数理解析研究所講究録
第 1547 巻 2007 年 176-184

2次関数と双線形関数を特徴づける函数方程式

岡山理科大学 春木 茂 (Shigeru Haruki)
Department of Applied Mathematics, Faculty of Science, Okayama University of Science, JAPAN.

神戸大学工学部 中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)
Department of Applied Mathematics, Faculty of Engineering, Kobe University, JAPAN.

1 はじめに

容易に確かめられる様に, 2変数の2次関数 $f(x,y)=a(x^2+y^2)$, $a\in\mathbf{R}$ は, 全ての実変数 $x,y,t,s\in\mathbf{R}$ に対し次の関係式を満たしている:

$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y-t) = 2f(x,t)+2f(y,t). \tag{1.1}$$

$$f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t) = 2f(x,t)+2f(y,t). \tag{1.2}$$

$$f(x+t,y+s)+f(x-t,y-s) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{1.3}$$

$$f(x+t,y-s)+f(x-t,y+s) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{1.4}$$

$$f(x+s,y-t)+f(x-s,y+t) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{1.5}$$

(1.1) と (1.2) は3つの自由変数 x,y,t を方程式に含み, (1.3)-(1.5) は4つの自由変数 x,y,t,s を方程式に含んでおり, (1.3) で $s=t$ とおくと (1.1) になり, (1.4), (1.5) で $s=t$ とおくと (1.2) になるが, (1.4) で s と t を入れ替えても (1.5) にはならない事を注意しておく. 関係式 (1.1)-(1.5) をアーベル群上の2変数関数 f についての函数方程式と考えるとき, 次の未解決問題を提示する事ができる.

問題 (P-1) $(G,+)$ と $(H,+)$ を共に2で割れるアーベル群とする. $f:G\times G\longrightarrow H$ が 函数方程式 (1.1)-(1.5) のいずれかを満たせば, $f:G\times G\longrightarrow H$ はアーベル群 G 上の一般化された2次関数で与えられるか?

この論文の最初の目的は, この未解決問題 **(P-1)** を肯定的に解くことである. つまり, 各函数方程式 (1.1)-(1.5) の解のクラスは一致し, その一般解はアーベル群 G 上の一般化された2次関数 (定義は2節で与える) で与えられる.

しかし, 方程式 (1.1) において $y=x$ と置いて自由変数を1つ減らした函数方程式

$$f(x+t,x+t)+f(x-t,x-t)=4f(x,t) \tag{1.6}$$

を考えると, 一般化された2次関数 $f: G\times G \longrightarrow H$ は (1.6) を満たしているが, それ以外の解が存在する. その反例を $G=H=\mathbf{R}$ の場合に示す.

次に積関数 (x と y について双線形関数) $f(x,y)=axy,\ a\in\mathbf{R}$ を考える. 簡単な計算により, $f(x,y)=axy$ は, 全ての実数 $x,y,t,s\in\mathbf{R}$ に対し次の関係式を満たしている事がわかる:

$$f(x+t,x+t)-f(x-t,x-t)=4f(x,t). \tag{1.7}$$

$$f(x+t,x+t)=f(x,x)+2f(x,t)+f(t,t). \tag{1.8}$$

$$f(x+t,y+t)-f(x-t,y-t) = 2f(x,t)+2f(y,t). \tag{1.9}$$

$$f(x+t,y+s)-f(x-t,y-s) = 2f(x,s)+2f(y,t). \tag{1.10}$$

$$f(x+t,y+s)-f(x-t,y-s) = 2f(x,s)+2f(t,y). \tag{1.11}$$

$$f(x+t,y+t) = f(x,y)+f(x,t)+f(y,t)+f(t,t). \tag{1.12}$$

$$f(x+t,y+s) = f(x,y)+f(x,s)+f(y,t)+f(t,s). \tag{1.13}$$

(1.7) と (1.8) は2つの自由変数 x,t を方程式に含み, (1.9) と (1.12) は3つの自由変数 x,y,t を方程式に含んでおり, さらに (1.10), (1.11), (1.13) は4つの自由変数 x,y,t,s を方程式に含んでいる. (1.10) と (1.13) で $s=t$ とおくと, それぞれ (1.9) と (1.12) となり, (1.9) と (1.12) で $y=x$ とおくと, それぞれ (1.7) と (1.8) となる. また (1.10) と (1.11) とは, 最後の項の変数が入れ替わっている異なるタイプの方程式である.

