数理解析研究所講究録
第 1546 巻 2007 年 181-200

安島直円「円内容累円術」について

藤井康生 (Yasuo Fujii)

1 はじめに

安島直円は「円内容累円術」(左右対称の場合天明 4 年 (1784), 一般の場合寛政 3 年 (1791)) の中で内外の円があり, その間に環状に甲円, 乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ を容れる. 外, 内, 甲円の直径を与えて乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ の直径を求める問題の解を述べている. 安島の出した結論は、累円の個数を角数とする正多角形の二距斜冪率を求める. するとこの二距斜冪率から累円の直径を求める事ができると述べている. この問題は松永良弼「算法全経 (廉術)」や有馬頼僮『拾璣算法』においてすでに取り上げられており累円の直径を求める漸化式も載せられている. 安島直円はこれらの結果を踏まえて,「廉術変換」でその元となる, 外, 内, 甲, 乙円の直径の間の関係を一般に述べている.「円内容累円術」において安島直円が述べようとしたことは東 $= \frac{4\,内\times外}{(外-甲)(内+甲)}$ が二距斜冪率に等しいことである. 従来安島直円の「円内容累円術」は加藤平左エ門氏の『和算ノ研究　雑論 II』に述べられているように, 東の高次方程式を求め, これが二距斜冪率の式と同じになることを述べたものであるとされていたと思われる. 安島直円は東が二距斜冪率になることを, 証明しようとして「円内容累円術」において東を 3 円の場合より順に計算していったことは確かであるが, 安島直円が述べている結論は二距斜冪率は級数によって求められることがわかっているので, 先に触れた漸化式によらず, 二距斜冪率によって累円の直径が求めらることを述べている. 累距斜を級数を用いて表すことは, 松永良弼「方円算法」から始まっている. これは級数の研究が松永良弼から有馬頼僮, 安島直円へと発展していったことが窺われる興味深いものである. 本稿では安島直円「円内容累円術」「後編」について, 本文の順序にしたがって概説していく.

2 起源

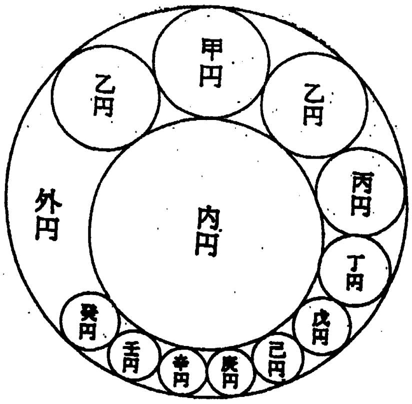
仮如外径云内径云甲径云欲求乙丙丁及其次々円径者依廉術求得乙率而丙率而丁率及次々各率為法以甲径為通実以所求法除之得其円径

外円の内に内円があり, 甲円, 乙円, 丙円, 丁円 $\cdots$ を外円, 内円に接し, 互いに接するように入れる.

外円, 内円, 甲円の直径を与えて, 乙円, 丙円, 丁円　$\cdots$　の直径を求めよ.

廉術によって乙率, 丙率, 丁率　$\cdots$　を求めて法とする. 甲円の直径を通実として,

$\frac{通実}{乙率}$ が乙円の直径である. 丙円, 丁円　$\cdots$　の直径も同様にして求められる.



廉術より

$$\text{寄位} = (\text{外} - \text{甲})(\text{内} + \text{甲}) \quad \text{増率} = \frac{2(\text{外} - \text{内})\,\text{甲}}{\text{寄位}} \quad \text{因法} = \text{東} - 2$$

$$\text{乙率} = \text{増率} + \text{因法} \quad \text{東} = \frac{4\,\text{内} \times \text{外}}{\text{寄位}} \quad \text{増率} = \text{乙率} - \text{因法}$$

$$\text{増率} = 2\,\text{乙率} - \text{東} + 2$$

各率を求める

$$\text{甲率} = 1$$

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{甲率} = \text{乙率}\,(\text{東} - 2) + \text{増率} - 1 = \text{乙率} \times \text{東} - \text{因法} - 1$$

$$\text{丙率} = \text{乙率} \times \text{東} - \text{東} + 1 = \text{東} \times \text{冬} + 1 \quad \text{冬} = \text{乙率} - 1$$

$$\text{丁率} = \text{丙率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{乙率} = (\text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} + \text{東} - 2\,\text{東} \times \text{冬} - 2 + \text{増率} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^2 \times \text{冬} - 2\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{戊率} = \text{丁率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丙率}$$

$$= (\text{東}^2 \times \text{冬} - 2\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})(\text{東} - 2) + 2\,\text{乙率} - \text{東} + 2 - \text{東} \times \text{冬} - 1$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 3\,\text{東} \times \text{冬} + \text{東} \times \text{乙率} - \text{東} + 1$$

$$= \text{東}^3 \times \text{冬} - 4\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 4\,\text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{己率} = \text{戊率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{丁率}$$

$$= (\text{東}^3 \times \text{冬} - 4\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 4\,\text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + 2\,\text{乙率} - \text{東} + 2 - \text{東}^2 \times \text{冬} + 2\,\text{東} \times \text{冬} - \text{乙率}$$

$$= \text{東}^4 \times \text{冬} - 6\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 11\,\text{東}^2 \times \text{冬} - 6\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率}$$

$$\text{庚率} = \text{己率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{戊率}$$

$$= (\text{東}^4 \times \text{冬} - 6\,\text{東}^3 \times \text{冬} + 11\,\text{東}^2 \times \text{冬} - 6\,\text{東} \times \text{冬} + \text{乙率})(\text{東} - 2) + (2\,\text{乙率} - \text{東} + 2)$$

$$-(\text{東}^2 \times \text{冬} - 4\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 4\,\text{東} \times \text{冬} + 1)$$

$$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 8\,\text{東} \times \text{冬} + 1 + \text{東}\,(\text{乙率} - 1)$$

$$= \text{東}^5 \times \text{冬} - 8\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 9\,\text{東} \times \text{冬} + 1$$

$$\text{辛率} = \text{庚率} \times \text{因法} + \text{増率} - \text{己率}$$

$$= (\text{東}^5 \times \text{冬} - 8\,\text{東}^4 \times \text{冬} + 22\,\text{東}^3 \times \text{冬} - 24\,\text{東}^2 \times \text{冬} + 9\,\text{東} \times \text{冬} + 1)(\text{東} - 2) + (2\,\text{乙率} - \text{東} + 2)$$

$-($東$^4\times$冬-6東$^3\times$冬$+11$東$^2\times$冬-6東$\times$冬$+$乙率$)$

$=$東$^6\times$冬-10東$^5\times$冬$+37$東$^4\times$冬-62東$^3\times$冬$+46$東$^2\times$冬-12東$\times$冬$+$乙率

壬率$=$辛率$\times$因法$+$増率$-$庚率

$=($東$^6\times$冬-10東$^5\times$冬$+37$東$^4\times$冬-62東$^3\times$冬$+46$東$^2\times$冬-12東$\times$冬$+$乙率$)($東$-2)$

$+(2$乙率$-$東$+2)-($東$^5\times$冬-8東$^4\times$冬$+22$東$^3\times$冬-24東$^2\times$冬$+9$東$\times$冬$+1)$

$=$東$^7\times$冬-12東$^6\times$冬$+56$東$^5\times$冬-128東$^4\times$冬$+148$東$^3\times$冬-80東$^2\times$冬

