数理解析研究所講究録
第 1549 巻 2007 年 64-70

多重ゼータ値の duality のシャッフル関係式による導出

九州大学大学院数理学府　梶川　純 (Jun Kajikawa)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

Abstract

多重ゼータ値 (*multiple zeta value*, MZVs)

$$\zeta(k_1,\ldots,k_n):=\sum_{m_1>\cdots>m_n}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

は ($\zeta(2,1)=\zeta(3)$ で始まる) 様々な恒等式を満たし, それら全てを理解することは大きな挑戦である. その 1 つのアプローチとして, Hoffman[H] により着手されている, 非可換多項式環 $\mathfrak{h}=\mathbb{Q}\langle x,y\rangle$ の単項式 $x^{k_1-1}y\cdots x^{k_n-1}y$ を index $(k_1,\ldots,k_n)$ に符号化する手法がある. $\mathfrak{h}^0$ を 1 と x で始まり y で終わる単項式で生成される $\mathfrak{h}$ の部分環とする. $\mathbb{Q}$-線形関数 $Z:\mathfrak{h}^0\to\mathbb{R}$ を $1\mapsto 1$, $x^{k_1-1}y\cdots x^{k_n-1}y\mapsto\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ で定義すれば, MZVs の恒等式の問題は Z の kernel を特徴付ける問題になる. $\mathfrak{h}^0$ には Z を homomorphism にする 2 つの可換積 $ш, *$(Hoffman[H]) が存在し, [IKZ] において, MZVs の全ての恒等式はこれら 2 つの積の言葉 (“*extended double shuffle relations*”, EDSR) で書けるだろうと予想されている (§2 で詳しく解説する). 例えば, “*sum formula*” や “*Ohno relation*” の “*duality*” を除いたもの等は具体的な表記がなされている. しかし, *duality* に関してはまだ表記がされていない. 今回の報告集では, *weight, depth, height* をとめた *duality* の和に関する表記を述べる.

1 Introduction

多重ゼータ値 (MZVs) $\zeta(k_1,\ldots,k_n)$ を正の整数 $k_1,\ldots,k_n, k_1\geq 2$ に対して,

$$\zeta(k_1,\ldots,k_n)=\sum_{m_1>\cdots>m_n>0}\frac{1}{m_1^{k_1}\cdots m_n^{k_n}}$$

で定義する. *weight, depth, height* をそれぞれ index の和 $k_1+\cdots+k_n$, index の個数 n, 2 以上の index の個数 $\sharp\{i\mid k_i\geq 2\}$ とする. このとき, MZVs は次のような反復積分表示を持つ;

$$\zeta(k_1,\ldots,k_n)=\int\cdots\int_{1>t_1>\cdots>t_k>0}\omega_1(t_1)\cdots\omega_k(t_k),\tag{1}$$

ここで $k = k_1 + \cdots + k_n$ は weight とし, $i \in \{k_1, k_1 + k_2, \ldots, k_1 + \cdots + k_n\}$ なら $\omega_i(t) = dt/(1-t)$, それ以外は $\omega_i(t) = dt/t$ とする. 任意の整数 $s \geq 1$, $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_s, b_s \geq 1$ に対し,

$$\boldsymbol{k} = (a_1+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_1-1}, a_2+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_2-1}, \ldots, a_s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{b_s-1}),$$

の "*dual*" index を

$$\boldsymbol{k}' = (b_s+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_s-1}, b_{s-1}+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_{s-1}-1}, \ldots, b_1+1, \underbrace{1, \ldots, 1}_{a_1-1})$$

と定義する. (1) において $t_i = 1 - t'_{k-i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と変数変換すれば, dual index に対応する 2 つの MZVs は等しいことが証明できる;

$$\zeta(\boldsymbol{k}) = \zeta(\boldsymbol{k}').$$

この恒等式を "*duality*" と呼ぶ.