アーベル群上の2変数関数 $f(x,y)$ については, 群構造から x,y についての双線形性は双加法性 (定義は2節で与える) と言い換えるのが自然である. (1.7)-(1.13) をアーベル群上の函数方程式と考えるとき, 先と同様に次の未解決問題を提示する事ができる.

問題 (P-2) $(G,+)$ と $(H,+)$ を共に2で割れるアーベル群とする. $f: G\times G\longrightarrow H$ が 函数方程式 (1.7)-(1.13) のいずれかを満たせば, $f: G\times G\longrightarrow H$ は一般化されたアーベル群 G 上の対称な双加法的関数で与えられるか?

本論文の次の目的は, 問題 **(P-2)** を解く事である. 答は部分否定的である. 即ち次の結果が証明される.

1. (1.9) と (1.10) 及び (1.12) と (1.13) の解は, 対称な双加法的関数となる.
2. (1.7) と (1.8) の解は, 対称な双加法的関数とは限らない.
3. 微妙だが, (1.11) の解は, 必ずしも対称ではない双加法的関数で与えられる.
4. さらに, $f(x,-y)=-f(x,y)$ という条件が加われば, (1.8) の解は対称な双加法的関数となる.

以上の結果を2節と3節で説明する. 4節では, 反例を与えるための補足として, $f:\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ のもとで, 2自由変数を持つ函数方程式

$$f(x+\alpha y,x+\alpha y)+\beta f(x-y,x-y)=\gamma f(x,y)+\delta_1 f(x,x)+\delta_2 f(y,y) \tag{1.14}$$

の一般解を与える．ここで，α と γ は正の定数，β, δ_1, δ_2 は実定数とする．最後に，一般のアーベル群上での次の函数方程式

$$f(x+t,y-t)-f(x-t,y+t)=2f(x,t)+2f(y,t),$$
$$f(x+t,y-s)-f(x-t,y+s)=2f(x,s)+2f(y,t),$$
$$f(x+t,y-s)-f(x-t,y+s)=2f(x,s)+2f(t,y)$$

は，現時点では未解決である事を注意しておく．

2 一般化された２次関数の特徴づけ

まず，２つの函数方程式の同値性の定義を与えよう．

Definition 2.1 ２つの函数方程式 $(F1)$ と $(F2)$ が同値であるとは，$(F1)$ の任意の解が方程式 $(F2)$ を満たし，逆に $(F2)$ の任意の解も方程式 $(F1)$ を満たす時をいう．言い換えると，$(F1)$ と $(F2)$ の解のクラスが一致するとき，方程式 $(F1)$ と $(F2)$ は同値と呼ぶ．

次に，対称性と双加法性の定義を与える．以下 $(G,+)$ と $(H,+)$ を共に２で割れるアーベル群とする．

Definition 2.2 (1) 関数 $A:G\times G\longrightarrow H$ が対称かつ双加法的であるとは，全ての $x,y,z\in G$ に対し

$$A(x,y)=A(y,x),\quad A(x,y+z)=A(y,x)+A(x,z)$$

が成り立つときを言う．
(2) 関数 $B:G\times G\longrightarrow H$ が双加法的であるとは，全ての $x,y,z\in G$ に対し

$$B(x+y,z)=B(x,z)+B(y,z),\ \ B(x,y+z)=B(y,x)+B(x,z)$$

が成り立つときを言う．

$A:G\times G\longrightarrow H$ を対称かつ双加法的とする．このとき，関数 $\alpha^2(x)\equiv A(x,x)$ を，**対称な双加法的関数 A の対角化**と呼び，$\alpha^2:G\longrightarrow H$ の事を**一般化された２次関数**と呼ぶ．

Theorem 2.1 仮定 $f:G\times G\longrightarrow H$ のもとで，次の函数方程式 (2.1)-(2.5) は互いに同値である：

$$f(x+t,y+s)+f(x-t,y-s) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{2.1}$$
$$f(x+t,y-s)+f(x-t,y+s) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{2.2}$$
$$f(x+s,y-t)+f(x-s,y+t) = 2f(x,t)+2f(y,s). \tag{2.3}$$
$$f(x+t,y+t)+f(x-t,y-t) = 2f(x,t)+2f(y,t). \tag{2.4}$$
$$f(x+t,y-t)+f(x-t,y+t) = 2f(x,t)+2f(y,t). \tag{2.5}$$

ここで, $x, y, t, s \in G$ は, 任意の自由変数とする. さらに, (2.1)-(2.5) のいずれかを満たす関数 $f : G \times G \longrightarrow H$ は, ある対称な双加法的関数の対角化 $\alpha^2 : G \longrightarrow H$ を用いて

$$f(x,y) = \alpha^2(x) + \alpha^2(y) \tag{2.6}$$

で与えられる.

