数理解析研究所講究録
第1546巻2007年65-76

デューラーの「幾何学世界」について

吉川 敦

yoshikaw@math.kyushu-u.ac.jp

平成18年10月19日

1 はじめに

アルブレヒト・デューラー[1]は近世ドイツの高名な画家であり，数多くの有名な作品が残されている．また，デューラーは晩年多くの技術書を書き著した．以下では，Underweysung der messung （「測定法教則」．ニュルンベルク 1525，1534）について論じたい[2]．

デューラーの「測定法教則」は4部からなり，さまざまな図形の説明や作成法が論じられている．当時の絵画や建築で必要とされた基本的な図形や装飾用の曲線や立体の目録ともなっている．職人を読者に想定しており，ドイツ語で書かれていたが，デューラー自身の社会的な階層意識を背景に，これら職人の技法の集積を数学の基礎の上に整理しようと試みたものであり，画家の数学者としての認知がデューラーのこのような営為の目標であったと理解される[3]．ユークリッドを始めとする各種の数学古典に準拠しつつ，また，多数の学者の協力も得て，「測定法教則」は準備されたようであるが，数学的命題として提示されている話題は極めて少ない．ほとんどの話題は，具体的な手順を明確に示す形で各種図形の構成法や近似作成法の紹介として，明晰に述べられている．しかし，遠近法の説明や倍積立方体の構成法の一部については，デューラーが恐らく直観的に把握できなかったためであろう，記述が明晰ではない．

このような事情から「測定法教則」の話題は，当時の職人技術の数学的内容を反映したものが多い．例えば，「三大作図問題」，すなわち，与えられた円と等積の正方形の作図，与えられた角の三等分の作図，与えられた立方体の倍積立方体の作図について詳細に論じられている．今日では周知のこととなったが，これらは目盛りのない定規とコンパスだけでは作図できない．すなわち，目盛りのない定規，つまり，与えられた2点を結ぶ線分を引くこと，及び，コンパス，つまり，与えられた点を中心とし与えられた長さを半径とする円を描くこと，という二つの操作の有限回の組み合わせだけでは，三大作図問題の解には決して到達できないのである．一方，三大作図問題は，作画や設計上，あるいは鋳造用の

---

[1]Albrecht Dürer (1471–1528)．手近な解説は，[8]，[6]，[7]，[10] など．

[2]本稿では主に [3] を利用したが，下村耕史教授による邦訳 [12] もある．[12] は，三浦伸夫教授の数学史上の補遺を加え，中央公論美術出版から近々出版される予定．

[3]なお，現存のデューラー記念館は数学者・天文学者レギオモンタヌスの旧宅をレギオモンタヌスの蔵書ともどもデューラーが購入したものであったという．

予備設計の段階で直面する問題でもあった．したがって，職人の立場では，優先すべきは方法論上の純度ではなく，優れた近似解法で作業現場でも利用できるものを示すことである．デューラーが行ったのは，まさにそれであった．「測定法教則」では，他にも，各種の螺旋曲線や入り組んだ曲線図形が同様の精神で扱われている．

ちなみに[4]，「測定法教則」には，刊行後間もなく人文学者エラスムスが目を通しており，ドイツ語で書かれているが，という留保を付しつつも高く評価したという．「測定法教則」のラテン語訳は，デューラー在世中からニュルンベルクの古典学者カメラリウスによって作られ，デューラー没後パリで出版された．この訳本は，クリストフ・クラヴィウス，ガリレオ・ガリレイ，ティコ・ブラーエ，ヨハンネス・ケプラー，シモン・ステヴィンらによって断片的ながら読まれた．クラヴィウスのユークリッドの「原論」の注釈にはデューラーの作図への言及があり，それは，さらに，マテオ・リッチらによる漢訳の「原論」にまで引き継がれているという[5]．ケプラーはデューラーの近似的かつ便宜的な手法に極めて批判的であったが，ティコ・ブラーエは同情的とも思われる要素を示していたようである．一方，デューラーのドイツ語原本の挿図も強い影響力を持っていたらしく，二重投影図を用いた挿画はモンジュの画法幾何のヒントになったという．

以下では，「測定法教則」のごく一部を，主に，[3] および [11] を参考にしつつ紹介したい．ただし，数学的には，これらの文献には明示されていない（と思われる）ところまで踏み込んだ計算を示し，筆者の若干の創意を示したつもりではある．

なお，デューラーの遠近法については，[5]，[3] が詳しい．遠近法，特に，アルベルティ [1] 以来の正統作図法とその系譜については，[13]，[14] に解説がある．ペルラン，ピエロ．デラ・フランチェスカやレオナルド・ダヴィンチらの理論も取り込みつつ，さらに，デザルグの定理など（例えば，[2]）も念頭においた議論をまとめた上で，デューラーの遠近法の誤りやその影響の整理をしておく必要があるだろう．この際，[5] や [14] に描かれているピエロらの記述は，図にせよ，用語にせよ，そのままでは，決してわかりやすいものではない．デューラーの混乱にも大いに同情の余地があると思われる．今日の言葉で整理をすべきであろう（ただし，数学的な純度を上げることが望まれるわけではない．大事な目的には，技法としての正統作図法を正しく適用するために必要とされる明快な理解への支援も含まれる）．われわれの立場としては，さらに，桃山期の欧風画やキリシタン由来と推測される技術などを通じ，文献的には恐らく江戸初期までに失われてしまったと思われる正統作図法の名残を探ることも課題になるであろう．

