Letters*, 7 (1988), pp.85–90.

[5] Horst, R. and H.Tuy, "On the Convergence of Global Methods in Multiextremal Optimization," *Journal of Optimization Theory and Applications*, 54 (1987), pp.253–271.

[6] Horst, R. and H.Tuy, *Global Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[7] Horst, R. and P.M.Pardalos, *Handbook of Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1995).

[8] Kelley, J.E., Jr, "The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs," *SIAM Journal*, 8 (1960), pp.703–712.

[9] Nemhauser, G.L., A.H.G.R.Kan and M.J.Todd, *Optimization; Handbooks in Operations Research and Management Science, vol.1*, Elsevier Science Publishers, B.V, (1989).

[10] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis* Princeton University Press, Princeton, N.J., (1970).

[11] Thieu, T.V., B.T.Tam and V.T.Ban, "An Outer Approximation Method for Globally Minimizing a Concave Function over a Compact Convex Set," *Acta Mathematica Vietnamica*, 8 (1983), pp.21–40.

[12] Tuy, H., *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1998).

[13] Veinott, A.F., Jr, "The Supporting Hyperplane Method for Unimodal Programming," *Operations Research*, 15 (1967), pp.147–152.