他方, *extended double shuffle relations*(EDSR) と呼ばれる関係が存在する. 非可換多項式環 $\mathfrak{h} = \mathbb{Q}\langle x, y\rangle$, その部分環 $\mathfrak{h}^0$ を 1 と x で始まり y で終わる単項式で生成される $\mathfrak{h}$ の部分環とする. Hoffman[H] の手法に従い, MZVs を "*harmonic*" 積 $*$ と "*shuffle*" 積 ш に関して homomorphism となる $\mathbb{Q}$-線形写像 $Z : \mathfrak{h}^0 \to \mathbb{R}$ の値とみなす. 1 と y で終わる単項式で生成される $\mathfrak{h}$ の部分環を $\mathfrak{h}^1 = \mathbb{Q} + \mathfrak{h}y$ とし, $\mathfrak{h}^1$ は $\mathfrak{h}^0[y]$ と同型であることを用いて homomorphism Z を $\mathfrak{h}^1$ まで拡張すれば, EDSR が得られる (§2 で詳しい解説をする).

[IKZ] において, MZVs の全恒等式は EDSR の線形結合から示せるだろうと予想されている. 今回はその中でも, weight, depth, height をとめた duality の和を EDSR の線形結合から示す (§4).

概略は以下の通り. §2 では, EDSR の解説をする. §3 では, 写像をいくつか定義し, [IKZ] の事実との関連について解説する. §4 では, §3 で定義した写像を用いて, 今回の主結果と証明を与える. 主結果は, depth, height をとめ, weight で和をとった duality は EDSR の線形結合によって与えられることを示している. 両辺斉次部分を抜き出すことによって, weight もとめた duality の和は EDSR の線形結合によって与えられることが示される.

2 Algebraic Setup and double shuffle relation

2 つの MZVs の積は, 定義の級数表示と反復積分表示の 2 通りの積がある. Hoffman[H] に従って, これらの積のルールを記述する. $\mathfrak{h}$ を $\mathbb{Q}$ 係数 x, y 変数の非可換多項式環とし, その部分環 $\mathfrak{h}^1 = \mathbb{Q} + \mathfrak{h}y$, $\mathfrak{h}^0 = \mathbb{Q} + x\mathfrak{h}y$ とする. $\mathbb{Q}$-線形関数 $Z : \mathfrak{h}^0 \to \mathbb{R}$ を

$$Z(1) = 1,$$
$$Z(x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y) = \zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

で定義する. $\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ の weight, depth はそれぞれ単項式 $x^{k_1-1}yx^{k_2-1}y\cdots x^{k_n-1}y$ の次数, y の次数に対応する.

τ を $\mathfrak{h}$ 上の x と y を入れ換える anti-automorphism とする. τ は $\mathfrak{h}^0$ を保つことを注意しておく. このとき duality は次のように述べられる; 任意の $w\in\mathfrak{h}^0$ に対して,

$$Z(w_0)-Z(\tau(w_0))=0.$$

例えば, height 1 の duality は, 任意の整数 $m,n\geq 0$ に対して

$$Z(x^{m+1}y^{n+1})-Z(x^{n+1}y^{m+1})=0$$

となる.

任意の整数 $k\geq 1$ に対し, $z_k=x^{k-1}y$ とおく. このとき, $\mathfrak{h}^1$ は z_k によって free に生成される. $\mathfrak{h}^1$ 上に "*harmonic*" 積 $*$ を, 帰納的に

$$\begin{aligned}&1*w=w*1=w,\\&z_kw_1*z_lw_2=z_k(w_1*z_lw_2)+z_l(z_kw_1*w_2)+z_{k+l}(w_1*w_2)\end{aligned}$$

