数理解析研究所講究録
第 1548 巻 2007 年 234-239



# 2種のサーバーを持つ待ち行列システムでの最適待機政策

小柳 淳二（鳥取大・工），難波 大輔（鳥取大院・工），河合　一（鳥取大・工）

## 1 はじめに

本研究では，待ち行列システムに到着した特別な客（スマート客）が自分のみが利用できる待機場所を持つ場合について考える．待ち行列システムには2つのサーバと各サーバに待ち行列がある場合を考え，待機場所からどちらの待ち行列にはいるかも含めてアクションを決定するものとする．

選択できるアクションとしては待機場所で待機するか，待ち行列 A に並ぶか B に並ぶか，並ばずに立ち去るかの4種類である．待機場所では待ち行列に並ぶより安いコストで待つことができ，常時2つの行列を観測できるが，行列に並ぶときには，待機終了時点の待ち行列の最後尾に並ぶものとする．

このようなモデルとしては Mandelbaum and Yechiali (1983) が $M/G/1$ 待ち行列システムにおいてスマート客の最適政策として定式化したものがある．また小柳，河合(2005) では，待機時間に2種類ある場合を扱った．

## 2 モデル

2つのサーバ A, B を持つ離散時間待ち行列システムを考え，各サーバは待ち行列を持ち，各待ち行列に客は単位時間当たり，$p_a, p_b$ の確率で到着し，各一サーバでサービス中の客（一人）は $q_a, q_b$ の確率で退去するものとする．この待ち行列システムに特別な客（スマート客）が一人だけ到着するものとし，その客はいずれかの待ち行列で並んで待つか，待ち行列外の待機場所で1単位時間あたり1のコストを支払い，行列に並ぶのを保留できるものとする．いったん行列にならぶと，単位時間ごとに待ち行列 A, B ではコスト $c_a, c_b$ を支払うものとする（$c_a, c_b > 1$）．また，客は並ばずに立ち去ることもでき，このときにはコスト $L$ が生じるものとする．

状態として 行列 A, B の系内人数の組 $(i, j)$ をとり1単位時間後に行列 A の人数が $i$ から $k$ に変化する確率を $f_{ik}$ 行列 B の人数が $j$ から $l$ に変化する確率を $g_{jl}$ とする．本研究では，1単位時間後にサービスが終了する客は最大1人であるから $f_{ik} = 0\ (k < i-1)$, $g_{jl} = 0\ (l < j-1)$ である．

以後「増加」は「非減少」,「減少」は「非増加」の意味で用いる．

確率 $f_{ik}, g_{jl}$ に対して以下の性質を仮定する．

**条件 1**

(1) すべての $n$ に対し．

$$\sum_{k=n}^{\infty} f_{ik},\ \sum_{l=n}^{\infty} g_{jl}$$

は $i, j$ に関して増加である．

(2) すべての $i$, $j$ に対し，

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_{i+1\,k} - \sum_{k=1}^{\infty} f_{ik} \le 1,\ \sum_{l=1}^{\infty} g_{j+1\,l} - \sum_{l=1}^{\infty} g_{jl} \le 1$$

である．

この条件は，最初の系内人数が多いほど次に推移する人数が多いという傾向と，1期間後の期待人数の差が最初の人数差以上にならないことを示しており，到着確率が常に一定の場合や，行列人数が増大するにつれて，到着確率が減少する場合などに満たされる．

総期待コストを最小にするための最適性方程式として

$$\begin{aligned} W(i,j) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f_{ik} g_{jl} V(k,l), \\ V(i,j) &= \min\{W(i,j), c_a(i+1)/q_a,\ c_b(j+1)/q_b,\ L\} \end{aligned}$$

を考える．

$V(i,j)$, $W(i,j)$ の値は，以下の繰り返し計算の極限として与えられる．

$$\begin{aligned} V^0(i,j) &\equiv 0 \\ W^{n+1}(i,j) &= 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f_{ik} g_{jl} V^n(k,l), \\ V^{n+1}(i,j) &= \min\{W^{n+1}(i,j),\ c_a(i+1)/q_a,\ c_b(j+1)/q_b,\ L\} \end{aligned}$$

