

## バリアオプション評価におけるモデルリスク ストキャスティック(SV) vs デタミニスティック(DV)

電気通信大学 電気通信学部 システム工学科  
樋野 雅浩(Masahiro Hino), 宮崎 浩一(Koichi Miyazaki)  
University of Electro-Communications, Department of Systems Engineering

### 1. はじめに

オプションとは、株式などの取引対象資産を予め定められた価格、期日(期間)で売買する権利のことであり、今日では主要な金融商品となっている。オプションの価格評価は、対象となる資産(原資産という)を確率過程で表現したうえで、指定された権利の価値を評価することによって行われる。よって、原資産が従う確率過程としてどのようなものを選択するかによって、得られるオプション価格は異なる。本研究では、原資産が従う確率過程として、そのボラティリティ(原資産価格変化率の標準偏差)がデタミニスティック(時間にのみ依存するが確定的)であるものとストキャスティック(確率的変動)であるものを採用して同一のオプションを評価し、価格の乖離(我々はモデルリスクと名付ける)がどの程度であるかを検討する。

このような研究の枠組みを提示する主要な文献として、[3]が挙げられる。そこでは、(1)インプライド測度の下で原資産が従う確率過程をラティス(原資産価格の推移を三項木で表現するもの)を用いて表現することを試みる。(2)ラティスの各ノード(経過時間と株価の状態によって指定されるラティス上の格子点)におけるインプライド推移確率を市場で観測されるオプション価格から導出する手法を参考文献[1]に基づいて示す。(3) リスク中立測度の下で株価プロセスを表現する各モデルと各モデルに依存する調整項との組み合わせから得られるインプライド測度の下での株価の推移確率が(2)で求めたものに一致するように調整項を定める。(4)具体例として、あるパラメータ設定の下で、デタミニスティックモデルに基づくラティスとストキャスティックモデルを表現するラティスの 2 通りを利用してバリアオプションの価格がどの程度異なるかについて例示している。しかしながら、与えられたパラメータセットがどの程度まで現実の市場と合致するものであるかについての実証的分析は無い。よって、文献[3]は、実務家がバリアオプションの評価を行う際に、モデルリスクのマグニチュードを把握するために十分な参考資料となりえない。

そこで、本研究では、日経 225 オプションの市場価格データから得られる情報に基づいて、デタミニスティックモデルに基づくラティスとストキャスティックモデルの 2 通りを利用してバリアオプションの価格を導出する。その際に、ストキャスティックモデルにおけるボラティリティ過程のパラメータは、原資産価格の時系列データから文献[5]にあるモーメント条件を用いて推定する。実証分析においては、バリアオプション価格のモデルによる乖離を表すモデルリスクが、推定されたストキャスティックモデルのパラメータに依存してどの程度の影響を受けるかについて考察を与える。また、モデルリスクの大きさが、分析対象となるバリアオプションのバリアの水準によってどの程度異なるものかについても合わせて検討する。

本稿の構成は以下の通り。次節では、先行研究[3]を手短に紹介する形で分析の枠組みを提示し、節 3 では実証分析の手法、結果、考察を与える。最終節では、まとめと結語を付す。

### 2. 分析の枠組み(先行研究[2])

#### 2.1 本研究の目的

本節では、まず、比較対象となる DV モデルと SV モデルを紹介し、それらの相違点について述べる。次に、ヨーロピアンコールオプションとバリアオプションの一種であるノックインコールオプションについて説明し、それらの特徴を把握する。その後で、本研究の目的である「モデルリスク」について述べる。

DV モデルと SV モデルに基づく株価過程は、それぞれ式(2-1-1)、式(2-1-2)で与えられる。

$$(2-1-1) \quad dS/S = rdt + \sigma(S, t)dW$$

$$(2-1-2) \quad \begin{cases} dS/S = rdt + \sigma dW_1 \\ d \ln \sigma = -\kappa(\ln \sigma - \alpha)dt + \gamma dW_2 \end{cases}$$

ここで、 $S$ は株価、 $r$ は安全利率(本研究では安全利率は0と設定)、 $\sigma(\cdot)$ はボラティリティ、 $dW$ 、 $dW_1$ 、 $dW_2$ はそれぞれリスク中立測度の下で、独立なウィナー過程である。式(2-1-2)は、 $[S]$ で用いられた過程であり、 $\kappa$ は回帰速度、 $\alpha$ は平均回帰係数、 $\gamma$ はボラティリティの変動率を表す。