$(k,l\geq 1,\ w,w_1,w_2\in\mathfrak{h}^1)$ で定義し, $\mathbb{Q}$-bilinear に拡張する. Hoffman[H] により, $\mathfrak{h}^1$ は $*$-積に関して可換な algebra をなし (これを $\mathfrak{h}^1_*$ と書く), $\mathfrak{h}^0$ は $\mathfrak{h}^1_*$ の subalgebra をなす (これを $\mathfrak{h}^0_*$ と書く). 級数表示の積のルールにより, $\mathbb{Q}$-線形関数 $Z:\mathfrak{h}^0\to\mathbb{R}$ は $*$-積に関して algebra homomorphism となる; $w_1,w_2\in\mathfrak{h}^0$ に対して,

$$Z(w_1*w_2)=Z(w_1)Z(w_2). \tag{2}$$

他方, 反復積分表示の積のルールに対応する積は普通の "*shuffle*" 積で, 記号 ш を用いて表す. この積は $\mathfrak{h}$ 上帰納的に

$$\begin{aligned}&1 ш w=w ш 1=w,\\&uw_1 ш vw_2=u(w_1 ш vw_2)+v(uw_1 ш w_2),\end{aligned}$$

$(w,w_1,w_2\in\mathfrak{h},\ u,v=x\ \text{or}\ y)$ で定義でき, $\mathbb{Q}$-bilinear に拡張する. この積により $\mathfrak{h}$ は可換な algebra をなし, $\mathfrak{h}^1$ と $\mathfrak{h}^0$ は $\mathfrak{h}$ の subalgebra をなす (これらを $\mathfrak{h}_ш$, $\mathfrak{h}^1_ш$, $\mathfrak{h}^0_ш$ と書く). $\mathbb{Q}$-線形関数 $Z:\mathfrak{h}^0\to\mathbb{R}$ は ш-積に関しても algebra homomorphism となる; $w_1,w_2\in\mathfrak{h}^0$ に対して,

$$Z(w_1 ш w_2)=Z(w_1)Z(w_2). \tag{3}$$

(2), (3) より, "*double shuffle relation*" を得る;

$$Z(w_1*w_2)=Z(w_1)Z(w_2)=Z(w_1 ш w_2).$$

[H, IKZ] などにより,

$$\mathfrak{h}^1_ш\simeq\mathfrak{h}^0_ш[y],\ \mathfrak{h}^1_*\simeq\mathfrak{h}^0_*[y]$$

であることが知られている. さらに詳しく言えば,

$$Z^*:\mathfrak{h}^1_*\to\mathfrak{h}^0_*[T],\ Z^ш:\mathfrak{h}^1_ш\to\mathfrak{h}^0_ш[T]$$

かつ $y\mapsto T$ を満たす $*$, ш-algebra homomorphism Z^*, $Z^ш$ が一意に存在する. ここで $\mathrm{reg}_ш:\mathfrak{h}^1\to\mathfrak{h}^0$ を, $Z^ш$ の定数項を抜き出す写像と定義する (i.e. $\mathrm{reg}_ш=Z^ш|_{T=0}$). このとき [IKZ] において "*extended double shuffle relation*" は次のようになる.

Proposition (extended double shuffle relation). $w_0 \in \mathfrak{h}^0$, $w_1 \in \mathfrak{h}^1$ に対して,

$$\mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш\, w_0 - w_1 * w_0) \in \ker\ Z.$$

ker Z は線形空間として

$$\langle \mathrm{reg}_{ш}(w_1 ш\, w_0 - w_1 * w_0) | w_0 \in \mathfrak{h}^0, w_1 \in \mathfrak{h}^1 \rangle_{\mathbb{Q}} \tag{4}$$

と等しいと予想されている ([IKZ]). これは, MZVs の全線形関係は EDSR のある線形結合をもって示せる, ということを述べている. §4 において, weight, depth, height をとめた duality の和は (4) に含まれることを示す.