2 数学者デューラー

画家デューラーを数学者として分類することが適当かどうかは当然議論の対象になることであるが，筆者はパイファー女史のご意見に賛同したい（[3]）．女史は三つ理由を挙げ

[4]Jeanne Peiffer の最近の講演記録 [11]（特に，Conclusions Provisoires）参照．

[5]当然，16 世紀後半の日本にも何らかの影響があったと思われるが，後年の政治的軍事的混乱やキリシタン弾圧などを考慮すると，史料に基づく検証は困難かと思われる．当時の欧風画など（例えば，[4]，[9]）の系譜や西欧に残る類似の絵画との比較検討によりデューラーの残滓が認められるかどうか — デューラーの遠近法理解には誤解があったことが検証の助けになるかも知れない．

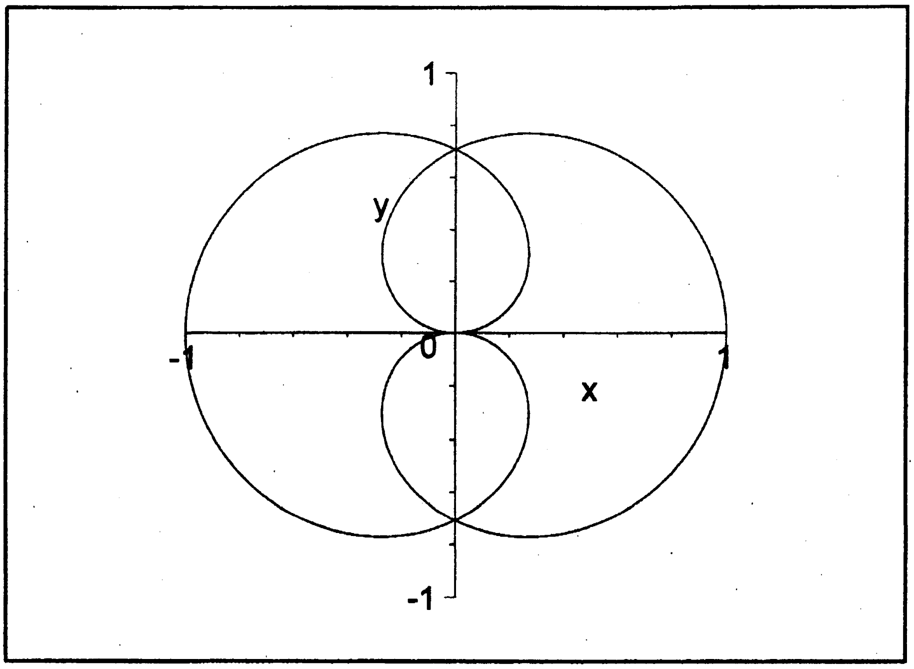

図 1: デューラーの葉型曲線.

ている．すなわち，第一に，デューラー自身による幾つかの曲線類の提起や立体の断面図を用いた二重投影法での扱い，特に，この方法での円錐曲線の描き方などの数学的貢献が認められること，第二に，ドイツ文化圏に遠近法を最初に紹介したこと，第三に，形に対する悦びの感覚が著しいことである．例えば，曲線

$$4(x^2+y^2)^3-4(x^2+y^2)^2+y^2=0$$

はデューラーの葉型曲線といわれる（「測定法教則」第一書第 18 図）．Maple[6] による作図（図 1）を示す．また，二重投影法は職人の技法の反映ではないかとパイファーは言う．事実，デューラーは，厳格な意味では，職人であって，数学者[7]とは言えない．「測定法教則」で展開している議論も不正確なものが多く，特に，既述のように遠近法の部分はよくない．しかし，これはデューラーに遠近法の手ほどきをした数学者たちの問題でもあっただろう．

3 デューラーと三大作図問題

三大作図問題は職人にとり実用上の重大問題でもあった．以下に，「測定法教則」に述べられている手法を示す．

[6]Maple は Waterloo Maple, Inc. の商標である．

[7]ルネッサンスの数学者とは，まず，四学，すなわち，算術，幾何，天文学，音楽をもっぱらに研鑽する学者，あるいは，また，数学的知識に基盤を置く職業に従事する人，例えば，建築家を指していたという（[3], p.122）．