Theorem 2.1 の証明には, 次の2つの Lemma を用いる.

Lemma 2.1 f が (2.4) もしくは (2.5) を満たすとする. このとき, f は 全ての $x, y \in G$ について次の関係式を満たす:

$$f(x,y) = f(x,0) + f(y,0). \tag{2.7}$$

$$f(x,y) = f(y,x) = f(x,-y) = f(-x,y) = f(-x,-y). \tag{2.8}$$

$$f(x+y, x-y) = 2f(x,y). \tag{2.9}$$

(証明) (2.4) において, $t = 0$ とおき両辺を2で割ると (2.7) が従う. (2.8) と (2.9) も同様な代数的な演算を繰り返し行なう事により証明できる.

Lemma 2.2 関数 $g : G \longrightarrow H$ が, 全ての $x, y \in G$ に対して方程式

$$g(x+t) + g(x-t) = 2g(x) + 2g(t) \tag{2.10}$$

を満たせば, ある対称な双加法的関数 $A : G \times G \longrightarrow H$ の対角化 $\alpha^2 : G \longrightarrow H$ が存在して

$$g(x) = \alpha^2(x) \equiv A(x,x) \tag{2.11}$$

とかける.

(Theorem 2.1 の証明の概略) f を (2.4) または (2.5) の解とする. $g : G \longrightarrow H$ を, $g(x) = f(x,0)$ により定義する. この時, Lemma 2.1 より $f(x,y) = g(x) + g(y)$ とかけて (2.4) と (2.5) に代入すると, 同じ方程式

$$g(x+t) + g(x-t) + g(y+t) + g(y-t) = 2g(x) + 2g(y) + 4g(t)$$

が得られ, ここで $y = x$ とおけば (2.10) が導かれる. よって Lemma 2.2 を用いて, 結論 $f(x,y) = g(x) + g(y) = \alpha^2(x) + \alpha^2(y)$ が従う.

Remark 2.1 Theorem 2.1 より, 方程式 (2.1)-(2.5) の任意の解 f は次の全ての波動型函数方程式を満たす:

$$f(x+t, y+s) + f(x-t, y-s) = f(x+s, y-t) + f(x-s, y+t). \tag{W1}$$

$$f(x+t, y+s) + f(x-t, y-s) = f(x+t, y-s) + f(x-t, y+s). \tag{W2}$$

$$f(x+t, y+t) + f(x-t, y-t) = f(x+t, y-t) + f(x-t, y+t). \tag{W3}$$

しかしながら, S. Haruki [4,5] により証明されたように, 方程式 $(W1)$-$(W3)$ は全て方程式 (2.1)-(2.5) と同値ではなく, さらに $(W1)$, $(W2)$ および $(W3)$ も互いに同値ではない (波動型方程式と関連する Cauchy-Riemann 型函数方程式については, Haruki and Nakagiri [8] を参照).

2自由変数を持つ函数方程式

$$f(x+y,x+y)+f(x-y,x-y)=4f(x,y) \tag{2.12}$$

は, (2.4) において $y=x$ さらに $t=y$ とおくと得られる. $f(x,y)=\alpha^2(x)+\alpha^2(y)$ は勿論解の1つであるが, それ以外の解が存在する.

$G=H=\mathbf{R}$ の場合は, 4節の結果により方程式 (2.12) は完全に解けている. 実際 (2.12) の解は多様な形態を持つ . この場合の函数方程式 (2.12) の一般解は,

$$f(x,y)=\frac{1}{4}(F(x+y)+F(x-y)) \tag{2.13}$$

で与えられる. ここで,

$$F(x)=\begin{cases} x^2p_+\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ x^2p_-\left(\frac{\log(-x)}{\log 2}\right) & (x<0), \end{cases} \tag{2.14}$$

と書けて, p_+, $p_-:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は任意の周期 1の関数である. この場合, $f(x,y)$ は一般には対称でない事を注意する. 特に次のような1つの (2.12) の解を与えることができる.