3 Preparations for Main Theorem

Main Theorem を与える前に, いくつか [IKZ] の事実を述べておく. 任意の整数 $l \geq 0$ に対し, $\mathfrak{h}^0$ 上の写像 θ_l を,

$$\theta_0 = \mathrm{id},$$
$$\theta_l(w_0) = (-1)^l \mathrm{reg}_{ш}(y^l * w_0) \quad (l \geq 1, w_0 \in \mathfrak{h}^0)$$

で定義し, $\Theta = \sum_{l \geq 0} \theta_l$ とおく. $\theta_l(w_0)$ $(l \geq 1)$ は EDSR の 1 つであり, Θ は θ_l が次数を保つことより $\widehat{\mathfrak{h}}^0$ ($\mathfrak{h}^0$ の次数の完備化) 上の写像である. $\mathfrak{h}$ に変数 u を添加したベキ級数環 $\mathfrak{h}[[u]]$ 上の automorphism Δ_u を, 生成元の像

$$\Delta_u(u) = u,\ \Delta_u(x) = x(1-yu)^{-1},\ \Delta_u(y) = (1-xu-yu)(1-yu)^{-1}y$$

で定義する. 逆写像 Δ_u^{-1} の像は

$$\Delta_u^{-1}(u) = u,\ \Delta_u^{-1}(x) = x(1-xu)^{-1}(1-xu-yu),\ \Delta_u^{-1}(y) = (1-xu)^{-1}y \tag{5}$$

で定まる. [IKZ] では u を $-u$ に置き換えた形を定義としているが, ここでは井原健太郎氏の報告原稿に合わせて記述していることを注意しておく. このとき, 井原氏の報告原稿 Theorem 2 の証明にあらわれる式より, 任意の $w_0 \in \mathfrak{h}^0$ に対し

$$(\Delta_{-u} - 1)(w_0) = \mathrm{reg}_{ш}\left(\frac{1}{1-yu} * w_0 - \frac{1}{1-yu} ш\, w_0\right)$$

である. これより

$$\Delta_u = \sum_{l=0}^{\infty} \theta_l u^l \tag{6}$$

を得る. $u = 1$ とおけば $\Delta_1 = \Theta$ on $\widehat{\mathfrak{h}}^0$ であり, Θ は $\widehat{\mathfrak{h}}$ 上の automorphism にのばせて,

$$\Theta(x) = x\frac{1}{1-y},\ \Theta(y) = y - x\frac{y}{1-y},$$

特に

$$\Theta\left(x - \frac{x}{1-x}y\right) = x,\ \Theta\left(\frac{x}{1-x}y\right) = x\frac{y}{1-y}. \tag{7}$$

であることがわかる.

4 Main Result

Main Theorem . 任意の整数 $n \geq s \geq 1$ に対して, 次が成り立つ;

$$(\tau-1)\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n\\ k_1,\ldots,k_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j}\right)=\Theta(P_s(n))-\sum_{l=0}^{n-s}\theta_l(P_s(n-l)).$$

但し,

$$P_s(m)=\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=m\\ i_1,\ldots,i_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)^{i_j-1}\frac{x}{1-x}y\right\}$$

とし, Θ, θ_l は自然に $\widehat{\mathfrak{h}}^0$ までのばし, $\prod$ は添え字の小さいものから順に右からかけるものとする.

Remark . 両辺斉次成分を比較することによって, weight, depth, height をとめた duality の和を, EDSR の線形結合として得ることができる.

<u>ex</u> $n=2$, $s=1$ の場合:

$$x^2\frac{y}{1-y}-\frac{x}{1-x}y^2=(\Theta-1)\left(\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)\frac{x}{1-x}y\right)-\theta_1\left(\frac{x}{1-x}y\right),$$

$$\begin{aligned}
x^2y-xy^2&=-\theta_1(xy)\longrightarrow\zeta(3)-\zeta(2,1)=0,\\
x^2y^2-x^2y^2&=\theta_1(x^2y)-\theta_1(x^2y)=0,\\
x^2y^3-x^3y^2&=\theta_1(x^3y)+\theta_2(x^2y)-\theta_1(xyxy)-\theta_1(x^3y)=\theta_2(x^2y)-\theta_1(xyxy)\\
&\longrightarrow\zeta(3,1,1)-\zeta(4,1)=0,\\
&\vdots
\end{aligned}$$