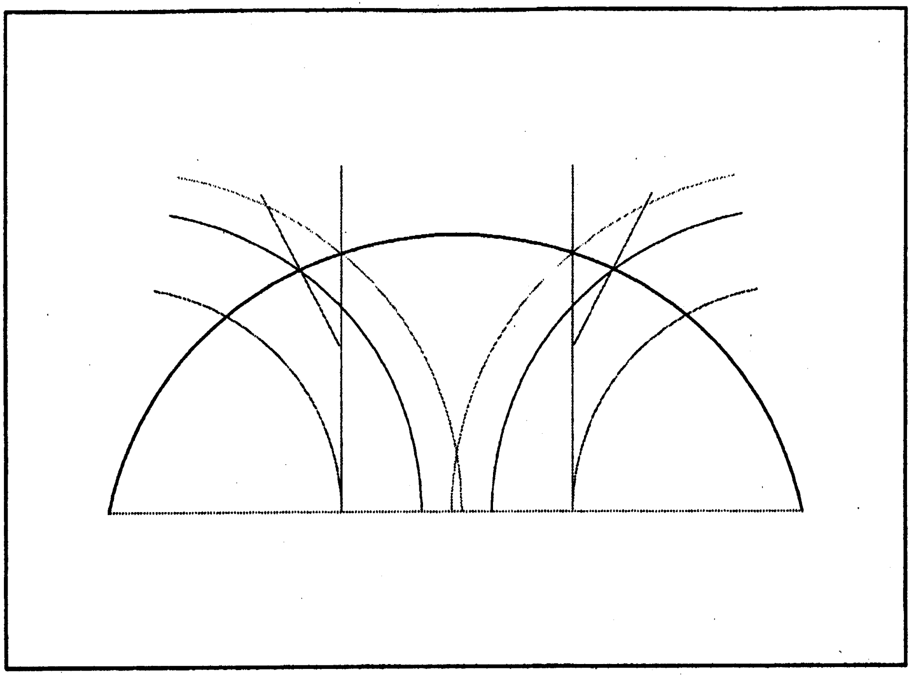

図 2: 中心角 $\frac{7}{8}\pi$ のときの角の三等分. 点 $A, B, \cdots, E, F$ はどこか.

3.1 角の三等分

「測定法教則」第二部（第二書）第 20 図の内容である. 与えられた角を中心角とする円弧 $\widehat{AB}$ を近似的に三等分する. このために, この円弧に張った弦 AB を三等分し, その三等分点 P, Q に立てた垂線ともとの円弧 $\widehat{AB}$ との交点 C, D を求める. 次いで, 中心 A, B, 半径 AC, BD の円周を描き, 弦 AB との交点 R, S を求める. 線分 PR, BS の三等分点（で, それぞれ R, S に近いもの）を T, U とする. 中心 A, B, 半径 AT, BU の円周が円弧 $\widehat{AB}$ と交わる点を E, F とすると, E, F が円弧 $\widehat{AB}$ の三等分点の近似を与える. 念のために, 本来の三等分線（円弧と直交する線分として示してある）と比較した図を示す（図 2. 図は Maple で作成した）.

若干詳しく説明する. 与えられた角を $\Phi = 3\varphi$ とする $(0 < \Phi < \pi)$. 求めるものは角 φ の近似である. 円弧 $\widehat{AB}$ (半径 1) を xy-平面で表す:

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad -\sin\frac{3}{2}\varphi < x < \sin\frac{3}{2}\varphi$$

ただし, 端点は $A = (-\sin\frac{3}{2}\varphi, \cos\frac{3}{2}\varphi)$ および $B = (\sin\frac{3}{2}\varphi, \cos\frac{3}{2}\varphi)$ である.

点 P, Q を弦 AB の 3 等分点とする. 円弧上の点 C, D を, 線分 PC および QD が弦 AB に垂直になるようにとる. R, S は弦 AB 上の点で, $\overline{AC} = \overline{AR}$ および $\overline{BD} = \overline{SB}$ を満たす. T, U は, それぞれ, 線分 PR, SQ 上の点で, $\overline{PR} = 3\overline{TR}$ および $\overline{SQ} = 3\overline{SU}$ を満たすものとする. E, F は, 円弧 $\widehat{AB}$ 上の点で, $\overline{AE} = \overline{AT}$ および $\overline{BF} = \overline{BU}$ を満たすものとする. このとき, **円弧 $\widehat{AE}$ $(= \widehat{FB})$ の弧長 ϕ が, 求める φ の近似である**[8].

[8]または, $\widehat{EF}$ の弧長をとる.