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{4}\left((x+y)^2\sin\frac{2\pi\log|x+y|}{\log 2}+(x-y)^2\sin\frac{2\pi\log|x-y|}{\log 2}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (x+y\neq 0,\ x-y\neq 0) \\ \frac{1}{4}\left(x^2\sin\frac{2\pi\log 2|x|}{\log 2}\right) \qquad (x=-y,\ x\neq 0 \text{ 又は } x=y,\ x\neq 0) \\ 0 \qquad (x=y=0). \end{cases} \tag{2.15}$$

さらに極限

$$a:=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,x)}{x^2} \tag{2.16}$$

が存在すれば, (2.12) の解 $f(x,y)$ は2次関数

$$f(x,y)=\frac{a}{2}(x^2+y^2) \tag{2.17}$$

で与えられる.

3 対称な双加法的関数の特徴づけ

対称な双加法的関数は, 1節で述べた様な函数方程式により特徴づけられる.

Theorem 3.1 仮定 $f:G\times G\longrightarrow H$ のもとで, 次の函数方程式 (3.1)-(3.4) は, 互いに同値である:

$$f(x+t,y+t)-f(x-t,y-t)=2f(x,t)+2f(y,t). \tag{3.1}$$

$$f(x+t,y+s)-f(x-t,y-s)=2f(x,s)+2f(y,t). \tag{3.2}$$

$$f(x+t,y+t)=f(x,y)+f(x,t)+f(y,t)+f(t,t). \tag{3.3}$$

$$f(x+t,y+s)=f(x,y)+f(x,s)+f(y,t)+f(t,s). \tag{3.4}$$

ここで, $x,y,t,s\in G$ は, 任意の自由変数とする. さらに, (3.1)-(3.4) のいずれかを満たす関数 $f:G\times G\longrightarrow H$ は, ある対称な双加法的関数 $A:G\times G\longrightarrow H$ を用いて

$$f(x,y)=A(x,y) \tag{3.5}$$

で与えられる.

(3.5) で与えられる f は全ての方程式 (3.1)-(3.4) を満たす. また (3.2) の解 f は (3.1) を満たし, (3.4) の解 f は (3.3) を満たす. よって Theorem 3.1 の証明において, (3.1) の任意の解が (3.5) で与えられ, 同時に (3.3) の任意の解も (3.5) で与えられることを示せばよい. 後半の (3.3) の任意の解が (3.5) で与えられる事は, Theorem 2.1 と類似の手法により証明できる. 従って, (3.1) の任意の解が (3.5) で与えられる事を示せばよい. そのため, 次の 3 つの Lemma を用いる.

Lemma 3.1 f が (3.1) を満たしているとする. 関数 $g:G\to H$ を, $g(x)=f(x,x)$ により定義する. この時, g は 全ての $x,t\in G$ について次の関係式を満たす:

$$2g(x+2t)-4g(x+t)+4g(x-t)-3g(x-2t)=0. \tag{3.6}$$

(証明) (3.1) で $x=y$ とおくと,

$$4f(x,t)=f(x+t,x+t)-f(x-t,x-t)=g(x+t)-g(x-t). \tag{3.7}$$

$f(0,0)=g(0)=0$ は明らかである. (3.1) を 4 倍して (3.7) を代入すると

$$g(x+y+2t)+2g(x-t)+2g(y-t)=g(x+y-2t)+2g(x+t)+2g(y+t) \tag{3.8}$$

が得られる. 一方 (3.8) で $y=t$ を代入して $g(0)=0$ を用いると

$$g(x+3t)-2g(x+t)+g(x-t)=2g(2t). \tag{3.9}$$

(3.9) で x を $x-t$ に置き換え, その式と (3.8) との差をとると

$$g(x+3t)-g(x+2t)-2g(x+t)+2g(x)+g(x-t)-2g(x-2t)=0. \tag{3.10}$$

さらに (3.8) で $y=0$ を代入すると

$$g(x+2t)-2g(x+t)+2g(x-t)-g(x-2t)=2g(t)-2g(-t). \tag{3.11}$$

(3.11) で x を $x+t$ で置き換えた式と (3.11) との差をとると

$$g(x+3t)-3g(x+2t)+2g(x+t)+2g(x)-3g(x-t)+g(x-2t)=0. \tag{3.12}$$

(3.10) から (3.11) を引くと (3.6) が得られる.