$+16$東$\times$冬$+1$

癸率$=$壬率$\times$因法$+$増率$-$辛率

$=$東$^8\times$冬-14東$^7\times$冬$+79$東$^6\times$冬-230東$^5\times$冬$+367$東$^4\times$冬

-314東$^3\times$冬$+130$東$^2\times$冬-20東$\times$冬$+$乙率

個別の場合について

3円のとき，丙率＝乙率

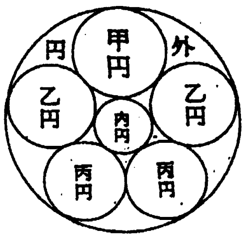
東$\times$冬$+$乙率$=$東$\times$冬$-$冬$=$冬$($東$-1)=0$

東$-1=0$

4円のとき，丁率＝乙率

東$^2\times$冬-2東$\times$冬$=$東$\times$冬$($東$-2)=0$

東$-2=0$



5円のとき，丁率＝丙率

東$^2\times$冬-2東$\times$冬$+$乙率$=$東$\times$冬$+1$

冬$($東$^2-3$東$+1)=0$　東$^2-3$東$+1=0$

6円のとき，戊率＝丙率

東$^3\times$冬-4東$^2\times$冬$+3$東$\times$冬$+$東$\times$乙率$-$東$+1=$東$\times$冬$+1$

東$\times$冬$($東$^2-4$東$+3)=0$

東$^2-4$東$+3=0$

7円のとき，戊率＝丁率

$東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 3\,東 \times 冬 + 東 \times 乙率 - 東 + 1$

$= 東^2 \times 冬 - 2\,東 \times 冬 + 乙率$

$冬\,(東^3 - 5\,東^2 + 6\,東 - 1 = 0$

$東^3 - 5\,東^2 + 6\,東 - 1 = 0$

８円のとき，己率＝丁率

$東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^2 \times 冬 - 3\,東 \times 冬 + 乙率$

$東 \times 冬\,(東^3 - 6\,東^2 + 10\,東 - 4) = 0$

$東^3 - 6\,東^2 + 10\,東 - 4 = 0$

９円のとき，己率＝戊率

$東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 4\,東 \times 冬 + 1$

$東^4 - 7\,東^3 + 15\,東^2 - 10\,東 + 1 = 0$

１０円のとき，庚率＝戊率

$東^5 \times 冬 - 8\,東^4 \times 冬 + 22\,東^3 \times 冬 - 24\,東^2 \times 冬 + 9\,東 \times 冬 + 1$

$= 東^3 \times 冬 - 4\,東^2 \times 冬 + 4\,東 \times 冬 + 1$

$東^4 - 8\,東^3 + 21\,東^2 - 20\,東 + 5 = 0$

１１円のとき，庚率＝己率

$東^5 \times 冬 - 8\,東^4 \times 冬 + 22\,東^3 \times 冬 - 24\,東^2 \times 冬 + 9\,東 \times 冬 + 1$

$= 東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$東^5 - 9\,東^4 + 28\,東^3 - 35\,東^2 + 15\,東 - 1 = 0$

１２円のとき，辛率＝己率

$東^6 \times 冬 - 10\,東^5 \times 冬 + 37\,東^4 \times 冬 - 62\,東^3 \times 冬 + 46\,東^2 \times 冬 - 12\,東 \times 冬 + 乙率$

$= 東^4 \times 冬 - 6\,東^3 \times 冬 + 11\,東^2 \times 冬 - 6\,東 \times 冬 + 乙率$

$東^5 - 10\,東^4 + 36\,東^3 - 56\,東^2 + 35\,東 - 6 = 0$

１３円のとき，辛率＝庚率

東^{6} × 冬 − 10 東^{5} × 冬 + 37 東^{4} × 冬 − 62 東^{3} × 冬 + 46 東^{2} × 冬 − 12 東 × 冬 + 乙率

= 東^{5} × 冬 − 8 東^{4} × 冬 + 22 東^{3} × 冬 − 24 東^{2} × 冬 + 9 東 × 冬 + 1

東^{6} − 11 東^{5} + 45 東^{4} − 84 東^{3} + 70 東^{2} − 21 東 + 1 = 0

１４円のとき，壬率＝庚率

東^{7} × 冬 − 12 東^{6} × 冬 + 56 東^{5} × 冬 − 128 東^{4} × 冬 + 148 東^{3} × 冬 − 80 東^{2} × 冬 + 16 東 × 冬 + 1

= 東^{5} × 冬 − 8 東^{4} × 冬 + 22 東^{3} × 冬 − 24 東^{2} × 冬 + 9 東 × 冬 + 1

東^{6} − 12 東^{5} + 55 東^{4} − 120 東^{3} + 126 東^{2} − 56 東 + 7 = 0

１５円のとき，壬率＝辛率

東^{7} × 冬 − 12 東^{6} × 冬 + 56 東^{5} × 冬 − 128 東^{4} × 冬 + 148 東^{3} × 冬 − 80 東^{2} × 冬 + 16 東 × 冬 + 1

= 東^{6} × 冬 − 10 東^{5} × 冬 + 37 東^{4} × 冬 − 62 東^{3} × 冬 + 46 東^{2} × 冬 − 12 東 × 冬 + 乙率

東^{7} − 12 東^{5} + 55 東^{4} − 120 東^{3} + 126 東^{2} − 56 東 + 7 = 0

１６円のとき，癸率＝辛率

東^{8} × 冬 − 14 東^{7} × 冬 + 79 東^{6} × 冬 − 230 東^{3} × 冬 + 367 東^{4} × 冬 − 314 東^{3} × 冬 + 130 東^{2} × 冬

−20 東 × 冬 + 乙率

= 東^{6} × 冬 − 10 東^{5} × 冬 + 37 東^{4} × 冬 − 62 東^{3} × 冬 + 46 東^{2} × 冬 − 12 東 × 冬 + 乙率

東^{9} − 14 東^{6} + 78 東^{5} − 220 東^{4} + 330 東^{3} − 252 東^{2} + 84 東 − 8

東について

6円　(東^{2} − 4 東 + 3) ÷ (東 − 1) = 東 − 3

8円　(東^{3} − 6 東^{2} + 10 東 − 4) ÷ (東 − 2) = 東^{2} − 4 東 − 2

１０円　(東^{4} − 8 東^{3} + 21 東^{2} − 20 東 + 5) ÷ (東^{2} − 3 東 + 1) = 東^{2} − 5 東 + 5

１２円　(東^{5} − 10 東^{4} + 36 東^{3} − 56 東^{2} + 35 東 − 6) ÷ (東^{2} − 4 東 + 3) = 東^{3} − 6 東^{2} + 9 東 − 2

１４円　(東^{6} − 12 東^{5} + 55 東^{4} − 120 東^{3} + 126 東^{2} − 56 東 + 7) ÷ (東^{3} − 5 東^{2} + 6 東 − 1)

= 東^{3} − 7 東^{2} + 14 東 − 7

１６円　(東^{7} − 14 東^{6} + 78 東^{5} − 220 東^{4} + 330 東^{3} − 252 東^{2} + 84 東 − 8) ÷ (東^{3} − 6 東^{2} + 10 東 − 4)