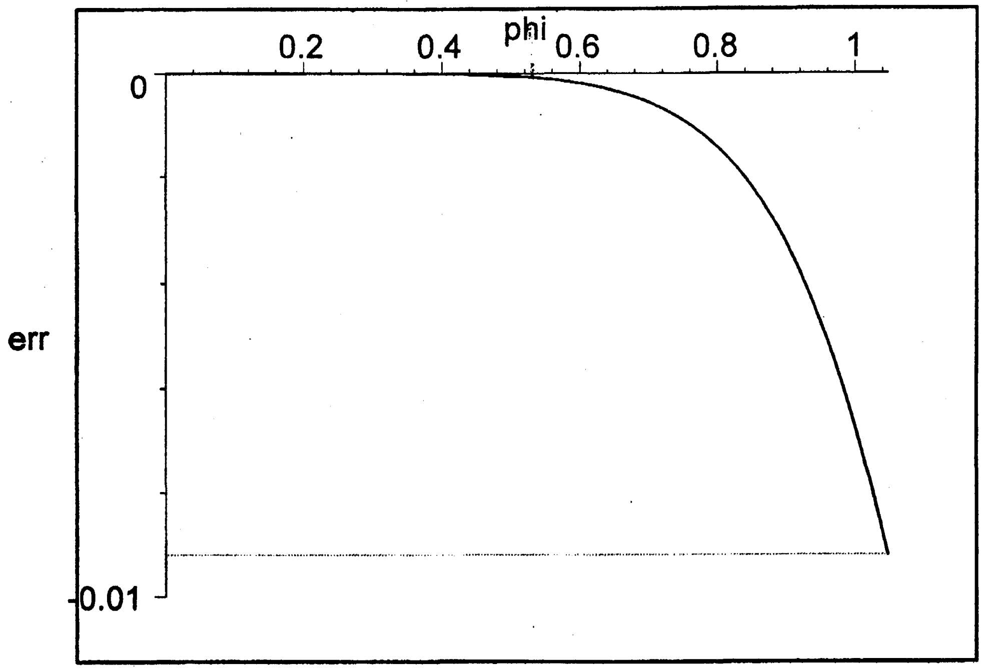

図 3: 三等分角 φ（ラディアン）の誤差 err. もとの角は 3φ ラディアン.

関係する計算式を示そう：

$$\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{\frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2 - \frac{2}{3}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)\sqrt{8 + \left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2}} = \overline{SB} = \overline{AR}$$

に注意すると，

$$\overline{AT} = \overline{BU} = \frac{2}{9}\sin\frac{3}{2}\varphi + \frac{2}{3}\overline{AC}$$

が得られる．点 F の x-座標 $a = a(\varphi)$ は，方程式

$$a\sin\frac{3}{2}\varphi - \cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{1-a^2} = \frac{1}{2}\overline{AT}^2 - 1, \quad 0 < a < \sin\frac{3}{2}\varphi. \tag{1}$$

を満足する．ゆえに，近似 3 等分角 ϕ は

$$\phi = \int_{a(\varphi)}^{\sin\frac{3}{2}\varphi}\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1}\,dx = \int_{a(\varphi)}^{\sin\frac{3}{2}\varphi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3}{2}\varphi - \arcsin a(\varphi) \tag{2}$$

で与えられ，誤差は

$$\mathrm{err}(\varphi) = \phi - \varphi = \frac{1}{2}\varphi - \arcsin a(\varphi). \tag{3}$$

である．

近似角 ϕ, 精確には $a(\varphi)$, と φ の関係を調べよう．数学ソフト Maple を用いて，(1) から次が得られる：

$$\begin{aligned} a(\varphi) = &\frac{55}{81}\sin\frac{3}{2}\varphi - \frac{10}{81}\sin\frac{3}{2}\varphi\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2 + \frac{4}{27}\sin\frac{3}{2}\varphi\cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%1} \\ &- \frac{4}{81}\sqrt{\%2} + \frac{4}{81}\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2\sqrt{\%2} - \frac{2}{81}\cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%3} \end{aligned}$$

ただし,

$$\%1 := 8 + \left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2$$

$$\%2 := 12 + 6\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2 - 6\cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%1}$$

$$\begin{aligned}\%3 :=& 11\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2 + 836 + 110\sin\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%2} \\ &+ 24\sin\frac{3}{2}\varphi\cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%2}\sqrt{\%1} + 36\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^3\sqrt{\%1} \\ &- 306\cos\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%1} - 20\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^2\sin\frac{3}{2}\varphi\sqrt{\%2} - 37\left(\cos\frac{3}{2}\varphi\right)^4\end{aligned}$$

近似の誤差のグラフも併せて示す（図 3）．この三等分法は，現場での施工による調整を考えると，極めて優れた方法と言える．

3.2 円と等積の正方形

「測定法教則」第二部（第二書）第 34 図の内容である．与えられた正方形の対角線の 5 分の 2 の長さを半径とする円を求めればよいと言っている．正方形の 1 辺が単位長さであれば，対角線の長さは $\sqrt{2}$，したがって，こうして得られる円の面積は $\pi\left(\frac{2}{5}\sqrt{2}\right)^2 = \pi\frac{8}{25}$ である．これが単位面積だとすると，円周率は $\pi = \frac{25}{8} = 3.125$ ということになる．この手法が応用される技術的な課題というのは想像が付かないが，断面が正方形の容器から断面が円の容器に内容物を移すような場合などには利用できそうである．

3.3 倍積立方体

与えられた長さの立方根の「作図」法である.「測定法教則」第四部（第四書）前半で扱っており，三種の方法が紹介されている．塑像などで小縮尺の模型を作成してから本体の構築をするが，その際，鋳造材料の量の評価が必要であり，倍積立方体の手法はこのときに不可欠な知識になる．しかし，学者は秘儀として来たので，ここで，始めて職人の言葉，つまり，ドイツ語で公開するとデューラーは強調している（ただし，先行するドイツ語文献はあったらしい）．