これらのモデルにおける相違点は、式(2-1-1)では、ボラティリティ $\sigma(S, t)$ が株価 $S$ と時間 $t$ の関数になっているのに対し、式(2-1-2)ではボラティリティ $\sigma$ 自体にも確率過程が与えられている点である。

通常取引所において上場されているヨーロピアンコールオプションとは、「予め決められた期日(満期 $t$ )に、ある特定の資産(株 $S_t$ )を予め決められた価格(権利行使価格 $K$ )で買う権利」である。

ヨーロピアンコールオプションの価格 $C(t, K)$ は、リスク中立測度の下での期待値 $E[\cdot]$ を用いて、

$$(2-1-3) \quad E[\max(S_t - K, 0)] = C(t, K)$$

で与えられる。ヨーロピアンコールオプションでは、満期 $t$ において株価 $S_t$ が権利行使価格 $K$ を上回ったときに権利を行使して $(S_t - K)$ の利益が得られ、下回った場合には権利が消滅する。これにバリアの条件を加えたものが、バリアオプションである。特に、「満期時点 $t$ までに、株価が予め決められたバリア価格に少なくとも一度は到達するように推移した場合のみ、権利を行使できる」バリアオプションをノックインコールオプションと呼ぶ。Fig.1は、ノックインコールオプションの権利行使の可否と利益の有無についての模式図として縦軸に株価、横軸に時間として株価推移例を示した図である。ここで、 $S_0$ は初期株価をあらわしている。

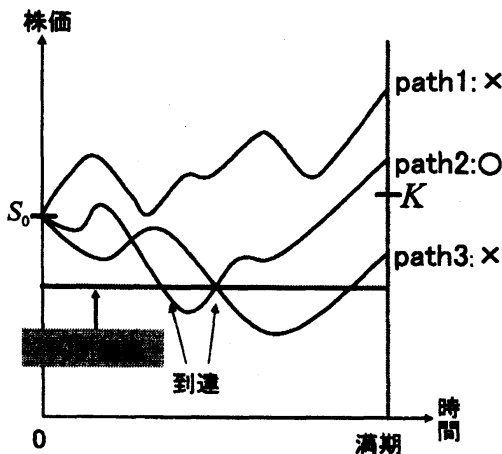


Fig.1: 株価推移と権利行使の模式図

path1: 満期時点における株価は権利行使価格より高いが、満期以前にバリアに到達していないので権利を行使できない。

path2: 満期時点における株価は権利行使価格より高く、バリアに到達しているので権利を行使して利益を得ることができる。

path3: 満期時点における株価は権利行使価格より低いいため、バリアに到達しているがオプションは権利を行使しても利益は得られない。

つまり、ヨーロピアンコールオプションは、満期 $t$ での株価 $S_t$ の権利行使価格 $K$ との高低、す

なわち、確率過程が生成する満期での株価の分布のみによって価格が決まるのに対し、ノックインコールオプションの場合、満期までの株価推移の影響も受けるので、満期で同じ分布を持ちヨーロピアンコールオプションに対しては同じ評価を与えるモデルであっても、モデルによってバリアに到達する可能性が異なれば価格も異なる。本研究では、DVモデルとSVモデルの相違によるノックインコールオプションの価格の違いを「モデルリスク」として捉え、この大きさやモデルのパラメータとの関連性などについて実証分析を行う。

## 2.2 インプライド・プロセスの導出

本節では、株価の推移を表現するために1期間に上昇、下降、無変動、いずれかの推移をする3項ツリーを構築し、次にその3項ツリーを用いてインプライド・プロセスを導出する。インプライド・プロセスとは、3項ツリーの各ノードに、 $t$ 時点を満期にもち、権利行使価格が $K$ であるヨーロピアンコールオプション価格 $C(t, K)$ を与えることで導き出されるプロセスである。

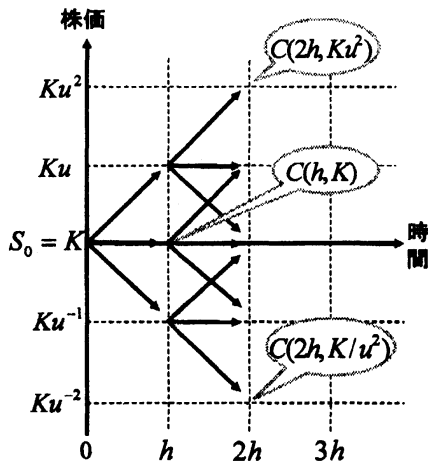


Fig.2: 3項ツリー

株価は  $K$  , 時間は  $T$  の集合を持つとし, 縦軸を株価, 横軸を時間とし 3 項ツリーを構築する. Fig.2 は 3 項ツリーの株価推移といくつかのノードにおけるヨーロピアンコールオプション  $C(t, K)$  の例を示したものである.