= 東^{4} − 8 東^{3} + 20 東^{2} − 16 東 + 2

	８級	７級	６級	５級	４級	３級	２級	１級
３円							-1	1
４円							-2	1
５円						1	-3	1
６円						3	-4	1
７円					-1	6	-5	1
８円					-4	10	-6	1
９円				1	-10	15	-7	1
１０円				5	-20	21	-8	1
１１円			-1	15	-35	28	-9	1
１２円			-6	35	-56	36	-10	1
１３円		1	-27	70	-84	45	-11	1
１４円		7	-56	126	-120	55	-12	1
１５円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1
１６円	-8	84	-252	330	-220	78	-14	1

表 1: 東の係数

	５級	４級	３級	２級	１級
４円				-2	1
６円				-3	1
８円			2	-4	1
１０円			5	-5	1
１２円		-2	9	-6	1
１４円		-7	14	-7	1
１６円	2	-16	20	-8	1

表 2: 偶数個の場合

奇数個の場合につて

$$\text{原数} = (\text{円数}) - 2 = n - 2 \qquad \text{一差} = (\text{原数}) - 1 = n - 3$$

$$\text{二差} = (\text{一差}) - 1 = n - 4 \qquad \text{三差} = (\text{二差}) - 1 = n - 5$$

１級数　1

２級数　原数 $= n - 1$

３級数　$\dfrac{(\text{一差})(\text{二差})}{2} = \dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$

４級数　$\dfrac{(\text{３級数})(\text{三差})(\text{四差})}{3(\text{一差})} = \dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{2 \times 3}$

	8級	7級	6級	5級	4級	3級	2級	1級
3円							-1	1
5円						1	-3	1
7円					-1	6	− 5	1
9円				1	-10	15	-7	1
11円			-1	15	-35	28	-9	1
13円		1	-21	70	-84	45	-11	1
15円	-1	28	-126	210	-165	66	-13	1

表 3: 奇数個の場合

5級数 $\dfrac{(4\text{級数})(\text{五差})(\text{六差})}{4(\text{二差})} = \dfrac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{2\times3\times4}$

6級数 $\dfrac{(5\text{級数})(\text{七差})(\text{八差})}{5(\text{三差})} = \dfrac{(n-6)(n-7)(n-8)(n-9)(n-10)}{2\times3\times4\times5}$

偶数個の場合につて

$\text{原数} = \dfrac{\text{円数}}{2} = \dfrac{n}{2}$ 　$\text{一差} = (\text{原数}) - 3 = \dfrac{n}{2} - 3$

1級数 1

2級数 $\text{原数} = \dfrac{n}{2}$

3級数 $\dfrac{(2\text{級数})(\text{一差})}{2} = \dfrac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-3)}{2}$

4級数 $\dfrac{(3\text{級数})(\text{二差})(\text{三差})}{3(\text{一差})} = \dfrac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-4)(\frac{n}{2}-5)}{2\times3}$

5級数 $\dfrac{(4\text{級数})(\text{四差})(\text{五差})}{4(\text{二差})} = \dfrac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-5)(\frac{n}{2}-6)(\frac{n}{2}-7)}{2\times3\times4}$

6級数 $\dfrac{(5\text{級数})(\text{六差})(\text{五差})}{5(\text{三差})} = \dfrac{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}-6)(\frac{n}{2}-7)(\frac{n}{2}-8)(\frac{n}{2}-9)}{2\times3\times4\times5}$

直求径式

9円 $\text{東}^4 - 7\,\text{東}^3 + 15\,\text{東}^2 - 10\,\text{東} + 1 = 0$

3円 $\text{東} - 1 = 0$

(9円) ÷ (3円) 9円 $\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 9\,\text{東} - 1$

12円 $\text{東}^3 - 6\,\text{東}^2 + 9\,\text{東} - 2\,\text{東} - 2$

(12円) ÷ (4円) $\text{東}^2 - 4 + 1$

１５円　$東^7 - 13東^6 + 66東^5 - 165東^4 + 210東^3 - 126東^2 + 28東 - 1$

(１５円)÷(３円)　$東^6 - 12東^5 + 54東^4 - 111東^3 + 99東^2 - 27東 + 1$

(１５円)÷(５円)　$東^4 - 9東^3 + 26東^2 - 24東 + 1$

東を得た後

$$(外 - 甲)(内 + 甲)東 = 4内 \times 外$$

$$内 \times 外 \times 東 - 内 \times 甲 \times 東 + 外 \times 甲 \times 東 - 甲^2東 = 4内 \times 外$$

$$内 \times 外 - 内 \times 甲 + 外 \times 甲 - 甲^2 - \frac{4内 \times 外}{東} = 0$$

外，内より甲を求める式

$$内 \times 外 - \frac{4内 \times 外}{東} + (外 - 内)甲 - 甲^2 = 0$$

外，甲より内を求める式

$$外 \times 甲 - 甲^2 + (外 - 甲 - \frac{4外}{東})内 = 0$$

内，甲より外を求める式

$$-内 \times 甲 - 甲^2 + \left(内 + 甲 - \frac{4内}{東}\right)外 = 0$$

$$\frac{1}{東} = \frac{(外 - 甲)(内 + 甲)}{4内 \times 外}$$

補足　東に関する注記

どのようにして $東 = \dfrac{4外 \times 内}{(外 - 甲)(内 + 甲)}$ が二距斜冪率になると考えたか

円に内接する正角形を考える．1 辺を a，二距斜を a_2，円の直径を R，矢を c，とする．

$$a : c = R : a \quad c = \frac{a^2}{R}$$

$$\frac{a_2}{2} : c = R - c : \frac{a_2}{2} \quad (\frac{a_2}{2})^2 = c(R - c) = \frac{a^2}{R}(R - \frac{a^2}{R})$$

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = 4\frac{R^2 - a^2}{R^2}$$

円に直径の等しい円が内接および外接する場合を考える．$R = 外 - 甲$，$R = 内 + 甲$ より

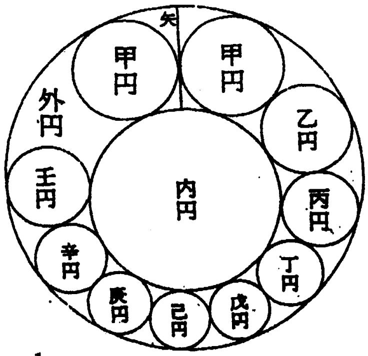
$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = 4\frac{(外 - 2甲)外}{(外 - 甲)^2}$$

$$\left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = 4\frac{(内 + 2甲)内}{(内 + 甲)^2}$$

上記のような考察から東が二距斜冪率になることが考えられたのではないかと思われる．

3　甲円が２個並んでいる時，同様に各率を求める

廉術より



$寄位 = (外 - 矢)(内 + 矢)$ $増率 = \dfrac{2(外 - 内)甲}{位}$ $因法 = 東 - 2$

$東 = \dfrac{4内 \times 外}{位}$ $冬 = 増率 + 因法$ $江 = 冬 - 2$

$増率 = 冬 - 東 + 2$ $甲率 = 1$

$乙率 = 甲率 \times 因法 + 増率 = 甲率 = 冬 - 1$

$丙率 = 乙率 \times 因法 + 増率 - 甲率 = (冬 - 1)(東 - 2) * (冬 - 東 + 2) - 1$

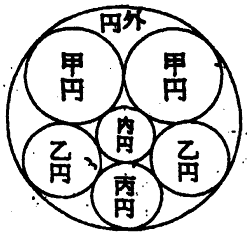
$= 東 \times 冬 - 冬 - 2東 + 3 = 東 \times 江 - 江 + 1$