第 44–47 図の内容はスポールスに拠る方法という．少なくとも目盛り付きの定規を必要とする．与えられた長さを線分 AC で表し，AC 上に BC が単位長さとなるように点 B をとる（図 4)．C を中心として，半径 AC の半円を描く．C で AC に直交する直径を DE とし，D, B を通る直線を引く．E を通る直線を次のように引く．この直線と直線 DB の交点を G，CA との交点を H，円弧 $\widehat{DAE}$ との交点を J として，線分 HG と HJ は同じ長さになるようにする[9]．すると，線分 CH の長さは AC の長さの二乗の立方根になる．最終的には，CH の長さの平方根を作図すればよい（図 5）[10]．

[9] デューラーは目盛りつき定規でこの操作が可能なように述べているが，そうだろうか．

[10] ただし，デューラーの与えている図は間違っている．第 44 図では正しい結果にはなるが，これは偶然である．デューラーがこの方法を実際に利用したかどうかには疑問がある．

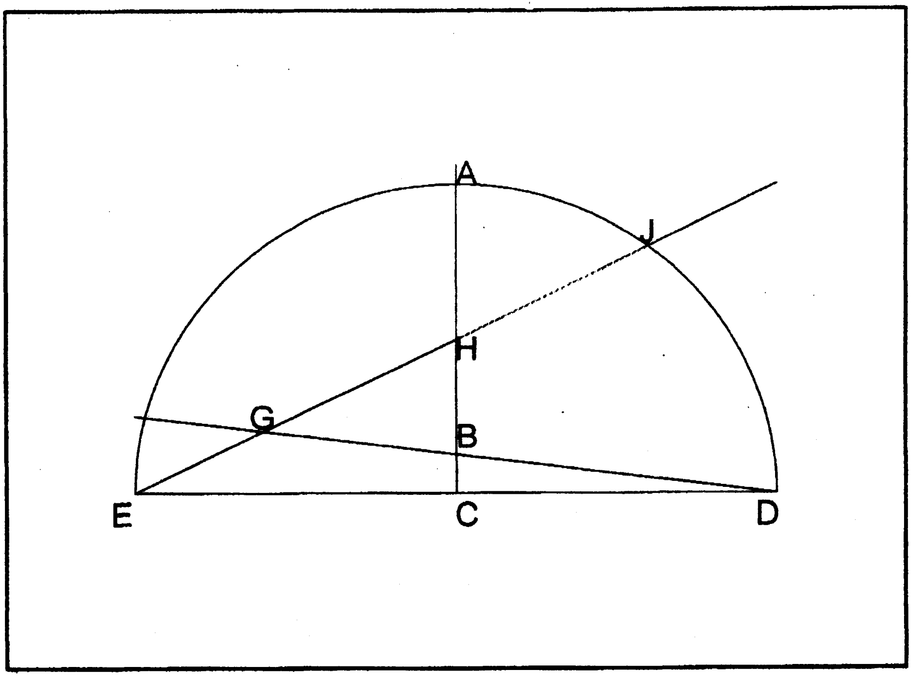

図 4: $\overline{CH} = \sqrt[3]{\overline{AC}^2}$