Lemma 3.2 (S. Haruki [6]) $g: G \to H$ が 全ての $x, t \in G$ について 関係式 (3.6) を満たすとき, g は全ての $x, t \in G$ について

$$\Delta_t^3 g(x) \equiv g(x+3t) - 3g(x+2t) + 3g(x+t) - g(x) = 0 \tag{3.13}$$

を満たす. ここで, Δ_t は前進差分作用素 $\Delta_t g(x) = g(x+t) - g(x)$ である.

Lemma 3.3 (S. Mazur and W. Orlicz [9]) 3 階の差分方程式

$$\Delta_t^3 g(x) = 0 \tag{3.14}$$

の解 $g: G \to H$ は, 一般化された 2 次多項式

$$g(x) = \alpha^0 + \alpha^1(x) + \alpha^2(x) \tag{3.15}$$

により与えられる. ここで, α^0 は定数, $\alpha^1 : G \longrightarrow H$ は加法的関数, $\alpha^2 : G \longrightarrow H$ は, 対称な双加法的関数の対角化である.

(Theorem 3.1 の証明の概略) f を (3.1) の解とする. Lemma 3.1 により $g(x) = f(x,x)$ は, (3.6) を満たす. さらに Lemma 3.2 と Lemma 3.3 を用いて g は求められる. これを (3.1) に代入して $\alpha = 0$, $\alpha^1(x) = 0$ がわかり, $g(x) = \alpha^2(x) = A(x,x)$ となる. これを 再び (3.7) に代入し 4 で割れば, $f(x,y) = A(x,y)$ なる事が示される.

函数方程式

$$f(x+y, x+y) - f(x-y, x-y) = 4f(x,y) \tag{3.16}$$

は, (3.1) において $y = x$ さらに $t = y$ とおくと得られる. 対称な双加法的関数 $f(x,y) = A(x,y)$ は勿論解の 1 つであるが, それ以外の解が存在する. $G = H = \mathbf{R}$ の場合は, 方程式 (3.16) は完全に解ける. つまり, (3.16) の一般解は

$$F(x) = \begin{cases} x^2 p_+\left(\frac{\log x}{\log 2}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^2 p_-\left(\frac{\log(-x)}{\log 2}\right) & (x < 0) \end{cases} \tag{3.17}$$

として,

$$f(x,y) = \frac{1}{4}(F(x+y) - F(x-y)) \tag{3.18}$$

で与えられる. ここで, $p_+, p_- : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は任意の周期 1 の関数である.

次の函数方程式

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y) \tag{3.19}$$

は, (3.3) において $y = x$ さらに $t = y$ とおくと得られる. $G = H = \mathbf{R}$ の場合の (3.19) の一般解は, $F(x)$ を (3.17) で与えた函数として

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(F(x+y) - F(x) - F(y)) \tag{3.20}$$

で与えられる.

紙数の関係で証明は省略するが, 次の 2 つの定理が成立する. それらの証明において, 与えられた方程式を春木の函数方程式 (cf.[1]) に持ち込む巧妙な計算がある. 詳しくは, Haruki [7] を参照されたい.

Theorem 3.2 函数 $f : G \times G \longrightarrow H$ が, 全ての $x, y \in G$ に対し 2 つの方程式

$$f(x+y, x+y) = f(x,x) + 2f(x,y) + f(y,y), \tag{3.21}$$

$$f(x,-y) = -f(x,y) \tag{3.22}$$

を同時に満たすための必要かつ十分条件は, ある対称な双加法的関数 $A : G \times G \longrightarrow H$ が存在して $f(x,y) = A(x,y)$ で与えられる事である.

Theorem 3.3 仮定 $f : G \times G \longrightarrow H$ のもとで, 函数方程式

$$f(x+t, y+s) - f(x-t, y-s) = 2f(x,s) + 2f(t,y) \tag{3.23}$$

を考える. ここで, $x, y, t, s \in G$ は任意の自由変数とする. この時, (3.23) の任意の解 $f : G \times G \longrightarrow H$ は, ある双加法的関数 $B : G \times G \longrightarrow H$ を用いて $f(x,y) = B(x,y)$ で与えられる. また逆も言える.