$丁率 = 丙率 \times 因法 + 増率 - 乙率 = 東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 2江 + 1$

$戊率 = 丁率 \times 因法 + 増率 - 丙率 = 東^3 \times 江 - 5東^2 \times 江 + 7東 \times 江 - 3江 + 冬 - 1$

$己率 = 戊率 \times 因法 + 増率 - 丁率 = 東^4 \times 江 - 7東^3 \times 江 + 16東^2 \times 江 - 13東 \times 江 + 3江 + 1$

個別の場合について



３円のとき，$甲率 = 丙率$　$東 \times 江 - 江 + = 1$　$東 \times 江 - 江 = 0$　$東 - 1 = 0$

４円のとき，$乙率 = 丙率$　$東 \times 江 - 江 + 1 = 冬 - 1$　$東 \times 江 - 江 - 冬 + 2 = 0$

$東 \times 江 - 2江 = 0$　$東 - 2 = 0$

５円のとき，$乙率 = 丁率$　$東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 2江 + 1 = 冬 - 1$

$東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 2江 - 冬 + 2 = 0$　$東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 江 = 0$　$東^2 - 3東 + 1 = 0$

６円のとき，$丙率 = 丁率$　$東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 2江 + 1 = 東 \times 江 - 江 + 1$

$東^2 \times 江 - 4東 \times 江 + 3江 = 0$　$東^2 - 4東 + 3 = 0$

７円のとき，$丙率 = 戊率$

$東^3 \times 江 - 5東^2 \times 江 + 7東 \times 江 - 3江 + 冬 - 1 = 東 \times 江 - 江 + 1$

$東^3 \times 江 - 5東^2 \times 江 + 6東 \times 江 - 2江 + 冬 - 2 = 0$　$東^3 - 5東^2 + 6東 - 1 = 0$

８円のとき，$丁率 = 戊率$

$東^3 \times 江 - 5東^2 \times 江 + 7東 \times 江 - 3江 + 冬 - 1 = 東^2 \times 江 - 3東 \times 江 + 2江 + 1$

$東^3 \times 江 - 6東^2 \times 江 + 10東 \times 江 - 5江 + 冬 - 2 = 0$　$東^3 - 6東^2 + 10東 - 4 = 0$

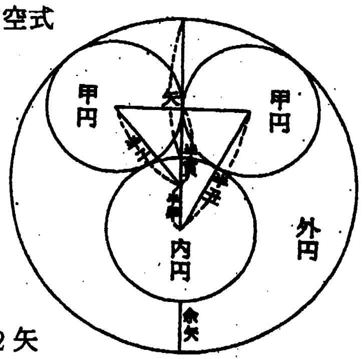
	4級	3級	2級	1級
3円			-1	1
4円			-2	1
5円		1	-3	1
6円		3	-4	1
7円	-1	6	-5	1
8円	-4	10	-6	1

表 4: 東を求める式

東を得た後

$(外-矢)(内+矢)\,東=4\,内\times外$

$内\times外\times東+外\times矢\times東-矢\times内\times東-矢^2\times東-4\,内\times外=0$ 　前空式



$子=外-甲$ 　$丑=内+甲$ 　$外-内-矢=余矢$

次に矢を消去する

$子^2-甲^2=(外-甲)^2-甲^2=外^2-2\,外\times甲=寅^2$

$丑^2-甲^2=(内+甲)^2-甲^2=内^2+2\,内\times甲=(寅+卯)^2$

$卯=矢-余矢=外-内-2\,余矢=(外-内-余矢)-余矢=-外+内+2\,矢$

$(寅+卯)^2+寅^2-卯^2=2\,寅^2+2\,寅\times卯=内^2+2\,内\times甲+外^2-2\,外\times甲-(-外+内+2\,矢)^2$

$=2\,内\times甲-2\,外\times甲+2\,外\times内+4\,外\times矢-4\,内\times矢-4\,矢^2$

$-外\times甲+内\times甲+内\times外+2\,外\times矢-2\,内\times矢-2\,矢^2=(寅+卯)\,寅$

$-外\times甲\times東+内\times甲\times東+内\times外\times東+2\,外\times矢\times東-2\,内\times矢\times東-2\,矢^2\times東$

$=(寅+卯)\,寅\times東$

(上式) − (前空式)

$-外\times甲\times東+内\times甲\times東-内\times外\times東+8\,内\times外=(寅+卯)\,寅\times東$

$-(外-内)\,甲\times東-内\times外\times東+8\,内\times外=(寅+卯)\,寅\times東$

上式を２乗すると，$\{(寅+卯)\,寅\times東\}^2=(寅+卯)^2寅^2\times東^2$ 　より

$4\,内\times外\times甲^2\times東+(外-内)^2甲^2\times東^2-16(外-内)\,内\times外\times甲\times東$

$-16\,内^2\times外^2\times東+64\,内^2\times外^2=0$

$(外+内)^2甲^2\times東^2-16(外-内)\,内\times外\times甲\times東-16\,円^2\times外^2\times東+64\,内^2\times外^2=0$

外，内より甲を求める

$$64\,内^2 \times 外^2 - 16\,内^2 \times 外^2 \times 東 + \{-16(外 - 内)\,内 \times 外 \times 東\}\,甲 + (外 + 内)^2 東^2 \times 甲^2 = 0$$

外，甲より内を求める

$$外^2 \times 甲^2 \times 東^2 + \{2\,外 \times 甲^2 \times 東^2 - 16\,外^2 \times 甲 \times 東\}\,内$$

$$+\{\,甲^2 \times 東^2 + 16\,外 \times 甲 \times 東 - 16\,外^2 \times 東 + 64\,外^2\}\,内^2 = 0$$

東を求める式は円数を角数とした時の二距斜巾を求める式と同じ．

術文　術曰以四個為原数置周法冪四之為負一差置一差乗周法冪四之得数三除四除之為正二差置二差乗周法冪四之得数五除六除之，為負三差置三差乗周法冪四之得数七除八除之為正四差置四差乗周法冪四之得数九除一十除之為負五差余倣之次第如此求之即為求東表所求表出于此
原数正四個
一差負三十九個四七八四一七六〇四三五七四
二差正一百二十九個八七八七八八〇四五三
三差負一百七十〇個九一三六二一六一三
四差正一百二十〇個四八九二八二五六
五差負五十二個八五二四二八八
六差正一十五個八〇七〇四七
七差負三個四二八七八
求東術曰置七差以円数冪除之得数以減六差余以円数冪除之得数以減五差余以円数冪除之得数以減四差余以円数冪除之得数以減三差余以円数冪除之得数以減二差余以円数冪除之得数以減一差余以円数冪除之得数以減原数余得東
仮如円数三者依定式得東一個整
以表求之得一個〇〇〇〇〇〇〇〇〇六　九位合
乃円数一十者用五差則一十一位合矣　円数三十者用三差則一十位合矣
故円数愈多則用差数愈少而足故随題而当用差数而已