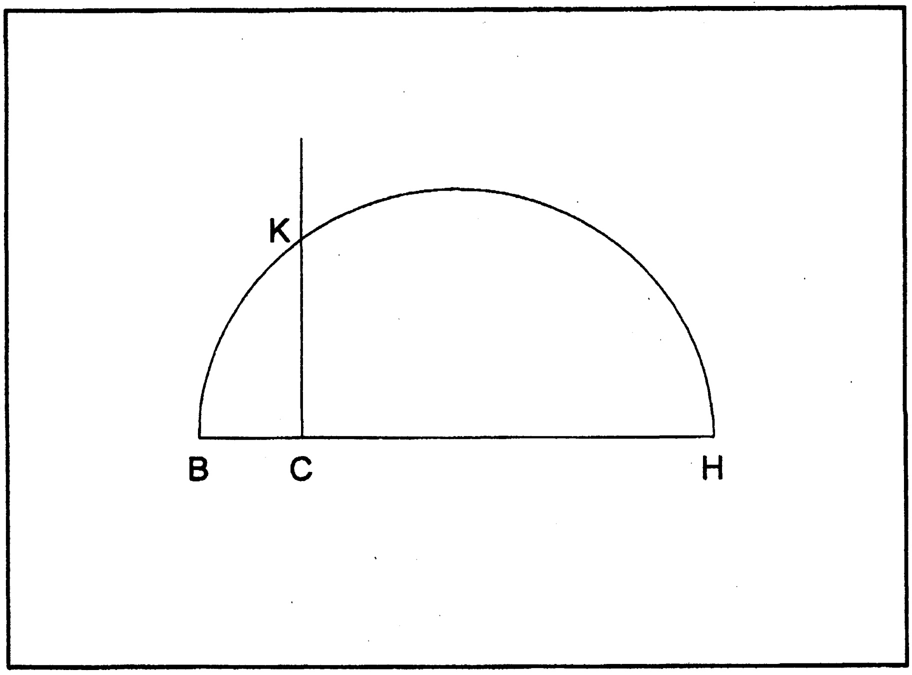

図 5: $\overline{CK} = \sqrt[3]{\overline{AC}}$

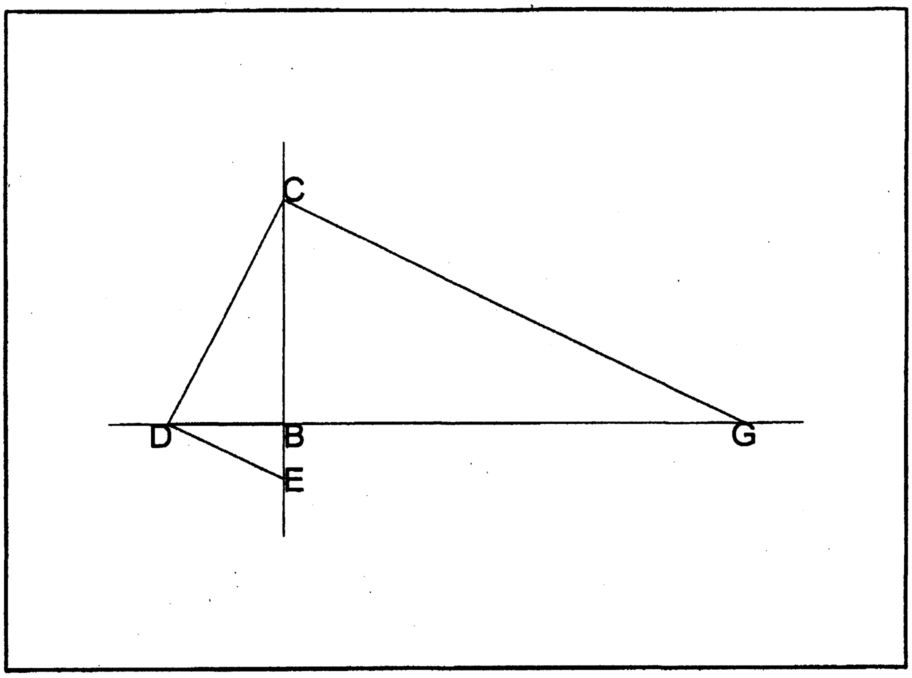

図 6: $\overline{BD} = \sqrt[3]{\overline{BG}}$

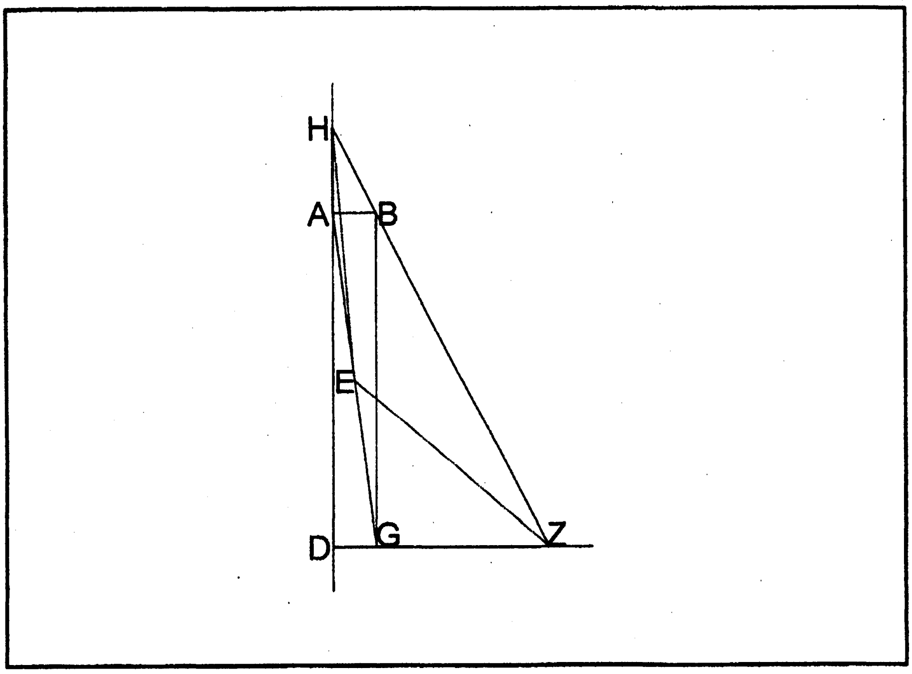

図 7: $\overline{AH} = \sqrt[3]{\overline{AD}}$

第四書第50図の内容はプラトンに拠る方法という．与えられた長さの線分 BG と単位長さの線分 BE を点 B において直角をなすように配置する．EB, GB の延長上に，それぞれ，点 C, D を三角形 GCD，三角形 CDE が直角三角形となるようにとる（図6）．すると，線分 DB の長さが BG の長さの立方根を与える．肝心の点 C, D を求めることは，定規とコンパスではできない．デューラーはこのために器具をいくつか提案しており，実際に使われたのはこの方法であったのだろう．