上式において，$n$, $i$, $j$ に関する帰納法により以下の補題を証明する．

**補題 1**

$W^n(i,j)$, $V^n(i,j)$ は $i$, $j$ に関して増加する．□

**証明.**

$i$, $j$ についての帰納法を用いる．

(1) $V^0(i,j)$ が $i$, $j$ に関して増加であることは明らか．

(2) $V^n(i,j)$ が $i$, $j$ に関して増加であれば，$W^{n+1}(i,j)$ が $i$, $j$ に関して増加であることは条件 1 (1) を用いて次のように示すことができる [3]．まず $d^n(0,j) = V^n(0,j)$, $d^n(i,j) = V^n(i,j) - V^n(i-1,j)$ $(i \ge 1)$ とおけば，仮定より $d^n(i,j) \ge 0$ $(i \ge 1)$．これを用いて

$$\begin{aligned} & W^{n+1}(i+1,j) - W^{n+1}(i,j) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{k=0}^{\infty} f_{i+1\,k} \sum_{h=0}^{k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik} \sum_{h=0}^{k} d^n(h,l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} d^n(h,l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} d^n(h,l) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty} \left( \sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} - \sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} \right) d^n(h,l) \ge 0 \end{aligned}$$

式 (1) の等号は $h=0$ の時,

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_{i+1\,k} d^n(0,l) - \sum_{k=0}^{\infty} f_{i\,k} d^n(0,l) = 0$$

となることから成り立つ. $j$ に関して増加することも同様に証明できる.

(3) $W^{n+1}(i,j)$ が $i$, $j$ に関して増加であれば, $V^{n+1}(i,j)$ が $i$, $j$ に関して増加であることは明らか.

よって, $V^n(i,j)$ と $W^n(i,j)$ は $i$, $j$ に関して増加する. □

**補題 2**
関数 $W^n(i,j)$ と $V^n(i,j)$ に関して次の性質が成り立つ.

(1) $W^n(i+1,j) - W^n(i,j) \le c_a/q_a$, $V^n(i+1,j) - V^n(i,j) \le c_a/q_a$,

(2) $W^n(i,j+1) - W^n(i,j) \le c_b/q_b$, $V^n(i,j+1) - V^n(i,j) \le c_b/q_b$. □

**証明.**

(1) $V^0(i,j)$ が性質を満たしていることは明らか.

(2) $V^n(i,j)$ が性質を満たしていれば,

$$W^{n+1}(i+1,j) - W^{n+1}(i,j) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f_{i+1\,k} g_{jl} V^n(k,l) - \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} f_{ik} g_{jl} V^n(k,l)$$

ここで $d^n(0,j) = V^n(0,j)$, $d^n(i,j) = V^n(i,j) - V^n(i-1,j)$ $(i \ge 1)$ とおけば,

$$\begin{aligned}
& W^{n+1}(i+1,j) - W^{n+1}(i,j) \\
= & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{k=0}^{\infty} f_{i+1\,k} \sum_{h=0}^{k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{k=0}^{\infty} f_{ik} \sum_{h=0}^{k} d^n(h,l) && (1) \\
= & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=0}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} d^n(h,l) && (2) \\
= & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} d^n(h,l) - \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} d^n(h,l) && (3) \\
= & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty} \left( \sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} - \sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} \right) d^n(h,l) && (4) \\
\le & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{h=1}^{\infty} \left( \sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} - \sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} \right) c_a/q_a && (5) \\
= & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} \sum_{k=1}^{\infty} (k f_{i+1\,k} - k f_{ik}) c_a/q_a && (6) \\
\le & \sum_{l=0}^{\infty} g_{jl} c_a/q_a = c_a/q_a && (7)
\end{aligned}$$

式 (5) の不等号は条件 1 (1) より,

$$\sum_{k=h}^{\infty} f_{i+1\,k} - \sum_{k=h}^{\infty} f_{ik} \geq 0$$

と帰納法の仮定 $d^n(i,j) = V^n(i,j) - V^n(i-1,j) \leq c_a/q_a$ $(i \geq 1)$ から導かれる.

式 (7) の不等号は条件 1 (2) を利用している.

(3) $W^{n+1}(i+1,j) - W^{n+1}(i,j) \leq c_a/q_a$ であれば,

$$\min_i\{x_i\} - \min_j\{y_j\} \leq \max_i\{x_i - y_i\}$$

より $V^{n+1}(i+1,j) - V^{n+1}(i,j) \leq c_a/q_a$ が成立する.

(4) $W^n(i,j+1) - W^n(i,j) \leq c_b/q_b$ と $V^n(i,j+1) - V^n(i,j) \leq c_b/q_b$ の証明は同様であるので省略する. □

このことから最適政策について次の性質が成り立つ.

**定理 1**
最適アクションは $i, j$ の変化に対して以下の性質を持つ.

(1) 最適アクションは $i$ が増加するにつれ基本的に「A に並ぶ」から「待機する」に変化し,最終的に「B に並ぶ」か「立ち去る」へと変化する. ただし,「待機する」が現れない場合もある.