東を求める式

$$原数 = 4 \quad 一差 = 4(周法)^2 \quad 二差 = \frac{(一差)4(周法)^2}{3 \times 4} = \frac{16(周法)^4}{3 \times 4}$$

$$三差 = \frac{(二差)4(周法)^2}{5 \times 6} \quad 四差 = \frac{(三差)4(周法)^2}{7 \times 8} \quad 五差 = \frac{(四差)4(周法)^2}{9 \times 10}$$

$$東 = 原数 - [一差 - [二差 - [三差 - [四差 - [五差 - [六差 - \frac{七差}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]$$

$$\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]\frac{1}{(円数)^2}]$$

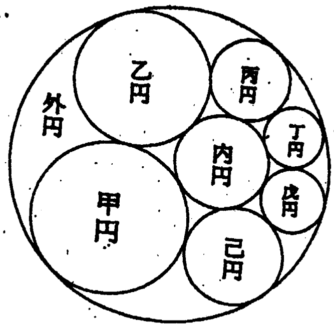
注

$$東 = \left(\frac{a_2}{a}\right)^2 = (2\cos\theta)^2 = 2(1+\cos 2\theta) \qquad \theta = \frac{\pi}{n}$$

4　円内容累円術後編

図のように内，外円の間に累円を容れたものがある．

外，内，甲円の直径を与えて，乙円，丙円，丁円$\cdots$の直径を求めよ．



術　円数を角数とする，正多角形の二距斜巾率を求め東とする．

$$因法 = 東 - 2 \qquad 増率 = \sqrt{\frac{(外 - 内)\,東 \times 甲}{外 \times 内}} \qquad 西 = 増率 + 東$$

$$西 - \frac{\{\sqrt{2\,西 - (\frac{2\,増率\times 甲}{外-内} + 東 + 4)}\} + 2}{2} = 乙率$$

$$丙率 = 乙率 \times 因法 + 増率 - 1$$

$$丁率 = 丙率 \times 因法 + 増率 - 乙率$$

$$戊率 = 丁率 \times 因法 + 増率 - 丙率$$

外，甲，乙を与えて内を求める　**廉術変換より**

$$外^2 \times 甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 + \{2\,外 \times 甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 - 8\,外^2(甲 + 乙)\,甲 \times 乙 \times 東\}\,内$$

$$+\{\,甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 + 8\,外\,(甲 + 乙)\,甲 \times 乙 \times 東 + 16\,外^2 \times (甲 + 乙)^2 - 16\,外^2 \times 甲 \times 乙\,\}\,内^2 = 0$$

$$-外 \times 甲 \times 乙 \times 東 + \{-甲 \times 乙 \times 東 + 4\,外\,(甲 + 乙)\} = 寄位$$

$$寄位^2 = 外^2 \times 甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 + \{2\,甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 \times 外 - 8\,外^2 \times 甲 \times 乙 \times 東\,(甲 + 乙)\}\,内$$

$$+\{\,甲^2 \times 乙^2 \times 東^2 - 8\,外\,(甲 + 乙)\,甲 \times 乙 \times 東 + 16\,外^2(甲 + 乙)\}\,内^2$$

$$寄位^2 - 基式 = \{-16\,外\,(甲 + 乙)\,甲 \times 乙 \times 東 + 16\,外^2 \times 甲 \times 乙 \times 東\,\}\,内^2$$

$$\sqrt{\ } = \sqrt{-16\,外\,(甲 + 乙)\,甲 \times 乙 \times 東 + 16\,外^2 \times 甲 \times 乙 \times 東}$$

$$-外 \times 甲 \times 乙 \times 東 + \{-甲 \times 乙 \times 東 + 4\,外\,(甲 + 乙) - \sqrt{\ }\}\,内 = 0$$

$$-外 \times 甲 \times 乙 \times 東 + \{-甲 \times 乙 \times 東 + 4\,外\,(甲 + 乙) + \sqrt{\ }\}\,内 = 0$$

解　廉術変換の天を求める式．天は甲，地は乙に換える．

$$(外+内)\,甲^2\times 乙^2\times 乾\,(外-内)\,甲^2\times 乙-2\,乾\,(外-内)\,甲\times 乙^2+2\,乾\,(外-内)\,甲\times 乙\times 矢$$

$$-2\,乾\times 坤\times 甲\times 乙+乾^2\times 甲^2+乾^2\times 乙^2=0 \quad 基式$$

$$乾=外\times 内+外\times 矢-内\times 矢-矢^2 \quad 坤=内\times 外+矢^2$$

$$東=\frac{4\,内\times 外}{乾}=因法+2 \quad 増率=\frac{2(外-内)\,甲}{乾} \quad 東\times 乾=4\,内\times 外 \quad とする$$

乙を求める式

$$(外+内)^2東^{\times}甲^2\times 乙^2-8(外-内)\,内\times 外\,(甲+乙)\,甲\times 乙\times 東-16\,内^2\times 外^2\times 甲\times 乙\times 東$$

$$+16\,内^2\times 外^2(甲+乙)^2=0$$

$$16\,内^2\times 外^2\times 甲^2+\{32\,内^2\times 外^2\times 甲-16\,内^2\times 外^2\times 甲\times 東-8(外-内)\,内\times 外\times 甲\times 東\}\,乙$$

$$+\{16\,円^2\times 外^2+(外+内)^2\times 甲^2\times 東^2-8(外-内)\,内\times 外\times 甲\times 東\}\,乙^2=0\cdots \quad 原式$$

$$-2\,内\times 外\times 甲+\{-2\,内\times 外+内\times 外\times 東+\frac{(外-内)\,甲\times 東}{2}\}\,乙=寄位$$

$$4(寄位)^2=16\,内^2\times 外^2\times 甲^2$$

$$+\{32\,内^2\times 外^2\times 甲-16\,内^2\times 外^2\times 甲\times 東-8(外-内)\,外\times 内\times 甲^2東\}\,乙$$

$$+\{16\,内^2\times 外^2+44\,内^2\times 外^2\times 東^2+(外-内)^2甲^2\times 東^2-16\,内^2\times 外^2\times 東$$

$$+4(外-内)\,内\times 外\times 甲\times 東^2-8(外-内)\,内\times 外\times 甲\times 東\}\,乙^2$$

$$\{4(寄位)^2-(原式)\}\div 4=\{-4\,内^2\times 外^2\times 東+内^2\times 外^2\times 東^2+(外-内)\,内\times 外\times 甲\times 東^2$$

$$-内\times 外\times 甲^2\times 東^2\}\,乙^2$$

$$(上式の乙の係数)\div(外^2\times 内^2)=-4\,東+東^2+\frac{(外-内)\,甲\times 東^2}{外\times 内}-\frac{甲^2\times 東^2}{外\times 内}$$

$$=-4\,東+東^2+2\,増率\times 東-\frac{甲^2\times 東^2}{外\times 内} \quad 西=東+増率$$

$$=-4\,東-東^2+2\,東\times 西-\frac{2\,増率\times 甲\times 東}{外-内}$$

$$\sqrt{}=\sqrt{-4\,東-東^2+2\,東\times 西-\frac{2\,増率\times 甲\times 東}{外-内}} \quad で表す$$

$$-2\,甲+\{2+東+増率-\sqrt{}\}\,乙=0$$

$$乙率=\{東+増率-2-\sqrt{}\}\div 2 \quad 乙=\frac{甲}{乙率} \quad 東=因法+2$$

因法を求める

$$丙率 = 乙率 \times 因法 + 増率 - 甲率 = 増率 - 1 + 乙率 \times 因法$$

$$丁率 = 丙率 \times 因法 + 増率 - 乙率 = 増率 - 乙率 + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法^2$$