第四書第51図はヘロンに拠る方法という．長方形 $ADGB$ において，辺 AD が与えられた長さ，辺 DG は単位長さとする．対角線 AG の中点を E とする．B を通る直線と DA，DG の延長との交点 H，Z を，線分 EH と EZ が同じ長さになるようにとる．このとき，HA の長さは AD の長さの立方根である（図7）．点 H, G を求めるには目盛りつきの定規で十分だとあるが，どうだろうか.「測定法教則」において唯一数学的証明が試みられているものであるが，手稿段階の筆跡はデューラーのものではないという．与えられた長さの立方根を与える線分が明示されているようでもなく，実際に用いられていたとは思いにくい．

4 デューラーの塔の側面曲線

「測定法教則」第二書第28図において，デューラーはある種の塔の垂直断面図に現れる境界の曲線，すなわち，塔の形状を決定する曲線の求め方を述べている．パイファーは[3]（および[11]）において，この曲線の求め方を xy-平面内で整理し，方程式

$$\int_0^x \sqrt{1+(y')^2}\,dx = k\left(y-\sqrt{c^2-x^2}\right),\quad 0<x<c. \tag{4}$$

を導いた．ここで，c, k は正の定数，$k>1$，である．興味ある場合は，$k=\frac{4}{3}$ のときである．

(4) から $x=0$ ならば $y=c$ となる．(4) の両辺を微分すると，

$$\sqrt{1+(y')^2} = k\left(y'+\frac{x}{\sqrt{c^2-x^2}}\right),$$

が従うので，ゆえに，

$$y'(t) = -\frac{1}{k^2-1}\frac{k^2\,t+\sqrt{t^2-c^2+k^2c^2}}{\sqrt{c^2-t^2}},\quad y(0)=c,$$

または，積分して，

$$y(x) = \frac{k^2}{k^2-1}\sqrt{c^2-x^2}-\frac{c}{k^2-1}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^x \frac{\sqrt{c^2(k^2-1)+t^2}}{\sqrt{c^2-t^2}}\,dt.$$

となる．ここで，

$$\int_0^x \frac{\sqrt{c^2(k^2-1)+t^2}}{\sqrt{c^2-t^2}}\,dt = c\sqrt{k^2-1}\int_0^{x/c}\frac{\sqrt{1-\kappa^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt,\quad \kappa=\frac{i}{\sqrt{k^2-1}}.$$

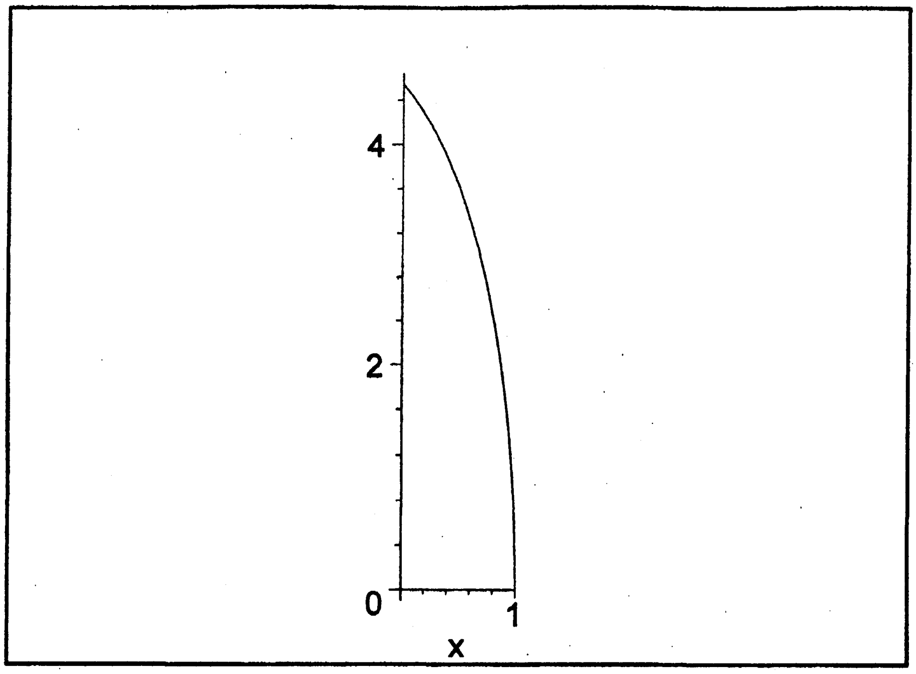

図 8: 第二書第 28 図の再構成.

だから, $1 < k < \sqrt{2}$, 特に, $k = \frac{4}{3}$ ならば, 第二種の楕円積分[11] $E(\kappa, \theta)$ により,

$$y(x) = \frac{k^2}{k^2 - 1}\sqrt{c^2 - x^2} - \frac{c}{\sqrt{k^2 - 1}} E\left(\frac{i}{\sqrt{k^2 - 1}}, \arcsin \frac{x}{c}\right) - \frac{c}{k^2 - 1} \tag{5}$$

が得られる.