$$K = \{K : K = S_0 u^i, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

$$T = \{0, h, 2h, \dots, T\}$$

時間間隔  $h$  を 0, 上昇率  $u$  を 1 に近い値にすることで, この 3 項ツリーは連続の株価の推移を表現可能となる. ここで,  $K$  はヨーロピアンコールオプション  $C(t, K)$  の権利行使価格と 3 項ツリーでの株価としても用いている点にご注意いただきたい.

この 3 項ツリーを用いてインプライド・プロセスを導く. 各ノードにおけるヨーロピアンコールオプション価格  $C(t, K)$  には, 仮想的な価格ではなく,

現実のヨーロピアンコールオプションの価格を使用する. ここでは, 3 項のうち, 例として上昇の場合の推移確率を導く. ただし, 導くインプライド・プロセスは 2 期以前の株価の位置には影響されないものとし, リスク中立測度を前提とする. ヨーロピアンコールオプション価格  $C(t, K)$  を権利行使価格  $K$  で二回偏微分したもの  $(\partial^2 C(t, K) / \partial K^2)$  が, 時点  $t$  で株価  $S_t$  が  $K$  となる確率  $\Pr\{S_t = K\}$  と等しくなるという[1]で示されている結果を用いる.

$$(2-2-1) \quad \Pr\{S_t = K\} = \frac{C(t, Ku) - (1+u)C(t, K) + uC(t, K/u)}{K(u-1)} \equiv \pi(K; t)$$

式(2-2-1)を  $\pi(K; t)$  と置く. 次に, 時点  $t$  で株価  $S_t$  が  $K$  であり, 時点  $t+h$  で株価  $S_{t+h}$  が  $Ku$  となる同時上昇確率を導く. 現時点を 0 時点として, ヨーロピアンコールオプション  $C(t+h, K)$  を購入し, ヨーロピアンコールオプション  $C(t, K)$  を売却する取引を行うとそのコストは,  $C(t+h, K) - C(t, K)$  となる. 次に, 時点  $t$  から時点  $t+h$  までの株価の推移とその場合の利益を考えると, 株価  $S_t$  が  $K$  であるときは支払の義務は生じないが, 上昇して株価  $S_{t+h}$  が  $Ku$  となる場合には権利を行使し,  $Ku - K$  の利益を得られる. その他の株価の推移では利益は生じない. 支払ったコストと得られる利益の期待値が等しくなるように同時上昇確率を決めるので, 式(2-2-2)が成り立つ.

$$(2-2-2) \quad \Pr\{S_t = K \text{ and } S_{t+h} = Ku\} = \frac{C(t+h, K) - C(t, K)}{Ku - K}$$

同様にして, 下降, 無変動の場合に関する同時確率も求められ, 各推移確率は, 式(2-2-1), 式(2-2-2)を用いて, 次のように導出される.

$$(2-2-3) \quad \Pr\{S_{t+h} = K^* | S_t = K\} \\ = \frac{C(t+h, K) - C(t, K)}{C(t, Ku) - (1+u)C(t, K) + uC(t, K/u)} \quad \text{if } K^* = Ku \quad (\text{上昇}) \\ = u \frac{C(t+h, K) - C(t, K)}{C(t, Ku) - (1+u)C(t, K) + uC(t, K/u)} \quad \text{if } K^* = K/u \quad (\text{下降}) \\ = 1 - (1+u) \frac{C(t+h, K) - C(t, K)}{C(t, Ku) - (1+u)C(t, K) + uC(t, K/u)} \quad \text{if } K^* = K \quad (\text{無変動})$$

式(2-2-3)で表現されるこのプロセスは, 株価のプロセスがヨーロピアンコールオプション価格  $C(t, K)$  で表現されているので, 3 項ツリーに与えたヨーロピアンコールオプション価格  $C(t, K)$  に含まれているプロセスという意味合いからインプライド・プロセスと呼ぶ. このプロセスに, 先ほど紹介した DV モデルや SV