(2) 最適アクションは $j$ が増加するにつれ基本的に「B に並ぶ」から「待機する」に変化し,最終的に「A に並ぶ」か「立ち去る」へと変化する. ただし,「待機する」が現れない場合もある. □

## 3 数値例

この章ではいくつかの数値例を与える.

**数値例 1**

(1) サービス確率 $q_a = 0.6$, $q_b = 0.8$, 待ちコスト $c_a = 2$, $c_b = 4$, 立ち去るコスト $L = 20$

(2) 待ち行列 A への到着確率は系内客数 $i$ に依存し $a_i$ とする.

$$\begin{array}{llllll} a_0 = 0.95, & a_1 = 0.75, & a_2 = 0.75, & a_3 = 0.75, & a_4 = 0.55, & a_5 = 0.45, \\ a_6 = 0.35, & a_7 = 0.35, & a_8 = 0.25, & a_9 = 0.25, & a_{10} = 0.25, & a_{11} = 0.15, \\ a_{12} = 0.15, & a_{13} = 0.15, & a_{14} = 0.15, & a_k = 0 & (k \geq 15) & \end{array}$$

(3) 待ち行列 B への到着確率は系内客数 $j$ に依存し $b_j$ とする.

$$\begin{array}{llllll} b_0 = 0.9, & b_1 = 0.7, & b_2 = 0.6, & b_3 = 0.5, & b_4 = 0.4, & b_5 = 0.3, \\ b_6 = 0.2, & b_7 = 0.2, & b_8 = 0.1, & b_9 = 0.1, & b_l = 0 & (l \geq 10) \end{array}$$

到着確率が減少しているため，条件をみたしている．この場合の最適政策を以下にあらわす．

| $j$ | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | A | A | A | A | A | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| | A | A | A | A | A | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| | A | A | A | A | A | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| | A | A | A | A | A | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| | A | A | A | A | A | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| 5 | A | A | A | A | A | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L | |
| | A | A | A | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | |
| | A | A | A | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | |
| | A | A | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | |
| | A | A | W | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | |
| 0 | A | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | |
| | 0 | | | | | 5 | | | | | 10 | | | | | 15 | $i$ |

(‘A’ は A に並ぶ，‘B’ は B に並ぶ，‘W’ は待機する，‘L’ は立ち去るアクションを意味する)

この場合は定理の性質が満たされていることがわかる．定理の性質は自然であり，いかなる場合でも成立しそうであるが，条件を満たしていない到着過程の場合には，定理の性質がみたされない場合があることを以下の例で示す．

**数値例 2**

(1) サービス確率などは数値例1 と同じ

(2) 到着確率 $a_i$ を以下のように増減があるように変更．

$$a_0 = 0.1,\quad a_1 = 0.1,\quad a_2 = 0.9,\quad a_3 = 0.7,\quad a_4 = 0.2,\quad a_5 = 0.1,$$
$$a_6 = 0.1,\quad a_7 = 0.1,\quad a_8 = 0.8,\quad a_9 = 0.7,\quad a_{10} = 0.5,\quad a_{11} = 0.1,$$
$$a_{12} = 0.2,\quad a_{13} = 0.5,\quad a_{14} = 0.1,\quad a_k = 0 \qquad (k \geq 15)$$

(3) 到着確率 $b_j$ も変更．

$$b_0 = 0.1,\quad b_1 = 0.7,\quad b_2 = 0.2,\quad b_3 = 0.1,\quad b_4 = 0.4,\quad b_5 = 0.9,$$
$$b_6 = 0.2,\quad b_7 = 0.2,\quad b_8 = 0.9,\quad b_9 = 0.1,\quad b_l = 0 \qquad (l \geq 10)$$

最適政策は以下のようになる．

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $j$ | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 10 | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| 5 | A | W | A | A | W | W | W | L | L | L | L | L | L | L | L | L |
| | A | W | A | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W |
| | A | W | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W |
| | A | W | A | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W | W |
| | A | W | W | W | W | W | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| 0 | A | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B | B |
| | 0 | | | | | 5 | | | | | 10 | | | | | 15 $i$ |

$i$ が 1 のときには「待機」であるが，2 になると再び A に並ぶが出てくるため，定理の性質を満たさない最適政策である.

## 参考文献


[1] A. Mandelbaum and U. Yechiali, Optimal entering rules for a customer with wait option at an $M/G/1$ queue, *Management Science*, **29-2**, 174–187, 1983.

[2] 小柳　淳二，河合　一，離散時間待ち行列におけるスマート客問題，不確実性科学と意思決定の数理と応用，京都大学数理解析研究所講究録 1457, pp. 194–199, 2005.

[3] Barlow R.E. and Proschan F., *Mathematical Theory of Reliability*, Wiley, New York, 1965.