$$戊率 = 丁率 \times 因法 + 増率 - 丙率 = 1 + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法^3$$

$$己率 = 戊率 \times 因法 + 増率 - 丁率 = 乙率 + (-増率 + 2)\,因法 + (増率 - 3\,乙率)\,因法^2$$
$$+(増率 - 1)\,因法^3 + 乙率 \times 因法^4$$

$$庚率 = 己率 \times 因法 + 増率 - 戊率 = 増率 - 1 + (-増率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,増率 + 3)\,因法^2$$
$$+(増率 - 4\,乙率)\,因法^3 + (増率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5$$

$$辛率 = 庚率 \times 因法 + 増率 - 己率 = 増率 - 乙率 + (2\,増率 - 3)\,因法 + (-増率 + 6\,乙率)\,因法^2$$
$$+(-3\,増率 + 4)\,因法^3 + (増率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (増率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6$$

$$壬率 = 辛率 \times 因法 + 増率 - 庚率 = 1 + (2\,増率 - 4\,乙率)\,因法 + (4\,増率 - 6)\,因法^2$$
$$+(-3\,増率 + 10\,乙率)\,因法^3 + (-3\,増率 + 5)\,因法^4 + (増率 - 6\,乙率)\,因法^5$$
$$+(増率 - 1)\,因法^6 + 乙率 \times 因法^7$$

$$癸率 = 壬率 \times 因法 + 増率 - 辛率 = 乙率 + (-2\,増率 + 4)\,因法 + (4\,増率 - 10\,乙率)\,因法^2$$
$$+(7\,増率 - 10)\,因法^3 + (-4\,増率 + 15\,乙率)\,因法^4 + (-4\,増率 + 6)\,因法^5$$
$$+(増率 - 7\,乙率)\,因法^6 + (増率 - 1)\,因法^7 + 乙率 \times 因法^8$$

三円

$$丁率 = 甲率 \qquad (増率 - 乙率) + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法^2 = 1$$

$$(増率 - 乙率 - 1) + (増率 - 1)\,因法 + 乙率 \times 因法 = 0 \quad \cdots \quad 前式$$

$$戊率 = 乙率 \qquad 1 + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法^3 = 乙率$$

$$(1 - 乙率) + (増率 - 2\,乙率)\,因法 + (増率 - 1)\,因法^2 + 乙率 \times 因法 = 0 \quad \cdots \quad 後式$$

$$後式 - 前式 \times 因法$$

$$(1 - 乙率) + (-乙率 + 1)\,因法 = (-1 - 因法)(乙率 - 1) = 0$$

$$-1 - 因法 = 0$$

四円

戊率 $=$ 甲率　$1+(\text{増率}-2\,\text{乙率})\,\text{因法}+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^2+\text{乙率}\times\text{因法}^3=1$

$(\text{増率}-2\,\text{乙率})+(\text{増率}-1)\,\text{因法}+\text{乙率}\times\text{因法}^2=0\ \cdots$　前式

己率 $=$ 乙率

$\text{乙率}+(-\text{増率}+2)\,\text{因法}+(\text{増率}-3\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^3+\text{乙率}\times\text{因法}=\text{乙率}$

$(-\text{増率}+2)+(\text{増率}-3\,\text{乙率})\,\text{因法}+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^2+\text{乙率}\times\text{因法}^3=0\ \cdots$　後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$(-\text{増率}+2)-\text{乙率}\times\text{因法}=0\ \cdots$　一式

前式 $+$ (一式) $\times$ 因法　　$(\text{増率}-2\,\text{乙率})+\text{因法}=0\ \cdots$　二式

(一式) $+$ (二式)　　$(-2\,\text{乙率}+2)+(-\text{乙率}+1)\,\text{因法}=(\text{乙率}-1)(-2-\text{因法})=0$

$-2-\text{因法}=0$　この式は題意に背くから　因法 $=0$

五円

己率 $=$ 甲率

$\text{乙率}+(-\text{増率}+2)\,\text{因法}+(\text{増率}-3\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^3+\text{乙率}\times\text{因法}^4=0$

$\text{乙率}-1+(-\text{増率}+2)\,\text{因法}+(\text{増率}-3\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^3$

$\quad+\text{乙率}\times\text{因法}^4=0\ \cdots$　前式

庚率 $=$ 乙率

$\text{増率}-1+(-\text{増率}+3\,\text{乙率})\,\text{因法}+(-2\,\text{増率}+3)\,\text{因法}^2+(\text{増率}-4\,\text{乙率})\,\text{因法}^3$

$\quad+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^4+\text{乙率}\times\text{因法}^5=\text{乙率}$

$\text{増率}-\text{乙率}-1+(-\text{増率}+3\,\text{乙率})\,\text{因法}+(-2\,\text{増率}+3)\,\text{因法}^2+(\text{増率}-4\,\text{乙率})\,\text{因法}^3$

$\quad+(\text{増率}-1)\,\text{因法}^4+\text{乙率}\times\text{因法}^5=0\ \cdots$　後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$(\text{増率}-\text{乙率}-1)+(-\text{増率}+2\,\text{乙率})\,\text{因法}+(-\text{増率}+!)\,\text{因法}^2-\text{乙率}\times\text{因法}^3=0\ \cdots$　一式

(一式) $\times$ 因法 $-$ (前式)

$(\text{乙率}-1)+(-\text{乙率}+1)\,\text{因法}+(-\text{乙率}+1)\,\text{因法}^2=0\ \cdots$　二式

$(\text{乙率}-1)(1-\text{因法}-\text{因法}^2)=0$　　$1-\text{因法}-\text{因法}^2=0$

六円

$$庚率 = 甲率$$

$$増率 - 1 + (-増率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,増率 + 3)\,因法^2 + (増率 - 4\,乙率)\,因法^3$$

$$+(増率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5 = 1$$

$$増率 - 2 + (-増率 + 3\,乙率)\,因法 + (-2\,増率 + 3)\,因法^2 + (増率 - 4\,乙率)\,因法^3$$

$$+(増率 - 1)\,因法^4 + 乙率 \times 因法^5 = 0 \cdots \quad 前式$$

$$辛率 = 乙率$$

$$増率 - 乙率 + (2\,増率 - 3)\,因法 + (-2\,増率 + 6\,乙率)\,因法^2 + (-3\,増率 + 4)\,因法^3$$

$$+(増率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (増率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6 = 乙率$$

$$増率 - 2\,乙率 + (2\,増率 - 3)\,因法 + (-2\,増率 + 6\,乙率)\,因法^2 + (-3\,増率 + 4)\,因法^3$$

$$+(増率 - 5\,乙率)\,因法^4 + (増率 - 1)\,因法^5 + 乙率 \times 因法^6 = 0 \cdots \quad 後式$$

$$後式 - 前式 \times 因法$$

$$増率 - 2\,乙率 + (増率 - 1)\,因法 + (-増率 + 3\,乙率)\,因法^2 + (-増率 + 1)\,因法^3$$

$$-乙率 \times 因法^4 = 0 \cdots \quad 一式$$

$$(一式) \times 因法 + 前式$$

$$増率 - +2\,乙率 \times 因法 + (-増率 + 2)\,因法^2 - 乙率 \times 因法^3 = 0 \cdots \quad 二式$$

$$(一式) - (二式) \times 因法$$

$$増率 - 2\,乙率 + 因法 + (-増率 + 2\,乙率)\,因法^2 - 因法^3 = 0 \cdots \quad 三式$$

$$(三式) - (二式)$$

$$-2\,乙率 + 2 + (-乙率 + 1)\,因法 + (2\,乙率 - 2)\,因法^2 + (乙率 - 1)\,因法^3 = 0$$

$$(乙率 - 1)(-2 - 因法 + 2\,因法^2 + 因法^3) = 0$$

$$-2 - 因法 + 2\,因法^2 + 因法^3 = 0$$

$$(2 + 因法)(1 - 因法)(-1 + 因法) = 0 \qquad -1 + 因法 = 0$$

七円

辛率 $=$ 甲率

$(\text{增率}-\text{乙率})+(2\,\text{增率}-3)\,\text{因法}+(-2\,\text{增率}+6\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(-3\,\text{增率}+4)\,\text{因法}^3$