モデルといった確率過程をフィットさせ、適切な条件で3項ツリーを割り戻すことによって最終的にオプションの評価を行う。

### 2.3 採用するモデル

本節では、調整項を導入することによって、SV モデルを前節で求めたインプライド・プロセスに一致させる方法を示す。そして、一致させた SV モデルを用いてオプションを評価する計算アルゴリズムについて示す。最後に、SV に斉時的マルコフ過程を仮定してボラティリティ推移の枠組みを構築し、ボラティリティ状態遷移確率と定式化を行う。

$N$  個の異なった値を持つボラティリティの状態の集合  $Z = \{1, 3, \dots, N\}$ , ( $N = 2J + 1$ ) を考える。ボラティリティの推移に関しては時点  $t$  で状態  $j$ , 時点  $t+h$  で状態  $k$  となる推移確率  $p_{k,j}$  をもつ斉時的マルコフ過程を仮定する。その推移確率は、 $z_t$  を  $t$  時点のボラティリティの状態として、

$$(2-3-1) \quad \Pr[z_{t+h} = k | z_t = j] = p_{k,j} \quad (-J \leq j, k \leq J \text{ かつ } |k-j| \leq 1)$$

となる。安全利率  $r$  を 0 としているので、ボラティリティ項部分のモデルを決定すれば、ボラティリティ過程で株価の確率過程が表現できる。 $h$  を微小時間と考えて、式(2-3-2)と置くことができる。

$$(2-3-2) \quad \Pr\{S_{t+h} = Ku | S_t = K, z_t = j\} \equiv h\sigma(z_t)$$

しかし、式(2-3-2)の株価の上昇確率はボラティリティだけでなく株価  $K$  と時間  $t$  にも依存しているため、ボラティリティ過程をインプライド・プロセスに正確に一致させるために、調整項  $q(t, K)$  を用いる。

$$(2-3-3) \quad \Pr\{S_{t+h} = Ku | S_t = K, z_t = j\} = q(t, K)h\sigma(j)$$

DV モデルの場合は、ボラティリティの確率推移を加味しないので、

$$(2-3-4) \quad \Pr\{S_{t+h} = Ku | S_t = K\} = q(t, K)h\sigma$$

となる。式(2-3-4)の  $\sigma$  には、真ん中の状態 ( $j = 0$ ) のボラティリティを用いる。また、 $\pi(K; t)$  を  $t$  時点における株価  $S_t$  とボラティリティ状態  $z_t$  との同時確率として式(2-3-4)のように拡張する。

$$(2-3-5) \quad \pi(K, j; t) \equiv \Pr\{S_t = K \text{ and } z_t = j\}$$

式(2-3-5)を用いると式(2-3-6)が成り立つ。

$$(2-3-6) \quad \lambda(K; t)\pi(K; t) = q(t, K) \sum_{j=-J}^J \sigma(z_t = j)\pi(K, j; t)$$

ここで、 $\lambda(K; t)$  は式(2-2-3)右辺の上昇の場合を  $h$  で除したものとして定義される。調整項  $q(t, K)$  と  $\pi(K, z_t; t)$  は、以下の3段階のステップを踏み、それぞれのノードで導出される。

Step1: 初期ボラティリティ状態  $z_0$  を選び、 $\pi(S_0, z_0; 0) = 1$  とし、調整項  $q(0, S_0) = \lambda(S_0; 0) / \sigma(z_0)$  を求める。

Step2: 次時点の確率  $\pi(K, z_{t+h}; t+h)$  を以下のように計算する。

$$(2-3-7) \quad \pi(K, k; t+h) = \sum_{j=-J}^J p_{k,j} (A_j + B_j + C_j)$$

$$A_j \equiv hq(t, K/u)\sigma(j)\pi(K/u, j; t)$$

$$B_j \equiv uhq(t, Ku)\sigma(j)\pi(Ku, j; t)$$

$$C_j \equiv (1 - (u+1)hq(t, K))\sigma(j)\pi(K, j; t)$$

Step3: Step2 で求めた  $\pi(K, z_{t+h}; t+h)$  を用いて調整項  $q(t+h, K)$  を以下のように計算する。

$$(2-3-8) \quad q(t+h, K) = \frac{\lambda(K; t+h)\pi(K; t+h)}{\sum_{j=-J}^J \sigma(j)\pi(K, j; t+h)}$$