注意: 上の $y(x)$ に対して

$$y(c-) = -\frac{c}{\sqrt{k^2 - 1}} E\left(\frac{i}{\sqrt{k^2 - 1}}, \frac{\pi}{2}\right) - \frac{c}{k^2 - 1} < 0.$$

である. (4) の導出で初期値の見直しが要るかも知れない. 図 8 は, $k = 4/3$, $c = 1$ のときの $y(x) - y(c-)$ のグラフである.

A 付記

講究録には講演時に配布したものを流用するつもりであった. しかし, 長大に過ぎ, しかも, 改訂の必要が多数生じたので, 結局, 本稿を講究録用に書き下ろした. この間の経

[11] 記法は文献により異なることがある. ここでは,

$$E(\kappa, \theta) = \int_0^{\sin \theta} \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 t^2}{1 - t^2}}\, dt$$

とする.

過では，多くの方々にご援助いただいた[12]．特に，前川誠郎教授，下村耕史教授には大変お世話になった．末尾ではあるが，特記して謝意をお示し申上げたい．

なお，やや本筋から外れる感想かもしれないが，「西欧学」あるいは，むしろ「泰西学」という分野が，わが国独特の研究分野としてあってもよいと思われる．われわれ（「和」）はほぼ二千年来「漢（中華世界）」の辺境に位置しているが，16 世紀以降は「洋（西欧世界）」の辺境にも属するようになった．このような事情に関して，個別の現象や事物を捉えての考察や研究はいろいろとあるようであるが，総合的理解の指導原理が産み出されるような「哲学的内容」に富むほどまで昇華されているようにも見えない．「和漢洋」というより「和」に立脚した，何か哲学（様のもの）が要るであろう．実は，筆者にとり，[5] によるギリシア古典文明の扱いはヒントになった．おぼろげながら私見は生じつつあるが，しかし，「和」の世界は今も生きており，総括（！）という観点では，古典ギリシアよりも遥かにむずかしいかも知れない．

参考文献

[1] Leon Battista Alberti: 絵画論（*Della pittura*）．中央公論美術出版 (1971) [訳：三輪福松]

[2] 金沢美術工芸大学美術工芸研究所：17 世紀フランス銅版画技法の研究．アブラハム・ボス「酸と硬軟のワニスによる銅凹版画技法」．(訳：川上明孝・上田恒夫・保井亜弓・神谷佳男) 金沢美術工芸大学美術工芸研究所 (2004)

[3] Albrecht Dürer: *Géométrie.* Présentation, Traduction de l'allemand et notes par Jeanne Peiffer. Sources du Savoir. Seuil (1995)

[4] 福岡市美術館：日本美術のなかの西洋 — 安土桃山・江戸のニューアート．(ユニバーシアード福岡大会開催記念特別展・図録)．福岡市美術館．(1995)

[5] William M. Ivins, Jr.: *Art & geometry. A study in space intuitions.* Dover Publ. Inc. (1964) [Harvard University Press (1946)].

[6] 前川誠郎：デューラー　人と作品．講談社．(1990)

[7] 前川誠郎（訳・注）：デューラーの手紙．中央公論美術出版.(1999)

[8] 前川誠郎：前川誠郎のデューラー講義．芸術新潮．54 巻 5 号 (2003), pp. 5-76.

[9] NHK サービスセンター & シーボルト・カウンシル：築造 350 周年 長崎・出島展（図録）．(1986)

[12] また，本稿には反映させることはできなかったが，版画メレンコリア I に関し，一松信教授，東川和夫教授からもいろいろとお教えいただいた．今後活かせるよう努力したい．なお，§3.1，§4 の内容について，Jeanne Peiffer 教授に 9 月 17 日付で連絡を取ったところ，研究所移転渦中でご多忙ながら，10 月 18 日付けで，教授のお気づきのことではなかった由の返信があった．

[10] Erwin Panofsky : *The Life and Art of Albrecht Dürer*. Princeton University Press, 1955. [アルブレヒト・デューラー　－生涯と芸術－中森義宗・清水忠：訳．日貿出版社．（1984）]

[11] Jeanne Peiffer : http : //www2b.ac-lille.fr/apmep/les_conferences/Pieffer/Pieffer.htm

[12] 下村耕史：デューラーの『測定法教則』．　(1)．九州産業大学芸術学部研究報告．**31** (2000), pp. 57–73 ; (2). *ibid.* **32** (2001), pp.65–80 ; (3). *ibid.* **32** (2002), pp. 63–78 ; (4). *ibid.* **34** (2003), pp.55–71 ; (5). *ibid.* **35** (2004), pp. 53–70 ; (6). *ibid.* **36** (2005), pp.55–68.

[13] 辻茂：遠近法の誕生－ルネッサンスの芸術家と科学－朝日新聞社. (1995)

[14] 辻茂：遠近法の発見．現代企画室．(1996)