$+(\text{增率}-5\,\text{乙率})\,\text{因法}^4+(\text{增率}-1)\,\text{因法}^5+\text{乙率}\times\text{因法}^6=1$

$(\text{增率}-\text{乙率}-1)+(2\,\text{增率}-3)\,\text{因法}+(-2\,\text{增率}+6\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(-3\,\text{增率}+4)\,\text{因法}^3$

$+(\text{增率}-5\,\text{乙率})\,\text{因法}^4+(\text{增率}-1)\,\text{因法}^5+\text{乙率}\times\text{因法}^6=0\ \cdots$ 前式

壬率 $=$ 乙率

$1+(2\,\text{增率}-4\,\text{乙率})\,\text{因法}+(4\,\text{增率}-6)\,\text{因法}^2+(-3\,\text{增率}+10\,\text{乙率})\,\text{因法}^3+(-4\,\text{增率}+5)\,\text{因法}^4$

$+(\text{增率}-6\,\text{乙率})\,\text{因法}^5+(\text{增率}-1)\,\text{因法}^6+\text{乙率}\times\text{因法}^7=\text{乙率}$

$-\text{乙率}+1+(2\,\text{增率}-4\,\text{乙率})\,\text{因法}+(4\,\text{增率}-6)\,\text{因法}^2+(-3\,\text{增率}+10\,\text{乙率})\,\text{因法}^3$

$+(-4\,\text{增率}+5)\,\text{因法}^4+(\text{增率}-6\,\text{乙率})\,\text{因法}^5+(\text{增率}-1)\,\text{因法}^6+\text{乙率}\times\text{因法}^7=0\ \cdots$ 後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$-\text{乙率}+1+(\text{增率}-3\,\text{乙率}+1)\,\text{因法}+(2\,\text{增率}-3)\,\text{因法}^2+(-\text{增率}+4\,\text{乙率})\,\text{因法}^3$

$+(-4\,\text{增率}+5)\,\text{因法}^4+\text{乙率}\times\text{因法}^5=0\ \cdots$ 一式

前式 $+$ (一式) $\times$ 因法

$(\text{增率}-\text{乙率}-1)+(2\,\text{增率}-\text{乙率}-2)\,\text{因法}+(-\text{增率}+3\,\text{乙率}+1)\,\text{因法}^2+(-\text{增率}+1)\,\text{因法}^3$

$-\text{乙率}\times\text{因法}^4=0\ \cdots$ 二式

(一式) $-$ (二式) $\times$ 因法

$-\text{乙率}+1+(-2\,\text{乙率}+2)\,\text{因法}+(\text{乙率}-1)\,\text{因法}^2+(\text{乙率}-1)\,\text{因法}^3=0$

$(\text{乙率}-1)(-1-2\,\text{因法}+\text{因法}^2+\text{因法}^3)=0 \qquad -1-2\,\text{因法}+\text{因法}^2+\text{因法}^3=0$

八円

壬率 $=$ 甲率

$2\,\text{增率}-4\,\text{乙率}+(4\,\text{增率}-6)\,\text{因法}+(-3\,\text{增率}+10\,\text{乙率})\,\text{因法}^2+(-4\,\text{增率}+5)\,\text{因法}^3$

$+(\text{增率}-6\,\text{乙率})\,\text{因法}^4+(\text{增率}-1)\,\text{因法}^5+\text{乙率}\times\text{因法}^6=0\ \cdots$ 前式

癸率 $=$ 乙率

-2 増率 $+4) + (4$ 増率 -10 乙率) 因法 $+ (7$ 増率 -10 乙率) 因法$^2 + (-4$ 増率 $+15$ 乙率) 因法^3

$+(-5$ 増率 $+6)$ 因法$^4 + ($増率 -7 乙率) 因法$^5 + ($増率 $-1)$ 因法$^6 +$ 乙率 $\times$ 因法$^7 = 0 \cdots$ 後式

後式 $-$ 前式 $\times$ 因法

$(-2$ 増率 $+4) + (2$ 増率 -6 乙率) 因法 $+ (3$ 増率 $-4)$ 因法$^2 + (-$増率 $+5$ 乙率) 因法^3

$+(-$増率 $+1)$ 因法$^4 +$ 乙率 $\times$ 因法$^5 = 0 \cdots$ 一式

前式 $+$ (一式) $\times$ 因法

$(2$ 増率 -4 乙率) $+ (2$ 増率 $-2)$ 因法 $+ (-$増率 $+4$ 乙率) 因法^2

$+(-$増率 $+1)$ 因法$^3 -$ 乙率 $\times$ 因法$^4 = 0 \cdots$ 二式

(一式) $-$ (二式) $\times$ 因法

$(-2$ 増率 $+4) - 2$ 乙率 $\times$ 因法 $+ ($増率 $-2)$ 因法$^2 +$ 乙率 $\times$ 因法$^3 = 0 \cdots$ 三式

(二式) $+$ (三式) $\times$ 因法

$(2$ 増率 -4 乙率) $+2$ 因法 $+ (-$増率 $+2$ 乙率) 因法$^2 -$ 因法$^3 = 0 \cdots$ 四式

(三式) $+$ (四式)

-4 乙率 $+4 + (-2$ 乙率 $+2)$ 因法 $+ (2$ 乙率 $-2)$ 因法$^2 + ($乙率 $-1)$ 因法$^3 = 0$

(乙率 $-1)(-4-2$ 因法 $+2$ 因法$^2 +$ 因法$^3) = 0$　$-4-2$ 因法 $+2$ 因法$^2 +$ 因法$^3 = 0$

$(2+$ 因法$)(-2+$ 因法$^2) = 0$　$-2+$ 因法$^2 = 0$

東を得る式

東 $=$ 因法 $+2$

3円　$1-$ 東 $=0$

4円　$-2+$ 東 $=0$

5円　$-1+3$ 東 $-$ 東$^2 = 0$

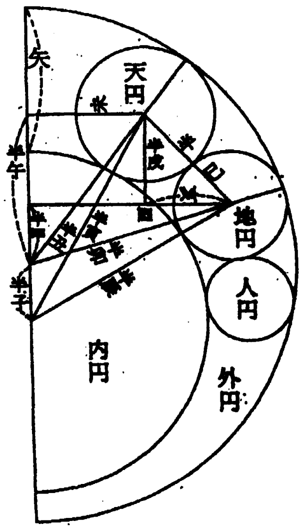
6円　$-3+$ 東 $=0$

7円　$-1+6$ 東 -5 東$^2 +$ 東$^3 = 0$

8円　$2-4$ 東 $+$ 東$^2 = 0$

5　補足廉術変換より

外円，内円，地円の直径，および矢の長さが与えられたとき，天円，人円の直径を求める．



$\text{子} = -\text{外} + \text{内} + 2\,\text{矢} = -(\text{外} - \text{内}) + 2\,\text{矢} = -(\text{外} - \text{矢}) + (\text{内} + \text{矢})$