Step2, Step3 を繰り返し、各ノードにおける  $\pi(K, z_t; t)$  と  $q(t, K)$  を初期時点 0 から終時点  $T$  まで算出する。それらを用いて、各ノードのオプション価値  $V(K, z_{t-h}; t-h)$  を終時点  $T$  から初期時点 0 まで式(2-3-9)を用いて算出する。

$$(2-3-9) \quad V(K, k; t-h) = \sum_{j=-J}^J p_{j,k} (D_j + E_j + F_j)$$

$$D_j \equiv hq(t-h, K)\sigma(k)V(Ku, j; t)$$

$$E_j \equiv uhq(t-h, K)\sigma(k)V(K/u, j; t)$$

$$F_j \equiv (1-(u+1)hq(t-h, K)\sigma(k))V(K, j; t)$$

本研究で用いる SV モデルは式(2-1-2)で与えるが、簡便のために、SV モデルの株価過程とボラティリティ過程は独立であると仮定する。ボラティリティとその状態遷移確率をそれぞれ、

$$(2-3-10) \quad \sigma(z_t) = \exp\left(\alpha + \frac{\gamma}{\sqrt{\kappa J}} z_t\right)$$

$$(2-3-11) \quad p_{k,j} = \begin{cases} \frac{1}{2}\kappa h(J-j) & \text{if } k = j+1 \\ 1 - \kappa h J & \text{if } k = j \\ \frac{1}{2}\kappa h(J+j) & \text{if } k = j-1 \end{cases}$$

と置くことで、このボラティリティ過程は以下の 3 つの特徴を持つ。

(I) 1 期間のボラティリティの状態遷移は、上状態へ遷移、下状態へ遷移、状態維持の 3 通りである。

(II) 平均回帰の性質を持つ。

$$(2-3-12) \quad E[\ln \sigma_{t+1} - \ln \sigma_t] = -\kappa(\ln \sigma_t - \alpha)h$$

(III) 一定の 2 次モーメントを持つ。

$$(2-3-13) \quad E[(\ln \sigma_{t+1} - \ln \sigma_t)^2] = \gamma^2 h$$

これらの 3 つの特徴によりこの過程は、ボラティリティの対数が平均回帰する。

### 3. 実証分析

#### 3.1 ボラティリティ過程パラメータ推定

式(2-3-10)、式(2-3-11)で用いられているパラメータ  $\kappa, \alpha, \gamma$  を推定する際には、[4]にある下記のモーメント条件を利用した。

$$(3-1-1) \quad x_t \equiv d \ln S_t - \hat{\mu}$$

$$(3-1-2) \quad E(x_t^2) = \exp\left\{2\alpha + 2\left(\frac{\gamma^2}{1-(1-\kappa)^2}\right)\right\}$$

$$(3-1-3) \quad E(x_t^4) = 3 \exp\left\{4\alpha + 8\left(\frac{\gamma^2}{1-(1-\kappa)^2}\right)\right\}$$

$$(3-1-4) \quad \text{Cov}(\ln |x_t|, \ln |x_{t-1}|) = (1-\kappa)\left(\frac{\gamma^2}{1-(1-\kappa)^2}\right)$$

$\hat{\mu}$  は  $d \ln S_t$  の平均値である。現実の株価データを用いて、 $x_t$  の 2 次モーメント式(3-1-2)、4 次モーメント式(3-1-3)、自己共分散式(3-1-4)それぞれ算出し、3 連立方程式を解き、 $\kappa, \alpha, \gamma$  を求める。

#### 3.2 数値設定とデータ設定

##### ○数値設定

3 項ツリーの時間系列  $\mathbf{T}$  の数は 200 個とし、その時間間隔  $h=0.44$ (日)、株価の上昇率  $u=1.05$  として、3 項ツリーを構築する。また推移するボラティリティの状態  $N$  は 5 状態  $j=-2, -1, 0, 1, 2$  を仮定する。評価対象とするオプションは満期 90 日、権利行使価格は初期株価  $S_0 = K$  と等しいノックインコールオプションであり、バリアは  $K/u$ 、 $K/u^2$  をそれぞれバリア 1、バリア 2 として 2 種類設定する。

## ○データ

実証分析に用いたオプション価格データは、2003年5月から2006年6月の毎月第2水曜日の日経225 オプションデータである。また、パラメータ推定に用いた株価データは、2002年5月から2006年6月の日経225 株価データを用い、パラメータ推定期間を1年とする。Fig.3 には、日経225 株価の日次の終値の推移を示した。