(Proof) (7) より,

$$\tau\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n\\ k_1,\ldots,k_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j}\right)=\Theta(P_s(n))$$

がわかる. 従って

$$\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n\\ k_1,\ldots,k_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j}\right)=\sum_{l=0}^{n-s}\theta_l(P_s(n-l))$$

を示せばよい. 両辺 u^{n-s} をかけて $\sum_{n\geq s}$ とって母関数を作ると, 左辺は

$$\sum_{n\geq s}\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n\\ k_1,\ldots,k_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j}\right)u^{n-s}=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n+s\\ k_1,\ldots,k_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j}\right)u^{n}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_s=n\\ k_1,\ldots,k_s\geq 0}}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y^{k_j+1}\right)u^{n}=\sum_{k_1,\ldots,k_s\geq 0}\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}y(yu)^{k_j}$$

$$=\prod_{j=1}^{s}\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-yu}=\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-yu}\right)^{s}$$

となり, 右辺は (6) より

$$\sum_{n\geq s}\sum_{l=0}^{n-s}\theta_l\left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n-l\\ i_1,\ldots,i_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)^{i_j-1}\frac{x}{1-x}y\right\}\right)u^{n-s}$$

$$=\sum_{n\geq 0}\sum_{l=0}^{n}\theta_l\left(\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n+s-l\\ i_1,\ldots,i_s\geq 1}}\prod_{j=1}^{s}\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)^{i_j-1}\frac{x}{1-x}y\right\}\right)u^{n}$$

$$=\sum_{l\geq 0}\theta_l\left(\sum_{n\geq l}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n-l\\ i_1,\ldots,i_s\geq 0}}\prod_{j=1}^{s}\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)^{i_j}\frac{x}{1-x}y\right\}\right)u^{n}$$

$$=\sum_{l\geq 0}\theta_l\left(\sum_{n\geq 0}\sum_{\substack{i_1+\cdots+i_s=n\\ i_1,\ldots,i_s\geq 0}}\prod_{j=1}^{s}\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)^{i_j}\frac{x}{1-x}y\right\}\right)u^{n+l}$$

$$=\left(\sum_{l\geq 0}\theta_l u^l\right)\left(\sum_{i_1,\ldots,i_s\geq 0}\prod_{j=1}^{s}\left[\left\{\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)u\right\}^{i_j}\frac{x}{1-x}y\right]\right)$$

$$=\Delta_u\left(\prod_{j=1}^{s}\left\{\frac{1}{1-\left(x-\frac{x}{1-x}y\right)u}\frac{x}{1-x}y\right\}\right)=\Delta_u\left(\frac{1}{1-x-x(1-x-y)u}xy\right)^{s}$$

となる. 従って,

$$\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-yu}=\Delta_u\left(\frac{1}{1-x-x(1-x-y)u}xy\right)$$

を示せばよく, これは (5) を用いて $\Delta_u^{-1}\left(\frac{x}{1-x}\frac{y}{1-yu}\right)$ を計算すれば簡単に確かめることができる. □

Acknowledgement

最後になりましたが，今回発表の機会を与えてくださいました，近畿大学の大野泰生先生に，この場をお借りして，心より感謝申し上げます．

References

[H] M. Hoffman, The algebra of multiple harmonic series, *J. Algebra* **194** (1997), 477–495.

[HO] M. Hoffman and Y.Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra* **262** (2003), 332–347.

[IKZ] K. Ihara, M. Kaneko and D. Zagier, Derivation and double shuffle relations for multiple zeta values, *preprint* (2004), *Max-Planck-Institut für Mathematik preprint series* 2004-100.

[O] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values, *J. Number theory* **74** (1999), 39–43.

[OZ] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Mathem., N.S.* **12**(4) (2001), 483–487.