$\text{丑} = \text{外} - \text{天} \quad \text{寅} = \text{内} + \text{天} \quad \text{卯} = \text{外} - \text{地} \quad \text{辰} = \text{内} + \text{地} \quad \text{巳} = \text{天} + \text{地}$

$\text{寅}^2 - \text{子}^2 - \text{丑}^2 = 2\,\text{子} \times \text{午}$

$= -2\,\text{外}^2 - 4\,\text{内} \times \text{矢} - 4\,\text{矢}^2 + 4\,\text{外} \times \text{矢} + 2\,\text{外} \times \text{内} + 2\,\text{内} \times \text{天} + 2\,\text{外} \times \text{天}$

$\text{東} = \text{子} \times \text{午} = -\text{外}^2 - 2\,\text{内} \times \text{矢} - 2\,\text{矢}^2 + 2\,\text{外} \times \text{矢} + \text{外} \times \text{内} + \text{内} \times \text{天} + \text{外} \times \text{天}$

$\text{子}^2 \times \text{丑}^2 - \text{東}^2 = 4\,\text{子}^2 \times \text{未}^2$

$\text{乾} = \text{外} \times \text{内} + \text{外} \times \text{矢} - \text{内} \times \text{矢} - \text{矢}^2$

$\text{子}^2 \times \text{未}^2 = -\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{矢} + \text{乾} \times \text{矢}^2 + \text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{天} - \text{乾} \times \text{天}^2 = \text{冬}$

冬の中の天を地に換える，丑を卯に，寅を辰に，午を申に換える．

$\text{子}^2 \times \text{酉}^2 = -\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{矢} + \text{乾} \times \text{矢}^2 + \text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{地} - \text{乾} \times \text{地}^2 = \text{江}$

$\text{酉} = \text{未} + \text{亥}$，東の中の天を地に換える．

$\text{子} \times \text{申} = -\text{外}^2 - 2\,\text{内} \times \text{矢} - 2\,\text{矢}^2 + 2\,\text{外} \times \text{矢} + \text{外} \times \text{内} + \text{内} \times \text{地} + \text{外} \times \text{地}$

$\text{東} - \text{子} \times \text{申} = \text{子} \times \text{戊} = \text{内} \times \text{天} + \text{外} \times \text{天} - \text{内} \times \text{地} - \text{外} \times \text{地}$

$\text{子}^2 \times \text{巳}^2 - \text{子}^2 \times \text{戊}^2 = 4\,\text{子}^2 \times \text{亥}^2$

$\text{子}^2 \times \text{亥}^2 = \text{支} = -\text{乾} \times \text{天}^2 - 2\,\text{乾} \times \text{天} \times \text{地} - \text{乾} \times \text{地}^2 + (\text{外} + \text{内})^2\text{天} \times \text{地}$

$\text{支} + \text{江} - \text{冬} = \text{子}^2 \times 2\,\text{亥} \times \text{酉}$

$= -2\,\text{天} \times \text{地} \times \text{乾} - 2\,\text{地}^2 \times \text{乾} - (\text{外} - \text{内})\,\text{乾} \times \text{天} + (\text{外} - \text{内})\,\text{乾} \times \text{地} + (\text{外} + \text{内})^2\text{天} \times \text{地}$

$4\,\text{江} \times \text{支} = 4\,\text{子}^4 \times \text{亥}^2 \times \text{酉}^2$

$\text{坤} = \text{外} \times \text{内} + \text{矢}^2$　とおき子を約す．

$\text{乾}^2 \times \text{地}^2 + \{-2\,\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{地}^2 - 2\,\text{乾} \times \text{坤} \times \text{地} + 2\,\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{矢} \times \text{地}\}\,\text{天}$

$+\{(\text{外} + \text{内})^2\text{地}^2 + \text{乾}^2 - 2\,\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{地}\}\,\text{天}^2 = 0$

天を地に，地を人に換える．天を求める式と人を求める式は交商式．

$\text{乾}^2 \times \text{地}^2 + \{-2\,\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{地}^2 - 2\,\text{乾} \times \text{坤} \times \text{地} + 2\,\text{乾}\,(\text{外} - \text{内})\,\text{矢} \times \text{地}\}\,\text{人}$

$$+\{(外+内)^2地^2+乾^2-2\,乾\,(外-内)\,地\}\,人^2=0$$

$$[-乾\times地+\{(外-内)\,地+坤-(外-内)\,矢\}\,天]^2$$

$$-\{4\,内\times外\,(矢+地)(矢-地)-4\,内\times外\,(外-内)(矢-地)\}=0$$

$$右位=\sqrt{4\,内\times外\,(矢+地)(矢-地)-4\,内\times外\,(外-内)(矢-地)}$$

$$-乾\times地+\{(外-内)\,地+坤-(外-内)\,矢-(右位)\}\,天=0$$

$$-乾\times地+\{(外-内)\,地+坤-(外-内)\,矢+(右位)\}\,人=0$$

$$-乾\times地\times人+\{-乾\times地+2(外-内)\,地\times人+2\,坤\times人-2(外-内)\,矢\times人\}\,天=0$$

地を甲に，天を乙に換える．

$$乾=外\times内+外\times矢-内\times矢-矢^2=(外-矢)(矢+内)=寄位$$

$$坤=内\times外+矢^2\quad 内\times外-矢\,(外-内)+矢^2=内\times外-寄位$$

$$左式=-寄位\times甲+\{(外-内)\,甲+2\,内\times外-寄位\}\,乙\quad 再位$$

$$右位=\sqrt{4(甲+矢)(矢-甲)\,内\times外-4(外-内)(矢-甲)\,内\times外}$$

$$-寄位\times甲+(再位-右位)\,乙=0$$

丙を求める式

$$-寄位\times甲\times乙+\{-寄位\times乙+2(外-内)\,甲\times乙+2\,坤\times甲-2(外-内)\,矢\times甲\}\,丙=0$$

$$-甲+\{-1+\frac{2(外-内)\,甲}{寄位}+\frac{4\,内\times外\times甲}{寄位\times乙}-\frac{2\,甲}{乙}\}\,丙=0$$

$$丙率=\frac{甲}{丙}\quad 甲率=1\quad 乙率=\frac{甲}{乙}\quad 因法=\frac{4\,内\times外}{寄位}-2\quad 増率=\frac{2(外-内)\,甲}{寄位}$$

$$-甲+\{-甲率+増率+乙率\times因法\}\,丙=0$$

$$丙率=乙率\times因法+増率-甲率\qquad 丙=\frac{甲}{丙率}$$

参考文献

[1] 平山諦・松岡元久編『安島直円全集』富士短期大学出版部　昭和 41 年

[2] 加藤平左エ門著『和算ノ研究　雑論Ⅱ』日本学術振興会　昭和 29 年

[3] 平山諦・内藤淳編集『松永良弼』松永良弼刊行会　東京法令　昭和 62 年

[4] 米光丁・藤井康生著『拾璣算法』平成 11 年