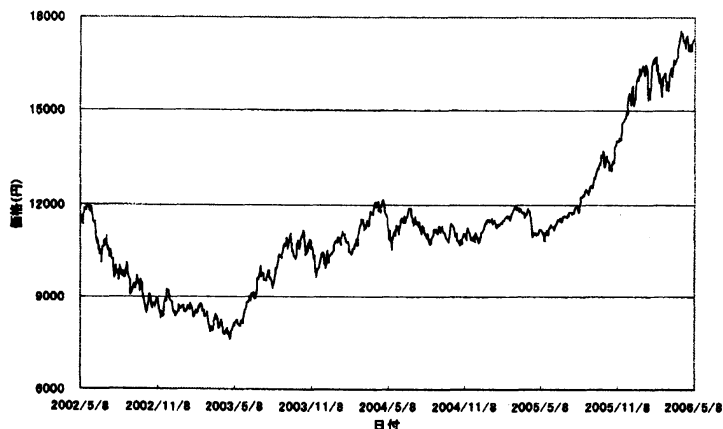
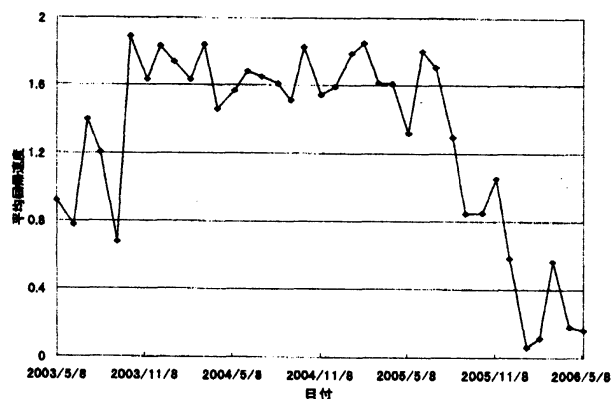


Fig.3: 日経225 株価推移

## 3.3 分析結果と考察

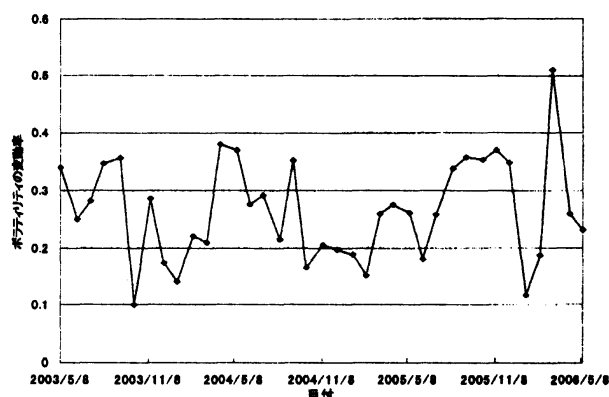
Fig.4: 平均回帰速度  $\kappa$ 

<平均回帰速度  $\kappa$  : Fig.3, Fig.4 参照>

Fig.4 ではボラティリティの平均回帰速度  $\kappa$  の月毎の推移を、横軸に時間、縦軸に回帰速度として表したグラフである。日経225 株価の推移と照らし合わせてみると、推定期間に変動局面(上昇局面と下降局面)が長く含まれている場合、回帰速度が低くなっていることがわかる。日経225 株価が大きく分けて、変動局面⇒安定局面⇒変動局面と変化するのに対応するように回帰速度もまた、低⇒高⇒低の順に推移している。

<ボラティリティの変動率  $\gamma$  : Fig.3, Fig.5 参照>

Fig.5 では、ボラティリティの変動率  $\gamma$  の月毎の推移を、横軸に時間、縦軸にボラティリティの変動率として表したグラフである。Fig.3 と Fig.5 を対照すると、ボラティリティの変動率は、株価の局面よりも株価の微少時間の変動の激しさの影響を受けると考えられる。例えば、2004年5月は約0.35と高い値を示している。この推定期間の株価推移を見てみると、微少期間に株価が大きく上下していることがわかる。逆に2006年2月付近では0.1程度の低い変動率を表しており、その推定期間では、株価は上昇局面であるものの微少時間に大きな上下はしていない。このように、変動・安定局面に関わらず株価が微少時間に大きく上下する場合、その期間におけるボラティリティの変動率も高くなり、逆にあまり上下しない期間で