従って Theorem 3.3 より, 必ずしも対称でない双加法的関数を特徴づける 1 つの函数方程式として (3.23) を挙げる事ができる.

4 補足

Aczél and Kuczma [2,3] による, Folk Theorem を用いる事により次の定理を証明する事ができる.

Theorem 4.1 α と γ を正の定数とし, β, δ_1, δ_2 実定数とする. $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ のもとで, 次の函数方程式

$$f(x+\alpha y, x+\alpha y) + \beta f(x-y, x-y) = \gamma f(x,y) + \delta_1 f(x,x) + \delta_2 f(y,y) \tag{4.1}$$

を考える. ここで, $x, y \in \mathbf{R}$ は任意変数とする. もし $1 + \beta \neq \gamma + \delta_1 + \delta_2$ および $\gamma + \delta_1 + \delta_2 > 0, \neq 1$ ならば, (4.1) の一般解は

$$f(x,y) = \frac{1}{\gamma}(F(x+\alpha y) + \beta F(x-y) - \delta_1 F(x) - \delta_2 F(y)) \tag{4.2}$$

で与えられる. ここで,

$$F(x) = \begin{cases} x^m p_+\left(\frac{\log x}{\log(1+\alpha)}\right) & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ (-x)^m p_-\left(\frac{\log(-x)}{\log(1+\alpha)}\right) & (x < 0) \end{cases} \tag{4.3}$$

と書けて, $m = \frac{\log(\gamma+\delta_1+\delta_2)}{\log(1+\alpha)}$ であり, $p_+, p_- : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ は任意の周期 1 の関数である. さらに極限

$$a_+ := \lim_{x\to 0+} \frac{f(x,x)}{x^m}, \quad a_- := \lim_{x\to 0-} \frac{f(x,x)}{(-x)^m} \tag{4.4}$$

が存在すれば, (4.1) の解 $f(x,y)$ は

$$F(x) = \begin{cases} a_+ x^m & (x \geq 0) \\ a_-(-x)^m & (x < 0) \end{cases} \tag{4.5}$$

として, 式 (4.2) で与えられる.

上定理は多くの応用例を持つが, ここでは次の 1 例を与える. $\mathbf{R}$ 上の函数方程式

$$f(x+y, x+y) + f(x-y, x-y) = 4f(x,y) + 6f(x,x) + 6f(y,y) \tag{4.6}$$

を考える. 極限

$$a := \lim_{x\to 0} \frac{f(x,x)}{x^4}$$

が存在すれば, (4.6) の解 $f(x,y)$ は

$$f(x,y) = -a(x^4 - 3x^2y^2 + y^4) \tag{4.7}$$

で与えられる. (4.7) 以外の方程式 (4.2) の非自明解も (4.2), (4.3) により構成する事ができる.

参考文献

[1] J. Aczél, H. Haruki, M. A. McKiernan and G. N. Sakovič, *General and regular solutions of functional equations characterizing harmonic polynomials*, Aequationes Math. *1*(1968), 37-53.

[2] J. Aczél and Marek Kuczma, *Generalizations of a "Folk-Theorem" on simple functional equations in a single variable*, Results in Mathematics, *19*(1991), 5-21.

[3] J. Aczél and Marek Kuczma, *Solutions of a functional equation convex of higher order*, International Series of Numerical Mathematics, *103*(1992), 209-213.

[4] S. Haruki, *On the general solution of a nonsymmetric partial difference functional equation analogous to the wave equation*, Aequationes Math. *36*(1988), 20-31.

[5] S. Haruki, *A wavelike functional equation of Pexider type*, Aequationes Math. *63*(2002), 201-209.

[6] S. Haruki, *On the theorem of S. Kakutani-M. Nagumo and J. L. Walsh for the mean value property of harmonic and complex polynomials*, Pacific J. Math. *94*(1981), 113-123.

[7] S. Haruki, *Functional equations characterized by a symmetric biadditive function and related equations*, preprint.

[8] S. Haruki and S. Nakagiri, *Partial difference functional equations arising from the Cauchy-Riemann equations*, Annales Academiae Paedagogicae Cracoviensis, Studia Mathematica V *33*(2006), 59-76.

[9] S. Mazur and W. Orlicz, *Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen*, Studia Mathematica *5*(1934), 50-68.