Fig.5: ボラティリティの変動率  $\gamma$

は低くなっていることがわかる。

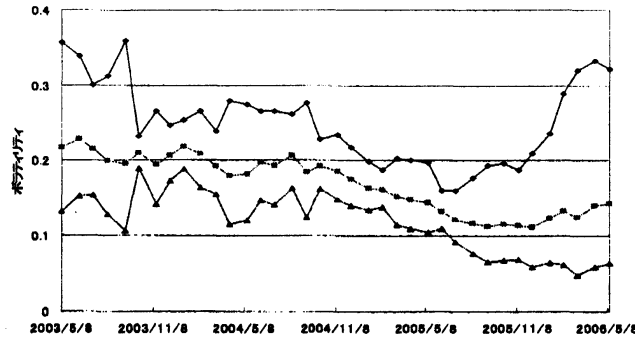


Fig.6: ボラティリティ $\sigma$

〈ボラティリティの状態とその値: Fig.4, Fig.5, Fig.6 参照〉

Fig.6 では、5 状態のボラティリティのうちの 3 つの状態の月毎の推移を表している。上の線は最も高い状態のボラティリティ( $j = 2$ )、中央の線は中心となる状態のボラティリティ( $j = 0$ )、下の線は最も低い状態のボラティリティ( $j = -2$ )の推移である。これを見ると、最初の半年と、最後の半年が 3 つのボラティリティの差が大きくなっており、それ以外の期間では、差幅に大きな変動は見られない。これを回帰速度  $\kappa$  とボラティリティの変動率  $\gamma$  を照らし合わせ、最初と最後の半年を見てみると、大まかに回帰速度は低くなっており、またボラティリティの変動率は高くなっている。従って、ボラティリティを回帰させる力  $\kappa$  が弱く、ボラティリティの変動  $\gamma$  が大きいため、Fig.6 のように 3 つのボラティリティの状態に大きな差が見られたと考えられる。逆に、回帰速度が高く、ボラティリティの変動率が低い期間では、差は小さくなっている。

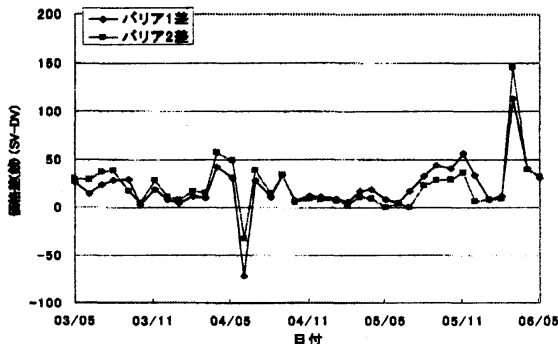


Fig.7: ノックインバリア価格差 (SV-DV)

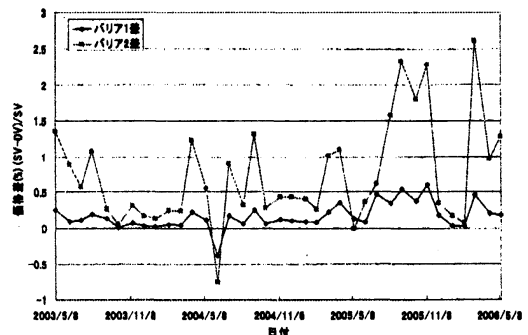


Fig.8: ノックインバリア価格差割合 (SV-DV)/SV

〈バリアオプションの価格差と価格差割合: Fig.6, Fig.7, Fig.8 参照〉

Fig.7 は SV モデルと DV モデルで導出されたノックインコールオプションの価格差(SV-DV)である。差は平均で 30 銭程度である。ボラティリティが高い状態にも遷移する SV モデルの方がバリアに到達する可能性が高いため、ほぼ全ての結果で、SV モデルの方が高く価格付けされている。Fig.7 の価格差を、SV モデルを用いたノックインバリアオプション価格で割ったものが Fig.8 である。これと先ほどの Fig.6 の 3 つの状態のボラティリティの推移を見ると、3 状態のボラティリティの差が大きい部分で概ね差の割合が大きくなっていることがわかる。これは、3 つの状態の差が大きくなるほど、SV モデルが価格に与える影響が強くなるため、高く価格付けしていると考えられる。

また、バリア 2 の方がバリア 1 に比べて価格差割合が概ね大きくなっている。これは、初期株価  $S_0$  とバリアの差が小さい場合、ボラティリティが大きい値に遷移しなくてもバリアに到達できる可能性がほとんど変わらないため大きな差にはならない。しかし、初期株価  $S_0$  とバリアの差が大きくなると、高い状態へのボラティリティの遷移がなければ到達可能性が低くなってしまいうため、高いボラティリティ状態へ遷移する SV モデルの方がより割高になったと考えられる。実証分析期間において大きいところでは 2% 以上の価格差が生じた。オプションは大量に取引されるためモデルによる数%の理論価格の差が投資家の利益に大

大きく影響することを考慮すると、大きなモデルリスクの存在を確認することが出来たと言える。

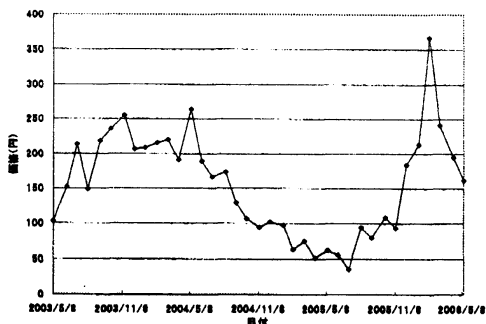


Fig.9: バリア 1 価格

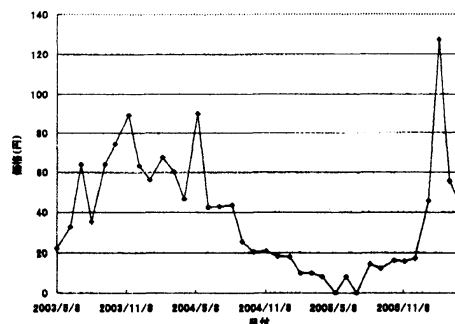


Fig.10: バリア 2 価格

〈ノックインバリアオプションの価格: Fig.9, Fig.10 参照〉

Fig.9 ではバリア 1 の場合, Fig.10 ではバリア 2 の場合の SV モデルで導出したノックインバリアオプションの価格を示した。バリア 2 の方が価格は低くなっている。これは、バリアが初期株価から遠い位置に設定されている方が、バリアへの到達の可能性がより難しいためである。また、価格に対する変動の割合はバリア 2 の方が大きくなっている。これは、先に述べたバリアと初期株価の差幅から生じるものであると考えられ、バリア 1 の場合は各ボラティリティ状態のボラティリティ値が小さくても、バリアに到達する可能性は高い。しかし、バリア 2 ではボラティリティが高い値を持つ状態へ推移しなければ到達が難しいため、ボラティリティ値の範囲が大きいところで到達可能性が上がるので価格が大きく変動している。

#### 4. まとめと結語

現実の株式オプション価格データを用いて、3 項ツリーで表現されるインプライド・プロセス(オプション価格に織り込まれる株価の推移確率)を導出した。次に、実際の株価時系列データに基づいて、株価プロセスモデルのパラメータ推定を行った。これらの情報から、リスク中立確率の下で株価過程が SV モデルや DV モデルに従う場合に、これらをインプライド確率の下での株価過程へと変換するための調整項を求めたうえで、両モデルに基づくノックインコールオプションの評価を行った。

分析結果は、ボラティリティ過程の平均回帰速度  $\kappa$  が低く、変動率  $\gamma$  が大きい場合に、Fig.6 で示したように、モデルが推移するボラティリティの範囲が大きくなるため、DV モデルと SV モデルそれぞれに基づくノックインコールオプション価格の差が大きくなり、大きなモデルリスクの存在を確認することができた。

今後の課題として、上昇率  $u$  と微小時間間隔  $h$  をより連続に近い値を与えて分析することや、他種類のオプションに関するモデルリスクの検証、パラメータ推定法の工夫、株価過程とボラティリティ過程に相関を考慮して検証すること、などが挙げられる。

#### 参考文献

- [1] Breeden, D. and R. H. Litzenberger., "State contingent prices implicit in option prices.", *Journal of Business* 51, (1987), 163-180.
- [2] Dupire, B., "Pricing with a smile.", *RISK* 7, (1994), 18-20.
- [3] Mark, B. J. and A. Neuberger., "Option prices, implied price process, and stochastic volatility.", *Journal of Finance* 2, (2000), 839-866.
- [4] Louis, O. S., "Option pricing when the variance changes randomly: Theory, estimation, and an application.", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, (1987), 419-438.
- [5] Wiggins, J., "Option values under stochastic volatility: Theory and empirical estimates.", *Journal of Financial Economics* 19, (1987), 351-372.
- [6] Miyazaki, K., "証券分析への招待, (株)サイエンティスト社.", 2005.